263/2009

Raport Badawczy

Research Report

RB/68/2009

Wybrane metody wspomagania wielokryterialnych decyzji kooperacyjnych.

Część II

L. Kruś

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2009

Część II

Interakcyjne procedury i system komputerowy wspomagające analizę wielokryterialną i proces mediacji

5

Interakcyjne procedury wspomagające analizę wielokryterialną i proces mediacji

5.1 Koncepcja rozwiązania iteracyjnego

Przedstawiona niżej koncepcja iteracyjnego rozwiązania wielokryterialnego problemu targu została zainspirowana pracami Raiffa (1982), a w szczególności tzw. koncepcją "single text procedure" oznaczaną dalej procedurą SNT. Procedura ta została zaproponowana przez Rogera Fishera i jest często stosowana w negocjacjach międzynarodowych. Raiffa (1982) opisał tę procedurę w przypadku negocjacji w Camp David, w których uczestniczyli : Egipt i Izrael jako przeciwnicy – strony konfliktu, oraz Stany Zjednoczone jako mediator. Stany Zjednoczone przygotowywały pakiety propozycji, przedstawiane następnie pod uwagę przeciwników. Każdy pakiet rozumiany był jako (SNT) - pewien tekst poddawany krytyce przeciwników, następnie wielokrotnie modyfikowany w iteracyjny sposób. Tekst ten pozwalał skoncentrować uwagę przeciwników na tym samym zestawie zagadnień. Proces negocjacji rozpoczął się od pierwszego tekstu SNT, który by daleko od oczekiwań przeciwników. Proces był progresywny, tzn. każdy następny tekst SNT byl korzystniejszy dla obu stron od poprzedniego. Ostatecznie proces zakończył się porozumieniem zawartym po kilku iteracjach.

Idea iteracyjnego, progresywnego procesu, w którym wyznaczane są w poszczególnych iteracjach propozycje wypłat pod rozwagę negocjujących graczy, była podstawą sformułowanej niżej koncepcji rozwiązania iteracyjnego w wielokryterialnym problemie targu.

Rozpatrujemy klasę B^* gier targu (S, d) spełniających warunki **W2.1, W2.2, W2.3**.

Zakłada się, że rozwiązanie problem targu (S, d) poszukiwane jest w pewnej liczbie rund $t = 1, 2, \ldots, T$, w których określane są wypłaty d^t, $d^t \in S$. Końcowa dopuszczalna i akceptowalna przez graczy wypłata d^T stanowi rozwiązanie problemu.

Przyjmijmy następujące postulaty, które powinny być spełnione przez proces negocjacji określony ciągiem wypłat d^t:

P1

Proces negocjacji rozpoczyna się w punkcie braku porozumienia, t.j. $d^0 = d$, $d^t \in S$ dla $t = 1, 2, \ldots, T$.

P2

Proces jest progresywny, t.j. $d^t \geq d^{t-1}$ dla $t = 1, 2, \ldots, T$.

P3

Proces powinien prowadzić do rozwiązania niezdominowanego w zbiorze S, t.j. $d^T (= \lim_{t \to \infty} d^t$ jeśli $T = \infty)$ jest Pareto optymalne w zbiorze S.

P4

Zasada ograniczonego zaufania.

Zakłada się, że gracze mając ograniczone zaufanie do modelu gry oraz do przyszłych konsekwencji swoich wyborów starają się ograniczyć w poszczególnych rundach procesu negocjacji, możliwe poprawy wypłat kontrgraczy.

Przyjmijmy, że gracze określają swoje zaufanie w kolejnych rundach gry przy pomocy pewnego współczynnika, zwanego dalej współczynnikiem zaufania α_i^t, $0 < \alpha_i^t \leq 1$ gdzie t jest numerem rundy, a i - numerem gracza. Zasadę ograniczonego zaufania można wtedy zapisać w postaci:

$$d^t - d^{t-1} \leq \alpha_{\min}^t [u(d^{t-1}) - d^{t-1}]$$

dla $t = 1, \ldots, T$, gdzie $\alpha_{\min}^t$ jest minimalnym współczynnikiem zaufania w rundzie t, $\alpha_{\min}^t = \min\{\alpha_1^t, \ldots, \alpha_n^t, \alpha_{\max}^t\}$, $\alpha_{\max}^t = \max_\alpha\{\alpha \in R : d^{t-1} + \alpha[u(d^{t-1}) - d^{t-1}] \in S\}$. $u(d^{t-1})$ jest punktem względnej utopii, odzwierciedlającym preferencje graczy w zbiorze $\{x \in S : x \geq d^{t-1}\}$. Powyższa nierówność oznacza ograniczenie przyrostu wypłat wszystkich graczy przez wspólny (minimalny spośród podanych przez graczy) współczynnik zaufania. Przyjęcie przez graczy mniejszych współczynników zaufania, powoduje mniejszy przyrost wypłat w danej rundzie, a tym samym, powoduje, że proces będzie się odbywał w większej liczbie rund. Gracze będą wówczas mieli możliwość skorygowania swoich decyzji w następnych rundach.

P5

Każdy gracz zachowuje się racjonalnie, starając się maksymalizować swoje wypłaty w poszczególnych rundach zgodnie ze swoimi preferencjami, wyrażanymi za pośrednictwem punktu względnej utopii. Zakłada się, że w każdej rundzie t każdy gracz bada zbiór swoich i-niezdominowanych punktów w zbiorze $S^t = \{x \in S : x \geq d^{t-1}\}$, i określa swój preferowany punkt x_i^{it}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech w każdej rundzie t, $u(d^{t-1})$ oznacza względny punkt utopii zbioru $\{x \in S : x \geq d^{t-1}\}$ odzwierciedlający preferencje graczy, t.j. określony na podstawie preferowanych niezdominowanych punktów graczy. Postulat racjonalności można wówczas sformułować następująco: Dla danego

d^t, w każdej rundzie t, nie istnieje wypłata $x \in S$, spełniająca postulaty **P2, P4** taka, że $x > d^t$.

Postulat **P4** został przyjęty na podstawie wyników Fandla (1979) i Fandla, Wierzbickiego (1985), którzy po raz pierwszy sformułowali zasadę ograniczonego zaufania na podstawie obserwacji zachowań graczy w czasie eksperymentów growych. Pokażemy istnienie, postać i jednoznaczność procesu spełniającego te postulaty.

Twierdzenie 5.1
Dla każdego wielokryterialnego problemu targu $(S, d) \in B^*$ *i dla dowolnych współczynników zaufania* $\alpha^t_{\min}$ *takich, że* $\varepsilon \leq \alpha^t_{\min} \leq 1$, $t = 1, 2, \ldots, T$, *gdzie* ε *jest dowolnie małą liczbą* $0 < \varepsilon$, *istnieje jeden i tylko jeden iteracyjny proces* d^t, $t = 0, 1, \ldots, T$ *spełniający postulaty* **P1-P5**. *Proces ten można zapisać następująco:*
$d^0 = d$
$d^t = d^{t-1} + \alpha^t_{\min}[u(d^{t-1}) - d^{t-1}]$ *dla* $t = 1, \ldots, T$,
gdzie:
T jest najmniejszą liczbą t dla kktórej $d^t = d^{t+1}$
lub $T = \infty$.

■

Dowód
Wprowadźmy pojęcie kierunku poprawy w przestrzeni wypłat, w rundzie t.
$\lambda^t \in \mathbb{R}^M$, $\lambda^t = (\lambda^t_1, \lambda^t_2, \ldots, \lambda^t_n)$ jest kierunkiem poprawy w przestrzeni wszystkich graczy, jeśli λ^t_i jest kierunkiem poprawy gracza i w jego przestrzeni wypłat wyznaczonym na podstawie jego preferowanego punktu niezdominowanego, tzn. $\lambda^t = \delta * [u(d^{t-1}) - d^{t-1}]$, gdzie δ jest pewną liczbą, $d > 0$. Można przyjąć, że λ^t będzie takie, że $\lambda^t_{ij} > 0$ jeśli współrzędna (ij) należy do zbioru $J(x^t)$, oraz $\lambda^t_{ij} = 0$ w przypadku przeciwnym. ($J(x^t)$ jest zbiorem tylko tych

współrzędnych, wzdłuż których można uzyskać poprawę wypłat). Z przedstawionej konstrukcji ciągu $\{d^t\}_{t=0}^{\infty}$ oraz z założeń **W2.1**, **W2.2**, **W2.3** wynika, że jeśli $d^k = d^{k+1}$ to $J(x^k) = \emptyset$, tzn., że żadna ze współrzędnych w punkcie d^k nie może być poprawiona. Zatem d^k jest Pareto optymalne w S. Rozpatrzmy ciąg $\{d^t\}_{t=0}^{\infty}$. Ciąg ten jest monotonicznie rosnący i ograniczony, a zatem jest zbieżny. Niech $d_{\lim} = \lim_{t\to\infty} d^t$. Z przyjętej konstrukcji wynika, że $d_{\lim} \in S$. Przyjmijmy, że $d_{\lim}$ nie jest Pareto optymalne w zbiorze S. Wtedy dla dowolnej rundy t, zachodzą następujące relacje:
$\|d^t - d^{t-1}\| = \|\alpha^t_{\min}[u(d^{t-1}) - d^t]\| \geq \alpha * \|u(d_{\lim}) - d_{\lim}\| \geq$
$\geq \alpha * \min\{\|u^f(d_{\lim}, \lambda) - d_{\lim}\| : \lambda \in I\!R^M,\ \lambda_{ij} > 0$ jeśli $ij \notin J(d_{\lim})$,
$\lambda_{ij} = 0$ w przyp. przeciwnym $\} = \gamma > 0$,
gdzie $u^f(d_{\lim}, \lambda)$ oznacza punkt względnej utopii dla pewnego arbitralnego kierunku poprawy λ.
Wynika stąd, że ciąg $\{d^t\}_{t=0}^{\infty}$ nie jest zbieżny, co jest sprzeczne z założeniem. Pokazaliśmy zatem, że $d_{\lim}$ jest Pareto optymalne w zbiorze S. $\diamond$

Właściwości iteracyjnego rozwiązania

Właściwość 5.1.1

Dla każdego gracza, przyrost wypłaty w każdej rundzie jest zgodny z jego preferowanym, wybranym kierunkiem poprawy.

Dowód

Niech x^{it} oznacza preferowany, niezdominowany punkt gracza i w rundzie t. Z definicji względnego punktu utopijnego i z konstrukcji rozwiązania - ciągu wypłat w twierdzeniu 5.1 wynika, że $d_i^t - d_i^{t-1} = \beta * (x^{it} - d_i^{t-1})$ gdzie β jest dowolną liczbą $\beta > 0$.
$\diamond$

Właściwość 5.1.2
W dowolnej rundzie proces zostanie zakończony, jeśli każdy z graczy zaproponuje współczynnik zaufania $\alpha_i^t \geq \alpha_{\max}^t$, $i \in N$.

Właściwość 5.1.3
W przypadku, gdy w pierwszej rundzie ($t = 1$), każdy z graczy zaproponuje współczynnik zaufania $\alpha_i^1 \geq \alpha_{\max}^1$, $i \in N$, to uzyskane rozwiązanie jest tożsame z uogólnionym rozwiązaniem Raiffa-Kalai-Smorodinsky przedstawionym w punkcie poprzednim, tzn.

$$d^T = d^1 = f^R(S, d, u).$$

Rozwiązanie to ma w tym przypadku wszystkie własności uogólnionego rozwiązania R-K-S.

Zauważmy, że konstrukcja rozwiązania iteracyjnego wykorzystuje koncepcję uogólnionego rozwiązania Raiffa. Poprawa wypłat graczy w kolejnej rundzie, następuje w kierunku uogólnionego rozwiązania Raiffa, przy czym krok tej poprawy jest ograniczony przez wartość łącznego współczynnika zaufania graczy.

5.2 Interakcyjna procedura mediacyjna wykorzystująca ideę rozwiązania iteracyjnego

Koncepcja iteracyjnego rozwiązania może być wykorzystana do budowy interakcyjnej procedury wspomagającej graczy w znalezieniu niezdominowanego rozwiązania zgodnego z ich preferencjami. Zgodnie z koncepcją rozwiązania iteracyjnego przyjmujemy, że procedura ta jest opisana przez pewien proces - ciąg wypłat $\{d^t\}_{t=1}^{t=T}$ należących do zbioru porozumień. Proces rozpoczyna się w punkcie status quo i ma następujące własności: jest progresywny, oraz zbiega do rozwiązania Pareto optymalnego w zbiorze S. Poszczególne wypłaty d^t generowane są w kolejnych rundach procedury w zależności od preferencji graczy, i mogą być traktowane jako propozycje rozwiązań mediacyjnych zgodnie z koncepcją procedury SNT. Zakłada się, że procedura realizowana jest przez odpowiedni system komputerowy, współpracujący w interakcyjny sposób z graczami.

Schemat procedury

Formalnie schemat procedury może być zapisany następująco: Niech d^t oznacza wektor wypłat w rundzie t, $d^t \in S$, oraz $d^0 = d$, dla $t = 1, 2, \ldots$ Niech $S^t = \{x : x \in S, x \geq d^{t-1}\}$.

Każdy gracz i posługuje się dwoma parametrami, którymi może w każdej rundzie wpływać na przebieg procesu. Są to: punkt referencyjny $r_i^t \in I\!R^{m^i}$, oraz współczynnik zaufania $\alpha^i \in (\delta, 1]$, gdzie δ jest dowolnie małą liczbą $\delta > 0$. Punkty referencyjne wykorzystywane są do testowania i analizy osiągalnych rozwiązań oraz służą do wyrażania przez graczy ich preferencji. Wybór odpowiedniej wartości współczynnika zaufania pozwala każdemu graczowi (zgodnie z zasadą ograniczonego zaufania) ograniczyć możliwe przyrosty wypłat kontrgraczy.

Krok 1. Przyjmij $t = 1$.

Krok 2. Rozpocznij interakcyjną analizę osiągalnych wypłat dokonywaną niezależnie przez poszczególnych graczy $i = 1, 2, \ldots n$.

Krok 3. Przedstaw graczowi i informację o punkcie idealnym I_i^t, oraz o punkcie status quo d^{t-1}.

Krok 4. Przyjmij podane przez gracza wartości odpowiadające jego punktowi referencyjnemu r_{ij}^t, $j = 1, 2, \ldots, m^i$, oraz założone punkty referencyjne kontrgraczy r_l^t, $l = 1, 2, \ldots, n$, $l \neq i$.

Krok 5. Przyjmij podaną przez gracza wartość współczynnika zaufania α_i^t.

Krok 6. Wyznacz i-niezdominowany punkt x_i^{it} gracza i oraz punkt względnej utopii u^t i przewidywane rozwiązanie kooperacyjne rundy $\hat{x}_i^t$.

Krok 7. Wróć do kroku 4 i wyznacz następne punkty i-niezdominowane x_i^{it}, względnej utopii u^t, przewidywane rozwiązania $\hat{x}_i^t$ powtarzając kroki 5 i 6 dla innych punktów referencyjnych podanych przez gracza, tak długo, aż gracz będzie miał dostateczną informację, aby dokonać wyboru preferowanego (zgodnego z jego preferencjami) punktu referencyjnego $\hat{r}_i^t$ oraz odpowiadających mu $\hat{x}_i^{it}$, $\hat{\hat{x}}_i^t$, spośród analizowanych punktów x_i^{it}, $\hat{x}_i^t$.

