

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE  
I ADAPTACYJNE**

## OSCYLACYJNE PROCESY CZASOOPTYMALNE

Katarzyna MAJEWSKA

Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, e-mail: kbm@pk.edu.pl

**Streszczenie:** W niniejszej pracy przedstawiono rozwiązanie problemu sterowania czasooptymalnego nieliniowym i nieciągłym obiektem dynamicznym. Uwzględniano opory ruchu zależne zarówno od położenia jak i prędkości obiektu sterowanego. Przyjęto cel położony w początku układu współrzędnych. Pokazano, że dla pewnych wartości funkcji oporów ruchu proces sterowania czasooptymalnego jest procesem oscylacyjnym - trajektorie czasooptymalne okrążają cel nieskończoną ilość razy i osiągają go w skończonym czasie. Zaproponowano struktury sterowania czasooptymalnego oraz sub-czasooptymalnego.

**Słowa kluczowe:** Sterowanie czasooptymalne, sterowanie procesem nieliniowym

### 1. WSTĘP

Przedmiotem badań są urządzenia przemysłowe nazywane *mechanizmami pozycyjnymi*. W opisie dynamiki tych urządzeń należy uwzględnić opory ruchu, które mogą zależeć od położenia i/lub prędkości mechanizmu. W pracy przedstawione zostaną pewne osobliwe zjawisko występujące w procesie czasooptymalnym, a to czasooptymalne trajektorie oscylacyjne. Zjawisko to dla pewnej funkcji oporów ruchu zależnych tylko od położenia mechanizmu pozycyjnego opisane zostało w pracy [3]. W niniejszej pracy badań będziemy wspomniane zjawisko dla funkcji oporów zależnych zarówno od położenia jak i prędkości obiektu sterowanego.

Jako model matematyczny obiektu przyjęto następujące planarne nieciągłe równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = f(x, y) + u, & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} A_1, & x > 0, y > 0 \\ A_2, & x \leq 0, y > 0 \\ A_3, & x \leq 0, y \leq 0 \\ A_4, & x > 0, y \leq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$|A_i| < 1, i = 1, 2, 3, 4$$

przy czym zmienne  $x, y$  określają odpowiednio pozycję i prędkość mechanizmu,  $f$  stanowi nieciągłą funkcję

opisującą opory ruchu,  $u$  jest mierzalną funkcją sterującą, taką że  $|u| \leq 1$ .

Problem czasooptymalny systemu (1), (2) będzie rozumiany typowo, jako przeniesienie dowolnego stanu początkowego  $z_0 = (x_0, y_0) \in R^2$  do dowolnego stanu docelowego (celu)  $z_1 = (x_1, y_1) \in R^2$  w minimalnym czasie  $t^* < \infty$ .

W niniejszej pracy rozpatrywać będziemy cel nieruchomy położony w początku układu współrzędnych, tj.  $z_1 = 0 = (0, 0)$ .

### 2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU CZASOOPTYMALNEGO

W rozdziale niniejszym podano twierdzenia o sterowaniu czasooptymalnym oraz opisano pewne nietypowe zjawiska zachodzące w procesie sterowania czasooptymalnego.

#### Twierdzenie 1 [4]

Dany jest obiekt sterowany (1), (2). Sterowanie czasooptymalne  $u^*$ , przeprowadzające dowolny stan początkowy  $z_0 \in R^2$  do stanu docelowego  $z_1 = (x_1, 0)$ ,  $x_1 \in R^1$  jest typu *bang-bang*, tj.  $u^* \equiv -1$  lub  $u^* \equiv +1$ .

■

Trajektorie Końcowe, tj. trajektorie generowane sterowaniem  $u = \pm 1$  i osiągające cel  $z_1 = 0 = (0, 0)$ , zdefiniowane są związkami:

$$T^+ = \left\{ (x, y) : x = \frac{y^2}{2(1+A_4)}, y \leq 0 \right\}, \quad (3)$$

$$T^- = \left\{ (x, y) : x = -\frac{y^2}{2(1-A_2)}, y \geq 0 \right\} \quad (4)$$

Dla badanego obiektu udowodniono następujące twierdzenia:

**Twierdzenie 2 [4]**

Dany jest obiekt (1), (2) oraz stan docelowy położony w początku układu współrzędnych, tj.  $z_1 = 0 = (0,0)$ .

