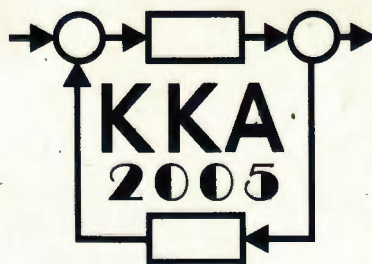


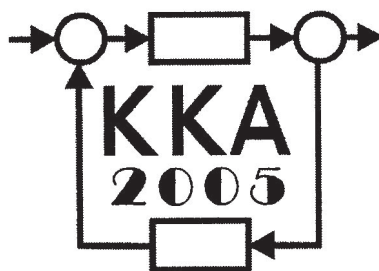
XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ,
OBSERWOWALNOŚĆ

PROJEKTOWANIE OBSERWATORÓW STANU DLA DYSKRETYCH W CZASIE SYSTEMÓW NIELINIOWYCH[†]

Marcin WITCZAK

Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra, e-mail: M.Witczak@issi.uz.zgora.pl

Streszczenie: Przedmiotem niniejszej pracy jest projektowanie obserwatorów stanu dla dyskretnych w czasie systemów nieliniowych. W szczególności, stosując metodę Lapunowa wyznacza się trzy różne warunki zbieżności obserwatora. Bazując na otrzymanych rezultatach proponuje się trzy różne procedury projektowania obserwatora, których efektywność pokazuje się na dwóch wybranych przykładach numerycznych.

Słowa kluczowe: obserwator stanu, systemy nieliniowe, diagnostyka techniczna.

1. WPROWADZENIE

Nieustanny wzrost złożoności współczesnych systemów przemysłowych, oczekiwań wobec ich efektywności i bezpieczeństwa pracy czyni problem sterowania tolerującego uszkodzenia (ang. fault-tolerant control) [3] jednym z najistotniejszych kierunków rozwoju badań nowoczesnej automatyki. Jego zadaniem jest rozpoznawanie nieprawidłowości procesu, uszkodzeń komponentów instalacji technologicznej, czujników oraz urządzeń wykonawczych oraz odpowiednia rekonfiguracja układów sterowania, w taki sposób aby zminimalizować związany z nimi spadek efektywności danego procesu produkcyjnego. Niniejsze zagadnienie może być również postrzegane z punktu widzenia integracji nowoczesnych technik diagnostyki technicznej [9, 15] i sterowania [3]. W tym miejscu należy silnie zaznaczyć, że zarówno z teoretycznego, jak i z praktycznego punktu widzenia rozwiązania w zakresie sterowania i diagnostyki technicznej są bardzo dobrze opracowane dla systemów liniowych [7, 9]. Istnieje również szereg rozwiązań umożliwiających uodpornienie układów sterowania i diagnostyki na niedokładności związane z opisem matematycznym systemu [7, 9]. Tego typu odporność na niepewność modelu jest szczególnie ważna w zastosowaniach praktycznych, gdzie źródłem niepewności może być, np. brak powtarzalności pewnych elementów, zmienność ich właściwości w czasie lub też zewnętrzne zakłócenia oddziałujące na proces. Kolejne rozwiązanie mogące zwiększyć efektywność układu diagnostycznego polega na takim doborze sygnałów sterujących, aby uzyskać jak najwięcej informacji o diagnozowanym systemie [6]. Mimo niewątpliwej oryginalności

pracy [6] jej rezultaty mogą być zastosowane wyłącznie dla systemów liniowych.

W świetle powyższych uwarunkowań celowym jest opracowywanie nowych rozwiązań dla systemów nieliniowych. Niestety samo zastosowanie modeli nieliniowych nie oznacza całkowitego rozwiązania problemu. Zarówno w układach diagnostyki, jak i sterowania szeroko stosuje się różnego rodzaju obserwatory stanu [2, 7, 9, 15], zwiększające znacząco ich efektywność. Oczywiście istnieje wiele opracowań dotyczących zastosowania obserwatorów w układach diagnostycznych. Logicznie myśląc liczba ich praktycznych zastosowań (nie tylko prostych przykładów symulacyjnych) powinna stale rosnąć, co na razie nie ma miejsca. Główną przyczyną takiej sytuacji jest stosunkowo duża złożoność implementacyjna [2, 16], która nie zachęca inżynierów do stosowania takich rozwiązań w przemyśle.