Krok 8. Sprawdź czy wszyscy gracze dokonali wyboru swoich preferowanych wypłat, jeśli nie, czekaj aż zakończą fazę interakcyjnego przeglądania zbioru wypłat w krokach 2-7.

Krok 9. Wyznacz kooperacyjne rozwiązanie $d^t = (d_1^t, d_2^t, \ldots, d_n^t)$ rundy t.

Krok 10. Przedstaw wypłaty (rozwiązanie) d_i^t odpowiednio graczom $i = 1, 2, \ldots n$.

Krok 11. Sprawdź czy rozwiązanie kooperacyjne rundy jest Pareto optymalne w zbiorze S. Jeśli tak - proces jest skończony, jeśli nie przyjmij następny numer rundy $t = t + 1$, i wróć do kroku 2.

W przedstawionej schematycznie procedurze mamy do czynienia z ciągiem problemów targu (S^t, d^{t-1}). W każdej rundzie gracze dokonują najpierw niezależnie analizy osiągalnych wypłat ze zbioru S^t przy użyciu punktów referencyjnych, a następnie wybierają preferowane rozwiązania w ich przestrzeniach kryteriów (kroki

2-6). Na podstawie wybranych przez graczy preferowanych rozwiązań, oraz przyjętych współczynników zaufania, system wyznacza i proponuje graczom mediacyjne rozwiązanie kooperacyjne danej rundy (kroki 9-10).

Problem interakcyjnego przeglądania przez graczy zbioru osiągalnych rozwiązań może być różnie rozwiązany. Niżej rozpatrzymy dwa podejścia, które mogą być stosowane w zależności od sformułowania problemu targu. Pierwsze wykorzystuje idee maksymalizacji kierunkowej i leksykograficznej poprawy rozwiązań, i może być stosowane w przypadku gdy zbiór porozumień jest określony bezpośrednio w przestrzeni kryteriów. Jego zaletą jest prostota obliczeniowa. Drugie podejście wykorzystuje idee funkcji osiągnięcia Wierzbickiego (1986) i można je stosować w ogólniejszym przypadku, gdy problem targu określony jest w przestrzeni decyzyjnej graczy.

5.3 Przeglądanie wypłat przy wykorzystaniu optymalizacji kierunkowej

Przyjmijmy, że zbiór porozumień S określony jest bezpośrednio w przestrzeni kryteriów graczy w formie układu nierówności $f_k(x) \geq 0$, gdzie $f_k : I\!R^M \to I\!R$, $k = 1, \ldots, p$. Funkcje f_k mogą być liniowe, lub nieliniowe, zakłada się jednak, że spełnione są warunki **W5.1**, **W5.2**, **W5.3** - poprawnego określenia problemu targu. Przy wymiarowości przestrzeni kryteriów M większej od trzech i przy znacznej liczbie nierówności określających zbiór porozumień, postać tego zbioru nie może być eksplicite przedstawiona graczom. Możliwe jest natomiast wyznaczenie pewnej skończonej liczby punktów charakteryzujących brzeg Pareto tego zbioru.

Każdemu punktowi referencyjnemu r_i^t w przestrzeni kryteriów gracza i, przy założeniu, że $r_i^t > d_i^t$, odpowiada pewien kierunek poprawy kryteriów: $\lambda_i^t = r_i^t - d_i^t$. Dla danego (przyjętego przez gracza i) punktu referencyjnego, i-niezdominowany punkt tego gracza x_i^{it} można wyznaczyć następująco:

$$x_i^{it} = \max_{\geq}\{x_i \in I\!R^{m^i} : x \in S, x \geq d^{t-1},$$
$$x_i = d^{t-1} + a * \lambda_i^t \text{ dla pewnego } a \in R\}. \quad (5.1)$$

Zauważmy, że jest to zadanie maksymalizacji w kierunku λ_i^t w zbiorze S^{it} stanowiącym rzut zbioru S^t na przestrzeń kryteriów gracza i. Do wyznaczenia maksymalnego elementu w tym zbiorze w kierunku λ_i^t można użyć prostej metody przepołowienia (bisection method).

Wyznaczenie przewidywanego rozwiązania wymaga znajomości punktów referencyjnych lub kierunków poprawy kontrgraczy. Ponieważ gracz takiej informacji nie posiada, musi te wartości założyć. Może wykorzystać do tego celu informację z poprzednich rund, lub też przyjąć te wartości arbitralnie. Przyjmijmy, że dany gracz przyjmie wartości punktów referencyjnych zarówno dla siebie jak i dla wszystkich kontrgraczy. (Założono, że punkty referencyjne dla kontrgraczy są przyjmowane domyślnie na podstawie ich decyzji podjętej w poprzedniej rundzie, a w przypadku pierwszej rundy na podstawie punktu idealnego. Gracz może jednak przeglądać rozwiązania także dla innych, założonych przez siebie punktów referencyjnych kontrgraczy). Oznaczmy przez $r^t = (r_1^t, r_2^t, \ldots, r_n^t)$ określony w ten sposób punkt referencyjny w przestrzeni kryteriów wszystkich graczy. Punktowi temu odpowiada pewien kierunek poprawy $\lambda^t = r^t - d^{t-1}$, $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)$. Wyznaczmy, zgodnie z zależnością (5.1), punkty i-niezdominowane x_l^{lt}, $l = 1, 2, \ldots, n$, $l \neq i$. Punkty i-niezdominowane gracza i i kontrgraczy określają punkt względnej utopii $u^t = (x_1^{1t}, x_2^{2t}, \ldots, x_n^{nt})$. Przewidywane rozwiązanie $\hat{x}^t = (\hat{x}_1^t, \hat{x}_2^t, \ldots, \hat{x}_n^t)$ może być wyznaczone z zależności:

$$\hat{x}^t = d^{t-1} + \varepsilon^t * [u^t - d^{t-1}] \tag{5.2}$$

gdzie $\varepsilon = \min(\alpha_i^t, \alpha_{\max}^t)$, α_i^t jest współczynnikiem zaufania gracza i,

a $\alpha_{\max}^t$ jest maksymalną liczbą α taką, że $d^{t-1} + \alpha * [u^t - d^{t-1}]$ należy do zbioru S.

Rozwiązanie to wyznaczane jest przez rozwiązanie zadania optymalizacji kierunkowej. Zakłada się, że system wyznacza pewną liczbę tych rozwiązań dla różnych punktów odniesienie proponowanych przez gracza w interakcyjnej, procedurze uczącej. Uczenie się gracza polega na tym, że mając coraz więcej informacji o charakterze zbioru S^t, a w szczególności o zbiorze wypłat niezdominowanych i o możliwych wypłatach kooperacyjnych, potrafi lepiej sprecyzować swoje preferencje i aspiracje, odpowiednio dobierając kolejne punkty referencyjne. Zakłada się, że proces ten trwa tak długo, aż gracz wybierze swoje preferowane rozwiązanie. Rozwiązanie to będzie się na ogół różnić od rozwiązania kooperacyjnego wyznaczanego w danej rundzie na podstawie kierunków poprawy – punktów odniesieniareferencyjnych wybranych rzeczywiście przez wszystkich graczy.

Rozwiązanie kooperacyjne danej rundy (krok 9) może być również wyznaczone metodą optymalizacji kierunkowej. Przyjmijmy, że określony jest przez wszystkich graczy wektor preferowanych punktów referencyjnych $\hat{r}^t = (\hat{r}_1^t, \hat{r}_2^t, \ldots, \hat{r}_n^t)$. Punkty i-niezdominowane poszczególnych graczy są wyznaczane z zależności (5.1) dla punktów referencyjnych $\hat{r}_i^t$. Punkty i-niezdominowane określają punkt względnej utopii $\hat{u}^t$. Rozwiązanie kooperacyjne jest wówczas wyznaczane z zależności:

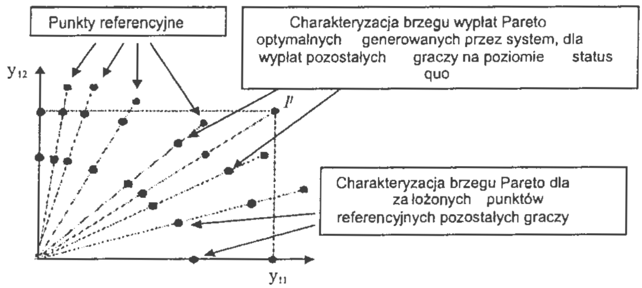
$$d^t = d^{t-1} + \varepsilon^t * [\hat{u}^t - d^{t-1}]$$

gdzie $\varepsilon^t = \min(\alpha_1^t, \alpha_2^t, \ldots, \alpha_n^t, \alpha_{\max}^t)$,

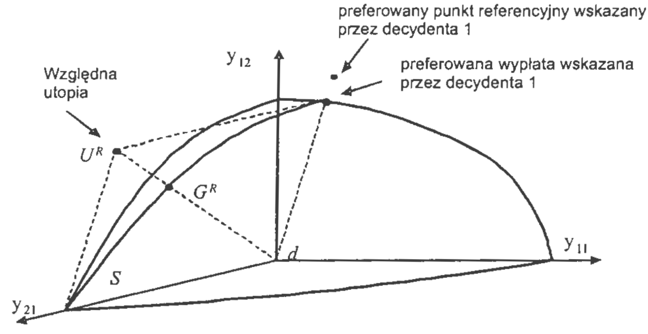
α_i^t, $i = 1, 2, \ldots, n$ jest współczynnikiem zaufania gracza i,

$\alpha_{\max}^t$ jest maksymalną liczbą α taką, że $d^{t-1} + \alpha * [u^t - d^{t-1}]$ należy do zbioru S.

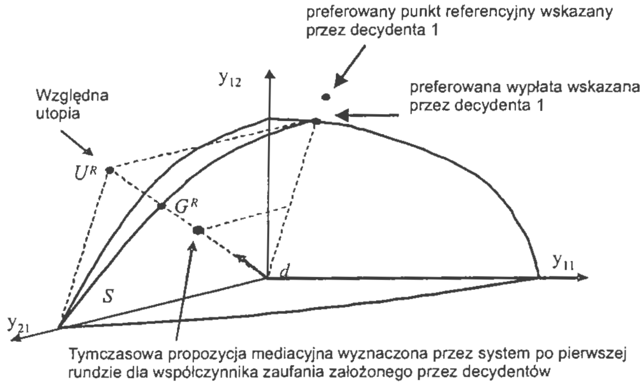
Rysunek 5.1 ilustruje możliwości przeglądania przez danego gracza jego osiągalnych wypłat. W wyniku takiego przeglądania, gracz uzyskuje charakterystykę brzegu wypłat Pareto optymalnych i może wskazać preferowaną wypłatę. Na podstawuie preferowanych wypłat wskazanych przez wszystkich graczy można wyznaczyć punkt względnej utopii, oraz uogólnione rozwiązanie Raiffa, Kalai, Smorodinsky, co pokazuje Rys. 5.2. Rys. 5.3 ilustruje jak wyznaczana jest propozycja mediacyjna w danej rundzie procedury, z uwzględnieniem założonego (na podstawie decyzji graczy) współczynnika zaufania. Rys. 5.4 ilustruje przejście do kolejnej rundy analizy i wyznaczania kolejnej propozycji mediacyjnej.



Rysunek 5.1. Przeglądanie zbioru niezdominowanych wypłat gracza na podstawie zakładanych przez niego punktów referencyjnych

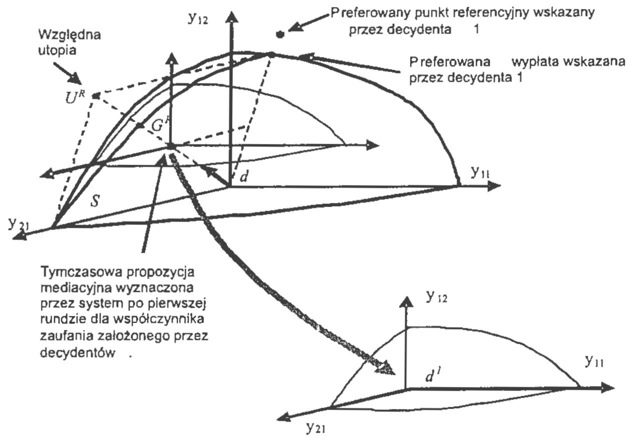


Rysunek 5.2. Wyznaczanie punktu względnej utopii i uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky



Rysunek 5.3. Wyznaczanie propozycji mediacyjnej na podstawie założonego współczynnika zaufania

Zakładamy, że każdy gracz dostatecznie zbadał swój zbiór punktów niezdominowanych. Może się jednak zdarzyć, gdy zbiór



Rysunek 5.4. Przejście do kolejnej rundy analizy

ten nie jest dostatecznie przetestowany, że wybrany punkt referencyjny prowadzi do punktu słabo niezdominowanego. W tym przypadku, nawet jeśli gracze przyjmą współczynnik zaufania równy jeden chcąc zakończyć proces, procedura będzie jeszcze przebiegać kilka iteracji zanim osiągnięte zostanie rozwiązanie niezdominowane. W celu usprawnienia procedury, zaproponowano i zbadano (Bronisz, Krus, Lopuch, 1987) ideę leksykograficznej poprawy rozwiązań słabo Pareto optymalnych do rozwiązań Pareto optymalnych bez interakcji graczy. Uzyskane wyniki teoretyczne uogólniają wyniki Rawlsa (1971), oraz Imai (1983).

Podejście optymalizacji kierunkowej z leksykograficzną poprawą rozwiązań słabo niezdominowanych zostały wykorzystane w systemie komputerowym MCBARG omawianym w jednym z następnych punktów pracy.

5.4 Przeglądanie wypłat przy wykorzystaniu idei funkcji osiągnięcia

Metoda funkcji osiągnięcia była zaproponowana i rozwijana w pracach Wierzbickiego (1982, 1986), jako podejście interakcyjnego rozwiązywania zadań optymalizacji wielokryterialnej. Niżej przedstawimy wykorzystanie tego podejścia do przeglądania przez poszczególnych graczy rozwiązań niezdominowanych i wyboru rozwiązania preferowanego w omawianej, interakcyjnej procedurze wspomagającej rozwiązywanie problemu targu, zgodnie z propozycją przedstawioną w pracy (Kruś 1989).

Rozpatrujemy ogólne sformułowanie problemu targu w przestrzeni zmiennych decyzyjnych graczy, przedstawione w punkcie 2., zakładając że dany jest model t.j. określony zbiór dopuszczalnych decyzji Z_0 oraz odwzorowanie P z przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń kryteriów wszystkich graczy.

Przyjmujemy w niniejszym punkcie, że gracze mogą zarówno maksymalizować jak i minimalizować swoje kryteria. W tym przypadku częściowy porządek w przestrzeni kryteriów może być wprowadzony przez stożek C^*:

$$\begin{aligned} C^* = \{x \in I\!R^M : \; & x_{ij} \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, m'^i \\ & x_{ij} \leq 0, \; j = m'^i + 1, m'^i + 2, \ldots, m^i, \\ & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

gdzie kryteria maksymalizowane przez danego gracza i przyjmują indeksy $j = 1, 2, \ldots m'^i$, a kryteria minimalizowane - odpowiednio $j = m'^i + 1, m'^i + 2, \ldots, m^i$.
Definicje elementów Pareto optymalnych i słabo Pareto optymalnych są analogiczne do definicji przedstawionych w punkcie 2., przy czym zastępujemy stożek C stożkiem C^*.