*Teza a)* Jeżeli wartości funkcji oporów ruchu spełniają warunek

$$A_2 \leq \frac{A_1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}},$$

to czasooptymalne przejście układu ze stanu początkowego  $z_0 \in T^-$  do celu odbywa się bez przełączenia sygnału sterującego wzdłuż Trajektorii Końcowej  $T^-$ .

*Teza b)* Jeżeli wartości funkcji oporów ruchu spełniają warunek

$$A_4 \geq \frac{A_3 - \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}},$$

to czasooptymalne przejście układu ze stanu początkowego  $z_0 \in T^+$  do celu odbywa się, bez przełączenia sygnału sterującego, wzdłuż Trajektorii Końcowej  $T^+$ .

*Teza c)* Jeżeli wartości funkcji oporów ruchu spełniają warunki

$$A_2 > \frac{A_1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}} \quad \text{i} \quad A_4 \geq \frac{A_3 - \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}},$$

to czasooptymalne przejście układu ze stanu początkowego  $z_0 \in T^-$  do celu odbywa się, przy dwóch przełączeniach funkcji sterującej  $u = \pm 1$ , wzdłuż trajektorii oznaczonej jako  $T_{Q2}$ , a mianowicie:

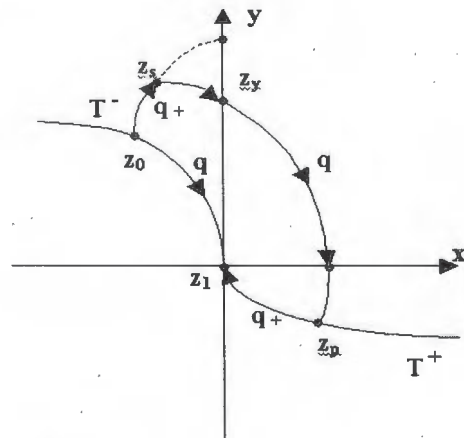
Stan przemieszcza się po trajektorii rozwiązania  $q_+(t; z_0)$  do punktu  $z_s \in Q_2 \setminus Y^+$ , gdzie następuje przełączenie sygnału sterującego z  $u = +1$  na  $u = -1$ , następnie przemieszczenie stanu odbywa się wzdłuż trajektorii rozwiązania  $q_-(t; z_s)$ , która dąży do przecięcia z Trajektorią Końcową  $T^+$  w punkcie  $z_p$ , gdzie następuje przełączenie sygnału sterującego z  $u = -1$  na  $u = +1$ , w końcu z punktu  $z_p$  stan osiąga cel  $z_1$  poruszając się wzdłuż trajektorii rozwiązania  $q_+(t; z_p)$ , czyli wzdłuż Trajektorii Końcowej  $T^+$  (rys. 1).

*Teza d)* Jeżeli wartości funkcji oporów ruchu spełniają warunki

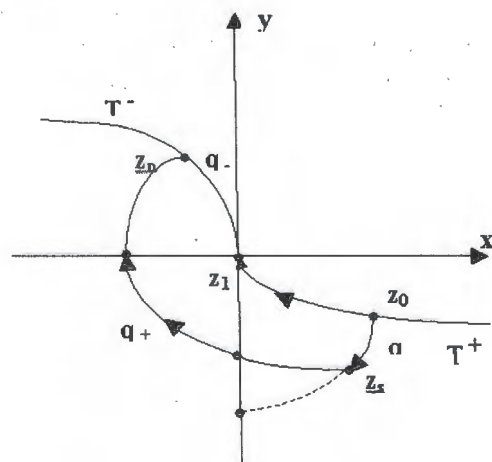
$$A_4 < \frac{A_3 - \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}}} \quad \text{i} \quad A_2 \leq \frac{A_1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}},$$

to czasooptymalne przejście układu ze stanu początkowego  $z_0 \in T^+$  do celu odbywa się, przy dwóch przełączeniach funkcji sterującej  $u = \pm 1$ , wzdłuż trajektorii oznaczonej jako  $T_{Q4}$ , a mianowicie:

Stan przemieszcza się po trajektorii rozwiązania  $q_-(t; z_0)$  do punktu  $z_s \in Q_4 \setminus Y^-$ , gdzie następuje przełączenie sygnału sterującego z  $u = -1$  na  $u = +1$ , następnie przemieszczenie stanu odbywa się wzdłuż trajektorii rozwiązania  $q_+(t; z_s)$ , które dąży do przecięcia z Trajektorią Końcową  $T^-$  w punkcie  $z_p$ , gdzie następuje przełączenie sygnału sterującego z  $u = +1$  na  $u = -1$ , w końcu z punktu  $z_p$  stan osiąga cel  $z_1$  poruszając się wzdłuż trajektorii rozwiązania  $q_-(t; z_p)$ , czyli wzdłuż Trajektorii Końcowej  $T^-$  (rys. 2). ■



Rys. 1. Trajektorja  $T_{Q2}$



Rys. 2. Trajektorja  $T_{Q4}$

Należy zwrócić uwagę, że w zależności od wartości funkcji oporów, czasooptymalne przejście obiektu ze stanu początkowego leżącego na trajektorii końcowej do

celu odbywa się z jedną lub dwoma operacjami przełączenia sygnału sterującego.

### 2.1. Czasooptymalne procesy oscylacyjne

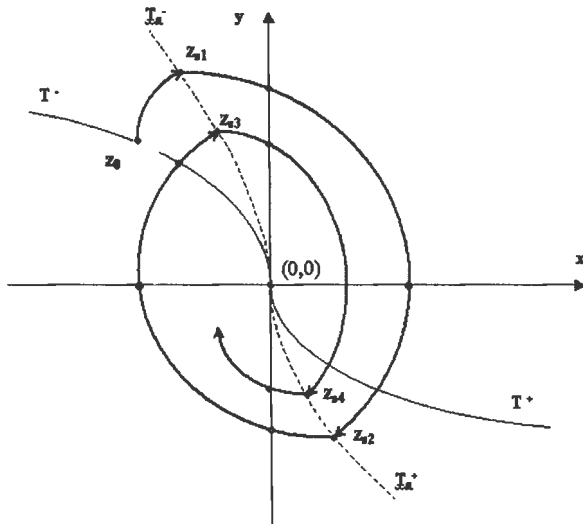
#### Twierdzenie 3 [4]

Dany jest obiekt (1), (2) oraz stan docelowy położony w początku układu współrzędnych, tj.  $z_1 = 0 = (0,0)$ .

Jeżeli funkcja oporów ruchu spełnia warunki

$$A_2 > \frac{A_1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}}} \text{ i } A_4 < \frac{A_3 - \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{(1-A_2^2)}}}{1 + \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{(1-A_2^2)}}}, \quad (5)$$

to wówczas istnieje trajektoria oscylująca wokół celu  $\bar{T}_Q$  (rys. 3), startująca ze stanu początkowego  $z_0 \in T^-$  i osiągająca cel w skończonym czasie, po wykonaniu nieskończonej ilości okrążeń celu.



Rys. 3 Trajektoria oscylacyjna  $\bar{T}_Q$

#### Wniosek 4

Jeżeli funkcja oporów ruchu spełnia warunki (5) to czasooptymalne przejście obiektu (1), (2) ze stanu  $z_0 \in T^-$  [lub  $T^+$ ] do początku układu współrzędnych  $0 = (0, 0)$  odbywa się wzdłuż trajektorii zbieżnie oscylującej wokół celu, która jest trajektorią rozwiązania czasooptymalnego. ■

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

W rozdziale niniejszym przedstawione zostaną wyniki obliczeń numerycznych ilustrujące Wniosek 4.

Tabela 1 zawiera współrzędne stanów  $z_0 = (x_0, y_0) \in T^-$ , czasy  $T_{2p}$  będące czasami przejścia obiektu z punktu  $z_0 = (x_0, y_0)$  do celu  $z_1 = 0$  wzdłuż trajektorii  $T_{Q2}$  oraz czasy  $T_{osc}$  będące czasami przejścia

obiektu z punktu  $z_0 = (x_0, y_0)$  do celu  $z_1 = 0$  wzdłuż trajektorii  $\bar{T}_Q$  oraz względną procentową różnicę czasów  $\Delta T = \frac{T_{2p} - T_{osc}}{T_{2p}} * 100\%$ , dla wybranych wartości

funkcji oporów ruchu  $f(x)$ . Obliczenia potwierdzają wnioski zawarte w poprzednim rozdziale, że czasy przejścia obiektu wzdłuż trajektorii oscylacyjnych  $\bar{T}_Q$  są krótsze niż czasy przejścia obiektu wzdłuż trajektorii minimalnoczasowych  $T_{Q2}$ .