Biorąc pod uwagę powyższe uwarunkowania, głównym celem niniejszej pracy jest zaproponowanie kompletnej i prostej procedury projektowania obserwatora stanu dla pewnej klasy systemów nieliniowych. Praca została zorganizowana w następujący sposób. Punkt 2 poświęcony jest przedstawieniu problemu i istniejących rozwiązań. W punkcie 3 przedstawia się warunki zbieżności obserwatora. W punkcie 4, problem projektowania obserwatora sprowadza się do zadania polegającego na rozwiązaniu układu liniowych nierówności macierzowych (ang. Linear Matrix inequalities, LMIs). Natomiast w punkcie 5 prezentuje się przykładowe rezultaty eksperymentów numerycznych.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy dyskretny w czasie nieliniowy system dynamiczny opisany następującymi równaniami:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1}, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ oznacza stan, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ wyjście, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^r$ wejście, $g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ jest nieliniową funkcją spełniającą warunek Lipschitza postaci:

$$\|g(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*) - g(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}^*)\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2, \quad (3)$$

[†]Praca częściowo wykonana w ramach grantu KBN nr 4T11A01425

gdzie $\gamma > 0$ oznacza stałą Lipschitza. Wiele systemów nieliniowych może być przedstawionych w postaci (1), np. nieliniowości o postaci sinusoidalnej spełniają warunek (3), nawet nieliniowości w postaci wielomianu spełniają warunek (3) przy założeniu, że stan x_k jest ograniczony (w praktyce każda zmienna stanu jest ograniczona, o ile stan systemu ma jakieś fizyczne znaczenie). Oznacza to, że klasa systemów nieliniowych rozważana w niniejszej pracy jest całkiem szeroka, co wzmacnia znacząco jej znaczenie dla potencjalnych zastosowań w rzeczywistych warunkach przemysłowych.

Głównym zadaniem dalszej części tego punktu jest przedstawienie istniejącego stanu wiedzy w zakresie projektowania obserwatorów stanu dla systemów typu (1)–(2). Dominująca część rozwiązań dotycząca tego typu obserwatorów przeznaczona jest dla systemów ciągłych w czasie. Jest to głównym powodem dla którego uwzględnia się je w poniższym przeglądzie stanu wiedzy w przedmiotowym zakresie.

Zakładając, że para macierzy (A, C) jest obserwowalna, Thau [13] zaproponował obserwator dla ciągłego w czasie odpowiednika systemu (1)–(2). Główną wadą prezentowanego rozwiązania było to iż Thau przedstawił jedynie warunek zbieżności obserwatora, natomiast nie zaproponował efektywnego podejścia umożliwiającego jego zaprojektowanie. Oznacza to, że obserwator był konstruowany metodą prób i błędów sprowadzającą się do rozwiązywania różnych równań Lapunowa, a następnie sprawdzania warunku zbieżności. Autorzy innych prac (zob. np. [12]) przyjęli podobną procedurę pokazując jedynie inne, mniej restrykcyjne warunki zbieżności. Dopiero w pracach [1, 10] autorzy zaproponowali bardziej efektywne rozwiązania zadania projektowania obserwatora dla ciągłego w czasie odpowiednika systemu (1)–(2).

Niestety istnieje zaledwie kilka pozycji literaturowych [5, 14] prezentujących procedury projektowania obserwatora dla systemów klasy (1)–(2). W niniejszych pracach autorzy proponują różne parametryzacje obserwatora, których wspólną wadą jest to iż obserwator jest konstruowany metodą prób i błędów sprowadzającą się do rozwiązywania różnych równań Lapunowa. Ważną niedogodnością związaną z rozważanymi pracami jest również to, że autorzy nie opracowali warunków zbieżności podobnych do tych z prac dla układów ciągłych [12, 13].

