XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

WYZNACZANIE ZASIĘGU ZBIORU OSIĄGALNOŚCI DWUWYMIAROWEGO CIĄGŁO-DYSKRETNEGO UKŁADU LINIOWEGO Z NIEPEWNOŚCIĄ TYPU ELIPSOIDALNEGO

Ewa KRASOŃ

Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych, Wydział Lotnictwa
08-521 Dęblin, e-mail: ekras7@wp.pl

Streszczenie: Przedmiotem rozważań jest wybrany model dwuwymiarowego, ciągło-dyskretnego układu liniowego, w którym warunki brzegowe oraz wejścia nie są znane. Dane są jedynie elipsoidalne zbiory ograniczające w odpowiednich przestrzeniach. W niniejszej pracy przedstawiona została metoda określania zasięgu zbioru osiągalności badanego układu w zadanym kierunku przestrzeni, sprowadzająca się do obliczenia wartości funkcjonału podpierającego ten zbiór dla wektora, który wyznacza zadany kierunek.

Słowa kluczowe: Dwuwymiarowy ciągło-dyskretny układ liniowy, zbiór osiągalności, funkcjonał podpierający.

1. WPROWADZENIE

Różne modele dwuwymiarowych, ciągło-dyskretnych, liniowych układów sterowania były przedmiotem badań Kaczorka, Klamki, Kurka, Owensa, Rogersa, Gałkowskiego, Gramackich, Dymkova, Gaishuna i innych. Rozpatrywane były problemy takie jak: postaci rozwiązań, osiągalność, sterowalność, stabilność, sterowanie z minimalną energią, analiza numeryczna układów.

Tematem poniższej pracy jest wyznaczanie zasięgu zbioru osiągalności wybranego, dwuwymiarowego, ciągło-dyskretnego układu liniowego, w którym warunki brzegowe oraz wejścia (zakłócenia) nie są znane. Dane są jedynie zbiory ograniczające, mające postać wielowymiarowych elipsoid w odpowiednich przestrzeniach. Opisywana metoda opiera się na przedstawionym w [3] opisie zbioru osiągalności układu przy pomocy funkcjonału podpierającego, który pozwala określić zasięg tego zbioru w zadanym kierunku przestrzeni oraz napisać równanie hiperpłaszczyzny podpierającej. Pod pojęciem „zasięg w danym kierunku" rozumie się tu odległość odpowiedniej hiperpłaszczyzny podpierającej zbiór osiągalności od początku układu współrzędnych w rozważanej przestrzeni. Zadając w przestrzeni dowolnie gęstą „siatkę kierunków" można wyznaczyć „wielościan", ograniczający, którego ścianami będą hiperpłaszczyzny podpierające zbiór osiągalności badanego układu.

2. Opis układu

Rozważa się dwuwymiarowy, ciągło-dyskretny układ liniowy, opisany równaniem

$$\dot{x}(t,k+1) = A\,x(t,k+1) + B\,x(t,k) + D\,w(t,k) \tag{1}$$

$$t \in R_+ ,\ k \in Z_+$$

gdzie

$x(t,k) \in R^n$ jest wektorem stanu, $\dot{x}(t,k) = \dfrac{\partial x(t,k)}{\partial t}$;

$w(t,k) \in R^q$ oznacza wejście układu (zakłócenie), którego dokładna wartość nie jest znana. Dany jest jedynie wypukły zbiór W taki, że $w(t,k) \in W$;

$A, B \in R^{n \times n}$ i $D \in R^{n \times q}$ są macierzami o elementach rzeczywistych;

R_+ i Z_+ oznaczają zbiory nieujemnych liczb rzeczywistych i nieujemnych liczb całkowitych.

Warunki brzegowe dla układu (1) mają postać

$$x(t,0) = x_1(t),\ t \in R_+ \quad \text{i} \quad x(0,k) = x_2(k),\ k \in Z_+ \tag{2}$$

lecz funkcje $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nie są znane. Informacja o nich ogranicza się do znajomości wypukłych zbiorów $X_1, X_2 \subset R^n$ takich, że $x_1(t) \in X_1$ $(t \geq 0)$ oraz $x_2(k) \in X_2$ $(k \rangle 0)$.