Tabela 2 zawiera współrzędne stanów  $z_0 \in T^-$ , współrzędne stanów  $z_p \in T^-$  (po wykonaniu jednego okrążenia celu), czasy  $T_0$  będące czasami przejścia obiektu z punktu  $z_0 = (x_0, y_0)$  do punktu  $z_p = (x_p, y_p)$  wzdłuż trajektorii bez przełączenia, tj. wzdłuż *Trajektorii Końcowej*  $T^-$ , czasy  $T_{osc1}$  będące czasami przejścia obiektu z punktu  $z_0 = (x_0, y_0)$  do punktu  $z_p = (x_p, y_p)$  wzdłuż trajektorii  $\bar{T}_Q$  oraz względną procentową różnicę czasów  $\Delta T = \frac{T_0 - T_{osc1}}{T_0} * 100\%$ , dla wybranych wartości funkcji oporów ruchu  $f(x, y)$ .

Tabela 1. Czasy przejść obiektu ze stanów  $z_0 = (x_0, y_0) \in T^-$  do celu  $z_1 = (0,0) = 0$  wzdłuż trajektorii oscylacyjnej  $\bar{T}_Q$

wartości $f(x,y)$	$z_0 = (x_0, y_0)$	$T_{2p}$	$T_{osc}$	$\pm T$ [%]
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.7;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	$(-6.6667, 2)$	6.6469	6.5032	2.16
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.7;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.7;$	$(-6.6667, 2)$	6.0815	5.9782	1.70
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.8;$ $A_3 = 0.9;$ $A_4 = -0.9$	$(-10, 2)$	9.2337	8.4670	8.30
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.8;$ $A_3 = 0.9;$ $A_4 = -0.7$	$(-10, 2)$	7.9698	7.8056	2.06
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.9;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	$(-20, 2)$	14.4840	12.8670	11.16
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.9;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	$(-20, 2)$	14.1055	12.4739	11.57

Wyniki zawarte w tabelach 1 i 2 pokazują, że trajektoria oscylacyjna  $\bar{T}_Q$  już po wykonaniu jednego okrążenia zbliża się znacznie do celu, a czas przejścia obiektu wzdłuż niej jest krótszy od czasu przejścia wzdłuż Tra-

jektorii Końcowej, a także krótszy od czasu przejścia wzdłuż trajektorii  $T_{Q2}$ .

Tabela 2. Czasy przejść obiektu z  $z_0 = (x_0, y_0)$  do  $z_p = (x_p, y_p)$  wzdłuż trajektorii oscylacyjnych  $\bar{T}_Q$

Wartości $f(x, y)$	$z_0$	$z_p$	$T_0$	$T_{con}$	$\pm T$ [%]
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.7;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	(-6.6667, 2)	(0, 0.02)	6.6087	6.4467	2.5
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.7;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.7;$	(-6.6667, 2)	(0, 0.05)	6.4957	5.8249	10.3
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.8;$ $A_3 = 0.9;$ $A_4 = -0.9$	(-10, 2)	(-0.01, 0.07)	9.6430	8.1647	15.3
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.8;$ $A_3 = 0.9;$ $A_4 = -0.7$	(-10, 2)	(-0.01, 0.06)	9.7105	7.5797	21.9
$A_1 = -0.7;$ $A_2 = 0.9;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	(-20, 2)	(-0.05, 0.1)	19.0175	12.2349	35.7
$A_1 = -0.9;$ $A_2 = 0.9;$ $A_3 = 0.8;$ $A_4 = -0.9$	(-20, 2)	(-0.05, 0.1)	19.0204	11.8629	37.6

#### 4. ZAMKNIĘTE UKŁADY STEROWANIA

Zgodnie z zasadą Regularnej Syntezy [1, 2] można skonstruować czasooptymalną funkcję sterującą typu bang-bang realizującą tezy zawarte w *Twierdzeniu 2*.