Wprowadzamy funkcję osiągnięcia gracza i w postaci:

$$q_i(x_i, \overline{x}_i, \underline{x}_i) = \min_{1 \le j \le m^i} v_j(x_{ij}, \overline{x}_{ij}, \underline{x}_{ij}),$$

gdzie:

$$v_j(x_{ij}, \overline{x}_{ij}, \underline{x}_{ij}) = \begin{cases} (x_{ij} - \overline{x}_{ij})/|\overline{x}_{ij} - \underline{x}_{ij}|, & \text{dla } j \in [1, m'^i, \\ (\overline{x}_{ij} - x_{ij})/|\overline{x}_{ij} - \underline{x}_{ij}|, & \text{dla } j \in [1 + m'^i, m^i], \end{cases}$$

wartości $\overline{x}_{ij}$ dla $j = 1, \ldots, m^i$, określają składowe punktu referencyjnego gracza i, natomiast
wartości $\underline{x}_{ij}$ - składowe tzw. punktu rezerwacji, t.j. punktu najgorszych dopuszczalnych wartości kryteriów.

Przeglądanie wypłat niezdominowanych w rundzie t odbywa się w ten sposób, że gracz i zakłada pewien punkt referencyjny $r_i^t = (r_{i1}^t, r_{i2}^t, \ldots, r_{im^i}^t)$. Przyjmowane jest wówczas $\overline{x}_{ij} = r_{ij}^t$, oraz $\underline{x}_{ij} = d_{ij}^{t-1}$ dla $j \in [1, m^i]$. Rozwiązywane jest następujące zadanie optymalizaji (oznaczone przez ZO1):
Maksymalizowana jest funkcja osiągnięcia q_i ze względu na wszystkie zmienne decyzyjne graczy, przy ograniczeniach określonych przez zbiór Z_0 oraz przez odwzorowanie P. Wyznaczone wartości kryteriów gracza i określają jego punkt niezdominowany x_i^{it} (w szczególnym przypadku słabo niezdominowany) odpowiadający założonemu punktowi referencyjnemu. Proces optymalizacji powtarzany jest dla kolejnych punktów referencyjnych zakładanych przez danego gracza.

Oprogramowanie pozwalające na wyznaczenie rozwiązań maksymalizujących funkcje osiągnięcia zostało opracowane w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej, Wydziału Elektroniki, w ramach rodziny sytemów komputerowych "DIDAS": system IAC-DIDAS-L (Rogowski, Sobczyk, Wierzbicki 1988) dla zadań liniowych, oraz IAC-DIDAS-N (Kręglewski, Paczyński, Granat, Wierzbicki 1988) dla zadań nieliniowych. W systemach tych wykorzystywane są bardziej złożone funkcje osiągnięcia, pozwalające wyznaczać tzw. rozwiązania właściwie Pareto optymalne. Przyjęta tutaj postać jest najprostszą, która zapewnia wyznaczenie rozwązań Pareto optymalnych (w szczególnym przypadku słabo Pareto optymalnych) dla niewypukłych zbiorów porozumień. Ma ona jednak tę własność, że wyznaczony punkt niezdominowany danego gracza leży dokładnie na linii łaczącej punkt odniesienia i punkt status quo, co zapewnia, że rozwiązania kooperacyjne wyznaczane są zgodnie z koncepcją rozwiązania iteracyjnego.

W celu wyznaczenia przewidywanego rozwiązania kooperacyjnego, oraz rozwiązania jednokrokowego, gracz powinien przyjąć punkt odniesienia nie tylko dla siebie, ale także dla wszystkich kontrgraczy t.j. $r^t = (r_1^t, r_2^t, \ldots, r_n^t)$.

Rozwiązanie jednokrokowe y^t wyznaczane jest jako rozwiązanie zadania oznaczonego przez ZO2, w którym maksymalizowana jest funkcja osiągnięcia:

$$q(x, \overline{x}, \underline{x}) = \min_{1 \le l \le n,\ 1 \le j \le m^i} \{v_{lj}(x_{lj}, \overline{x}_{ij}, \underline{x}_{lj}\},$$

ze względu na wszystkie zmienne decyzyjne, przy ograniczeniach określonych przez zbiór Z_0 oraz odwzorowanie P.
Funkcje $v_{lj}(x_{lj}, \overline{x}_{lj}, \underline{x}_{lj}) = v_j(x_{ij}, \overline{x}_{ij}, \underline{x}_{ij})$ dla $i = l$, $l = 1, 2, \ldots, n$, punkt referencyjny $\overline{x} = r^t$, punkt rezerwacji $\underline{x} = d^{t-1}$.

Przewidywane rozwiązanie kooperacyjne wyznaczane jest w sposób następujący:
Rozwiązywane jest n zadań optymalizacji ZO1 dla punktów odniesienia $r_1^t, r_2^t, \ldots, r_n^t$, i wyznaczane są punkty i-niezdominowane

x_i^{it}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Określają one punkt względnej utopii $u^t(r) = (x_1^{1t}, x_2^{2t}, \ldots, x_n^{nt})$. Wyznaczany jest punkt $y^r = d^{t-1} + \alpha_{\min}^t * (u^t(r) - d^{t-1})$. Jeśli punkt $y^r \in S$, to przewidywane rozwiązanie $\hat{x}^t = y^r$, jeśli nie to $\hat{x}^t = y^t$.

Rozwiązanie kooperacyjne danej rundy wyznaczane jest analogicznie jak rozwiązanie przewidywane pojedynczego gracza, ale punkt $\overline{x}$ jest przyjmowany w zadaniu optymalizacji ZO2 na podstawie określonych przez wszystkich graczy wektorów preferowanych punktów referencyjnych $\hat{x}^t$.

5.5 Interakcyjna procedura mediacyjna wykorzystująca ideę uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky

Uogólnione rozwiązania Raiffa może być również bezpośrednio wykorzystane do konstrukcji interakcyjnej procedury mediacyjnej wspomagającej graczy w znalezieniu niezdominowanego i zgodnego z ich preferencjami rozwiązania w wielokryterialnym problemie targu. Procedura realizowana jest w pewnej liczbie rund $t = 1, 2, \ldots$. W każdej rundzie można wydzielić dwa etapy.

Etap pierwszy obejmuje interakcyjną analizę zbioru porozumień przeprowadzaną niezależnie przez poszczególnych graczy. Przyjmijmy, że analiza ta jest dokonywana przy pomocy zadawanych przez gracza kierunków poprawy λ_i^t gdzie t jest numerem rundy, a i numerem gracza. Oznaczmy punkt i-niezdominowany gracza i odpowiadający danemu kierunkowi poprawy przez: $x_i^{it}(\lambda_i^t)$, a punkt względnej utopii stanowiący złożenie punktów i-niezdominowanych wszystkich graczy przez:
$u^t(\lambda^t)$, gdzie $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)$, $u^t(\lambda^t) =$

$(x_1^{1t}(\lambda_1^t), x_2^{2t}(\lambda_2^t), \ldots, x_n^{nt}(\lambda_n^t))$. Dla każdego danego przez gracza jego kierunku poprawy λ_i^t, i założonych kierunków poprawy kontrgraczy λ_j^t, $j \neq i$, system wyznacza punkt i-niezdominowany gracza i z zależności:

$x_i^{i,t} = \max_{\geq}\{x_i \in I\!R^{m^i} : x \in S, x \geq d^{t-1}, x_i = d^{t-1} + a * \lambda_i^t$ dla pewnego $a \in R\}$, oraz przewidywane rozwiązanie x^t:

$x^t = f^R(S, d, u^t(\lambda^t))$.

Analogicznie jak w poprzedniej procedurze, przyjmuje się, że kierunki poprawy kontrgraczy przyjmowane są na podstawie ich decyzji podjętych w poprzedniej rundzie, a w przypadku pierwszej rundy na podstawie kierunku określonego przez punkt idealny. Analiza zbioru porozumień prowadzona jest przez gracza tak długo, aż potrafi wskazać swój preferowany kierunek poprawy.

Drugi etap procedury jest wykonywany, gdy wszyscy gracze zakończyli etap pierwszy i wybrali swoje preferowane kierunki poprawy $\hat{\lambda}_i^t$. Określany jest wówczas łączny kierunek $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)$, oraz punkt względnej utopii $\hat{u}^t(\lambda^t)$. Na podstawie uogólnionego rozwiązania Raiffa wyznaczane jest rozwiązanie kooperacyjne rundy $\hat{x}^t$:

$\hat{x}^t = f^R(S, d, \hat{u}^t(\lambda^t))$.

Rozwiązanie przedstawiane jest graczom. Jeśli wyrażają na nie zgodę, procedura jest zakończona, w przeciwnym przypadku procedura przechodzi do następnej rundy $t = t + 1$, i powtarzane są oba etapy.

Przedstawiona procedura zapewnia, podobnie jak procedura zbudowana an podstawie rozwiązania iteracyjnego, że rozwiązanie spełnia własności wynikające z przyjętych aksjomatów, tzn. zapewnia uczciwy wybór niezdominowanego punktu w zbiorze porozumień.

Rozwiązanie $\hat{x}^t$ jest odporne na możliwe manipulacje graczy polegające na proponowaniu kierunków poprawy niezgodnych z ich preferencjami, w celu "oszukania" kontrgraczy i uzyskania lepszych wyników. Zauważmy, że rozwiązanie $\hat{x}^t = f^R(S, d, \hat{u}^t(\lambda^t))$ ma tę własność, że dla każdego $i \in N$ istnieje taka liczba $\beta > 0$: $\hat{x}_i^t - d_i = \beta * \lambda_i^t$.

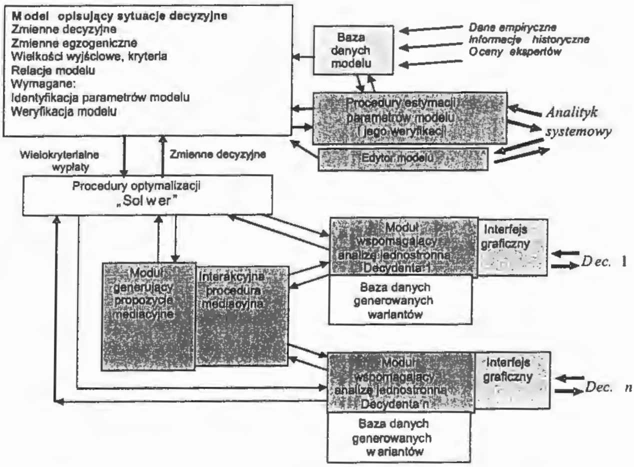
Uogólnione rozwiązania Raiffa ma własność ciągłości w klasie gier B^*. Jest również ciągłe ze względu na kierunki poprawy graczy. Własności te powinny zagwarantować zbieżność procedury, przy założeniu racjonalnych zachowań graczy.

Wszystkie rozwiązania kooperacyjne $\hat{x}^t$ wyznaczane w kolejnych rundach procedury leżą na brzegu Pareto zbioru porozumień. Jest to podstawowa różnica tej procedury od procedury wykorzystującej ideę rozwiązania iteracyjnego, w której kolejne rozwiązania należą do wnętrza zbioru porozumień i tworzą ciąg zbieżny do rozwiązania Pareto optymalnego.

Przedstawiona procedura została wykorzystana w eksperymentalnym systemie komputerowym i przetestowana na przykładzie modelu współpracy międzyregionalnej, dotyczącego wspólnego projektu rozwojowego (Kruś, Bronisz 1990).

System komputerowy wspomagający analizę i proces mediacji

Ogólna struktura systemu komputerowego wspomagającego proces analizy i mediacji w wielokryterialnym problemie targu jest przedstawiony na Rys. 6.1.



Rysunek 6.1. Ogólna struktura systemu komputerowego

Proponowany system zawiera reprezentację modelu, moduły wspomagające jednostronną analizę wykonywaną przez decydentów, moduł generujący propozycje mediacyjne, a także moduły zawierające procedury obliczeniowe (solwer), odpowiednie bazy danych, procedury realizujące interakcyjne sesje pracy i interfejs graficzny. Model opisujący problem decyzyjny stanowi podstawę do przeprowadzenia analizy decyzyjnej. Model jest konstruowany przez analityków systemowych, przy wykorzystaniu zebranej odpowiedniej informacji, zgodnie z regułami nauk systemowych. Model zawiera specyfikację zmiennych decyzyjnych, zmiennych egozogenicznych, wielkości wyjściowych, kryteriów, relacje opisujące zależność wielkości wyjściowych i kryteriów od zmiennych decyzyjnych, dla zakładanych zmiennych egzogenicznych. Parametry modelu są identyfikowane na podstawie zebranych danych źródłowych. Model wymaga odpowiedniej weryfikacji i oceny przed użyciem do analizy decyzyjnej. Z tych względów, w strukturze systemu, wymieniono bazę danych źródłowych, edytor modelu, procedury estymacji parametrów modelu i jego weryfikacji.

Moduł wspomagający jednostronną analizę umożliwia każdemu decydentowi uzyskać niezależnie informacje o możliwych wielokryterialnych wypłatach przy zakładanych scenariuszach, oraz poszukiwać preferowanej opcji. Analiza taka wykonywana jest w sposób interakcyjny.

System generuje także propozycje mediacyjne. Propozycje te są wyznaczane przy wykorzystaniu koncepcji rozwiązań teorii gier, omawianych w poprzednich rozdziałach, oraz na podstawie preferencji decydentów. Propozycje mediacyjne są generowane i prezentowane decydentom do analizy w specjalnej procedurze mediacyjnej. Procedury obliczeniowe optymalizacji są wykorzystywane w systemie: przy analizie wielokryterialnej, w modułach wspomagających analizę jednostronną oraz w module wyznaczającym propozycje mediacyjne do obliczenia koncepcji rozwiązań teorii gier.

Zgodnie z tą ogólną koncepcją oraz wykorzystując omówione wcześniej wyniki teoretyczne opracowano system komputerowy nazwany "MCBARG". MCBARG został zaprojektowany jako system wspomagający analizę decyzyjną w wielokryterialnym problemie targu. Przyjęto założenie, że model tego problemu jest sformułowany w przestrzeni kryteriów graczy przez dany punkt status quo i układ nierówności definiujących zbiór porozumień.

Oprogramowanie systemu zostało opracowane w ramach prac prowadzonych dla International Institute for Applied System Analysis w Austrii (IIASA) na temat "Aspiration based decision support systems". Oprogramowanie to zostało przygotowane zgodnie ze standardami przyjętymi w IIASA i zawiera w związku z tym opis w języku angielskim, a także jest dystrybuowane przez IIASA. Wersja użytkowa systemu zawiera skompilowany kod, pomocnicze zbiory informacyjne, przykłady ilustracyjne modeli problemów targu oraz przykłady sesji negocjacyjnych. Oprogramowanie może być instalowane na dowolnym komputerze typu IBM PC lub z nim kompatybilnym, pracującym z systemem operacyjnym MS Windows XP/Vista. Dokumentacja systemu (Kruś, Bronisz, Łopuch 1990) zawiera ważniejsze podstawy teoretyczne, szczegółowy opis funkcji systemu i jego użytkowania, ilustracyjny przykład sesji komputerowej.