Przyjmuje się, że:

- zbiory X_1, X_2 są n – wymiarowymi elipsoidami

$$X_1 = \left\{ x_1 \in R^n : \left(x_1 - x_1^c\right)^T E_1^{-1} \left(x_1 - x_1^c\right) \leq 1 \right\} \tag{3}$$

$$X_2 = \left\{ x_2 \in R^n : \left(x_2 - x_2^c\right)^T E_2^{-1} \left(x_2 - x_2^c\right) \leq 1 \right\} \tag{4}$$

o środkach x_1^c, x_2^c i symetrycznych, dodatnio-określonych macierzach E_1, $E_2 \in R^{n \times n}$;

- zbiór W jest q – wymiarową elipsoidą

$$W = \{ w \in R^q : (w-m)^T Q^{-1} (w-m) \le 1 \} \qquad (5)$$

o środku m i symetrycznej, dodatnio–określonej macierzy $Q \in R^{q \times q}$.

3. ZBIÓR OSIĄGALNOŚCI

Definicja 1. Zbiorem osiągalności $X_{t,k}$ układu (1) nazywa się zbiór wszystkich możliwych stanów $x(t,k)$ tego układu, dla wszystkich możliwych wektorów $x_1(\tau)$, $x_2(i)$, $w(\tau,i)$ takich, że $x_1(\tau) \in X_1$ $(0 \le \tau \le t)$, $x_2(i) \in X_2$ $(0 < i \le k)$ oraz $w(\tau, i) \in W$.

Zbiór $X_{t,k}$ jest wypukły w przestrzeni R^n, zatem może być opisany przy pomocy funkcjonału podpierającego, który jednoznacznie określa dany zbiór z dokładnością do domknięcia:

$$h\left(z \middle| X_{t,k} \right) = \max_{x \in X_{t,k}} z^T x \quad , \quad z \in R^n \qquad (6)$$

Jeśli element $x_{t,k}^m(\bar{z})$ ze zbioru $X_{t,k}$ realizuje maksimum w (6) dla zadanego $\bar{z}$ spełniającego warunek $\| \bar{z} \| = 1$, to długość rzutu wektora $x_{t,k}^m(\bar{z})$ na prostą wyznaczoną przez wektor $\bar{z}$ wynosi $h\left(\bar{z} \middle| X_{t,k}\right)$.

W [3] udowodnione zostało

Twierdzenie 1. Funkcjonał podpierający zbioru osiągalności $X_{t,k}$ układu (1), z niepewnymi warunkami brzegowymi i wejściami (zakłóceniami) ograniczonymi do elipsoidalnych zbiorów X_1, X_2 i W postaci (3), (4) oraz (5), wyraża się następująco:

$$h\left(z \middle| X_{t,k} \right) = z^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} \left(B x_1^c \right) d\tau +$$

$$+ z^T \left[e^{At} + \sum_{i=0}^{k-2} \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-2} \left(B e^{A\tau} \right) d\tau \right] x_2^c +$$

$$+ z^T \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} (Dm) d\tau +$$

$$+ \left\{ z^T t \int_0^t \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} B \right] E_1 \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} B \right]^T d\tau \, z \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left[z^T \left(e^{At} \right) E_2 \left(e^{At} \right)^T z \right]^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-2} \left(z^T \tilde{A}_{t,i} \, E_2 \, \tilde{A}_{t,i}^T \, z \right)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ z^T t \int_0^t \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} D \right] Q \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} D \right]^T d\tau \, z \right\}^{1/2}$$

$$z \in R^n \qquad (7)$$

gdzie P jest operatorem zdefiniowanym następująco:

$$P_t f(t) = B \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \qquad (8)$$

$$P^0 = I \ , \quad P^k = P \circ P \circ \ldots \circ P$$

oraz

$$\tilde{A}_{t,k-1} = e^{At}, \quad \tilde{A}_{t,i} = \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-2} \left(B e^{A\tau} \right) d\tau \qquad (9)$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-2$$

Jak pokazano w [3], zbiór osiągalności $X_{t,k}$ jest sumą wektorową $l+2k$ elipsoid o środkach

$$x_{t,k}^1 = \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} \left(B x_1^c \right) d\tau \qquad (10)$$

$$x_{t,k}^{2i} = \tilde{A}_{t,i} \, x_2^c, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1 \qquad (11)$$

$$\tilde{x}_{t,k}^i = \int_0^t e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} (Dm) d\tau \qquad (12)$$

oraz opisujących je symetrycznych, dodatnio-określonych macierzach

$$\overline{E}_{t,k}^1 = t \int_0^t \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} B \right] E_1 \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-1} B \right]^T d\tau \qquad (13)$$

$$\overline{E}_{t,k}^{2i} = \tilde{A}_{t,i} \, E_2 \, \tilde{A}_{t,i}^T, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1 \qquad (14)$$

$$Q_{t,k}^i = t \int_0^t \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} D \right] Q \left[e^{A(t-\tau)} P_\tau^{k-i-1} D \right]^T d\tau \qquad (15)$$

Niestety, sam zbiór $X_{t,k}$ nie jest elipsoidą, co utrudnia jego wygodny analityczny opis.