##### 4.1. Zamknięty układ sterowania czasooptymalnego

Dla tezy a i b *Twierdzenia 2* otrzymujemy następującą funkcję czasooptymalnego sterowania zamkniętego:

$$u^*(x, y) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in T^+ \cup R_1^+ \\ -1, & (x, y) \in T^- \cup R_1^- \end{cases}$$

przy czym *Trajektorie Końcowe*  $T^+$  i  $T^-$  zdefiniowane są formułami (3) i (4), natomiast zbiory  $R_1^+$ ,  $R_1^-$  opisują wzory:

$$R_1^- = \{(x, y) : (x', y) \in T_1 \Rightarrow x > x'\}$$

$$R_1^+ = \{(x, y) : (x', y) \in T_1 \Rightarrow x < x'\}$$

przy czym czasooptymalną *krzywą przełączeń*  $T_1$  tworzą *Trajektorie Końcowe*, a mianowicie  $T_1 = T^- \cup T^+$ ,

Dla realizacji zamkniętego systemu starowania zgodnie z tezą c) *Twierdzenia 2* jedną z gałęzi krzywej przełączeń tworzy zbiór stanów  $z_s$ , w których następuje pierwsze przełączenie funkcji sterującej. Krzywą tą definiuje następujący wzór:

$$T_s^- = \left\{ (x_s, y_s) : x_s = \frac{[\alpha_-^2(1-A_2) - \beta_-]}{2(1-A_2)[\alpha_-^2(1+A_2) + \beta_-]} y_s^2, y_s \geq 0 \right\} \quad (6)$$

przy czym

$$\alpha_- = (1-A_1) - (1-A_2) \left( 1 + \sqrt{\frac{2(1-A_1)}{1-A_4^2}} \right)$$

$$\beta_- = 2(1-A_1)^2 - \alpha_-^2(1+A_2)$$

Drugą gałąź krzywej przełączeń utworzy *Trajektoria Końcowa*  $T^+$ . Zauważmy, że krzywą przełączeń  $T_s^-$  nie tworzy żadne z rozwiązań systemu (1), (2).

Czasooptymalna funkcja sterująca układu zamkniętego będzie podobnie jak w poprzednim przypadku

$$u^*(x, y) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in T^+ \cup R_{II}^+ \\ -1, & (x, y) \in T_s^- \cup R_{II}^- \end{cases}$$

przy czym

$$R_{II}^- = \{(x, y) : (x', y) \in T_{II} \Rightarrow x > x'\}$$

$$R_{II}^+ = \{(x, y) : (x', y) \in T_{II} \Rightarrow x < x'\}$$

natomiast *czasooptymalną krzywą przełączeń*  $T_{II}$  wyznacza związek  $T_{II} = T_s^- \cup T^+$

Dla realizacji zamkniętego systemu starowania zgodnie z tezą d) *Twierdzenia 2* jedną z gałęzi krzywej przełączeń tworzy jak poprzednio zbiór stanów  $z_s$ , w których następuje pierwsze przełączenie funkcji sterującej. W tym przypadku krzywą definiuje formuła:

$$T_s^+ = \left\{ (x_s, y_s) : x_s = \frac{[\beta_+ - \alpha_+^2(1+A_4)]}{2(1+A_4)[\alpha_+^2(1-A_4) + \beta_+]} y_s^2, y_s \leq 0 \right\}, \quad (7)$$

przy czym

$$\alpha_+ = (1+A_3) - (1+A_4) \left( 1 + \sqrt{\frac{2(1+A_3)}{1-A_2^2}} \right)$$

$$\beta_+ = 2(1+A_3)^2 - \alpha_+^2(1-A_4)$$

Postępując tak samo jak w przypadku tezy c) *Twierdzenia 2* otrzymujemy:



$$u^*(x, y) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in T_s^+ \cup R_{III}^+ \\ -1, & (x, y) \in T_s^- \cup R_{III}^- \end{cases}$$

przy czym

$$R_{III}^- = \{(x, y) : (x', y) \in T_{III} \Rightarrow x > x'\}$$

$$R_{III}^+ = \{(x, y) : (x', y) \in T_{III} \Rightarrow x < x'\}$$

natomiast *czasooptymalną krzywą przełączy*  $T_{III}$  wyznacza związek  $T_{III} = T_s^- \cup T_s^+$ . Oczywiście drugą gałąź krzywej przełączy utworzy *Trajektoria Końcowa*  $T^-$ . Zauważmy, że jak poprzednio *krzywą przełączy*  $T_s^+$  nie tworzy żadne z rozwiązań systemu (1), (2).

