M. METZGER

ARYTMETYKA

i jej stosunek do doświadczenia

LWÓW 1927.

Nakładem autora. — Druk. Literacka, Lwów, Bernsteina 17

M. METZGER

ARYTMETYKA

i jej stosunek do doświadczenia

LWÓW 1927.

Nakładem autora. — Druk. „Literacka", Lwów, Bernsteina 17

Czcigodnemu Panu Dyrektorowi Dr. H. Lilienowi poświęca tę pracę

u c z e ń.

PRZEDMOWA.

Praca niniejsza ma na celu uwydatnienie stosunku, jaki zachodzi między arytmetyką a doświadczeniem na najprostszych ale wyczerpujących przykładach. Szczególnie dałem nacisk na „kwestję zerową“ której w tej pracy poświęciłem dużo miejsca. Dla lepszego zrozumienia moich wywodów przechodzę, niekiedy nawet dosyć bezkrytycznie na tory filozoficzne. Są n. p. takie miejsca, jak przy omawianiu charakteru dedukcji i indukcji, gdzie mogłoby sią wydawać, że utożsamiam dedukcję z indukcją. Zwracam więc uwagę — dla uniknięcia nieporozumień, — że czegoś podobnego nie mam na myśli, tylko twierdzę, że dedukcja ma podłoże indukcyjne Odróżniam w tej pracy najwyraźniej indukcję od dedukcji, co można zauwa-

żyć n. p. przy omawianiu prawa symetrji ab=ba. Zwracam jeszcze uwagę na wyrażenie „doświadczalny". Słowo to ma w różnych miejscach różne znaczenia. Raz oznacza ono „rzeczywisty", raz „możliwy do wykonania" i t. p. czego się zresztą Czytelnicy, w każdem miejscu domyślą Są inne jeszcze usterki n. p. stylistyczne i „kompozycyjne" Jednak mam nadzieję, że Czytelnicy przebaczą mi usterki tej pracy, w której starałem się przedewszystkiem, aby przedmiot był jasno i rzeczowo traktowany.

Autor.

Matematyka odznacza się pośród innych nauk już tem, że opiera się na wywodach dedukcyjnych Nie jest ona zaleźna podobnie jak fizyka i inne nauki przyrodnicze od żadnych przyborów. Jej narzędziem jest tylko intuicja matematyczna regulowana logicznemi przesłankami.

Tak arytmetyka jak geometrja i fizyka wzięły swój początek od otaczającego nas świata materjalnego. Ostatn a (fizyka) traktuje otaczający nas świat dosyć szczegółowo. Geometrja natomiast abstrahuje już od takich szczegółowych własności, jak badanie ciężaru właściwego ciał, ich sprężystość i t. p. Dwa ciała, które fizykalnie są różne, jednak geometrycznie mogą być identyczne np. stożek żelazny i drewniany (o tej samej postaci i objętości). Najogólniej jednak traktuje świat materjalny arytmetyka, która nie bada już rozciągłości ani kształtu, zajmując się tylko własnościami ilościowemi różnych ciał. Dwie figury, które geometrycznie są różne np. kwadrat i koło, jednak arytmetycznie nie muszą się różnić od siebie o ile mają akie same powierzchnie (własności ilościowe).

Wszystkie trzy wyżej wymienione nauki są w ścisłej łączności i jedna zawsze uzupełnia drugą. Geometrja dostarcza dużo własności przestrzennych fizyce, a arytmetyka dostarcza dużo własności ilościowych geometrji. Każda z tych nauk ma jeden i ten sam cel, mianowicie, dokładne badanie otaczającego nas świata, lecz każda traktuje go z zupełnie innego punktu widzenia.

Jednak wyżej wymienione nauki nie zostają wierne wytkniętemu celowi przez to, że swoje twory niejako idealizują. Fizyka wypowiadając prawo, że wszystkie przedmioty spadają z jednakową szybkością bez wzgiędu na ich własności materjalne, nie odpowiada zupełnie doświadczeniu. Zawsze bowiem istnieje opór powietrza, który sprawia, że prawo to koliduje z rzeczywistością. Wprawdzie fizyka wyraźnie zaznacza, że to prawo tylko zachodzi w razie braku powietrza, jednak takiego idealnego wypadku w rzeczywistości niema. Podobnie „idealizuje“ swoje twory geometrja. Ta bada figury, które są regularnemi wielobokami, kołami, ostrosłupami i t. p., chociaż takich idealnych figur nigdzie nie spotykamy, chyba tylko w ciałach krystalicznych, które też nie są zupełnie idealne.

Nauki te nie odpowiadające doświadczeniu mają jednak tę zaletę, że posiadają pewien „zapas dokładności“, który mogą stosować w różnych okolicznościach. Chcąc np. znać stosunek obwodu ciała kolistego do jego średnicy wystarczy przyjąć doświadczalną liczbę 3·14, która jest dosyć dokładna, zwłaszcza, że to ciało nie jest nigdy zupełnie kolistem. Matematyka jednak oblicza ten stosunek Π na setki miejsc dziesiętnych i temsamem „zabezpiecza się" na wypadek, gdyby przyszło obliczyć stosunek obwodu ciała kolistego do średnicy, w razie gdyby ciało to było bardzo gładkie i wielkie, dochodzące do miljardów kilometrów. Nauki te mają więc tę wyższość nad doświadczeniem, że są od tegoż dokładniejsze i mogą swoją dokładność stosować do potrzebnych okoliczności doświadczalnych,

„Idealizacja" ta jednak sprawiała, że nauki te coraz mniej troszczyły się o przedmioty, którym odpowiadają i rzuciły z biegiem czasu swoją szatę doświadczalną. co jednak nie przeszkadza, że doświadczenie czerpie z nich pełną dłonią. Najbardziej (co się samo przez się rozumie) została wierną doświadczeniu fizyka. Mniej od fizyki odpowiada już doświadczeniu geometrja, a najmniej arytmetyka. Ta operując tylko własnościami ilościowemi otaczającej nas materji, zaczęła uważać te wielkości (niemianowane) za coś, „co się samo przez się rozumie". Stała się ona nauką, którą można nazwać „arytmetyką dla arytmetyki". Celem arytmetyki jest obecnie zachowanie harmonji i ciągłości, zachodzącej między liczbami, co nie przeszkadza też naginać arytmetyki do celów doświadczalnych. Dla zachowania ciągłości między liczbami zaprowadziła arytmetyka wielkości, które nic wspólnego nie mają z liczbami doświadczalnemi jak np. wielkości urojone, ujemne i t. p. Wielkości te są jednak bardzo produktywne, jak np. liczby urojone, które pozwalają wyprowadzać wzory na funkcje trygonometryczne. Jest godnem uwagi, że $\frac{1}{i}$ lognat $i = \frac{\Pi}{2}$. Więc logarytm liczby urojonej pozwala nam znaleźć doświadczalny (rzeczywisty) stosunek obwodu koła do jego średnicy. Krótko mówiąc, „idealizacja" matematyki (czy też fizyki) wcale nie jest szkodliwą dla doświadczenia, owszem, przychodzi mu z pomocą. Wszechświat jest niejako zdeformowanem continuum tego idealnego świata, jaki sobie stworzyła matematyka i fizyka.