3. ANALIZA ZBIEŻNOŚCI OBSERWATORA

Rozważmy obserwator dla systemów klasy (1)–(2) opisany następującym równaniem:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + g(\hat{x}_k, u_k) + K(y_k - C\hat{x}_k), \quad (4)$$

gdzie K oznacza macierz wzmocnień. W dalszej części niniejszego punktu przedstawia się trzy twierdzenia opisujące trzy różne warunki zbieżności obserwatora (4). Niech $\underline{\sigma}(\cdot)$ i $\bar{\sigma}(\cdot)$ oznaczają minimalną i maksymalną wartość szczególną, oraz niech $P = P^T$, $P > 0$ będzie

rozwiązaniem następującego równania Lapunowa:

$$Q = P - A_0^T P A_0, \quad A_0 = A - KC, \quad (5)$$

gdzie A_0 jest macierzą stabilną, oraz $Q = Q^T$, $Q > 0$.

Twierdzenie 1. Rozważmy obserwator (4) dla systemów klasy (1)–(2). Jeżeli stała Lipschitza γ (por. (3)) spełnia warunek:

$$\gamma < \sqrt{\frac{\underline{\sigma}(Q - \frac{1}{2}P)}{\bar{\sigma}(P)}}, \quad Q - \frac{1}{2}P > 0 \quad (6)$$

to obserwator (4) jest asymptotycznie zbieżny.

Dowód. Zdefiniujmy błąd estymacji stanu dla (4):

$$e_k = x_k - \hat{x}_k, \quad (7)$$

oraz

$$z_k = g(x_k, u_k) - g(\hat{x}_k, u_k). \quad (8)$$

Podstawiając (1)–(2), (4) i (8) do (7) otrzymuje się:

$$e_{k+1} = A_0 e_k + z_k. \quad (9)$$

Definiując funkcję Lapunowa postaci:

$$V_{k+1} = e_{k+1}^T P e_{k+1}, \quad (10)$$

a następnie podstawiając do niej (9) otrzymuje się:

$$V_{k+1} = e_k^T A_0^T P A_0 e_k + 2e_k^T A_0^T P z_k + z_k^T P z_k. \quad (11)$$

Zgodnie z twierdzeniem Lapunowa, obserwator (4) jest asymptotycznie zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\Delta V = V_{k+1} - V_k < 0. \quad (12)$$

Podstawiając (10) i (11) do (12) otrzymuje się:

$$\Delta V = e_k^T \left[A_0^T P A_0 - P \right] e_k + 2e_k^T A_0^T P z_k + z_k^T P z_k < 0. \quad (13)$$

Korzystając z własności:

$$\left(P^{\frac{1}{2}} A_0 z_k - P^{\frac{1}{2}} z_k \right)^T \left(P^{\frac{1}{2}} A_0 z_k - P^{\frac{1}{2}} z_k \right) \geq 0, \quad (14)$$

otrzymuje się:

$$2e_k^T A_0^T P z_k \leq e_k^T A_0^T P A_0 e_k + z_k^T P z_k. \quad (15)$$

Wstawiając (15) do (13) otrzymuje się:

$$\Delta V \leq 2e_k^T \left[A_0^T P A_0 - \frac{1}{2}P \right] e_k + 2z_k^T P z_k < 0. \quad (16)$$

Stosując (3) można pokazać, że:

$$z_k^T P z_k \leq \gamma^2 \bar{\sigma}(P) e_k^T e_k. \quad (17)$$

Podstawiając (17) do (16) otrzymuje się:

$$\Delta V \leq 2e_k^T \left[\gamma^2 \bar{\sigma}(P) I - \left[Q - \frac{1}{2}P \right] \right] e_k < 0. \quad (18)$$

Warunek (18) jest równoważny z:

$$\gamma < \sqrt{\frac{1}{\bar{\sigma}(P)} \frac{e_k^T [Q - \frac{1}{2}P] e_k}{e_k^T e_k}}, \quad (19)$$

Używając wartości granicznych ilorazu Reyleigha, tzn. $\frac{e_k^T [Q - \frac{1}{2}P] e_k}{e_k^T e_k} \geq \underline{\sigma}(Q - \frac{1}{2}P)$, można wyznaczyć (6), co kończy dowód. \square