#### 4.2. Zamknięty układ sterowania sub-czasooptymalnego

Synteza struktur sterujących według rozwiązania czasooptymalnego zawartego w *Twierdzeniu 3* i we *Wniosku 4* napotyka, z technicznego punktu widzenia, na bardzo wysoki stopień trudności. Dodatkowo dla oporów ruchu spełniających warunki (5) nie znamy równań czasooptymalnych krzywych przełączy i zmuszeni jesteśmy stosować struktury sub-czasooptymalne. Przy tworzeniu struktury sub-czasooptymalnej istotnym faktem jest właściwość procesu oscylacyjnego zawarta w poniższym wniosku.

##### Wniosek 5

Z faktu zbieżności trajektorii oscylacyjnej  $\bar{T}_Q$  wynika, iż dowolne otoczenie celu może być osiągnięte przez tę trajektorię oscylacyjną po wykonaniu skończonej ilości okrążeń celu w skończonym czasie. ■

W oparciu o *Twierdzenie 3* i *Wniosek 4* otrzymujemy następującą funkcję sub-czasooptymalnego sterowania zamkniętego:

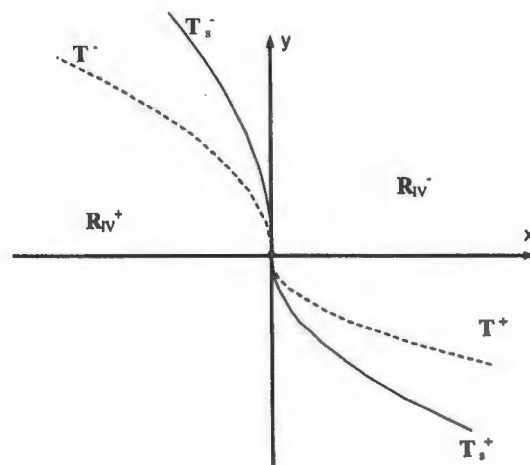
$$u^*(x, y) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in T_s^+ \cup R_{IV}^+ \\ -1, & (x, y) \in T_s^- \cup R_{IV}^- \end{cases} \quad (8)$$

przy czym krzywe  $T_s^-$  i  $T_s^+$  zdefiniowane są przez (6) i (7), natomiast zbiory  $R_{IV}^+$ ,  $R_{IV}^-$  opisują wzory:

$$R_{IV}^- = \{(x, y) : (x', y) \in T_{IV} \Rightarrow x > x'\}$$

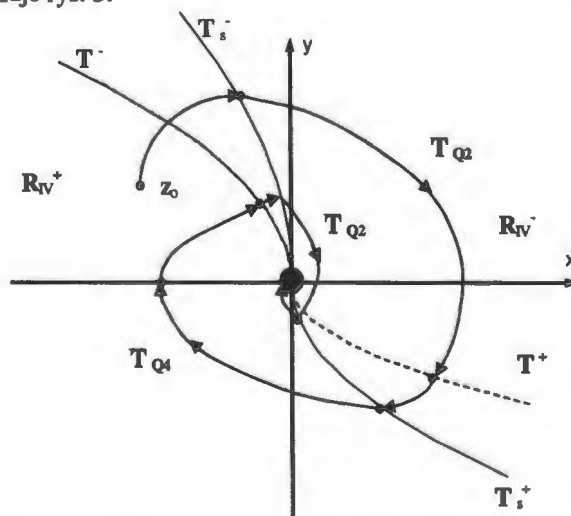
$$R_{IV}^+ = \{(x, y) : (x', y) \in T_{IV} \Rightarrow x < x'\}$$

przy czym sub-czasooptymalną krzywą przełączy  $T_{IV}$  tworzą krzywe  $T_s^+$  i  $T_s^-$  (rys. 4), a mianowicie  $T_{IV} = T_s^- \cup T_s^+$