Jedną tylko wadę pociągnęła za sobą ta „idealizacja", że zaczęto uważać przedewszystkiem matematykę za naukę, która nie jest poniekąd zależna od doświadczenia, a która samem logicznem myśleniem decyduje o swoich prawach. Powstał więc w matematyce — że się tak wyrazimy — pewien „absolutyzm", którego skutki były dla niej dosyć szkodliwe,

Dziwnem jest też, że fizyka, która najbardziej odpowiada doświadczeniu, miała też swoją piętę Achillesa. Mechanika klasyczna stworzyła pewien absolutyzm w pojęciach czasu i przestrzeni, co pociągnęło za sobą pewne przesilenie zlikwidowane dopiero przez sławnego fizyka Alberta Einsteina.

Jak dalece jednak matematyka stała się absolutną pokazuje nam to, że gdy Gauss zbudził się z tego letargu absolutyzmu i postanowił zbadać doświadczalnie, czy suma kątów w trójkącie rzeczywiście wynosi 180°, wówczas patrzano na niego jak na człowieka pozbawionego zupełnie rozumu. Dopiero późniejsi matematycy jak Riemann i inni pokazali, że nie wolno zapominać o tem, iż geometrja wzięła swój początek od doświadczenia. Pomało zaczęto się otrząsać z tego absolutyzmu i podjęto dokładną krytykę podstaw geometrji. Zaczęto sobie zdawać sprawę, że matematyka nie jest czemś w sobie zamkniętem, lecz zależy od doświadczenia. Najbardziej okazała się absolutną arytmetyka, która się jeszcze zupełnie nie otrzęsła z tego absolutyzmu.

Już w początkach rozwoju arytmetyki, daje się zauważyć bezwzględne zaufanie do jej wzorów i twierdzeń. Pozwolono sobie np. na takie wnioski, że $\sqrt{-1} = \sqrt{1-2} = 1 - \frac{2}{2} - \frac{2^2}{8} - \frac{2^3}{16} - \cdots$ jest więc liczbą rzeczywistą. Wnioskowano też, że szereg oscylujący o wyrazach $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ ma sumę wynoszącą $\frac{1}{2}$ (na podstawie wzoru $S =$

$= \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\Big)$. Podobnie pozostawiała sobie wiele do życzenia kwestja „zerowa“. Nie znano jeszcze dokładnie pojęcia granicy i operowano zerem jak każdą inną liczbą. Mnożono zerem, dzielono niem i t. p. Wywnioskowano najspokojniej, że $\frac{1}{0} = \infty$ i na tej podstawie wyprowadzono np., że równanie $3x - 6 = 0$ oprócz pierwiastka $x = 2$ spełnia się też dla $x = \infty$, albowiem równanie $3x - 6 = 0$ można napisać we formie $0x^2 + 3x - 6 = 0$, co pociąga za sobą $x_1 = 2$, $x_2 = \infty$. Późniejsza krytyka matematyczna zaprowadziła pojęcia zbieżności i rozbieżności, zaprowadziła symbole nieoznaczone i sprzeczności nauczając, że z matematyką trzeba się obchodzić dosyć ostrożnie. pokazała ona, że nie wolno wyprowadzać ogólnego wzoru, a później złożyć całą odpowiedzialność na ten wzór, lecz należy badać, kiedy ten wzór jest spełniony, kiedy zawodzi i t. p. Nie można np. wnioskować na podstawie wzoru $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, że $\int \frac{dx}{x} =$

$$= \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0} \text{ i t. p.}$$

Bardzo dużo niekonsekwencyj popełniono przy definicjach. Także znakowanie było przyczyną różnych nieporozumień. Zaś wszystkie te wyżej wymienione niekonsekwencje są wynikiem zbytniego zaufania do absolutnej matematyki i jej dedukcyjnej metody.

Jak wyżej wspomnieliśmy, matematyka opiera się na wywodach dedukcyjnych. Każde prawo matematyczne zostaje temsamem wyprowadzone „a priori". Jeżeli np. wyprowadzamy twierdzenie, że w czworoboku opisanym na kole, sumy boków przeciwległych są sobie równe, to nie trzeba już brać cyrkla i próbować, czy równość tych sum w rzeczywistości zachodzi, ponieważ mamy najzupełniejszą pewność, że sumy te będą równe (o ile naturalnie znamy cały przebieg dowodzenia). Podobnie wyprowadzając wzór, że $\frac{\Pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$, nie weźmiemy już olbrzymiego koła, aby spróbować, czy szereg ten odpowiada prawdzie, czy nie. Dedukcja matematyczna i jej apriorystyczny charakter spotęgowały zatem zaufanie matematyków do tej nauki. Więc nie dziw, że uważano matematykę za naukę absolutną.

Jeżeli bliżej się przypatrzymy charakterowi dedukcji i aprioryzmu, dojdziemy do tego, że cała dedukcja jest niejako indukcją, a cały aprioryzm, aposterioryzmem. Wogóle „poprawne myślenie" i cały sposób dedukowania nie są żadnemi własnościami mózgu ludzkiego, lecz mają za sobą spory zasób doświadczeń. Wszystkie bowiem prawa logiczne i sposób wnioskowaniu zostały uzyskane na podstawie osobistych przeżyć i doświadczeń, które się nam na każdym kroku nasuwały. Dziecko np., które po opuszczeniu pokoju, w którym się znajduje matka, chce ją znaleźć też w drugim pokoju, dochodzi po pewnym czasie takich „usiłowań“ do podświadomego przekonania, że gdy jeden przedmiot znajduje się w jednem miejscu, nie może się równocześnie znaleźć w drugiem. Więc całe wnioskowanie można nazwać, sumowaniem i przyrównywaniem do siebie faktów, które się raz przeżyło. To „przyrównywanie i sumowanie“ doszło pod wpływem ciągłych przeżyć do takiej doskonałości, że odbywa się ono podświadomie z wielką wprawą i szybkością. Ciągłe doświadczenia nasuwały nam więc różne prawa, które stały się podstawą naszego logicznego myślenia. Gdybyśmy nie posiadali całego zasobu doświadczeń za sobą, które uregulowały nasze myślenie, toby nawet taka dedukcyjna geometrja, opierająca się na pewnikach, nic produktywnego nam nie przyniosła.