Podstawowe funkcje systemu obejmują:

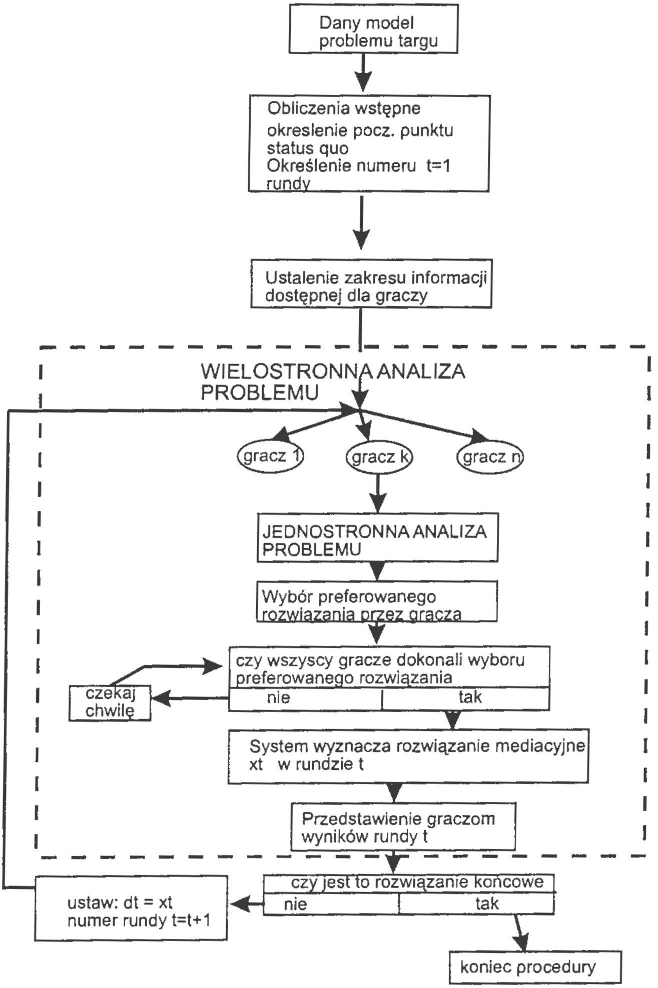
- wspomaganie w sformułowaniu i edycji modelu problemu targu,
- wspomaganie w analizie problemu targu,
- wspomaganie w realizacji interakcyjnej procedury mediacyjnej.

Interakcyjna procedura mediacyjna wspomagania negocjacji jest realizowana zgodnie z metodą wykorzystującą ideę iteracyjnego rozwiązania problemu targu przedstawioną w punktach 4.1. i 4.2. Ogólny schemat algorytmu procedury przyjęty w systemie MCBARG jest przedstawiony na rysunku 6.2.

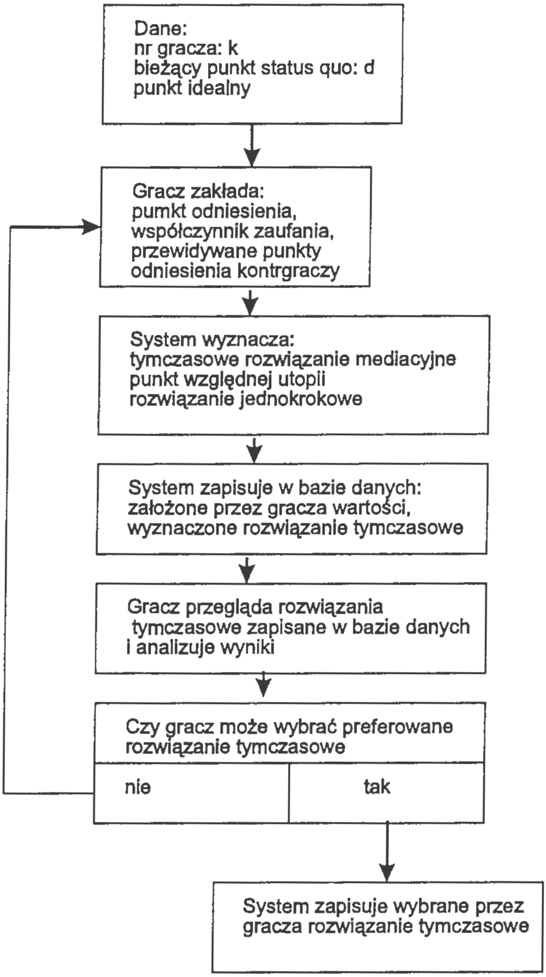
Procedura wspomagania negocjacji prowadzona jest w pewnej liczbie iteracji - rund. W każdej z nich system umożliwia graczom (wspomaga):

1. przeprowadzenie wstępnej analizy problemu targu - dostarczając informacje o oszacowanych ograniczeniach wypłat, generując przykład rozwiązania kooperacyjnego, tzw. rozwiązanie neutralne,
2. jednostronną analizę problemu, dokonywaną niezależnie przez poszczególnych graczy w postaci interakcyjnej, uczącej procedury, w której system generuje kolejne przewidywane rozwiązania kooperacyjne, dla zakładanych przez graczy punktów odniesienia i współczynników zaufania (schemat algorytmu jednostronnej analizy problemu jest przedstawiony na rysunku 6.3),
3. obliczenie zgodnie z preferencjami graczy, wielostronnego rozwiązania kooperacyjnego rundy traktowanego jako rozwiązanie mediacyjne.

Zakłada się, że system jest obsługiwany przez operatora - analityka systemowego, który definiuje model oraz przygotowuje i prowadzi sesję negocjacyjną, w której realizowana jest procedura mediacyjna. W czasie tej sesji przekazuje sterowanie systemem graczom, którzy przystępują do komputera w pewnej kolejności, tylko raz w każdej rundzie. Operator przejmuje sterowanie w przypadku,

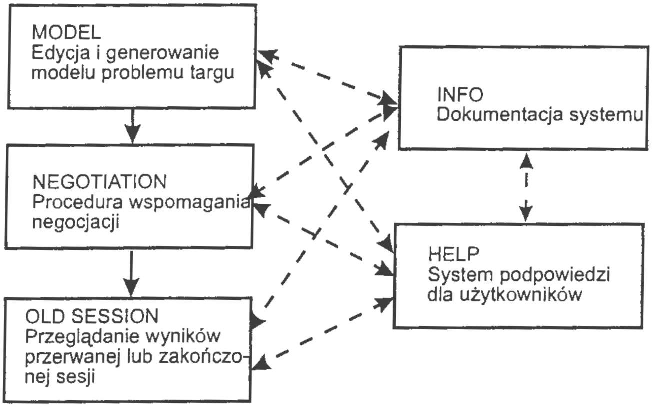


Rysunek 6.2. Schemat algorytmu procedury mediacyjnej, wspomagającej negocjacje



Rysunek 6.3. Schemat algorytmu jednostronnej analizy problemu

gdy sesja zostanie przerwana lub zakończona. Sterowanie systemem odbywa się przy pomocy zestawu kolejnych menu. System zawiera tzw. samoopis, tzn. zestaw informacji `Info` wyświetlanych na życzenie użytkownika, zawierających opis systemu i informacje o jego użytkowaniu, a także system objaśnień `Help`. Ogólny schemat korzystania z systemu jest przedstawiony na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4. Ogólny schemat korzystania z elementów systemu MCBARG

Główne menu systemu zawiera następujące opcje:
`Information`, `Model`, `Old session`, `Negotiation`.

Opcja `Information` pozwala uzyskać ogólną informację o systemie.

Opcja `Model` umożliwia sformułowanie i edycję modelu problemu targu. W szczególności, aby sformułować model należy podać: liczbę i nazwę graczy, liczbę kryteriów dla każdego gracza, nazwy kryteriów, jednostki, status kryteriów (czy są minimalizowane czy też maksymalizowane), wartości status quo dla poszczególnych kryteriów, zestaw formuł określających nierówności opisujące zbiór porozumień w przestrzeni kryteriów. Przy edycji formuł mogą być używane wszystkie operacje arytmetyczne i podstawowe funkcje. Oprogramowanie systemu zawiera kompilator translujący zapis modelu na kod wewnętrzny, oraz procedury diagnostyczne analizujące poprawność sformułowania problemu targu. Model może być oczywiście zapamiętany na dysku.

Opcja `Old session` umożliwia analizę wcześniej przeprowadzonej i zapamiętanej sesji negocjacyjnej.

Opcja `Negotiations` rozpoczyna sesję negocjacyjną, która jest prowadzona zgodnie z omówionym wcześniej algorytmem. Informacje poszczególnych graczy są chronione przez system haseł (passwords). W szczególności nie są dostępne dla kontrgraczy informacje o dokonywanych w danej rundzie próbach testujących zbiór porozumień, ani o podjętej decyzji – to jest o wyborze preferowanego wariantu przewidywanego rozwiązania. Gracze mogą się natomiast porozumieć przed sesją i uzgodnić dostęp do wzajemnej informacji dotyczącej poprzednich rund.
Przewidziano trzy stopnie dostępu do tej informacji:

1. brak takiego dostępu w ogóle;
2. dostęp do informacji o wynikach kontrgraczy z poprzednich rund i możliwość symulacji wpływu ich decyzji na wyniki gracza;
3. dostęp do informacji zgodnie z punktem 2, a dodatkowo możliwość badania wpływu decyzji gracza na wyniki kontrgraczy.

Uzgodniony poziom dostępu do informacji jest wprowadzany przez operatora przed rozpoczęciem sesji. Wewnętrzne menu każdego gracza umożliwia mu dokonywanie interaktywnej analizy problemu, przeglądanie uzyskanych wariantów rozwiązań, podjęcie decyzji – wybór preferowanego wariantu. Gdy gracze zakończą interaktywną analizę w danej rundzie i podejmą decyzje, system przechodzi do następnej rundy. Operator może przeglądać wyniki graczy w czasie trwania sesji. Przejmuje sterowanie nad systemem gdy sesja zostanie przerwana lub zakończona. Może zapamiętać sesję na dysku i przeglądać jej wyniki przy pomocy opcji `Old session`.

7

Przykłady wielokryterialnych zagadnień targu

7.1 Problem kwaśnych deszczów

Przykładem praktycznego zadania, który może być rozpatrywane jako zagadnienie targu jest problem międzynarodowej współpracy dotyczący zanieczyszczeń atmosferycznych w Europie (tzw. problem kwaśnych deszczy). Rozwój przemysłu i komunikacji powoduje wzrost emisji zanieczyszczeń atmosferycznych w szczególności dwutlenku siarki w poszczególnych krajach europejskich. Zanieczyszczenia te przenoszone są przez prądy powietrza ponad granicami krajów opadając w formie kwaśnych deszczy. Powodują degradację środowiska (obumieranie lasów, zakwaszanie gleby i wód). W ramach Europejskiej Komisji Gospodarczej powołany jest specjalny zespół, w którym odbywają się negocjacje dotyczące koordynacji przedsięwzięć, takich jak zmiany technologii na nowocześniejsze, charakteryzujące się mniejszą emisją zanieczyszczeń, odchodzenie od paliw o dużej zawartości siarki itp., oraz wymaganych na to nakładów finansowych, w celu redukcji opadu tych zanieczyszczeń. Przedstawiony niżej przykład pokazuje jak ten problem współpracy międzynarodowej może być rozpatrywany jako wielokryterialne zagadnienie targu. Przykład został zainspirowany pracami IIASA (The RAINS model of acidification, patrz: Alcamo, Show, Hordijk, 1990).

Rozpatrujemy dwa kraje (w analogiczny sposób można zbudować model dla większej liczby krajów) zamierzające zmniejszyć emisję siarki i analizujące możliwe programy redukcji tej emisji. Zakłada się, że w każdym z krajów jest już przyjęty pewien plan kontroli emisji siarki, przy którym spodziewany jest poziom emisji $\underline{E}_i$, gdzie $i = 1, 2$ jest numerem kraju. Oba kraje uznają, że opad siarki, który wystąpi przy tych emisjach jest nieakceptowalny i rozważają dodatkowe programy redukcji wytwarzanych zanieczyszczeń i wymagane nakłady finansowe.

Dla każdego kraju dana jest funkcja kosztów f opisująca minimalne nakłady C_i wymagane w celu zmniejszenia emisji siarki z poziomu $\underline{E}_i$ do poziomu E_i:

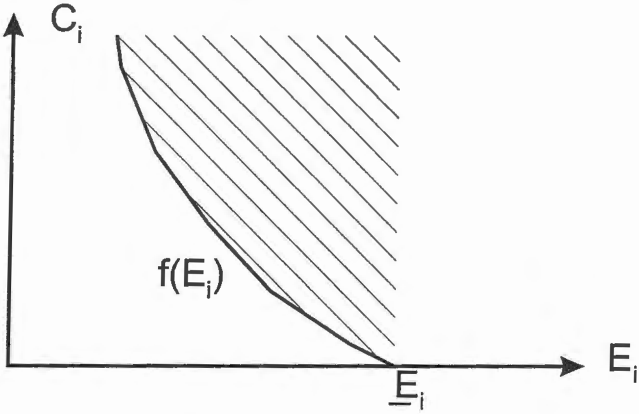
$$C_i \leq f(E_i), \qquad i = 1, 2. \tag{7.1}$$

Zakłada się, że funkcja ta jest malejąca, przedziałami liniowa i ma taką postać, że $f(\underline{E}_i) = 0$. Przykład funkcji kosztów przedstawiony jest na rysunku 7.1. Obszar zakreskowany odpowiada różnym technologiom i wymaganym nakładom finansowym umożliwiającym zmniejszenie wielkości emisji poniżej wartości $\underline{E}_i$.

Opad zanieczyszczeń w każdym z krajów określony jest przy użyciu tzw. "Eurpean Monitoring and Evaluation Programme Matrix" (Alcamo, Show, Hordijk, 1990), gdzie określone są wartości parametrów atmosferycznego transportu zanieczyszczeń siarki między krajami. Równania opadu siarki mają postać:

$$D_i = a_{i1} * E_1 + a_{i2} * E_2 + \underline{D}_i, \qquad i = 1, 2, \tag{7.2}$$

gdzie: a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ są parametrami atmosferycznego transportu siarki między krajami, $\underline{D}_i$ stanowią tzw. tło, to jest w tym przypadku opad wynikający z emisji innych krajów.



Rysunek 7.1. Przykład funkcji kosztów

Każdy z krajów może oczywiście podjąć niezależną realizację programu redukcji zanieczyszczeń. Mając dany model, przedstawiony wyżej, każdy kraj może przyjąć określone nakłady, oznaczone przez $\overline{X}_i = \overline{C}_i$, przy których uzyskany zostanie poziom emisji $\overline{E}_i$, oraz opad siarki $\overline{D}_i$, gdzie i jest numerem kraju, a $\overline{C}_i$ jest kosztem realizacji programu redukcji w danym kraju.

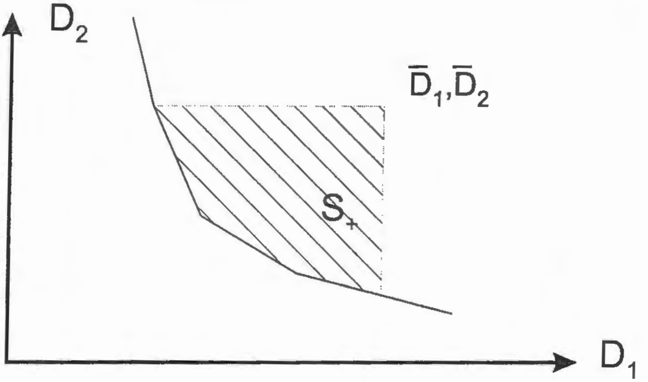
Przypadek taki stanowi alternatywę do współpracy obu krajów, zakładającej przyjęcie porozumienia dotyczącego realizacji wspólnego programu i utworzenia wspólnego funduszu na realizację tego programu. W tym przypadku wprowadzamy dodatkowe ograniczenie do opisu modelu:

$$X_1 + X_2 = C_1 + C_2, \tag{7.3}$$

gdzie: X_1, X_2 oznaczają wkłady poszczególnych krajów we wspólny fundusz, C_1, C_2C oznaczają koszty przedsięwzięć realizowanych w poszczególnych krajach w ramach wspólnego funduszu.