4. WYZNACZANIE ZASIĘGU ZBIORU OSIĄGALNOŚCI W ZADANYM KIERUNKU

Dla danego układu (1), mając dane zbiory X_1, X_2 i W, można na podstawie (7) obliczyć wartość liczbową

$h(\bar{z}|X_{t,k})$ dla zadanego $\bar{z}$, spełniającego $\|\bar{z}\|=1$. Liczba ta jest równa odległości hiperpłaszczyzny podpierającej zbiór osiągalności od początku układu współrzędnych w przestrzeni R^n. Hiperpłaszczyzna ta podpiera zbiór $X_{t,k}$ w punkcie $x_{t,k}^m(\bar{z})$.

Jak wynika z [1] i [2], rozwiązanie układu (1) ma następującą postać:

$$x(t,k)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-1}[Bx_1(\tau)]d\tau+e^{At}x_2(k)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-2}\left[Be^{A\tau}x_2(i+1)\right]d\tau+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-1}[Dw(\tau,i)]d\tau \qquad (16)$$

Jak wiadomo z [2] i [3], $x_{t,k}^m(\bar{z})$ otrzymuje się przez podstawienie do (16) następujących wartości:

$$x_1(\tau)=x_1^c+E_1\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-1}B\right]^T\bar{z}\times$$

$$\left\{\bar{z}^T t^{-1}\int_0^t\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-1}B\right]E_1\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-1}B\right]^T d\tau\,\bar{z}\right\}^{-1/2} \qquad (17)$$

$$x_2(i+1)=x_2^c+\left(\bar{z}^T\tilde{A}_{t,i}E_2\tilde{A}_{t,i}^T\bar{z}\right)^{-1/2}E_2\tilde{A}_{t,i}^T\bar{z} \qquad (18)$$

$$w(\tau,i)=m+Q\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-1}D\right]^T\bar{z}\times$$

$$\left\{\bar{z}^T t^{-1}\int_0^t\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-1}D\right]Q\left[e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-1}D\right]^T d\tau\,\bar{z}\right\}^{-1/2} \qquad (19)$$

Liczba $h(\bar{z}|X_{t,k})$ określa, jak daleko sięga zbiór osiągalności układu (1) w kierunku wyznaczonym przez wektor $\bar{z}\in R^n$ taki, że $\|\bar{z}\|=1$, zaś $x_{t,k}^m(\bar{z})$ jest najbardziej oddalonym punktem zbioru $X_{t,k}$ w tym kierunku.

Jako środek zbioru $X_{t,k}$ przyjmuje się

$$x^c=\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-1}\left(Bx_1^c\right)d\tau+$$

$$+\left[e^{At}+\sum_{i=0}^{k-2}\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-2}\left(Be^{A\tau}\right)d\tau\right]x_2^c+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^t e^{A(t-\tau)}P_\tau^{k-i-1}(Dm)d\tau \qquad (20)$$

Jeśli we wzorze (7) w miejsce z podstawiać będziemy wersory kolejnych osi układu współrzędnych w przestrzeni R^n oraz wektory do nich przeciwne, to otrzymamy n-wymiarowy prostopadłościan o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, zawierający zbiór osiągalności $X_{t,k}$.

5. PRZYKŁAD

Rozważa się układ wyrażony równaniem (1), gdzie

$$A=0,\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Zbiory X_1, X_2 i W opisane są następująco:

$$X_1=\left\{x_1\in R^2:\ x_1^Tx_1\le 0{,}0025\right\}$$

$$X_2=\left\{x_2\in R^2:\ x_2^Tx_2\le 0{,}0004\right\}$$

$$W=\left\{w\in R^2:\ w^Tw\le 0{,}01\right\}$$

Są to elipsoidy (tu: koła) o środkach

$$x_1^c=x_2^c=m=0$$

i opisujących je macierzach

$$E_1=\begin{bmatrix}0{,}0025&0\\0&0{,}0025\end{bmatrix},\qquad E_2=\begin{bmatrix}0{,}0004&0\\0&0{,}0004\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}0{,}01&0\\0&0{,}01\end{bmatrix}.$$