Twierdzenie 2. Rozważmy obserwator (4) dla systemów klasy (1)–(2). Jeżeli stała Lipschitza γ (por. (3)) spełnia warunek:

$$\gamma < \sqrt{\frac{\underline{\sigma}(Q - A_0^T P P A_0)}{\bar{\sigma}(P) + 1}}, \quad Q - A_0^T P P A_0 > 0 \quad (20)$$

to obserwator (4) jest asymptotycznie zbieżny.
Dowód. Wykorzystując (3) można pokazać, że:

$$2e_k^T A_0^T P z_k \leq 2\gamma \|P A_0 e_k\|_2 \|e_k\|_2. \quad (21)$$

Stosując własność:

$$(\|P A_0 e_k\|_2 - \gamma \|e_k\|_2)^2 \geq 0, \quad (22)$$

do (21) otrzymuje się:

$$2e_k^T A_0^T P z_k \leq e_k^T A_0^T P P A_0 e_k + \gamma^2 e_k^T e_k. \quad (23)$$

Podstawiając (23) do (13), a później stosując (17) otrzymuje się:

$$\Delta V \leq e_k^T [\gamma^2 (\bar{\sigma}(P) + 1) I - [Q - A_0^T P P A_0]] e_k < 0. \quad (24)$$

Teraz w łatwy sposób można pokazać, że warunek (24) jest równoważny z (20), co kończy dowód. \square

Twierdzenie 3. Rozważmy obserwator (4) dla systemów klasy (1)–(2). Jeżeli stała Lipschitza γ (por. (3)) spełnia warunek:

$$\gamma < \frac{\underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P)^2 + \bar{\sigma}(P) + \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P)}} \quad (25)$$

to obserwator (4) jest asymptotycznie zbieżny.

Dowód. Używając (13), (5) i (17) można pokazać, że warunek zbieżności jest dany przez:

$$\Delta V \leq e_k^T [\gamma^2 \bar{\sigma}(P) I - Q] e_k + 2e_k^T A_0^T P z_k < 0, \quad (26)$$

a więc:

$$2e_k^T A_0^T P z_k < e_k^T [Q - \gamma^2 \bar{\sigma}(P) I] e_k, \quad (27)$$

co jest równoważne:

$$2z_k^T P A_0 e_k < e_k^T [Q - \gamma^2 \bar{\sigma}(P) I] e_k. \quad (28)$$

Nierówność (28) jest równoważna z:

$$2(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P z_k)^T (Q^{\frac{1}{2}} e_k) < (Q^{\frac{1}{2}} e_k)^T (Q^{\frac{1}{2}} e_k) - \gamma^2 \bar{\sigma}(P) I, \quad (29)$$

co prowadzi do warunku zbieżności o następującej postaci:

$$2 \|Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P z_k\|_2 < \|Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_2 - \gamma^2 \bar{\sigma}(P) \frac{\|e_k\|_2^2}{\|Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_2^2}. \quad (30)$$

Używając (17) można pokazać, że:

$$\|Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P z_k\|_2 \leq \gamma \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P) \|e_k\|_2, \quad (31)$$

następnie wiedząc, że:

$$\|Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_2 \geq \underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}}) \|e_k\|_2, \quad (32)$$

oraz

$$\frac{\|e_k\|_2}{\|Q^{\frac{1}{2}} e_k\|_2} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})}, \quad (33)$$

nierówność (30) można zapisać jako:

$$\frac{\bar{\sigma}(P)}{\underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})} \gamma^2 + 2\gamma \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P) - \underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}}) < 0. \quad (34)$$

Wiedząc, że (34) zawiera funkcję kwadratową, jasnym jest, iż:

$$\gamma < \left(\sqrt{\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P)^2 + \bar{\sigma}(P)} - \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P) \right) \frac{\underline{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})}{\bar{\sigma}(P)}. \quad (35)$$

Stosując własność:

$$\left(\sqrt{\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P)^2 + \bar{\sigma}(P)} - \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P) \right) \times \left(\sqrt{\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P)^2 + \bar{\sigma}(P)} + \bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P) \right) = \bar{\sigma}(P), \quad (36)$$

nierówność (35) można przekształcić do postaci (25), co kończy dowód. \square

Wniosek 1. Warunki zbieżności opisane przez powyższe twierdzenia otrzymuje się poprzez wyeliminowanie czynnika:

$$2e_k^T A_0^T P z_k, \quad (37)$$

z (13) na trzy różne sposoby. Oznacza to, że powyższe kryteria są relatywnie konserwatywne, gdzie skala konserwatywności jest silnie związana z niedokładnością danej techniki eliminacji.