Interesuje nas zbiór takich wspólnych programów, charakteryzowanych przez wymagane nakłady X_1, X_2 oraz opad zanieczyszczeń siarki D_1, D_2, które są korzystniejsze dla obu krajów w porównaniu z przypadkiem pierwszym, gdy współpracy nie ma. Rozpatrzymy w tym celu następujący problem optymalizacji wielokryterialnej, w którym minimalizowane są wartości nakładów X_1, X_2 oraz opady siarki D_1, D_2 traktowane jako kryteria, przy ograniczeniach określonych przez zależności (7.1),(7.2) i (7.3). Zmiennymi decyzyjnymi są koszty przedsięwzięć w poszczególnych krajach C_1, C_2, oraz emisje siarki E_1, E_2. Ograniczenia (7.1), (7.2), (7.3) określają pewien simpleks w przestrzeni kryteriów. Oznaczmy ten simpleks przez S. Zbiór korzyści jakie oba kraje mogą uzyskać w wyniku współpracy może być określony przez następujący zbiór oznaczony S_+: $S_+ = \{(X_1, X_2, D_1, D_2) : (X_1, X_2, D_1, D_2) \in S, (X_1, X_2, D_1, D_2) \leq (\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{D}_1, \overline{D}_2)\}$. Jest to podzbiór zbioru S, określający projekty korzystniejsze dla obu krajów w porównaniu z przypadkiem braku współpracy. W przypadku, gdy zbiór ten jest niepusty istnieje zainteresowanie współpracą. Na rysunku 7.2 przedstawiono przekrój zbioru S_+ (obszar zakreskowany) w podprzestrzeni D_1, D_2 dla pewnych danych wartości X_1, X_2.

Możemy sformułować wielokryterialny problem targu, w którym mamy do czynienia z dwoma wymienionymi krajami. Każdy kraj $i = 1, 2$ ma określone dwa kryteria traktowane jako wypłaty, odpowiednio: nakłady finansowe X_i danego kraju, oraz opad siarki D_i w danym kraju. Każdy kraj stara się minimalizować swoje kryteria. Punkt status quo d jest określony przez wypłaty osiągalne w przypadku braku współpracy, t.j. $d = (\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{D}_1, \overline{D}_2)$. Zbiór porozumień jest określony wprost przez zbiór S_+. Punkt status quo i zbiór porozumień określone są w czterowymiarowej przestrzeni kryteriów obu krajów. Symulacje modelu RAIN pokazują,



Rysunek 7.2. Przekrój zbioru S_+ w podprzestrzeni D_1, D_2

że współpraca jest rzeczywiści efektywna, umożliwiając oszczędność nakładów z jednoczesnym zmniejszeniem opadu zanieczyszczeń. Oznacza to, że w zbiorze porozumień rzeczywiście istnieją punkty poprawiające wszystkie kryteria obu krajów w porównaniu z punktem status quo. Problem polega na znalezieniu niezdominowanego punktu w zbiorze porozumień, na który zgodzą się oba kraje. Punkt ten powinien być wybrany zgodnie z preferencjami krajów. Problem dotyczy w tym przypadku odpowiedniego podziału korzyści wynikających ze współpracy. Zauważmy, że każdy kraj może mieć inne preferencje co do swoich kryteriów. Zakładamy, że istnieje zbiór graczy, z których każdy reprezentuje jeden kraj i mediator pomagający w znalezieniu akceptowalnego przez wszystkich i korzystnego rozwiązania w drodze specyficznego procesu negocjacji.

Zauważmy, że istnieją dwa aspekty decyzyjne problemu. Każdy gracz ma do czynienia z wielokryterialnym problemem podejmowania decyzji dotyczącym wyboru rozwiązania w przestrzeni jego kryteriów zgodnie ze swoimi preferencjami. Z drugiej strony, wypłaty graczy są wspólnie zależne i istnieje kwestia jak podzielić między graczy korzyści wynikające ze współpracy. Proponowane wspomaganie decyzji polega na umożliwieniu graczom analizy ich sytuacji przetargowej oraz na ułatwieniu osiągania porozumienia, tzn. wspólnego wyboru rozwiązania ze zbioru porozumień.

7.2 Przyklad problemu targu i jego rozwiązania w zagadnieniu współpracy gospodarstw rolnych

Rozpatrzymy niżej problem współpracy dwóch gospodarstw rolnych opisanych wielokryterialnymi modelami programowania liniowego.

Zagadnienie współpracy, zwłaszcza międzynarodowej było przedmiotem wielu prac. Należy wymienić w szczególności prace: Ameliańczyk (1979), Piasecki, Hołubiec, Ameliańczyk (1982), w których szczegółowo przeanalizowano, stosując podejście gier kooperacyjnych, problem współpracy międzynarodowej polegający na odpowiedniej wymianie dóbr między partnerami.

W niniejszej pracy rozpatruje się przypadek, w którym problem współpracy polega na wspólnym podejmowaniu decyzji gospodarczych w obydwu gospodarstwach i odpowiednim podziale nadwyżek wynikających ze współpracy, i jest sformułowany w postaci wielokryterialnego zagadnienia targu. System MC-BARG może być zastosowany do wspomagania decyzji w problemie targu, w którym zbiór porozumień zdefiniowany jest w przestrzeni celów. W pracy (Kruś, 1989) sformułowano wielokryterialny problem targu dla ogólniejszych zadań opisanych przez model w przestrzeni decyzyjnej oraz przedstawiono koncepcję nowej wersji systemu dla takich zadań, powiązanego z systemami typu DIDAS (Rogowski, Sobczyk, Wierzbicki, 1988). Niżej formułuje się przykład takiego problemu dla modelu liniowego oraz przedstawia się praktyczną procedurę umożliwiającą wykorzystanie do tego celu istniejącego już systemu MC-BARG. Proponowana idea polega na aproksymacji zbioru porozumień przez powłokę wypukłą rozpiętą na zbiorze punktów charakteryzujących rozwiązania niezdominowane zadania wielokryterialnej optymalizacji sformułowanego dla połączonego modelu liniowego obu gospodarstw.

Rozpatrzmy dwa gospodarstwa rolne opisane liniowymi modelami produkcyjnymi, dla których sformułowano wielokryterialne zadania optymalizacji. Mają one postać odpowiednio 7.4 i 7.5:

$$\begin{aligned} &A^1 z^1 \le b^1 \\ &x^1 = C^1 z^1 \to \max \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} &A^2 z^2 \le b^2 \\ &x^2 = C^2 z^2 \to \max \end{aligned} \tag{7.5}$$

gdzie: wektory z^1, z^2 oznaczają zmienne decyzyjne obejmujące strukturę upraw, rozdysponowanie nakładów produkcji rolnej, wielkość stada zwierząt itp.;
wektory x^1, x^2 oznaczają kryteria optymalizacji, przykładowo wielkość produkcji towarowej określonych produktów rolnych;
macierze A^1, A^2 zawierają współczynniki technologiczne produkcji;
wektory b^1, b^2 zawierają prawe strony ograniczeń wynikających z ograniczonych zasobów środków i nakładów produkcji oraz z wymagań technologicznych.
Są to typowe problemy wielokryterialne, których analiza decyzyjna, oraz znalezienie rozwiązania zgodnie z preferencjami gospodarzy (właścicieli, zarządzających) może być dokonana przy wykorzystaniu pakietu IAC-DIDAS-L (patrz Rogowski, Sobczyk,

Wierzbicki, 1988). Przyjmijmy, że w wyniku takiej analizy zostały wybrane preferowane rozwiązania to jest wektor zmiennych decyzyjnych $\hat{z}^1$, $\hat{z}^2$ i odpowiadające im wektory kryteriów $\hat{x}^1$, $\hat{x}^2$. Przez współpracę rozumie się wspólne podejmowanie decyzji produkcyjnych w celu uzyskania nadwyżki względem rozwiązań charakteryzowanych przez wartości kryteriów $\hat{x}^1$, $\hat{x}^2$. W przypadku współpracy mamy do czynienia z problemem optymalizacji w postaci zadania PSUM:

$$Az \leq b$$

$$x = Cz \rightarrow \max$$

gdzie $z = (z^1, z^2)$, $x = (x^1, x^2)$, macierz A powstała odpowiednio z macierzy A^1 i A^2, wektor b z wektorów b^1, i b^2, a macierz C z elementów macierzy C^1 i C^2.

Problem współpracy polega na wyznaczeniu rozwiązania niezdominowanego tego zadania zgodnie z preferencjami obu graczy i na odpowiednim podziale wynikłej ze współpracy nadwyżki. Zauważmy, że zmienne decyzyjne spełniające ograniczenia zadania PSUM określają w przestrzeni kryteriów obu gospodarzy pewien simpleks. Rozwiązań problemu współpracy należy poszukiwać w tym simpleksie wśród punktów dominujących punkt $\hat{x}^1$, $\hat{x}^2$.

Wymieniony problem współpracy można sformułować jako następujący wielokryterialny problem targu, określony przez parę: (S, d), gdzie $S \in \mathbb{R}^m$ oznacza zbiór porozumień, $d \in \mathbb{R}^m$ oznacza punkt status quo. S i d określone są w przestrzeni kryteriów będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów obu graczy (t.j. $m = dim(x^1) + dim(x^2)$). W rozpatrywanym przypadku $d = (\hat{x}^1, \hat{x}^2)$. Zbiór S jest określony przez wyżej wymieniony simpleks. Problem polega na znalezieniu rozwiązania w zbiorze S, na które obaj gospodarze – traktowani dalej jako gracze wspólnie wyrażą zgodę. W systemie MCBARG założono, że model określony jest wprost w przestrzeni celów, jako układ nierówności opisujących zbiór S. Oczywiście, w takim przypadku nie jest możliwe określenie wprost zmiennych decyzyjnych odpowiadających wyznaczonemu rozwiązaniu. W niniejszej pracy proponuje się procedurę wykorzystania systemu MC-BARG w przypadku ogólniejszego, omówionego wyżej modelu liniowego określonego w przestrzeni zmiennych decyzyjnych, tak aby możliwe było określenie zmiennych decyzyjnych odpowiadających wybranemu przez graczy rozwiązaniu.

Procedura ta dla danych dwóch modeli gospodarstw składa się z następujących etapów:

1. Utworzenie zadań optymalizacji wielokryterialnej dla dwóch gospodarstw (odpowiednio 7.4 i 7.5).
2. Analiza decyzyjna każdego z zadań i wyznaczenie preferowanych rozwiązań $\hat{x}^1$, $\hat{x}^2$, niezależnie dla każdego gospodarstwa, przy wykorzystaniu pakietu IAC-DIDAS-L.
3. Utworzenie zadania optymalizacji wielokryterialnej modelu połączonego PSUM.
4. Generacja pewnej siatki punktów charakteryzujących zbiór rozwiązań niezdominowanych zadania PSUM, przy wykorzystaniu pakietu IAC-DIDAS-L.
5. Wyznaczenie powłoki wypukłej rozpiętej na tych punktach (przy wykorzystaniu opracowanego programu komputerowego o nazwie SCONVEX),
6. Wprowadzenie opisu powłoki wypukłej jako aproksymowanego modelu programu targu w systemie MC-BARG.
7. Przeprowadzenie sesji wspomagania negocjacji z wykorzystaniem systemu MC-BARG.

8. Wyznaczenie (przy pomocy pakietu IAC-DIDAS-L) rozwiązania modelu PSUM w przestrzeni zmiennych decyzyjnych, odpowiadającego rozwiązaniu kooperacyjnemu, uzyskanemu w systemie MC-BARG, oraz ocena błędu aproksymacji.

Zaproponowana procedura postępowania została praktycznie przetestowana dla konkretnego przykładu modeli produkcyjnych dwóch gospodarstw rolnych. Szczegółowe wyniki można znaleźć w pracy (Kruś, Łopuch 1989). Natomiast w tej pracy omówimy krótko przeprowadzony eksperyment badawczy.

Przyjęte modele produkcyjne opisują gospodarstwa rolne, średniego rozmiaru. Zakłada się, że każde gospodarstwo posiada grunty orne oraz trwałe użytki zielone. Dysponuje również fermą krów mlecznych. Model opisuje sferę produkcyjną tego gospodarstwa w postaci zestawu liniowych równań i nierówności, przedstawiających zależności występujące w gospodarstwie. Są to typowe modele optymalizacyjne pozwalające wyznaczyć optymalny rozmiar działalności produkcyjnych przy danych uwarunkowaniach.

W każdym modelu występuje około 20 zmiennych decyzyjnych, opisujących prowadzone działalności produkcyjne roślinne i zwierzęce. Część z nich dotyczy produkcji towarowej (np. produkcji żyta, ziemniaków czy mleka), zaś część produkcji zużywanej w obrocie wewnętrznym gospodarstwa (pasze).

Równania modelu obejmują:

- bilanse wykorzystania powierzchni gruntów ornych i trwałych użytków zielonych;
- bilanse wykorzystania środków produkcji takich jak nawozy mineralne, siła pociągowa, stanowiska inwentarskie, siła robocza;
- bilanse żywienia zwierząt, wyrażone w składnikach odżywczych;

– bilanse następstwa roślin.

Wielkościami ograniczającymi produkcję są: powierzchnia gruntów ornych i trwałych użytków zielonych, ilość dostępnych nawozów mineralnych, ilość dostępnej siły pociągowej i siły roboczej ludzkiej, ilość stanowisk inwentarskich. Zakłada się, że pasze dla zwierząt są całkowicie wytwarzane w gospodarstwie. Jedynie pasze treściwe mogą pochodzić z zakupu.

W oparciu o te modele sformułowano zadania optymalizacji wielokryterialnej dla dwóch gospodarstw nazwanych 7.4 i 7.5. Przyjęto, że obydwa gospodarstwa charakteryzują się podobnymi kierunkami produkcji, ponoszą podobne nakłady jednostkowe, różnią się jednak posiadanymi zasobami środków produkcji oraz preferencjami co do głównych celów produkcji. Zestaw kryteriów jest ten sam dla obu gospodarstw – maksymalizacja produkcji towarowej: żyta, ziemniaków i mleka.

Rozwiązania zadań optymalizacji wielokryterialnej uzyskano przy pomocy pakietu IAC-DIDAS-L (Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Linear and Dynamic Linear Models, Rogowski, Sobczyk, Wierzbicki, 1988). Pakiet ten umożliwia w szczególności formułowanie w sposób interakcyjny liniowych zadań optymalizacji wielokryterialnej, ich rozwiązywanie oraz graficzną analizę wyników. Pakiet umożliwia generowanie i przeglądanie rozwiązań efektywnych, wykorzystując ideę funkcji osiągnięcia (Wierzbicki 1982, 1986). Poszczególne rozwiązania uzyskiwane są po określeniu przez użytkownika poziomów aspiracji (punktów odniesienia) dla poszczególnych kryteriów. Wykorzystywane są one jako parametry w generowanym i rozwiązywanym przez system zadaniu optymalizacji. Użytkownik dostaje odpowiedź czy postulowane przez niego wartości celów mogą być osiągnięte. Jeżeli nie, system wyznacza wartości możliwie zbliżone do poziomów aspiracji. Jeżeli wartości postulowane są osiągalne ale nie mogą być przekroczone – wartości wyznaczone przez system pokrywają się z poziomami aspiracji. Jeżeli w końcu wartości postulowane mogą być przekroczone – wartości wyznaczone przez system odpowiadają wartościom przekraczającym poziomy aspiracji.