Wszystkie własności materji nie są nam tak dobrze znane i my sami zdajemy sobie z tego sprawę, że musimy się zawsze powoływać na eksperymenty doświadczalne, które mają nam wykazać prawdziwość lub nieprawdziwość tych własności, choćby nawet były jak najbardziej oczywiste. Tak miała się teraz rzecz z geometrją, która traktuje nasz wszechświat dosyć ogólnie. Wykazano bowiem, że nasz wszechświat ma inne własności geometryczne niż te, jakie nam podaje zwykła szkolna geometrja euklidesowa. Riemann był pierwszym, który zwrócił uwagę, że nie jest samo przez się zrozumiałem, iż do naszego świata stosuje się geometrja euklidesowa, lecz należy to dopiero sprawdzić doświadczalnie. Doświadczenie stało się więc „ostatnią instancją", do której musiano się zwrócić nawet z taką ogólną nauką, jak geometrja.

Całkiem inaczej ma się natomiast rzecz z arytmetyką. Ta operuje najogólniejszemi własnościami materji — własnościami ilościowemi. Z temi własnościami stykaliśmy się na każdym kroku, a stykając się z niemi dosyć często, wyrobiliśmy sobie dokładne i utarte pojęcia tyczące się praw ilościowych, które stanowią podstawę dedukcyjnego myślenia. Tym sposobem doszliśmy do tego, że równe wielkości dodane do równych, są nadal równe, że jeżeli jedna wielkość jest równa drugiej. a druga trzeciej, to pierwsza jest równa trzeciej i t. p. Doświadczenie dostarczyło nam więc całego zasobu własności ilościowych, które umożliwiły nam dedukowanie w nauce arytmetyki. Mając jednak wielką wprawę w dedukowaniu praw ilościowych, zaczęto uważać wszystkie własności ilościowe za takie, które nie zostały usyskane z doświadczenia. Także intuicyjna pewność, że własności ilościowe materji nie mogą ulegać żadnej zmianie, jakiej jednak ulegają własności fizyczne i geometryczne, sprawiła, że arytmetykę uważa się za naukę absolutną, która sama przez się jest zrozumiała. Nie potrzebuje ona przecież — wnioskują — doświadczalnego sprawdzenia. A jednak zapominając o tem, że arytmetyka powstała na tle doświadczalnem, zrobiliśmy krok niewłaściwy już przez to, że uważamy arytmetykę za naukę absolutną. Niewłaściwość takiego postępowania poznaliśmy przy wyżej wymienionych niekonsekwencjach i poznamy też później przy rozszerzeniu jakiegoś prawa na wielkości, nie występujące w świecie doświadczalnym. Tam bowiem, gdzie arytmetyka odnosi się jaszcze do tworów (wielkości) czysto doświadczalnych, nie mamy obawy, że popełnimy jakąś niekonsekwencję, Dedukcja bowiem zdobyta na podstawie doświadczeń. zawsze uchroni nas przed błądzeniem w labiryncie niepewności. Natomiast z wielkościami pozadoświadczalnemi — jak później zobaczymy — rzecz ma się inaczej.

Arytmetyka, badając prawa ilościowe świata materjalnego, zaprowadziła pewne symbole i określenia, co do których mamy już najdokładniejsze pojęcie. Pisząc znak (+) (plus) uprzytomniamy sobie pewien proces doświadczalny, który nazywamy sumowaniem, dodawaniem i t. p. Z procesem tym spotykamy się na każdym kroku i mamy już bardzo dokładne pojęcie o jego własnościach. Znak (+) jest niejako stenogramem pewnego określenia procesu, który można traktatami filozoficznemi wyjaśniać na całych stronicach. Znak ten odpowiada pewnemu ugrupowaniu przedmiotów, a grupę taką charakteryzujemy ilością. Doświadczenie poucza nas, że grupa taka nie jest zależna od porządku, w jakim została ugrupowana. Z tego faktu doświadczalnego uzyskaliśmy znane arytmetyczne prawo, że suma nie zależy od porządku składników. Z tem prawem stykaliśmy się na każdym kroku i tak do tego przyzwyczailiśmy się, że uważamy je za oczywiste i za samo przez się zrozumiałe.

Podobnie odpowiada znak (:) jakiemuś procesowi dzielenia, rozkawałkowania i t. p. Także przez ten znak rozumiemy ściśle określony proces, którego własności dostarczyło nam doświadczenie. Wiemy z doświadczenia, że jeżeli „n“ sztuk rozdzielimy między „n“ ludzi, to każdy ma po jednej sztuce. Na tej podstawie uzyskaliśmy tę szczególną własność dzielenia, że każda liczba podzielona przez siebie daje nam wynik na jednostkę ($n : n = 1$).