Rys. 4 Krzywe przełączy  $T_s^+$  i  $T_s^-$  oraz zbiory  $R_{IV}^+$  i  $R_{IV}^-$

Zinterpretujmy prawo sterowania sub-czasooptymalnego (8). Rozważmy start systemu z punktu  $z_0 \in R_{IV}^+$ . Z punktu tego startuje trajektoria rozwiązania  $q_+$  dążąca do przecięcia z krzywą przełączy  $T_s^-$ . W punkcie tym następuje pierwsze przełączenie funkcji sterującej. Rozpoczyna się więc proces generujący trajektorię minimalnoczasową oznaczoną poprzednio jako  $T_{Q2}$ . A zatem z tego punktu przecięcia startuje trajektoria rozwiązania  $q_-$ , która zagłębia się w zbiór  $R_{IV}^-$ , co wynika z właściwości rozwiązania  $q_-$ . Trajektoria ta dąży do przecięcia z krzywą przełączy  $T_s^+$ , gdzie następuje drugie przełączenie sygnału sterującego i rozpoczyna się proces generujący trajektorię minimalnoczasową oznaczoną jako  $T_{Q4}$ . Z tego punktu startuje trajektoria rozwiązania  $q_+$ , która zagłębia się w zbiór  $R_{IV}^+$  i cykl się powtarza. Jak zostało pokazane w Rozdziale 3 po wykonaniu niewielkiej liczby okrążeń zostaje osiągnięte dowolne otoczenie celu. Proces taki pokazuje rys. 5.



Rys. 5 Sub-czasooptymalne przejście obiektu z  $z_0 \in R_{IV}^+$  w bliskie otoczenie celu.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu sterowania czasooptymalnego dla pewnej klasy nieliniowych i nieciągłych obiektów dynamicznych. Pokazano, że dla badanych obiektów sterowanie czasooptymalne jest typu bang-bang oraz, że w zależności od wartości funkcji oporów ruchu zamknięty układ sterowania generuje trajektorie:

- z co najwyżej jedną operacją przełączenia sygnału sterującego;
- z co najwyżej dwoma operacjami przełączenia sygnału sterującego;
- z nieskończoną ilością operacji przełączenia.

Ostatni przypadek opisuje zjawisko zbieżnych czasooptymalnych trajektorii oscylacyjnych, które po wykonaniu nieskończonej liczby okrążeń celu osiągają ten cel w skończonym czasie. Przedstawione wyniki obliczeń numerycznych pokazują, że czas przejścia obiektu wzdłuż trajektorii oscylacyjnych jest krótszy od czasu przejścia wzdłuż trajektorii z jednym i dwoma przełączeniami.

W rozdziale 4 pracy podano przykłady realizacji zamkniętych układów czasooptymalnych i sub-czasooptymalnych dla badanej klasy obiektów.

### OSCILLATORY TIME-OPTIMAL PROCESSES

The purpose of the paper was to present the solution of a time-optimal problem of discontinuous plant, the dynamics of which is given by a planar ordinary differential equations. There has been proved that the time-optimal control is of the bang-bang type. It has been shown that depending on the parameters of the resistance function the following cases of time-optimal control exist:

- the time-optimal closed-loop system executes at most one switching operation;
- the time-optimal closed-loop system executes at most two switching operation;
- closed-loop system executes infinite number of the switching operations but induced trajectory oscillates convergently round the target state and reaches it in a finite time;

In the paper time-optimal and sub-time-optimal feedback has been proposed. Results presented in the paper can be used in control systems of position mechanisms.

## Literatura

- [1] Hejmo W. (1997) *Singular Phenomena in a Time-Optimal Feedback Control. Monograph 202*. Cracow Univ. of Technology, Kraków.
- [2] Hejmo W., Kloch J. (1989) On the Perturbations in a Time-Optimal Closed-Loop System. *Annales Polonici Mathematici*, 50, 1, 37-52.
- [3] Hejmo W., Majewska K. (2004) On a Singular Phenomenon In Certain Time-Optimal Feedback Structure. *15<sup>th</sup> International Conference on Systems Science*. 1, Wrocław.
- [4] Majewska K. (2004) Synteza zamkniętych czasooptymalnych i sub-czasooptymalnych struktur sterowania planarnymi nieciągłymi obiektami dynamicznymi o słabej regularności.



**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**