Wykorzystując ten pakiet symulowano niezależnie zachowanie (przeprowadzono interaktywne sesje) dwóch właścicieli gospodarstw, różniących się preferencjami co do kryteriów, poszukujących najlepszych rozwiązań wielokryterialnych zadań optymalizacji 7.4 i 7.5. Sesje zakończyły się wybraniem przez graczy ich preferowanych, niezdominowanych rozwiązań.

W celu sformułowania problemu współpracy rozpatruje się zadanie wielokryterialnej optymalizacji dla połączonego modelu obu gospodarstw, a problem polega na odpowiednim podziale nadwyżki jakiej można oczekiwać w wyniku współpracy. Dla danych modeli 7.4 i 7.5 zbudowano model połączony oznaczony dalej PSUM, zakładając łączne wykorzystanie zasobów oraz nakładów produkcji obu gospodarstw. Formalnie, w modelu PSUM, wektor zmiennych decyzyjnych oznacza złożenie zmiennych modeli 7.4 i 7.5, a prawe strony ograniczeń – odpowiednio sumę prawych stron modeli 7.4 i 7.5. Kryteria w modelu PSUM obejmują podobnie jak w modelach 7.4 i 7.5: produkcję towarową żyta, ziemniaków, oraz mleka, przy czym mależy je rozumieć jako sumę wartości kryteriów obydwu graczy.

W systemie MC-BARG model targu sformułowany jest przez punkt status quo oraz przez zbiór porozumień w przestrzeni celów określony w postaci układu nierówności. W omawianym przykładzie jako punkt status quo przyjęto preferowane rozwiązania gospodarzy wyznaczone dla modeli 7.4 i 7.5 (to jest punkt przestrzeni celów określony przez sumy wartości poszczególnych kryteriów). Zbiór porozumień ma interpretację możliwych kombinacji nadwyżek uzyskiwanych w wyniku współpracy, i jest określony przez zbiór rozwiązań zadania optymalizacji wielokryterialnej dla modelu PSUM dominujących punkt status quo. Oczywiście problem targu ma sens o ile taka nadwyżka istnieje. W rozpatrywanym przykładzie (Kruś, Łopuch 1989) okazało się, że nadwyżka taka istnieje. Brzeg zbioru porozumień w przypadku liniowego zadania optymalizacji wielokryterialnej stanowi brzeg pewnego simpleksu. Wyznaczenie dokładne tego brzegu nie jest akceptowalne ze względu na czaso- i pracochłonność obliczeniową. W pracy podjęto próbę aproksymacji tego zbioru. W tym celu wyznaczono zbiór (siatkę) 16-u rozwiązań optymalizacji wielokryterialnej modelu PSUM charakteryzujących brzeg paretowski poszukiwanego zbioru porozumień. Bardzo użyteczny okazał się pakiet IAC-DIDAS-L, a w szczególności zastosowane w nim podejście przesuwanego punktu odniesienia. Umożliwił odpowiedni wybór siatki punktów dobrze charakteryzujących ten brzeg.

Następny etap pracy polegał na wyznaczeniu powłoki wypukłej rozpiętej na tych punktach. W tym celu wykorzystany został wcześniej opracowany program SCONVEX (patrz Skwarczyło 1988). Program ten umożliwia wyznaczenie parametrów hiperpłaszczyzn, które określają w wielowymiarowej przestrzeni właśnie powłokę wypukłą, rozpiętą na danym zbiorze puntów. Wykorzystując ten program uzyskano zbiór 16-u hiperpłaszczyzn definiujących zbiór porozumień problemu targu w systemie MCBARG.

Wykorzystując system MCBARG przeprowadzono interakcyjną sesję, eksperyment growy z dwoma graczami, którego celem było sprawdzenie interakcyjnej procedury wspomagającej negocjacje. Wyniki sesji zamieszczono w pracy (Kruś, Lopuch 1989).

Uzyskano rozwiązanie zadowalające obu graczy. Nie dostarcza jednak ono pełnej informacji o wymaganych działalnościach gospodarstw (zmiennych decyzyjnych) prowadzących do tego rozwiązania. Kolejnym etapem eksperymentu było zatem wyznaczenie wartości zmiennych decyzyjnych modelu. Sformułowano ponownie zadanie optymalizacji wielokryterialnej dla modelu wspólnego gospodarstw (PSUM) i rozwiązano je przy wykorzystaniu pakietu IAC-DIDAS-L, przyjmując jako wartości punktów odniesienia wartości kryteriów uzyskane w wyniku przeprowadzonej sesji w systemie MCBARG.

Proponowane podejście pozwala oszacować błąd aproksymacji zbioru rozwiązań niezdominowanych modelu PSUM w punktach odpowiadających wyznaczonym rozwiązaniom kooperacyjnym w systemie MC-BARG. Błąd ten można określić jako:

$$\delta = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{|x_i^r - \hat{x}_i|}{\hat{x}_i}.$$

gdzie: k – jest liczbą kryteriów w modelu PSUM,

x_i^r – oznacza rozwiązanie kooperacyjne wyznaczone w systemie MC-BARG, i przyjęte jako punkt odniesienia w systemie IAC-DIDAS-L,

$\hat{x}_i$ – oznacza rozwiązanie znalezione w systemie IAC-DIDAS-L odpowiadające temu punktowi odniesienia.

W rozważanym przykładzie, oszacowania błędu okazały się być rzędu jednego promila, można zatem przyjąć, że szukane przez nas wartości zmiennych decyzyjnych odpowiadają wartościom uzyskanym w rozwiązaniu tak sformułowanego zadania.

Opracowano przykład liczbowy modelu, wykorzystując materiały dostępne w Międzynarodowym Instytucie Stosowanej Analizy Sytemowej (IIASA, Transboundary Air Pollution Project, Laxenburg, Austria). Model dotyczy dwóch krajów, z których pierwszy jest krajem wysoko rozwiniętym, posiadającym nowoczesne małoodpadowe technologie, natomiast drugi jest krajem rozwijającym się, o przestarzałych, silnie zanieczyszczających technologiach i posiadającym ograniczone środki na przedsięwzięcia redukcji zanieczyszczeń. W celu określenia zbioru porozumień w przestrzeni kryteriów zastosowano podejście analogiczne do przedstawionego w punkcie poprzednim, dotyczącym problemu współpracy gospodarstw rolnych. Sformułowano zadania optymalizacji wielokryterialnej obu krajów, przy założeniu braku współpracy. Wykorzystując pakiet IAC-DIDAS-L wyznaczono przykładowe rozwiązania określające punkt status quo w problemie targu. Sformułowano zadanie optymalizacji wielokryterialnej przy założeniu współpracy obu krajów. Wyznaczono zbiór rozwiązań niezdominowanych tego zadania dla wybranej siatki punktów. Wyznaczono powłokę wypukłą rozpiętą na tych punktach w postaci układu nierównosci liniowych. Układ tych nierówności definiuje zbiór porozumień w problemie targu. Określony w ten sposób problem targu został wprowadzony do systemu MCBARG. Przeprowadzono eksperymenty growe - sesje komputerowe z wykorzystaniem tego systemu. Wyniki jednej z sesji zostały przedstawione w pracy (Kruś, Bronisz, Łopuch 1990), jako ilustracja zastosowania systemu do wspomagania negocjacji.

8

Wielokryterialne gry koalicyjne

Rozpatruje się klasę gier kooperacyjnych bez wypłat ubocznych w przypadku wielokryterialnych wypłat graczy. Formułuje się i analizuje koncepcje rozwiązań tych gier, które mogą być przydatne w zagadnieniach wspomagania decyzji w negocjacjach.

Klasyczna teoria gier kooperacyjnych była intensywnie rozwijana w szczególności w przypadku gier z wypłatami ubocznymi - np. prace: Shapley (1953), Schmeidler (1969), Aumann, Maschler (1964), a także bez wypłat ubocznych - Aumann (1961), Peleg (1963), Stearns (1964), Kalai (1975). Teoria ta była rozwijana przy ogólnym założeniu, że wypłaty graczy są mierzone przez daną skalarną funkcję użyteczności. W zadaniach praktycznych decyzje podejmowane są zwykle przy uwzględnieniu wielu kryteriów, a funkcje użyteczności nie są dane jawnie. Prace dotyczące gier kooperacyjnych w przypadku wielokryterialnych wypłat są rzadkie. Należy wymienić artykuł: Bergstressen, Yu (1977), w którym wykorzystuje się struktury dominacji wprowadzone przez Yu do określenia i analizy gier kooperacyjnych z wypłatami ubocznymi.

W niniejszym rozdziale rozwija się teorię wielokryterialnych gier kooperacyjnych bez wypłat ubocznych, przy czym nie zakłada się istnienia jawnie danych funkcji użyteczności graczy. Proponowana idea polega na zastosowaniu podejścia analogicznego do stosowanego w przypadku zadań wielokryterialnego wspomagania decyzji w przypadku jednego decydenta (por. prace Wierzbicki 1982,1986). Rozwiązań poszukuje się w pewnej interakcyjnej procedurze uczącej, w której decydent może generować pewną liczbę rozwiązań, analizować je i wybierać zgodnie ze swoimi preferencjami. W tej pracy poszukuje się rozwiązań, które spełniając określone warunki, mogły by być wykorzystane w takiej procedurze w przypadku gry kooperacyjnej bez wypłat ubocznych. Proponowane koncepcje rozwiązań mogą być rozpatrywane jako rozwinięcie na przypadek wielokryterialny koncepcji zaproponowanych przez Kalai (1975) w przypadku jednokryterialnych wypłat graczy.

8.1 Problem decyzyjny

8.1.1 Decyzje i wypłaty

Rozpatrzmy sytuacje decyzyjne pewnej liczby graczy, którzy mogą tworzyć koalicje. Każdy gracz ma kilka kryteriów, za pomocą których ocenia swoje wyplaty, przy czym każdy gracz może mieć inny wektor kryteriów. Wypłaty koalicji zależą od tworzących tę koalicję graczy. Problem decyzyjny dotyczy struktury tworzonych koalicji oraz określenia wypłat graczy.

Niech $N = 1, 2, ..., n$ będzie skończonym zbiorem graczy, a $\aleph$ zbiorem wszystkich niepustych podzbiorów zbioru N. Dla każdej koalicji $C \in \aleph$:
$E^C = \times_{i \in C} E_i$ jest daną przestrzenią decyzji graczy w koalicji C, gdzie E_i jest euklidesową przestrzenią decyzji gracza i,
$Y^C = \times_{i \in C} Y_i$ jest daną przestrzenią wielokryterialnych wypłat

graczy w koalicji C, gdzie Y_i jest m_i wymiarową przestrzenią euklidesową gracza i,
$W : E^C \to Y^C$ są funkcjami definiującymi wypłaty graczy.

Dla uproszczenia notacji przyjmujemy, że każdy gracz stara się maksymalizować swoje wszystkie kryteria. Kryteria każdego gracza mogą być w ogólnym przypadku różne i różna może być ich liczba. Przyjmujemy, że dla dowolnego wektora $y = (y_i)_{i \in N} \in Y^N$, wektor $y^C = (y_i)_{i \in C} \in Y^C$ oznacza wypłaty graczy w koalicji C, gdzie $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots y_{im_i}) \epsilon Y_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$.

Współpraca graczy w koalicji tworzących różne koalicje może być określona przez kolekcję zbiorów ${V^C}_{C \epsilon \aleph}$, gdzie każdy $V^C \subset Y^C$ jest zbiorem osiągalnych wielokryterialnych wypłat graczy w koalicji C.

Przyjęto konwencję, że dla $z, y \in \mathbb{R}^m$, dla każdego m :
$z \geq y$ oznacza $z_i \geq y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$,
$z > y$ oznacza , $z_i \geq y_i, z \neq y$ dla $i = 1, 2 \dots, m$,
$z \gg y$ oznacza $z_i > y_i$ dla $i = 1, 2 \dots, m$.

Wektor $z \in \mathbb{R}^m$ jest **słabo Pareto optymalny** w zbiorze $Y_0 \subset \mathbb{R}^m$ jeśli $z \in Y_0$ i nie istnieje $y \in Y_0$ taki, że $y \gg z$,
Wektor $z \in \mathbb{R}^m$ jest **Pareto optymalny** w zbiorze $Y_0 \subset R^m$ jeśli $z \in Y_0$ i nie istnieje $y \in Y_0$ taki, że $y \geq z$.

8.1.2 Wielokryterialna gra kooperacyjna

Definicja 8.1
Wielokryterialna n-osobowa gra kooperacyjna bez wypłat ubocznych (n-osobowa gra MCC) jest opisana przez kolekcję $V = \{V^C\}_{C \epsilon \aleph}$ zbiorów V^C spełniających warunki:

1. V^C jest domkniętym niepustym zbiorem w przestrzeni Y^C,

2. V^C jest ograniczony z góry, tzn. istnieje $y^C \epsilon Y^C$ taki, że $V^C \subset \{z^C \epsilon Y^C, z^C \leq y^C\}$,
3. dla dowolnego $y^C \epsilon V^C$, $z^C \epsilon V^C$, jeżeli istnieje $z^C < y^C$, to $z^C \epsilon V^C$,
4. dla każdych dwóch koalicji $C, T \epsilon \aleph$, takich, że $C \cap T = \emptyset$, to spełniony jest warunek $V^C \times V^T \subset V^{C \cup T}$.

□

Sformułowanie gry MCC jest ściśle związane ze sformułowaniem klasycznej gry kooperacyjnej, którą podał Aumanna (1967) dla skalarnych wypłat graczy.
Zbiór V^C reprezentuje wszystkie wypłaty osiągalne samodzielnie przez koalicję C. Zgodnie z warunkami 1 i 2 zakłada się, że ten zbiór jest niepusty, domknięty i ograniczony.
Warunek 3 (komprehensywność) oznacza, że jeśli koalicja może osiągnąć wypłatę y, może także osiągnąć wypłaty $z < y$, tzn może uzyskać każdą wypłatę o mniejszych współrzędnych.
Warunek 4 zapewnia superaddytywność gry. Każda wypłata, której współrzędne mogą być uzyskane przez każdą z dwóch rozłącznych koalicji działających niezależnie, może być także osiągnięta gdy będą działać wspólnie.

8.2 Koncepcje rozwiązań

Niech Ω oznacza klasę gier spełniających powyższe warunki.

Przez koncepcję rozwiązania rozumie się pewną funkcję F, która każdej grze $V \epsilon \Omega$ przypisuje zbiór wypłat $F(V) \subset V^N$.

Definicja 8.2
Rdzeń (ang. core) gry V jest to zbiór:

core(V) = $\{y \epsilon V^N$: dla żadnej koalicji C nie istnieje $z^C \epsilon V^C$, taki, że $z_i > y_i$ dla każdego $i \epsilon C\}$.

Słaby rdzeń (ang. week core) gry V jest to zbiór:
wcore(V) = $\{y \epsilon V^N$: dla żadnej koalicji C nie istnieje $z^C \epsilon V^C$, taki, że $z_i \gg y_i$ dla każdego $i \epsilon C\}$.