Proces mnożenia ma też swoje określone własności, jak np. tą, że iloczyn dwóch (czy też więcej) liczb nie zależy od porządku czynników. Wyrażając to w symbolistyce arytmetycznej, mamy ab = ba. Własność tę uzyskaliśmy przy różnych okolicznościach doświadczalnych — często na podstawie „najczystszej" indukcji w pełnem tego słowa znaczeniu. Nie tak łatwo bowiem rzuca się w oczy, że „a" sztuk rozdzielone między „b" osób, mają tę samą własność ilościową, co „b" sztuk rozdzielone między „a" osób. A jednak dziecko ze szkoły powszechnej ma już podświadomie tę pewność, że ta własność (ab = ba) zachodzi. Ucząc się bowiem tabliczki mnożenia, natrafiało na takie szczegółowe własności, że $6 \times 7 = 7 \times 6$, $8 \times 3 = 3 \times 8$ i t. d. dość, że później na podstawie tych szczegółowych własności uzyskało tę pewność, że będzie też $12 \times 15 = 15 \times 12$ i t. d. To samo prawo, że ab = ba, narzuca się nam też o ile sobie wyobrażamy grupę we formie prostokąta, składającego się z „a" rzędów po „b" sztuk. Grupa ta posiada własność ilościową wartości ab. Grupa zaś składająca się z „b" rzędów po „a" sztuk, będzie miała własność ilościową wartości ba. Ponieważ zaś pierwszy prostokąt jest „ten sam" co drugi, który został tylko „obrócony", więc musi być ab = ba. Takie i inne podobne rozważania prowadzą nas do tego prawa, ale nie tak pomało jak my to przeprowadziliśmy, lecz o wiele szybciej i zupełnie podświadomie. Ostatni przykład przedstawia nam wprawdzie sposób dedukcyjnego rozważania (w przeciwieństwie do przedostatniego przykładu), lecz równocześnie poznajemy tu jaskrawo, że powyższa dedukcja (tak, jak inna zresztą), ma podkład indukcyjny już przynajmniej przez to, że zawiera w sobie to doświadczalne zjawisko, że prostokąt nie zmienia swoich własności ilościowych, jeżeli go dowolnie obrócimy.

Mamy jeszcze w arytmetyce dużo symbolów, które nam oznaczają ściśle określone procesy doświadczalne, a których prawa doświadczenie nam na każdym kroku nasuwa tak, że stały się oczywiste i uważane za produkty „mózgu ludzkiego".

Po omówieniu indukcyjnego (doświadczalnego) charakteru samej dedukcji ilustrowanej na kilku procesach, nie zaszkodzi zastanowić się pobieżnie nad istotą definicyj, co wyjaśni nam w dalszym ciągu istotę dedukcji i stosunek arytmetyki do doświadczenia.

Patrząc się na otaczający nas wszechświat materjalny, poznajemy różne własności procesów doświadczalnych, które zyskują charakter oczywistości. Zwykle obserwujemy niezliczoną ilość własności, które są wspólne wszystkim procesom. (Są to ogólne prawa geometryczne ilościowe i t. p.). Oprócz tych wszystkich „stałych" i wspólnych własności, ma każdy proces specjalną klasę charakterystycznych własności, które mu prawie zawsze nierozłącznie towarzyszą. Z tych wszystkich charakterystycznych własności wybieramy zwykle jedną (lub kilka) jako „reprezentanta" tych własności, który stanowi definicję danego procesu. Resztę zaś własności, które towarzyszą temu „reprezentantowi" łączymy słowem „ponieważ", a takie właśnie łączenie reszty własności z ich „reprezentantem" (definicją) nazywamy dedukowaniem. Rozumie się, że każda (lub każda grupa) z tych własności może prezentować dany proces, a tem samem być jego definicją. Spróbujmy to teraz wyjaśnić na przykładzie. Obcując wciąż ze światem materjalnym, wyrobiliśmy sobie dokładne pojęcie tyczące się „równości", odcinków. Tej równości towarzyszą równocześnie różne własności charakteryzujące daną „równość". Jeżeli dwa odcinki są równe, to wtedy mają takie same liczby wymiarowe, wówczas towarzyszy tej równości inny jeszcze proces, który nazywamy „nakrywaniem się" i wówczas żaden koniec nie wystaje poza końcem drugiego odcinka. Równości odcinków towarzyszą inne jeszcze własności charakterystyczne, których wyliczenie jednak jest dla dalszych rozważań zbytecznem. Doświadczenie dostarczylo nam więc następujących charakterystycznych własności równości dwóch odcinków*):

---

*) Przez słowo równość rozumiemy w różnych miejscach różne pojęcia. W jednem miejscu mamy na myśli „równość

równość liczb wymiarowych, nakrywanie się, nie wystawanie i t. d. Wszystkie te procesy łączymy słowem „ponieważ“ i mówimy: „Ponieważ odcinki są równe, nakrywają się. Ponieważ nakrywają się, nie wystają ich końce i t. d.“ Oczywiście, że na pierwszem miejscu nie musi być równość odcinków (liczb wymiarowych), lecz też nakrywanie się. Mogę tak wnioskować, „ponieważ dwa odcinki nakrywają się, liczby wymiarowe tych odcinków muszą być sobie równe“. Za definicję równości wybraliśmy więc w ostatnim przykładzie „nakrywanie się“.

Warto jeszcze tutaj zaznaczyć, że własności, których towarzyszenie rzucało nam się codziennie w oczy, uważamy prawie za takie same i dziwnem się niejednemu wydaje, że własność „nakrywania“ oddzielamy od własności „nie wystawania“.

Cała geometrja składa się także z pewnej ilości „reprezentantów“ *), zaś reszta składa się tylko z połączeń (przesłanek) logicznych.

Wywody powyższe wyjaśniają nam istotę definicji i dedukcyjnego myślenia, potwierdzając też (co powyżej

---

liczb wymiarowych“, zaś w innem miejscu samą tstotę równości, która jest niejako sumą wszystkich własności tego procesu.

*) Nie należy tu wyrażenie „reprezentant“ utożsamiać z wyrażeniem „defjnicja“, jak powyżej postępowaliśmy.

już mowiliśmy), że dedukcja ma charakter indukcyjny i czysto doświadczalny.

Mogłoby się wydawać, że, mając przed sobą pewien określony proces, możemy zawsze wybrać dowolną własność (lub dowolną grupę własności) za definicję, przez którą dany proces będzie już ściśle i jednoznacznie określony. Zobaczymy później, że istnieją takie okoliczności, gdzie wyżej wymienione własności, niekoniecznie sobie towarzyszą. Niejednokrotnie — jak zobaczymy — dowolność wybierania definicyj może doprowadzić do kardynalnego nieporozumienia. Będą bowiem takie okoliczności, gdzie będziemy musieli jasno wypowiedzieć się, którą z towarzyszących (w najprostszych okolicznościach) własności przyjmu,emy za definicję.