Wniosek 2. Jasnym jest, że istnieją szczególne wartości Q , dla których otrzymuje się najmniej restrykcyjne warunki (6), (20) i (25). Niestety związek pomiędzy P i Q w równaniu (5) nie może być jasno określony bez wcześniejszego rozwiązania równania Lapunowa. Jest to głównym powodem, dla którego niemożliwe jest wybranie najmniej restrykcyjnego kryterium zbieżności dla dowolnej macierzy Q .

Wniosek 3. Warunki (6), (20) i (25) mogą służyć jedynie jako metoda sprawdzania zbieżności przy założeniu, że macierz wzmocnień K została już wyznaczona. Oznacza to, że procedura projektowania obserwatora sprowadza się do wyboru różnych macierzy wzmocnień K , rozwiązywania równania Lapunowa (5), a następnie sprawdzenia warunków zbieżności (6), (20) i (25). Niestety takie rozwiązanie jest bardzo nieefektywne i czasochłonne.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski, celem następnego punktu jest opracowanie trzech różnych technik projektowania obserwatorów bazujących na (6), (20) i (25).

4. PROCEDURY PROJEKTOWANIA

4.1. Procedura I

Można łatwo pokazać, że warunek (18) jest równoważny z:

$$\gamma^2 \bar{\sigma}(P)I + A_0^T P A_0 - \frac{1}{2}P < 0. \quad (38)$$

Zakładając, że $\bar{\sigma}(P) < \beta$, $\beta > 0$, i wiedząc że $\bar{\sigma}(P) < \beta$ jest równoważne $\beta - \beta^{-1} P P > 0$, co można przedstawić w postaci LMI:

$$\begin{bmatrix} \beta I & P \\ P & \beta I \end{bmatrix} > 0, \quad \beta > 0, \quad P > 0, \quad (39)$$

(38) można przekształcić do zbioru nierówności:

$$\gamma^2 \beta I + A_0^T P A_0 - \frac{1}{2}P < 0, \quad (40)$$

i (39). Nierówność (40) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}P - \gamma^2 \beta I & A_0^T \\ A_0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (41)$$

co jest równoważne:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}P - \gamma^2 \beta I & A_0^T \\ A_0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} > 0. \quad (42)$$

Nierówność (42) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}P - \gamma^2 \beta I & A_0^T P \\ P A_0 & P \end{bmatrix} > 0. \quad (43)$$

Podstawiając $K = P^{-1}L$ do (43) otrzymuje się następujące LMI:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}P - \gamma^2 \beta I & A^T P - C^T L^T \\ P A - LC & P \end{bmatrix} > 0. \quad (44)$$

Podsumowując, procedurę projektowania można zapisać następująco:

Krok 1: Wyznacz stałą γ dla systemu (1)–(2).

Krok 2: Rozwiąż układ LMIs: (39) i (44).

Krok 3: Wyznacz macierz wzmocnień $K = P^{-1}L$.

Pomimo stosunkowo dużej prostoty i znacznej efektywności, powyższe rozwiązanie nie może być bezpośrednio zastosowane do wyznaczenia macierzy K maksymalizującej γ , dla której obserwator (4) jest zbieżny. Celem dalszej części niniejszego punktu jest rozwiązanie tego problemu.