Niech $t=1$ i $k=2$. Wtedy zbiór osiągalności $X_{1,2}$ jest sumą wektorową 5 elips. Aby wyznaczyć jego zasięg w zadanym kierunku, wykorzystuje się wzór (7). Funkcjonał podpierający zbioru $X_{1,2}$ ma postać

$$h\left(z|X_{1,2}\right)=\left\{z^T\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0{,}0025&0\\0&0{,}04\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\begin{bmatrix}0{,}0004&0\\0&0{,}0004\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\begin{bmatrix}0{,}0004&0\\0&0{,}0016\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0{,}01&0\\0&0{,}04\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\begin{bmatrix}0{,}01 & 0\\ 0 & 0{,}01\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{z^T\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0{,}0025 & 0\\ 0 & 0{,}04\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\frac{28}{75}\begin{bmatrix}0{,}01 & 0\\ 0 & 0{,}04\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{z^T\frac{7}{5}\begin{bmatrix}0{,}01 & 0\\ 0 & 0{,}01\end{bmatrix}z\right\}^{1/2}$$

Przyjmijmy $z_1=[1{,}0]^T$. Wtedy $h\left(z_1\middle|X_{1,2}\right)=0{,}2082$. Oznacza to, że hiperpłaszczyzną podpierającą zbiór $X_{1,2}$ w kierunku wektora z_1 jest prosta o równaniu $z_1{}^T x=0{,}2082$ czyli $x_1=0{,}2082$.

Dla $z_2=[-1{,}0]^T$ otrzymuje się taką samą wartość funkcjonału podpierającego, zaś hiperpłaszczyzna podpierająca zbiór $X_{1,2}$ w kierunku wektora z_2 ma równanie $z_2{}^T x=0{,}2082$ czyli $x_1=-0{,}2082$.

Analogicznie określa się zasięg zbioru $X_{1,2}$ w kierunkach wektorów $z_3=[0{,}1]^T$ i $z_4=[0,-1]^T$.
Po obliczeniach otrzymuje się

$$h\left(z_3\middle|X_{1,2}\right)=h\left(z_4\middle|X_{1,2}\right)=0{,}356\ .$$

Zatem hiperpłaszczyznami podpierającymi zbiór $X_{1,2}$ w kierunkach wyznaczonych przez wektory z_3 i z_4 są proste $x_2=0{,}356$ i $x_2=-0{,}356$.

Cztery wyznaczone proste tworzą prostokąt ograniczający zbiór osiągalności $X_{1,2}$ badanego układu.

Prowadząc obliczenia dla kolejnych wektorów (kierunków) z takich, że $\|z\|=1$, otrzymuje się kolejne wielokąty ograniczające zbiór $X_{1,2}$.

6. UWAGI KOŃCOWE

Opisana powyżej metoda określania zasięgu zbioru w zadanym kierunku pozwala wyznaczyć w przestrzeni stanów układu dowolny n–wymiarowy wielościan, ograniczający zbiór osiągalności badanego układu z niepewnymi warunkami brzegowymi i wejściami. Ścianami tego wielościanu są hiperpłaszczyzny podpierające ów zbiór.

Nie zawsze, jak w omawianym przykładzie, zbiór osiągalności jest symetryczny względem początku układu współrzędnych w R^n. Jego położenie zależy od usytuowania elipsoidalnych zbiorów X_1, X_2 i W w przestrzeniach R^n i R^q.

Element x_c wyrażony przez (20) może być traktowany jako estymata wektora stanu $x(t,k)$ układu (1).

DETERMINATION OF DOMAIN OF REACHABILITY SET FOR 2D CONTINUOUS-DISCRETE LINEAR SYSTEM WITH ELLIPSOIDAL UNCERTAINTY

A model of 2D continuous-discrete linear system with unknown boundary conditions and inputs, limited to given ellipsoidal sets, is considered. The reachability set through the medium of support function is described and the domain of this set in given direction in the space is determined. Polyhedron limited reachability set is constructed.

Literatura

[1] Kaczorek T. (1995) Controllability and Minimum Energy Control of 2-D Continuous-Discrete Linear Systems, *Appl. Math. And Comp. Sci.* 5, 1, 5-21.

[2] Krasoń E. (2003) Ellipsoidal estimation of information domain for a general 2D continuous-discrete linear system with disturbances, *Procs. of the 9th IEEE Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics*, Międzyzdroje, 361-336.

[3] Krasoń E. (2004) Reachability sets for 2D continuous-discrete linear system with uncertain boundary conditions and ellipsoidal disturbances, *Proc.16th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leuven.

[4] Kurzhanski A.B., Valyi I. (1997) *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser Verlag, Basel.

[5] Schweppe F.C. (1973) *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2