Mówiąc powyżej o odcinkach, mieliśmy zawsze na myśli odcinek prostolinijny. Jeżeli natomiast zechcemy nasze rozważania o równości przenieść na dowolne łuki, zobaczymy, że wyżej wymienione własności już nie towarzyszą sobie. Mogą być dwa łuki o równych liczbach wymiarowych, a jednak nie nakrywają się (lub nie wystają). Przeciwnie zaś, jeżeli dwa łuki nakrywają się (nie wystają), to natychmiast wynika równość liczb wymiarowych. Można jednak przytaczać takie okoiiczności, gdzie dwa łuki nie wystawają, a przecież nie mają tych samych liczb wymiarowych. Możemy bowiem wyobrazić sobie dwa koła przylegające do siebie obwodami, a które obracają się względem siebie z pewną szybkością. Obserwator znajdujący się względem jednego koła w spoczynku zauważy (według teorji względności), że obwód drugiego koła ma inną liczbę wymiarową niż obwód pierwszego koła. A jednak oba obwody nie wystają poza siebie. Tu obserwator ma przed sobą dwie drogi. Jeżeli za definicję „równości" wybiera równość liczb wymiarowych, wówczas musi uważać oba odcinki za różne. Jeżeli natomiast za definicję „równości" bierze „nie wystawanie" *), wówczas musi uważać oba odcinki za równe.

Niema tu nic absolutnego. Wszystko zależy tylko od pewnych z góry przyjętych definicyj.

Rozważając pobieżnie o definicjach, wracamy do kwestyj natury czysto arytmetycznej, i bierzemy pod uwagę kilka przykładów, stosując powyższe rozważania o definicjach.

Arytmetyka bada różne procesy doświadczalne (ze strony ilościowej) oznaczone pewnemi symbolami na podstawie z góry przyjętej definicji. Abstrahuje ona od

---

*) O zupełnem nakrywanin nie możemy tu mówić, bo pod wpływem ruchu, coraz to inne cząstki ze sobą się nakrywają.

doświadczenia i stała się nauką o liczbach, między któremi zaprowadza ciągłość i harmonję. Operując procesami doświadczalnemi, nie zostaje jednak wierna własnościom tego doświadczalnego procesu i wykonuje (teoretycznie) takie operacje, które w rzeczywistości przy danym procesie nie są możliwe. Odejmuje ona liczby większe od mniejszych i dostaje (tą niedoświadczalną operacją) liczby, które nazywa ujemnemi. Wyciąga ona też pierwiastki parzyste z tychże liczb i otrzymuje liczby nazwane urojone i t. d. Arytmetyka operuje więc procesami doświadczalnemi absolutnie, nie troszcząc o to, czy proces dany dopuszcza doświadczalnie do takiej bezwzględnej operacji. Chodzi arytmetyce tylko o to, żeby każde działanie było wykonalne i nieograniczone, a jeżeli to jest doświadczalnie niemożliwe, zaprowadza liczby pozadoświadczalne, traktując je narówno z liczbami doświadczalnemi (o ile nie natrafia na sprzeczności logiczne). Wszelkie operacje na procesach wykonuje więc arytmetyka absolutnie, nie uważając za uprzywilejowana specjalnie tę klasę liczb, która jest doświadczalną. Zaprowadza ona n. p. potęgi ułamkowe jak $a^{\frac{3}{2}}$ chociaż potęga ta nie jest doświadczalną. Wyrażenie a^n oznacza bowiem, że zasada „a“ powtarza się jako czynnik n-razy. Stosownie do definicji tego procesu (potęgowania) nie może przecież zasada a powtarzać się ułamkową ilość razy (lecz całkowitą ilość). Jednak arytmetyka stosowała tę definicję (potęgowania) bezwzględnie, a nie oglądając się, czy potęgi ułamkowe są doświadczalnie dopuszczalne, wyprowadzała takie właśnie potęgi z tejże definicji. Tak samo ma się też rzecz ze zwykłemi ułamkami. Wiemy, że ułamek można (doświadczalnie) do siebie dodawać całkowitą ilość razy. Jeżeli więc ułamek $\frac{p}{q}$ dodamy do siebie k razy to wyrażając się w symbolistyce arytmetycznej napiszemy, że $\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots = k\,\frac{p}{q}$. Ponieważ zaś istnieje prawo, że $ab = ba$, więc powyższe wyrażenie (wnioskując logicznie) będą równe wyrażenia $\frac{p}{q}\,k$. To jest zrpełnie logiczne wnioskowanie, a jednak doświadczalnie to jest niemożliwem, aby jakaś liczba była do siebie dodana ułamkową ilość razy.

Podobne przykłady o bezwzględnem operowaniu procesemi, (arytmetycznemi) dostarcza nam geometrja. Układając we formie prostokąta „a" rzędów po „b" sztuk, utrzymujemy „ilość" wartości ab. To rozumowauie przeniesiono później na prostokąty o odcinkach a i b (gdzie a prezentuje rzędy, zaś b sztuki w każdem rzędzie zawarte) i wywnioskowano, że prostokąt taki ma własność ilościową (powierzchnię) ab. To rozumowanie rozszerzono też na prostokąty, których boki nie są całkowite i wymierne.

Z tych przykładów widzimy, że arytmetyka stara się rozszerzyć wszelkie własności na procesy pozadoświadczalne i przyjmuję milcząco, że własności, które sobie towarzyszą w prostych przypadkach, towarzyszą sobie też przy mniej prostych procesach. Jednak nie mamy tu na myśli, że takie postępowanie jest szkodliwe. Przeciwnie! Należy temu przyklaskiwać, choćby dlatego, że arytmetyka uzyskała przez to zupełną ciągłość i harmonję. Wprawdzie wyżej wymienione niekonsekwencje jak ta, że $\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \cdots$ jest liczbą rzeczywistą nawet dla $x > 1$, było właśnie wynikiem podświadomego rozumowania, że **w s z y s t k i e** własności (ilościowe) procesu pierwiastkowania (jak $\sqrt{1 - x}$) towarzyszą zawsze wszystkim własnościom wyżej wymienionego procesu (szeregu) $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \cdots$, złożonego z całej mnogości procesów potęgowania, dodawania i t. d. Jednak teraz arytmetyka jest już najzupełniej krytyczną i nigdy nam nie przyjdzie na myśl rozumować w podobny sposób jak powyżej, lecz weźmiemy pod uwagę czy dany szereg jest zbieżny, czy rozbieżny i t. p. Arytmetyka jest teraz dosyć ścisłą i nie uważa n. p. za samo przez się zrozumiałe, ża można dowolnie operować liczbami niewymiernemi jak liczbami wymiernemi, lecz zaprowadza pojęcia granic i przekrojów, zapomocą których wszystko krytycznie uzasadnia. Ostatnie pojęcie (przekrojów) wskazuje nam, że arytmetyka zbliża się poniekąd w niektórych rozumowaniach do doświadczenia już przez to, że uzasadnia je geometrycznie. Panuje jedynie teraz w arytmetyce nieszkodliwy absolutyzm polegajcy na tem, że zapomina się. iż każde prawo rozszerzone na wielkości pozadoświadczalne nie jest absolutne i jedyne, lecz zależy od pewnej z góry przyjętej definicji, która nie musi towarzyszyć wszystkim własnościom danego procesu występującym razem w najprostszych okolicznościach doświadczalnych.