□

Wypłata należy do rdzenia gry, jeżeli dla żadnej koalicji nie istnieje wypłata poprawiająca co najmniej jedno kryterium każdego z graczy. Wypłata należy do słabego rdzenia gry, jeżeli dla żadnej koalicji nie istnieje wypłata poprawiająca wszystkie kryteria graczy. Zachodzi oczywiście warunek: **wcore**(V) $\subset$ **core**(V).

Definicja 8.3
Funkcja $l_C : Y^N \times \Omega \rightarrow I\!R$ nazywana jest **funkcją nadwyżki** (ang. excess function) dla koalicji C jeśli spełnia warunki:

1. Jeżeli $y, z \epsilon Y^N$ spełniają warunek $y_i = z_i$ dla każdego $i \epsilon C$, to dla każdej gry V spełnione jest $l_C(y, V) = l_C(z, V)$. .
2. Jeżeli $y, z \epsilon Y^N$ spełniają warunek $y_i > z_i$ dla każdego $i \epsilon C$, to dla każdej gry V spełnione jest $l_C(y, V) < l_C(z, V)$.
3. Dla dowolnej gry V, jeżeli $y^C \epsilon boundary(V^C) = \{v^C \epsilon V^C$, to nie istnieje $z^C \epsilon V^C$ takie, że $y_i >> v_i$ dla każdego $i \epsilon C\}$, to $l_C(y, V) = 0$.
4. $l_C(y, V)$ jest ciągła ze względu na y i V.

Funkcja $l_C : Y^N \times \Omega \rightarrow I\!R$ nazywana jest **funkcją słabej nadwyżki** (ang. week excess function) dla koalicji C jeśli spełnia warunki 1,3,4 oraz warunek
2a. Jeżeli $y, z \epsilon Y^N$ spełniają warunek $y_i \gg z_i$ dla każdego $i \epsilon C$, to dla każdej gry V spełnione jest $l_C(y, V) < l_C(z, V)$. □

Uwagi dotyczące funkcji nadwyżki

- Funkcja nadwyżki $l_C(y, V)$ odzwierciedla postawę koalicji C względem wypłaty y.
- Warunek 1 oznacza, że funkcja nadwyżki danej koalicji C zależy tylko od graczy, którzy tworzą tę koalicje. Nie zależy od pozostałych graczy ze zbioru N.
- Warunek 2 zapewnia, że jeśli co najmniej jedno kryterium pewnych graczy wzrośnie, to wartość funkcji nadwyżki, utworzonej przez nich koalicji, zmaleje. W przypadku warunku 2a, mamy, że jeśli wzrosną wszystkie kryteria pewnych graczy to wartość funkcji nadwyżki, utworzonej przez nich koalicji, zmaleje.
- Warunek 3 dzieli wypłaty na dwie kategorie: osiągalne dla każdej koalicji C, gdy $l_C(y, V) \geq 0$ i nieosiągalne - gdy $l_C(y, V) < 0$.
- Z warunków 2 i 4 wynika, że jeśli $y, z \epsilon Y^N$ spełniają warunek $y_i \geq z_i$ dla każdego $i \epsilon C$, to dla każdej gry V: $l_C(y, V) \leq l_C(z, V)$.

Proponowane warunki są uogólnieniem warunków nakładanych na funkcję nadwyżki dla klasycznych kooperacyjnych gier bez wypłat ubocznych (patrz Kalai, 1975).

Definicja 8.4
Wypłata $y \epsilon V$ jest **indywidualnie racjonalna** jeśli należy do zbioru
$IR(V) = \{y \epsilon V^N$: dla żadnego $i \epsilon N$ nie istnieje $z \epsilon V^{\{i\}}$ taki, że $z_i > y_i \}$
Wypłata $y \epsilon V$ jest **(indywidualnie słabo racjonalna)** jeśli należy do zbioru
$IR(V) = \{y \epsilon V^N$: dla żadnego $i \epsilon N$ nie istnieje $z \epsilon V^{\{i\}}$ taki, że

$z_i \gg y_i\}$

Wypłata $y \epsilon V$ spełnia warunek **grupowej racjonalności** jeżeli należy do zbioru $GR(V) = \{y \epsilon V^N$: nie istnieje $z \epsilon V^N$ spełniający warunek $z_i > y_i$ dla żadnego $i \epsilon N\}$

Wypłata $y \epsilon V$ spełnia warunek **(słabej racjonalności grupowej)** jeżeli należy do zbioru $GR(V) = \{y \epsilon V^N$: nie istnieje $z \epsilon V^N$ spełniający warunek $z_i \gg y_i$ dla żadnego $i \epsilon N\}$.

□

Indywidualna racjonalność oznacza, że żaden gracz nie zgodzi się na wypłatę gorszą od tej, którą może uzyskać działając indywidualnie. Grupowa racjonalność oznacza, że gracze maksymalizując swoje wypłaty, dzielą między siebie wszystkie korzyści wynikające ze współpracy.

Twierdzenie 8.1

Dla dowolnej kolekcji funkcji słabej nadwyżki $\{l_C\}_C \epsilon \aleph$, *dla dowolnej gry* $V \epsilon \Omega$

$wcore(V) = \{y \epsilon wGR(V) : l_C(y, V) \leq 0,$ *dla każdego* $C \epsilon \aleph \backslash \{N\}\}$

Dla dowolnej kolekcji funkcji nadwyżki$\{l_C\}_C \epsilon \aleph$, *dla dowolnej gry* $V \epsilon \Omega$

$core(V) = \{y \epsilon GR(V) : l_C(y, V) \leq 0,$ *dla każdego* $C \epsilon \aleph \backslash \{N\}\}$.

■

Dowód

Niech V będzie wielokryterialną grą bez wypłat ubocznych $V \epsilon \Omega$, a $\{l_C\}_C \epsilon \aleph$ będzie daną kolekcją funkcji nadwyżki (funkcji słabej nadwyżki). Teza twierdzenia wynika wprost z Definicji 8.2, określającej rdzeń i słaby rdzeń, z Definicji 8.4, określającej grupową racjonalność i słabą grupową racjonalność, a także z własności 2 i 3 (2a i 3) podanych w Definicji 8.3 określającej funkcję nadwyżki (słabej nadwyżki).

◊

Niech $\Theta(y)$ oznacza wektor w $I\!R^{|\aleph|-1}$ otrzymany w wyniku uporządkowanie wartości funkcji nadwyżki $l_C(y, V)$ wszystkich koalicji C w $\aleph$, $C \neq N$ zgodnie z nierosnącym porządkiem. Niech odpowiednio $w\Theta(y)$ oznacza wektor w tej przestrzeni otrzymany z uporządkowania wartości słabych funkcji nadwyżki.

Definicja 8.5
Nukleolus jest określony jako zbiór:
$\mathfrak{N}(V) = \{y \epsilon IR(v) : \Theta(y) \leq_{lex} \Theta(z)$ dla każdego $z \epsilon IR(V)\}$
Słaby nukleolus jest określony jako zbiór:
$w\mathfrak{N}(V) = \{y \epsilon IR(v) : w\Theta(y) \leq_{lex} w\Theta(z)$ dla każdego $z \epsilon IR(V)\}$.

□

Dla dowolnych wektorów $y, z \epsilon I\!R^M, y \leq_{lex} z$ oznacza, że $z = y$, lub istnieje liczba całkowita $k, 1 \leq k \leq m$, taka, że $y_i = z_i$ for $1 \leq i < k$ i $y_k < z_k$.
Wyłączamy $l_C(y, N)$ ponieważ $l_C(y, N) = 0$ dla każdego $y \epsilon IR(V)$

Twierdzenie 8.2
Dla dowolnej kolekcji funkcji nadwyżki $\{l_C\}_{C \epsilon \aleph}$, *dla każdej gry* V, *nukleolus* $\mathfrak{N}(V)$ *jest niepusty i jeśli rdzeń jest niepusty to*
$\mathfrak{N}(V) \subset core(V)$
Dla dowolnej kolekcji funkcji słabej nadwyżki $\{l_C\}_{C \epsilon \aleph}$, *dla każdej gry* V, *słaby nukleolus* $w\mathfrak{N}(V)$ *jest niepusty i jeśli słaby rdzeń jest niepusty to*
$w\mathfrak{N}(V) \subset wcore(V)$.

■

Dowód
Niech V będzie wielokryterialną grą bez wypłat ubocznych $V \epsilon \Omega$,

a $\{l_C\}_{C \in \aleph}$ będzie daną kolekcją funkcji nadwyżki (funkcji słabej nadwyżki). Niech $m = R^{|\aleph|-1}$, a $\Theta(y) = (\Theta_1(y), \Theta_2(y), ..., \Theta_m(y))$ będzie określone zgodnie z Definicją 8.3. Zgodnie z własnością 4 Definicji 8.3, funkcje $l_C(y, V)$ są ciągłe ze względu na zmienną y, a więc także funkcje $\Theta, i = 1, 2, ..., m$ będą ciągłe (funkcje te mogą być określone odpowiednio jako minima i maksima skończonej liczby ciągłych funkcji $l_C(y, V)$). Niech
$A_1 = \{y \in IR(V) : C_1(y) \leq \Theta_1(z)$ dla każdego $z \in IR(V)$, a
$A_{i+1} = \{y \in A_1 : \Theta_{i+1}(y) \leq \Theta_{i+1}(z)$ dla każdego $z \in A_1$
dla $i = 1, 2, ..., m-1$.

Ponieważ funkcje Θ_i są ciągłe a zbiór $IR(V)$ jest zwarty, to zbiory $A_i i = 1, 2, ..., m$ są zwarte i niepuste. Z definicji nukleolusa mamy $\mathfrak{N}(V) = A_m$, a zatem nukleolus jest niepusty.

Niech gra ma niepusty rdzeń, niech $y \in \mathbf{core}(V)$, a $z \in \mathfrak{N}(V)$. Wtedy $y \in GR(V)$, a maksymalna składowa wektora funkcji Θ spełnia warunek $\Theta_i(z) \leq \Theta_i(y)$. Z Twierdzenia 8.1 wynika, że $\Theta_i(z) \leq \Theta_i(y) \leq 0$, a więc $z \in \mathbf{core}(V)$.
W analogiczny sposób pokazuje się tezę drugiej części twierdzenia.

◊

8.3 Nukleolus zależny od preferencji graczy

W tej sekcji wprowadza się funkcję nadwyżki i nukleolus, które mogą być wykorzystane w systemie wspomagającym analizę decyzyjną. Każdy gracz ocenia swoje wypłaty w przestrzeni swoich kryteriów, poszukuje wypłaty najlepszej zgodnie ze swoimi preferencjami. Zakładamy, że preferencje każdego gracza określane są na

podstawie dwóch punktów; punktu referencyjnego i punktu rezerwacji. Punkt referencyjny określony jest przez oczekiwane oczekiwane przez gracza poziomy aspiracji dla poszczególnych kryteriów. Punkt rezerwacji przyjmiemy na podstawie preferowanej wypłaty gracza działającego niezależnie. W przypadku graczy działających wspólnie, rozpatrujemy wypłaty przestrzeni wszystkich graczy będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni graczy indywidualnych. Można wówczas określić punkt referencyjny wszystkich graczy :
$\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n) \in wIR(V)$, $\underline{y}_i \in V^{\{i\}}$ i
oraz odpowiednio punkt rezerwacji:
$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) \in Y^N$, $\bar{y} \gg \underline{y}$,
gdzie $\underline{y}$ określa preferowane wypłaty graczy działających niezależnie, a $\bar{y}$ - preferowane wypłaty graczy zgodnie z ich aspiracjami. Niech $w(\underline{y}, \bar{y}) \in Y^N$ oznacza preferowany znormalizowany kierunek poprawy generowany zgodnie z aspiracjami wszystkich graczy, a $w^C(\underline{y}, \bar{y}) \in Y^C$ - preferowany kierunek poprawy graczy w koalicji C.

Zgodnie z podejściem funkcji aspiracji (Wierzbicki 1982, 1986), zakłada się, że punkty $\underline{y}$ i $\bar{y}$ wskazane przez graczy, określają pożądany przez nich kierunek poprawy wypłat. Kierunek poprawy, oznaczony jako $w(\underline{y}, \bar{y}) \in Y^N$, przy założeniu normalizacji pomiędzy graczami, może być przedstawiony następująco:

$$w(\underline{y}, \bar{y}) = w_1(\underline{y}, \bar{y}), w_2(\underline{y}, \bar{y}), \ldots, w_n(\underline{y}, \bar{y})),$$

gdzie

$$w_i(\underline{y}, \bar{y}) \in Y_i = I\!R_i^m, w_i(\underline{y}, \bar{y}) = w_{i1}(\underline{y}, \bar{y}), .., w_{ik}(\underline{y}, \bar{y}))$$

dla $i \in N$, a

$$w_{ij}(\underline{y}, \overline{y}) = \frac{\overline{y}_{ij} - \underline{y}_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} \left(\overline{y}_{ij} - \underline{y}_{ij}\right)}.$$

Można łatwo sprawdzić, że spełniony jest warunek normalizacji, polegający na tym, że dla każdego gracza $i \in N$,

$$\sum_{i=1}^{m_i} w(\underline{y}, \bar{y}) = 1.$$

W proponowanym podejściu, szukamy koncepcji rozwiązania gry, która będzie zależała od preferencji graczy. Przyjmujemy, że preferencje graczy są wyrażone przez punkty $\underline{y}$ i $\bar{y}$. Normalizacja wektorów kierunków poprawy umożliwia zachowanie anonimowości graczy w poszukiwanej koncepcji rozwiązania.

Oznaczmy przez $w^C(\underline{y}, \bar{y})$ zestawienie kierunków poprawy graczy tworzących koalicję C, tzn. $w^C(\underline{y}, \bar{y}) = (w_i(\underline{y}, \bar{y})_{i \in C} \in Y^C$

Proponuje się następujący sposób mierzenia nadwyżki koalicji C, dla danych punktów $\underline{y}$ i $\bar{y}$:

$$h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y}) = sup\{t \in I\!R : y^C + t \cdot t^C(\underline{y}, \bar{y}) \circ w^C(\underline{y}, \bar{y})/|C| \in V^C\},$$

gdzie

$$t^C(\underline{y}, \bar{y}) = (t_i(\underline{y}, \bar{y}))_{i \in C},$$

$$t_i(\underline{y}, \bar{y}) = sup\{t \in I\!R : (\underline{y}_i + t \cdot w_i(\underline{y}, \bar{y})) \in P^{\{i\}}(V^N)\},$$

$P^C : Y^N \to Y^C$ jest projekcją Y^N na Y^C, tzn.

$$P^C(V^N) = \{y^C : y \in V^N\},$$

$$t(\underline{y}, \bar{y}) \circ w(\underline{y}, \bar{y}) = (t_1 \cdot w_1(\underline{y}, \bar{y}), ..., t_n \cdot w_n(\underline{y}, \bar{y})) \in Y^N,$$

$$t^C(\underline{y}, \bar{y}) \circ w^C(\underline{y}, \bar{y}) = (t_i \cdot w_i(\underline{y}, \bar{y}))_{i \in C} \in Y^C,$$

$|C|$ jest liczba graczy w koalicji C.

Lemat 8.1

Dla danych punktów $\underline{y}$ i $\bar{y}$, funkcja $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$ jest funkcją słabej nadwyżki gry MCC.