Można zauważyć, że (44) da się sprowadzić do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}P & C^T L^T - A^T P \\ LC - PA & -P \end{bmatrix} < < \lambda \begin{bmatrix} \beta I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

gdzie $\lambda = -\gamma^2$. Oznacza to, że powyższe zadanie można sprowadzić do uogólnionego problemu minimalizacji wartości własnej (ang. generalized eigenvalue minimization problem) [4, 8], który może zostać zapisany następująco:

$$\min_{P, L, \beta} \lambda \quad (46)$$

przy ograniczeniach LMI (39) i (45). Jak można zauważyć, prawa strona (45) jest dodatnio półokreślona. Zazwyczaj wymaga się, aby prawa strona (45) była dodatnio określona, co jest spowodowane różnymi uwarunkowaniami numerycznymi [8]. Proste rozwiązanie powyższego problemu można znaleźć w pracy [8, p. 8-41].

4.2. Procedura II

Można pokazać, że (24) jest równoważne z:

$$\gamma^2 (\bar{\sigma}(P) + 1)I + A_0^T P A_0 + A_0^T P P A_0 - P < 0, \quad (47)$$

Zakładając, że $\bar{\sigma}(P) < \beta$, $\beta > 0$, i $A_0^T P P A_0 < X$, $X = X^T$, co można wyrazić następująco:

$$\begin{bmatrix} X & A_0^T P \\ P A_0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (48)$$

nierówność (47) można przedstawić jako:

$$\begin{bmatrix} P - \gamma^2 (\beta + 1)I - X & A_0^T P \\ P A_0 & P \end{bmatrix} > 0. \quad (49)$$

Podstawiając $K = P^{-1}L$ do (48) i (49) otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} X & A^T P - C^T L^T \\ P A - LC & I \end{bmatrix} > 0, \quad (50)$$

i

$$\begin{bmatrix} P - \gamma^2 (\beta + 1)I - X & A^T P - C^T L^T \\ P A - LC & P \end{bmatrix} > 0. \quad (51)$$

Nową procedurę projektowania można podsumować następująco:

Krok 1: Wyznacz stałą γ dla systemu (1)–(2).

Krok 2: Rozwiąż układ LMIs: (39), (50) i (51).

Krok 3: Wyznacz macierz wzmocnień $K = P^{-1}L$.

Podobnie jak w punkcie 4.1., wybór K maksymalizującej γ , dla której obserwator (4) jest zbieżny można sprowadzić do następującego zadania:

$$\min_{P,L,X,\beta} \lambda \quad (52)$$

przy ograniczeniach LMI (39), (50), i

$$\begin{bmatrix} X - P & C^T L^T - A^T P \\ LC - PA & -P \end{bmatrix} < \lambda \begin{bmatrix} (\beta + 1)I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

gdzie (53) wyznacza się poprzez przekształcenie (51), przy $\lambda = -\gamma^2$.

4.3. Procedura III

Nierówność (34) można przekształcić do równoważnej postaci:

$$\bar{\sigma}(P)\gamma^2 + 2\gamma\bar{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}}A_0^T P) - \bar{\sigma}(Q) < 0. \quad (54)$$

Wiedząc, że:

$$\bar{\sigma}(Q^{\frac{1}{2}})\bar{\sigma}(Q^{-\frac{1}{2}}A_0^T P) \leq \bar{\sigma}(A_0^T P), \quad (55)$$

nierówność (54) można zapisać jako:

$$\bar{\sigma}(P)\gamma^2 + 2\gamma\bar{\sigma}(A_0^T P) - \bar{\sigma}(Q) < 0. \quad (56)$$

Zakładając, że $\bar{\sigma}(P) < \beta$, $\beta > 0$, i $\bar{\sigma}(A_0^T P) < \delta$, $\delta > 0$, co można wyrazić następująco:

$$\begin{bmatrix} \delta & A_0^T P \\ PA_0 & \delta \end{bmatrix} > 0, \quad \delta > 0. \quad (57)$$

Teraz można łatwo pokazać, że (56) można zapisać jako:

$$P - A_0^T P A_0 - \gamma^2 \beta I - 2\gamma \delta I > 0. \quad (58)$$

Tak więc nierówność (58) sprowadza się do:

$$\begin{bmatrix} P - \gamma^2 \beta I - 2\gamma \delta I & A_0^T P \\ PA_0 & P \end{bmatrix} > 0. \quad (59)$$