Już w liczbach hyperkompleksyjnych okazuje się, że nie mogą mieć wszystkich własności liczb doświadczalnych. Jednak na liczbach urojonych i zespolonych wykonują wszystkie operacje liczb doświadczalnych bez żadnych ograniczeń i nigdy nie napotykano na żadne sprzeczności „logiczne“. (Sprzeczności doświadczalne — jak się samo przez się rozumie —

są tutaj wykluczone). Już to, że liczby te nie są doświadczalne sprawia, że liczby te nie są przez doświadczenie krępowane.

Całkiem inaczej jednak ma się rzecz z liczbą „zero", która w procesach mnożenia i dzielenia jest raz doświadczalną i raz pozadoświadczalną. Wiemy, że „zero" jest wyrażeniem, które oznacza poprostu „nic". Jeżeli mamy n. p. trzy jednostki i odejmujemy od tych trzy, to nic nam nie zostaje. Wiemy, że jeżeli nic nie dodamy do pewnej ilości jednosetk, to ilość ta się nie zmieni. Tak uzyskaliśmy z doświadczenia, że $a + 0 = a$. Dodawanie lub odejmowanie „zera" jest więc jeszcze procesem doświadczalnym.

Podobnie mnożenie przez „zero" ma sens doświadczalny, bo wyobrażamy sobie najdokładniej, żc jak komuś n. p. 1000 razy nic nie damy, to dalej nic nie będzie miał. Doświadczenie pokazuje nam więc, że dowolna liczba doświadczalna pomnożona przez „zero" równa się „zeru" i mamy tę pewność, że to prawo zajdzie dla wszelkich — nawet bardzo wielkich — liczb doświadczalnych, chociaż nigdy nie próbowaliśmy (doświadczalnie) czy n. p. $1000000 \times 0 = 0$.

Jeżeli natomiast chcemy sobie wyobrazić dzielenie przez „zero", to mamy już zupełnie z czemś innem do czynienia. Już dzielenie przez ułamek nie jest procesem doświadczalnym. Jednak arytmetyka stosuje tu (jak zresztą wszędzie) te wszystkie prawa i własności, co przy procesach doświadczalnych. Stosuje ona tu tę doświadczalną własność dzielenia, że ile razy mniejszy jest dzielnik tyle razy większy jest iloraz i dostaje n. p. że $3 : \frac{1}{2} = 6$, bo iloraz ten musi być dwa razy większy od ilorazu $3 : 1$. Ze zerem natomiast sprawa przedstawia się trochę trudniej.

Zanim jednak to rozpatrzymy, musimy się trochę zastanawiać nad procesem dzielenia.

Proces dzielenia ma znak (:), który jest ściśle określony. Proces ten ma tę szczególną własność, że każda liczba podzielona przez siebie równa się jednosce. Procesowi dzielenia towarzyszą inne jeszcze własności jak n. p. jeżeli $a : b = c$, to $c\,b = a$. Proces dzielenia możemy więc określić definicją zawierającą w sobie pewną klasę własności z których jedna brzmi, że $a : a = 1$. Proces ten wyrażony powyższą definicją jest ściśle określony i zdajemy sobie z niego dokładnie sprawę (nie musimy go określić słowami, które też zresztą wymagają dalszych objaśnień). Jeżeli więc wyrazimy proces dzielenia ostatnią definicją (dając nacisk na własność $a : a = 1$) to stosownie do tej definicji (uzyskanej na wielkościach doświadczalnych) będziemy mieli, że i : i = 1, (a+bi) : (a+bi) = 1, i t. p. Doświadczenie bowiem nigdy nie będzie ograniczyło własności tychże liczb pozadoświadczalnych. Tak samo ma się rzecz z liczbą „zero“ Jeżeli więc wyprowadzamy proces dzielenia z powyższej definicji (o szczególnej własności, że a : a musi się tylko równać jednostce) to musimy położyć, że 0 : 0 równa się tylko liczbie 1 Proces dzielenia możemy jeszcze wyrazić drugą definicją, która zawiera w sobie tę szczególną własność, że jeżeli a : b = c, to c. b = a. Definicję tę zwykle wyraża się słowami, które opiewają, że dzielić znaczy znaleźć taką liczbę, która pomnożona przez dzielnik daje dzielną. Jeżeli proces dzielenia wyrazimy tą drugą definicją, to na podstawie tej definicji otrzymamy, że 0 : 0 może dać jako wynik wszelką liczbę, bo każda liczba pomnożona przez zero może się równać zeru. Iloraz 0 : 0 jest więc na podstawie tej definicji liczbą nieoznaczoną. Tu widzimy więc jaskrawo, że własność a : a = 1, zawarta w pierwszej definicji niekoniecznie towarzyszy własnościom drugiej definicji (specjalnie tej własności, że jeżeli a : b = c, c. b = a). Widzimy więc, że obie wymienione definicje towarzyszą sobie tylko w okresie liczb doświadczalnych, zaś dla liczby „0“, która jako dzielnik jest wielkością pozadoświadczalną, obie definicje nie towarzyszą już sobie i musimy już wyraźnie się zdecydować na pierwszą albo drugą definicję. Jeżeli więc przyjmujemy w procesie dzielenia pierwszą definicję, to 0 : 0 równa się tylko jednostce, jeżeli zaś przyjmujemy drugą definicję, 0 : 0 jest liczbą nieoznaczoną. Nic niema tutaj absolutnego.