■

Dowód lematu wynika wprost z definicji funkcji $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$.

Definicja 8.6

Wypłata $u(\underline{y}, \bar{y})$ jest nazwana **wypłatą utopijną względem danych punktów** $\underline{y}$ i $\bar{y}$ jeżeli dla każdego $i \in N$:
$u(\underline{y}, \bar{y}) = sup\{y_i \in P^{\{i\}}(V^N) : y_i = \underline{y}_i + t \cdot (\bar{y}_i - \underline{y}_i)$ dla pewnego $t \in I\!R\}$. □

Inaczej mówiąc, wypłata $u(\underline{y}, \bar{y})$ gracza i w koalicji N jest taka, że

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots \underline{y}_{i-1}, u_i(\underline{y}, \bar{y}), \underline{y}_{i+1}, \ldots, \underline{y}_n) \in wGR(V),$$

to znaczy, że wypłata u_i opisuje niezdominowane wartości kryteriów gracza i, które on mógłby uzyskać w pełnej koalicji, przy założeniu, że wypłaty pozostałych graczy $j \in N$, $j \neq i$ będą na poziomie $\underline{y}_j$. Została nazwana utopijną, ponieważ w warunkach rzeczywistych pozostali gracze współpracujący w koalicji nie zgodzą się, aby ten jeden gracz przejął wszystkie korzyści ze współpracy.

Lemat 8.2

Wartości funkcji nadwyżki $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$ zależą od $\underline{y}$ i od kierunku generowanego przez $\bar{y}$, a nie zależą od wartości $|\bar{y} - \underline{y}|$. ■

Dowód

Można sprawdzić, że spełnione są następujące równości:

$$u(\underline{y}, \bar{y}) = \underline{y} + t(\underline{y}, \bar{y}) \circ w(\underline{y}, \bar{y}),$$

$$h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y}) = h_C(y, V, \underline{y}, u(\underline{y}, \bar{y})),$$

dla dowolnego $z \in Y^N$ spełniającego $z = \underline{y}+t \cdot w(\underline{y}, \bar{y})$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}, t > 0$,

$$h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y}) = h_C(y, V, \underline{y}, z).$$

◊

Pozycje graczy ważone są proporcjonalnie do odległości $u_i - \underline{y}_i$, Wartość tej odległości dla konkretnego gracza określa jego siłę przetargową w rozpatrywanej grze.

Lemat 8.3

Funkcja słabej nadwyżki $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$ nie zależy od dodatnich, afinicznych przekształceń kryteriów, tzn. dla dowolnej koalicji $C \in \mathcal{N}$ i arbitralnej transformacji $T = (T_1, T_2, ..., T_n) : Y^C \to Y_C$, takiej, że $T_{ij}y = (a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij})$, gdzie liczby $a_{ij}, b_{ij} > 0$ dla $i \in N, j = 1, 2, ..., m_i$,

$$h_C(Ty, TV, \underline{y}, \bar{y}) = Th_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$$

dla ustalonych wartości $\underline{y}, \bar{y}$.

■

Dowód

Niech T będzie afiniczną dodatnią transformacją kryteriów i $T^C = (T_i)_{i \in C} : Y^C \to Y^C$.

Zauważmy, że

$$w_{ij}(T\underline{y}, T\bar{y}) = \frac{a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}$$

oraz

$$\frac{t_i(\underline{y}, \bar{y})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})} = \frac{t_i(T\underline{y}, T\bar{y})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}.$$

Otrzymujemy

$$T_{ij}y_{ij} + t \cdot \frac{t_i(T\underline{y}, T\bar{y})}{s} \cdot w_{ij}(T\underline{y}, T\bar{y}) =$$

$$a_{ij} + b_{ij} + t \cdot \frac{t_i(\underline{y}, \bar{y}) \cdot \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} s \cdot (\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})} \cdot \frac{a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})} =$$

$$a_{ij}(y_{ij} + t \cdot \frac{t_i(\underline{y}, \bar{y})}{s} \cdot \frac{(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\bar{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})}) + b_{ij} =$$

$$T_{ij}(y_{ij} + t \cdot \frac{t_i(\underline{y}, \bar{y})}{s} \cdot w_{ij}(\underline{y}, \bar{y}).$$

Wynika z tego, że dla dowolnej koalicji C, dowolnego $y \in Y^N$ i dowolnego $t > 0$

$$T^C y^C + t \cdot \frac{t^C(T\underline{y}, T\bar{y})}{s} \circ w^C(T\underline{y}, T\bar{y}) =$$

$$T^C(y^C + t \cdot \frac{t^C(\underline{y}, \bar{y})}{s} \circ w^C(\underline{y}, \bar{y}).$$

◊

Twierdzenie 8.3

Dla danych punktów $\underline{y}$ i $\bar{y}$, słaby nukleolus $w\mathfrak{N}(V, \underline{y}, \bar{y})$ generowany przez funkcję h_C jest niezależny od dodatnich, afinicznych przekształceń kryteriów, tzn.

$$w\mathfrak{N}(TV, T\underline{y}, T\bar{y}) = T[w\mathfrak{N}(V, \underline{y}, \bar{y})],$$

gdzie T jest dodatnim przekształceniem afinicznym.

■

Dowód twierdzenia wynika bezpośrednio z Lematu 8.3 i z definicjji nukleolusa.

Można łatwo sprawdzić, że nucleolus generowany przez funkcję $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$ jest uogólnieniem nukleolusa z przypadku jednokryterialnych gier kooperacyjnych z wypłatami ubocznymi, oryginalnie zdefiniowanych przez Schmeidlera (1969), na przypadek gier wielokryterialnych.

Niech gra $V = \{V^C\}_{C \in \aleph}$ będzie taka, że wszystkie podkoalicje zawierające więcej niż jednego i mniej niż n graczy będą trywialne, tzn. że jeżeli $|C| \neq 1$, $|C| \neq N$ to

$$V^C = \times_{i \in C} V^{\{i\}}.$$

Niech (S, d) będzie n-osobowym wielokryterialnym problemem targu (problem MCB) zdefiniowanym tak jak w rozdziale ??. Jeżeli koncepcja uogólnionego rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky przedstawionego w rozdziale ???? zaproponowana w Kruś, Bronisz (1993) dla problemu MCB jest Pareto optymalna w zbiorze V^N, a $d = \underline{y}$ to można pokazać, że

$$w\mathfrak{N}(V, \underline{y}, \bar{y}) = f^R(V^N, \underline{y}, u(\underline{y}, \bar{y})).$$

Rozwiązanie to jest także uogólnieniem (patrz rozdział 4) rozwiązania Raiffa-Kalai-Smorodinsky oryginalnie zdefiniowanego dla jednokryterialnego problemu targu dwóch graczy (tzn. jeżeli $m_i = 1$ dla każdego $i \in N$) przez Raiffa (1953) i rozpatrywanego w pracach (Kalai, Smorodinsky, 1975), (Thomson, 1980). W przypadku jednokryterialnym, jeżeli podkoalicje są trywialne, proponowany nucleolus pokrywa się z oryginalnym rozwiązaniem Imai problemu targu (Imai 1983). Rozwiązanie Imai leksykograficznie poprawia rozwiązanie Raiffa-Kalai-Smorodinsky jeżeli nie jest ono Pareto optymalne.

8.4 Iteracyjna procedura wspomagania decyzji

Proponuje się iteracyjną procedurę ułatwiająca graczom analizę możliwych wielokryterialnych wypłat w koalicyjnej grze kooperacyjnej i umożliwiającą znalezienie zgodnego rozwiązania. Procedura obejmuje dwie fazy. W pierwszej fazie każdy gracz analizuje swoje osiągalne wypłaty, przy założeniu braku współpracy z innymi. Wyniki tej analizy traktowane są jako wstępne do analizy prowadzonej w drugiej fazie, w której uwzględnia się współpracę graczy i różne koalicje, które mogą być przez nich tworzone.

W pierwszej fazie, każdy gracz niezależnie dokonuje wielokryterialnej analizy swoich możliwych wypłat z zastosowanie podejścia funkcji aspiracji (punktu referencyjnego) Wierzbickiego (1982, 1986) Poszukuje niezdominowanej wypłaty, zgodnej z jego preferencjami w zbiorze $V^{\{i\}}$. Jest to wypłata, którą zgodnie z ideą BATNA może uzyskać niezależnie od innych graczy, bez zakładania współpracy z nimi. W kolejnych iteracjach analizy gracz i proponuje punkty referencyjne $\bar{y}^i \in R^{m_i}$, gdzie R^{m_i} jest przestrzenią kryteriów tego gracza. System komputerowy dla każdego proponowanego punktu referencyjnego wyznacza wypłatę niezdominowaną w zbiorze $V^{\{i\}}$ odpowiednio do punktu referencyjnego. Przeglądając zbiór niezdominowanych wypłat w kolejnych iteracjach, gracz może znaleźć wypłatę zgodną z jego preferancjami. Faza ta kończy się, gdy wszyscy gracze $i = 1, 2, ..., n$ mogą wskazać swoje preferowane niezależne wypłaty. Wypłaty te oznaczone jako $\underline{y} = (\underline{y}^1, \underline{y}^2, ..., \underline{y}^i, ..., \underline{y}^n)$ sa zapamiętane przez system. Stanowią punkt rezerwacji (status-quo), startowy w drugiej fazie analizy.

W drugiej fazie uwzględnia się możliwość współpracy graczy i tworzenia różnych koalicji. Analiza wykonywana jest z zastosowaniem modelu wielokryterialnej gry kooperacyjnej bez wypłat ubocznych, zdefiniowanej w punkcie 8.1.1. Analiza wykonywana jest w pewnej liczbie rund. Każda runda składa się z dwóch części.

W pierwszej części każdy gracz i niezależnie analizuje swoje możliwe wypłaty w przestrzeni swoich kryteriów, w zbiorach V^C dla różnych koalicji $C \in \aleph$. Może to wykonać wykorzystując podejście punktu referencyjnego, analogicznie jak w przypadku wielokryterialnego zagadnienia targu. Stosując to podejście, gracz może wygenerować pewną liczbę punktów Pareto optymalnych w tych zbiorach, zakładając wypłaty pozostałych graczy na poziomie status-quo i podając swoje punkty referencyjne. Gracz i może także poszukiwać możliwej wypłaty kooperacyjnej, zakładając nieznane preferencje innych graczy, ustalając ich punkty referencyjne y^{*j}, $j \in N$, $j \neq i$ i oczywiście swoje punkty referencyjne y^{*i}. System, dla tych danych punktów referencyjnych i punktu $\underline{y}$ określonego w pierwszej fazie procedury, wyznacza nukleolus wN jako możliwe rozwiązanie kooperacyjne. Wygenerowane w ten sposób wypłaty są Pareto optymalne w zbiorze V^N. Oryginalne sformułowanie tego nukleolusa może prowadzić do wypłat słabo Pareto optymalnych, ale zastosowanie proponowanej funkcji osiągnięcia ??? zapewnia, że wyznaczone wypłaty sa Pareto optymalne. Gracz może analizować różne warianty rozwiązań, zakładając różne punkty referencyjne swoje i innych graczy. Analizując te warianty, może lepiej zrozumieć nature gry i swoją sytuację grową i znaleźć preferowany wariant wypłaty. Gracz powinien wskazać preferowany wariant. Wariant ten oznaczony jest jako $\bar{y}^i$. Analiza taka dokonywane jest niezależnie przez wszystkich graczy. Ta część rundy jest kończona, gdy wszyscy gracze wskażą swoje preferowane wypłaty $\bar{y}^i$, $i = 1,..,n$.

W drugiej części rundy system określa punkt $\bar{y}$ na podstawie preferowanych wypłat wskazanych przez graczy. Punkt ten wraz z punktem rezerwacji |*underliney* określa względny punkt utopijny i kierunek poprawy uwzględniający preferencje wszystkich graczy. System wyznacza znormalizowany kierunek poprawy w, funkcję nadwyżki $h_C(y, V, \underline{y}, \bar{y})$ dla wszystkich koalicji $C \in \aleph$ oraz nukleolus $w\mathfrak{N}(V, \underline{y}, \bar{y})$ generowany przez tę funkcję. Zauważmy, że nukleolus ten uwzględnia rzeczywiste preferencje wszystkich graczy. Wyznaczany jest zgodnie ze znormalizowanym kierunkiem poprawy określonym na podstawie ich preferowanych wypłat wskazanych w pierwszej części rundy. Zakłada się,że każdy z graczy może ograniczyć poprawę wypłat wszystkich graczy, w zakładanym, ale tym samym stopniu. Taki ograniczony wektor wypłat przedstawiany jest wszystkim graczom jako **propozycja mediacyjna**. Jeśli któryś z graczy zdecyduje się ograniczyć przyrost wypłat w danej rundzie, to wyznaczony wektor wypłat nie będzie Pareto optymalny w zbiorze V^N, a gracze mogą powtórzyć analizę i skorygować swoje kierunki poprawy w rundzie następnej.

Zastosowane może być podejście punktu referencyjnego, analogicznie jak w przypadku wielokryterialnego zagadnienia targu. Gracz proponuje kolejne punkty referencyjne swoje, ale także zakłada preferencje pozostałych graczy, ustalając ich punkty referencyjne. Dla założonych przez gracza punktów referencyjnych oraz danych punktów status quo z pierwszej fazy, - system wyznacza rozwiązania niezdominowane charakteryzujące brzegi zbiorów V^C dla dowolnej koalicji C, włączając zbiór wypłat koalicji pełnej N. Analizowane mogą być w ten sposób brzegi zbiorów osigalnych wypłat, a także generowane różne warianty rozwiązań - nukleolusa zależnego od preferencji graczy, oraz wynikające z niego propozycje wypłat. Gracz może zakładać różne zestawienia punktów referencyjnych i porównywać uzyskiwane wyniki. Pozwala to uwzględnić nie tylko jego własne preferencje, ale także analizować, jak na jego wyniki mogą wpływać preferencje innych graczy. W ten sposób gracz może lepiej zrozumieć naturę sytuacji growej, w której się znajduje.

8.5 Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono rozwinięcie teorii wielokryterialnych gier kooperacyjnych bez wypłat ubocznych. Ważniejsze uzyskane wyniki obejmują: - sformułowanie gier wielokryterialnych bez wypłat ubocznych
- sformułowanie koncepcji rozwiązań takich jak jądro (core), nucleolus stanowiących uogólnienie koncepcji klasycznych,
- podanie nowej propozycji funkcji nadwyżki i generowanego przez tę funkcję nukleolusa - zależnych od punktów odniesienia (kierunków poprawy kryteriów) przyjmowanych przez graczy).

Przeprowadzono analizę własności tej koncepcji rozwiązania i pokazano, że:
- nucleolus jest niezależny od afinicznych przekształceń kryteriów graczy,
- nucleolus stanowi uogólnienie nukleolusa klasycznych gier kooperacyjnych bez wypłat ubocznych zaproponowanego przez Schmeidlera (1969),
- podana koncepcja jest uogólnieniem koncepcji rozwiązania wielokryterialnego problemu targu zaproponowanego w pracy (Kruś, Bronisz, 1993) i klasycznego problemu targu (Raiffa, 1953 - Kalai, Smorodinsky, 1975) na przypadek gier kooperacyjnych bez wypłat ubocznych.

Przedstawiono idee zastosowania proponowanej koncepcji rozwiązania do wspomagania analizy wielokryterialnej w sytuacjach opisywanych przez gry koalicyjne.