Podstawiając $K = P^{-1}L$ do (57) i (59) otrzymuje się układ LMIs:

$$\begin{bmatrix} \delta & A^T P - C^T L^T \\ PA - LC & \delta \end{bmatrix} > 0, \quad \delta > 0, \quad (60)$$

i

$$\begin{bmatrix} P - \gamma^2 \beta I - 2\gamma \delta I & A^T P - C^T L^T \\ PA - LC & P \end{bmatrix} > 0. \quad (61)$$

Trzecią procedurę projektowania obserwatora można zatem podsumować następująco:

Krok 1: Wyznacz stałą γ dla systemu (1)–(2).

Krok 2: Rozwiąż układ LMIs: (39), (60) i (61).

Krok 3: Wyznacz macierz wzmocnień $K = P^{-1}L$.

Podobnie jak w punktach 4.1. i 4.2., wybór K maksymalizującej γ , dla której obserwator (4) jest zbieżny można sprowadzić do uogólnionego problemu minimalizacji wartości własnej. W pierwszej kolejności założmy, że:

$$-X < \lambda \beta I, \quad X > 0 \quad (62)$$

gdzie $X = X^T$, $\lambda = -\gamma$. Tak więc nierówność (61) można wyrazić następująco:

$$\begin{bmatrix} -P & C^T L^T - A^T P \\ LC - PA & -P \end{bmatrix} < \lambda \begin{bmatrix} X + 2\delta I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Problem projektowania obserwatora sprowadza się do następującego zadania:

$$\min_{P,L,X,\beta,\delta} \lambda \quad (64)$$

przy ograniczeniach LMI (39), (60), (62) i (63).

5. REZULTATY EKSPERYMENTÓW

Celem niniejszego punktu jest porównanie efektywności procedur projektowania obserwatora zaproponowanych w punkcie 4. W szczególności, problemem jest wyznaczenie macierzy K maksymalizującej γ (dla której obserwator (4) jest zbieżny) dla dwóch różnych systemów danych przez:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.01 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (65)$$

i

$$A = \begin{bmatrix} 0.137 & 0.199 & 0.284 \\ 0.0118 & 0.299 & 0.47 \\ 0.894 & 0.661 & 0.065 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

W wyniku przeprowadzonych eksperymentów otrzymano następujące rezultaty dla systemu (65):

Procedura 1: $\gamma = 0.6765$, $K = [0.2000, 0.1004]^T$

Procedura 2: $\gamma = 0.7998$, $K = [0.2001, 0.1015]^T$

Procedura 3: $\gamma = 0.7916$, $K = [0.2000, 0.1003]^T$

Jak można zauważyć, maksymalna różnica pomiędzy otrzymanymi maksymalnymi wartościami stałej Lipschitza wynosi aż 15%. Najgorsze rezultaty otrzymano w przypadku pierwszej, a najlepsze w przypadku drugiej procedury. Z drugiej strony, można łatwo zauważyć, iż otrzymane macierze wzmocnień są prawie identyczne. Następujące rezultaty otrzymano dla systemu (66):

Procedura 1:

$$\gamma = 0.5563, \quad K = \begin{bmatrix} 0.1431 & 0.2099 \\ 0.0226 & 0.3166 \\ 0.8954 & 0.6639 \end{bmatrix}$$

Procedura 2:

$$\gamma = 0.6429, \quad K = \begin{bmatrix} 0.1479 & 0.2179 \\ 0.0305 & 0.3296 \\ 0.8965 & 0.6657 \end{bmatrix}$$

Procedura 3:

$$\gamma = 0.5422, \quad K = \begin{bmatrix} 0.1430 & 0.2099 \\ 0.0225 & 0.3165 \\ 0.8951 & 0.6634 \end{bmatrix}$$

Podobnie jak dla systemu (66), można zauważyć, maksymalna różnica pomiędzy otrzymanymi maksymalnymi wartościami stałej Lipschitza wynosi aż 15%. Przeciwnie jak w poprzednim przypadku, najgorsze rezultaty otrzymano dla trzeciej, a najlepsze dla drugiej procedury projektowania. Można również zauważyć, iż otrzymane macierze wzmocnień są prawie identyczne.