Należy zaznaczyć, że nieoznaczony charakter ilorazu 0 : 0 (wynikający z drugiej definicji) jest też od tego zależny, że iloczyn a. 0 jest procesem doświadczalnym. Gdyby bowiem a. 0 nie był procesem doświadczalnym nie mielibyśmy dalej powodu położyć, że 0 : 0 = a, podobnie jak nie położymy, że i : i = a, chociaż doświadczenie nie ogranicza tego. Możemy bowiem przyjąć, że a. i = i podobnie jak n. p. a^i może się też równać pewnej potędze a^{bi} (gdzie „b" jest specjalnie dobraną liczbę zależną od a). Nie położymy jednak, że i : i = a, choćby tylko dlatego, że badanie liczb urojonych byłoby przez to zawilsze, gdyż zatraciłaby się nawet przy najprostszych działaniach ta bardzo pożądana jednoznaczność. Doświadczenie wprawdzie nie sprzeciwia się temu, jednak względy praktyczne kolidują z takiem postępowaniem. Tak samo miałaby się rzecz z liczbą zero, gdyby nie dała się mnożyć doświadczalnie.

Wracając do rzeczy zastanówmy się teraz nad wyrażeniem a : 0, Według pierwszej definicji możemy na podstawie induukcji wywnioskować, że będzie to bardzo wielka liczba, większa od wszelkiej liczby doświadczalnej. Dzieląc bowiem jakąś dzielną przez coraz mniejszą liczbę uzyskujemy coraz większy wynik. Wyrażenie a : 0 będzie więc (rozumując arytmetycznie) większe od a : $\frac{1}{10^6}$ od a : $\frac{1}{10^9}$ i t. d., więc od miljona, miljarda i t. d. Mówimy więc, że a : 0 daje bardzo wielką liczbę większą od wszelkiej liczby doświadczalnej, a liczbę tę nazywamy nieskończoną, oznaczając ją symbolem ∞. Liczba ta jest więc jakąś wielkością pozadoświadczalną (podobnie jak a : i daje wynik jakąś liczbę pozaświadczalną wartości — ai).

Rozumowanie powyższe przeprowadzono do niedawna, chociaż pod pewnvm względem jest pozbawione ścisłości. Założyliśmy tu, że ze zmniejszeniem się dzielnika wzrasta iloraz, co nie musi bowiem towarzyszyć definicji na czele której znajduje się własność a : a = 1. Prawo to, że iloraz wzrasta ze zmniejszeniem się dzielnika może dla 0 tak samo zawodzić, jak zawodzi w takich n. p. okolicznościach, że 3 : (— 1) nie jest większe od 3 : 1, (chociaż — 1 > 1). Jeżeli więc zechcemy ściślej traktować wyrażenie a : 0, nie możemy przyjąć, że liczba ∞ jest większą od wszelkiej doświadczalnej liczby. Możemy jednak zostawić symbol ∞ i traktować tę liczbę, której odpowiada, (jak zresztą dotychczas) jako pozadoświadczalną liczbę, nie wiedząc o niej czegoś bliższego. Możemy więc położyć, że $a : 0 = \infty$, gdzie ∞ oznacza pozadoświadczalną liczbę, której nie możemy połączyć z liczbami doświadczalnemi żadnym znakiem nierówności, zwłaszcza, że wiemy, iż $a : 0$ jest to samo co $a : (-0)$ co sprawia, że symbol ∞ nie jest jednoznaczny. Iloraz ten przedstawia przynajmniej dwie liczby o przeciwnych znakach.

Rozumowanie powyższe opieraliśmy na tych rozważaniach, iż własność ta, która orzeka, że ze zmniejszeniem się dzielnika wzrasta iloraz nie musi towarzyszyć własnościom pierwszej definicji, t. zn., że pierwsza definicja nie zawiera w sobie tej własności. Jeżeli jednak zechcielibyśmy przyjąć pierwszą definicję z uwzględnieniem tego, że zawiera w sobie zawsze wymienioną w poprzedniem zdaniu własność, to doszlibyśmy do bardzo osobliwych wyników. Mielibyśmy bowiem na podstawie tej definiciji, że $1 : 0 = \infty$, gdzie ∞ oznacza liczbę pozaświadczalną, większą od wszelkich liczb doświadczalnych. Dalej mielibyśmy, że $1 : (-1) > 1 : 0$ $1 : (-2) > 1 : (-1)$ i t. d. Dostalibyśmy więc całą klasę liczb pozadoświadczalnych, które są nieskończenie wielkie. (Na tej podstawie moglibyśmy oznaczyć,

$1 : 0$ przez ∞, $1 : (-1)$ przez ∞_1, $1 : (-2) = \infty_2$ i t. d.). Musimy tu jeszcze zwrócic uwagę, że definicja ta najzupełniej sprzeciwia się tej własnosci, jeżeli $a : b = c$, $c . b = a$. Nie można bowiem przyjąć, że $\infty_1 (-1) = 1$ i t. p. Musielibyśmy też (przy tej definicji) zrezygnować z tego prawa, że $\frac{0}{x}$ (dla $x \neq 0$) nie musi się równać zeru. Na podstawie bowiem prawa rozdzielności mielibyśmy, że $(1 - 1) : (-1) = 1 : (-1) + (-1) : (-1) = \infty_1 + 1$, co jest liczbą nieskończenie wielką, (a nie taką małą jaką jest zero). Jeżeli jednak nie chcielibyśmy zrezygnować ż tego, że $\frac{0}{x} = 0$, musielibyśmy zrezygnować z takiej zasadniczej własności, jaką jest prawo rozdzielności i t. p.

Takie i tym podobne rozważania możemy przeprowadzić nad pierwszą definicją i musimy przyznać, że nigdy nie zgodzilibyśmy się na taką definicję jaką poprzednio przytoczyliśmy.

Wracajmy teraz do wyrażenia $a : 0$ i przypatrzmy się jak ono wygląda przy drugiej definicji dziełenia, na której czele stoi ta szczególna własność, że skoro $a : b = c$, $c . b = a$.

Określenie a : 0 przedstawia się przy tej definicji zupełnie inaczej. Mamy teraz (według tej definicji) znaleźć taką liczbę, która pomnożona przez zero daje „a". Jednak żądanie takie jest niemożliwe, gdyż wiemy, że każda liczba pomnożona przez zero równa się tylko zeru, (a nie jakiejś innej liczbie $a \neq 0$). Według tej definicji dzielenie przez zero jest niedopuszczalne.

Na takiem właśnie stanowisku stoi dzisiejsza arytmetyka, która sprzeciwia się zaprowadzeniu symbolu jakiejś liczby pozadoświadczalnej, jak postępowaliśmy przy pierwszej definicji, gdyż druga definicja na to nie pozwala, chyba, że zrezygnujemy z tej własności (którą milcząco uważamy za samo przez się zrozumiałą), że każda liczba pomnożona przez zero, musi się tylko równać zeru. Wówczas bowiem będziemy już mogli wyrażeniu a : 0 nadać takie same własności i wyniki jak przy pierwszej definicji. Jednak my nie zrezygnujemy z wyżej wymienionej własności (że $a . 0 = 0$) i zaliczamy ją nadal do tych własności, które towarzyszą obu (przytoczonym tu) definicjom. Jeżeli więc stosujemy pierwszą definicję, to $a : 0 = \infty$ jeżeli zaś stosujemy drugą definicję, to „a" przez zero dzielić nie można. Prowadzi to bowiem do sprzeczności, gdyż żadna liczba (przy wyżej przyjętej definicji) nie może zadośćuczynić temu warunkowi, aby było $x . 0 = a$.

Arytmetyka jednak operuje tylko drugą definicją, która jest nadzwyczaj wygodną. W arytmetyce chodzi przecież o to, aby operowano biegle różnemi działaniami, równaniami i t. p. Zamiast więc dzielić (przy różnych równaniach) liczbami ogólnemi, które prowadzą często do nieskończonych szeregów, wygodniej jest n. p. „przenieść“ dzielenie na drugą stronę równania, gdzie staje się mnożeniem i t. p.

Arytmetyka przyjmuje za najprostsze działanie proces dodawania. Z tego procesu wyprowadza wszystkie inne procesy. Postępując więc w ten sposób musiała arytmetyka przyjąć za proces dzielenia drugą definicję.

Bardzo trudno byłoby naginać całą arytmetykę do pierwszej definicji dzielenia. Weźmy n. p. pod uwagę funkcję $y = f(x) : g(x)$, gdzie $f(x)$ i $g(x)$ stają się dla pewnego „x“ równe zeru. Na podstawie dotychczasowych wiadomości wiemy, że iloraz takich dwóch funkcyj daje pewną określoną liczbę, (którą otrzymujemy na podstawie różniczkowania lub elementarnych rozważań). Iloraz więc $0 : 0$ przestaje byc na tej podstawie nieoznaczonym, co się jednak nie sprzeciwia drugiej definicji dzielenia. Jednak sprzeciwia się to pierwszej definicji, która wymaga, żeby n. p, funkcja $y = (x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$, miała tylko dla $x = 1$, wartość $y = 1$, a nie $y = 2$. Musianoby więc, przyjmując pierwszą definicję, zaprowadzić różne kryterja i zastrzeżenia, co zrobiłoby z arytmetyki naukę nieharmonijną pełną wyjątków i zastrzeżeń.

Także inne nauki polegające na rozważaniach arytmetycznych stosują się o wiele wygodniej do drugiej definicji dzielenia niż do pierwszej. N. p. w analityce równaniu nieoznaczonemu odpowiadają dwie figury nakrywające się. Nie zgadza to się z pierwszą definicją dzielenia, która wymaga, aby figury te (stosownie do określenia, ze $0 : 0 = 1$) przecięły się tylko w jednym punkcie. a nie (jak jest w rzeczywistości) we wszystkich punktach. Zresztą bardzo osobliwą musiałaby być taka analityka, stosująca się do pierwszej definicji. Hyperbola na podstawie funkcji $y = a : x$ miałaby tylko jedną „gałąź". Prosta $y = 0 : x$ nakrywająca się najpierw z dodatnią osią x-ów, zrobiłaby nagle w punkcie $x = 0$ dziwne „salto mortale" i znalazłaby się w punkcie o współrzędnych A (0, 1) i t. p. Dziwnemi zaiste byłyby nauki stosujące się do pierwszej definicji.

Widzimy więc na podstawie tych rozważań, że różne nauki i względy praktyczne, które dążą do zachowania jednolitości i harmonji, złożyły się na to, że nadały arytmetyce taki charakter jaki dziś posiada. Jednak te same względy tak dobitnie wpłynęły na arytmetykę, że uważa ona n. p. drugą definicję dzielenia za absolutną i jedyną, przyjmując milcząco, że inne doświadczalne definicje z których n. p. może wynikać, że 0 : 0 równa się tylko jednostce są niedopuszczalne.

Jednak na podstawie powyższych rozważań poznajemy, że wszelkie prawa arytmetyczne nie są „czemś absolutnem" lecz zostały uzyskane z doświadczenia. Doświadczenie uważa więc obie definicje. za równouprawnione (nie zaprzeczając wcale, że pierwsza jest o wiele wygodniejsza). Absolutny charakter drugiej definicji (z których wynika, że 0 : 0 = a) jest na podstawie naszych rozważań zupełnie nieuzasadniony.

Tak mniej więcej przedstawia się „kwestja zerowa", w której my wprawdzie trochę zboczyliśmy od tematu, lecz w której arytmetyka i jej stosunek do doświadczenia zostały najwybitniej ujawnione.

Można jeszcze dostarczyć dużo przykładów różnych działań arytmetycznych, których stosunek do doświadczenia jest taki sam jak w powyższych rozważaniach. Jednak to już jest zbyteczne, gdyż powyższe przykłady już dość jasno zilustrowały nam stosunek arytmetyki do doświadczenia, które należy brać w rachubę nawet w takiej ogólnej nauce jaką jest arytmetyka.

Tem zamykamy naszą pracę przypominając, że cała arytmetyka ukształtowała się na podstawie naszego stosunku do świata materjainego (doświadczalnego).

Dziwnem może się wydać, że jeszcze dzisiaj są n. p. usiłowania, aby wszystkie prawa arytmetyki wyprowadzić samem „logicznem myśleniem“ z „pozaświadczalnej“ teorji mnogości. Nie można przecież zapominać, że cała teorja mnogości opiera się na doświadczalnej definicji „odpowiedniości jednoznacznej“. Nie dziw więc, że usiłowania takie zostały zwalczane przez znakomitego uczonego H. Poincarego. Tylko taka arytmetyka, która stoi w bezpośredniej łączności z doświadczeniem może być produktywna, zaś nie taka, którą wyprowadzają „logicznem myśleniem“, które zresztą też polega na faktach uzyskanych w obcowaniu ze światem materjalnym.

DRUKARNIA
LITERACKA