Powyższe rezultaty potwierdzają *Wniosek 1*, tzn. że trudnym jest aprioryczny wybór kryterium zbieżności dającego najmniej konserwatywne rezultaty. Rzeczywiście, pomimo iż druga procedura dawała najlepsze rezultaty, wydaje się niemożliwym udowodnienie, że jest ona najlepszym wyborem dla każdego systemu.

6. PODSUMOWANIE

Głównym celem niniejszej pracy było zaproponowanie efektywnego rozwiązania umożliwiającego projektowanie obserwatorów stanu dla dyskretnych w czasie nieliniowych systemów dynamicznych. W szczególności, z wykorzystaniem metody Lyapunowa, zaproponowano trzy różne kryteria zbieżności obserwatora. Na podstawie otrzymanych rezultatów zaproponowano efektywne procedury projektowania obserwatora wykorzystujące liniowe nierówności macierzowe. Otrzymane rezultaty numeryczne potwierdzają wysoką skuteczność zaproponowanego narzędzia.

DESIGN OF STATE OBSERVERS FOR DISCRETE-TIME NON-LINEAR SYSTEMS

Abstract: The paper deals with the problem of designing observers for discrete-time non-linear systems. In particular, with the use of the Lyapunov method, three different convergence criteria of the observer are developed. Based on the achieved results, three different design procedures are proposed and evaluated on two numerical examples.

Bibliografia

- [1] Aboky C., Sallet G., Vivalda J.C., Observers for Lipschitz non-linear systems, *Int. J. Contr.*, Vol. 75, No. 3, 2002, pp. 204–212.
- [2] Alcorta Garcia E., Frank P. M., Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis. *Control. Eng. Practice.*, Vol. 5, No. 5, 1997, pp. 663-670.

- [3] Blanke M., M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, Springer, Berlin, 2003.
- [4] Boyd S., Feron E., Ghaoui L.E., and Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Siam, Philadelphia; 1994.
- [5] Busawon K., Saif M., and Farza M. "A discrete-time observer for a class of non-linear systems" in *36th IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, 1997, pp. 4796–4801.
- [6] Delebecque F., Nikoukah R., Rubio Scola H., Test signal design for failure detection: A linear programming approach. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol. 13, No. 4, 2003, pp. 515-526.
- [7] Chen J., Patton R. J., *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers, London; 1999.
- [8] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., and Chilali M., *LMI Control Toolbox. For use with Matlab*, MathWorks Inc., Natick; 1995.
- [9] Korbicz J., Kościelny J.M., Kowalczyk Z. and Cholewa W. (Eds.), *Fault Diagnosis. Models, Artificial Intelligence, Applications*, Springer-Verlag, Berlin; 2004.
- [10] Rajamani R., Cho Y.M., Existence and design of observers for nonlinear systems: relation to distance to unobservability, *Int. J. Contr.*, Vol. 69, No. 5, 1998, pp. 717–731.
- [11] Rajamani R., Observers for Lipschitz nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 43, No. 3, 1998, pp. 397–401.
- [12] Schreier G., Ragot J., Patton R.J. and Frank P.M., "Observer design for a class of non-linear systems", in *IFAC Symp.: Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes: SAFEPROCESS'97*, Hull, UK, 1997, Vol. 1, pp. 483-488.
- [13] Thau F.E., Observing the state of non-linear dynamic systems, *Int. J. Contr.*, Vol. 17, No. 3, 1973, pp. 471–479.
- [14] Wang Z., Unbehauen H., A class of non-linear observers for discrete-time systems with parametric uncertainty, *Int. J. Sys. Sci.*, Vol. 31, No. 1, 2000, pp.19–26.
- [15] Witczak M., *Identification and Fault Detection of Non-linear Dynamic Systems*, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra; 2003.
- [16] Zolghardi A., Henry D., Monision M., Design of nonlinear observers for fault diagnosis. A case study. *Control. Eng. Practice*, Vol. 4, No. 11, 1996, pp. 1535-1544.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2