EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
AVRIL—MAI 1918

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES *(A)*

PAR

N. LUSIN ET W. SIERPIŃSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1918

Publié par l'Académie des Sciences
sous la direction de M. **Vladislas Kulczyński**,
Secrétaire de la Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles.

Kraków, 31 marca 1919.

Nakładem Akademji Umiejętności.
Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
AVRIL—MAI 1918

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES *(A)*

PAR

N. LUSIN ET W. SIERPIŃSKI

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1918

O pewnych własnościach zbiorów (A). — Sur quelques propriétés des ensembles (A).

Mémoire

de MM. ***N. LUSIN*** et ***W. SIERPIŃSKI*** m. c.,

présenté, dans la séance du 8 Avril 1918, par M. W. Sierpiński m. c.

Dans une note *„Sur une définition des ensembles mesurables (B) sans nombres transfinis“* (Comptes Rendus, 8 janvier 1917) M. Souslin a introduit une importante classe d'ensembles qu'il appelle *ensembles (A)*. Ces ensembles sont définis par une infinité dénombrable de conditions et sont plus généraux que les ensembles mesurables B. Plusieurs propriétés des ensembles (A) ont été étudiées par M. Souslin dans la note citée [1]), quelques autres ont été signalées par M. Lusin dans une note insérée au même fascicule des *Comptes Rendus.* Les recherches ultérieures de MM. Souslin et Lusin sur les ensembles (A) ne sont pas encore publiées.

Dans le présent mémoire, nous donnerons une démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Souslin sur les ensembles (A) [2]), basée sur une décomposition d'un ensemble, complémentaire à un ensemble (A), en une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B. A l'aide de cette décomposition, nous construirons un ensemble non

[1]) Les propriétés les plus importantes des ensembles (A), trouvées par M. Souslin, sont les suivantes:

Tout ensemble (A) (linéaire) est une projection orthogonale sur l'axe des abscisses d'un ensemble plan mesurable B, et réciproquement. Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A), mais non pas réciproquement. Pour qu'un ensemble (A) soit mesurable B, il faut et il suffit que son complémentaire soit un ensemble (A).

Tout ensemble (A) non dénombrable contient un sous-ensemble parfait.

[2]) La démonstration de M. Souslin (fondée sur des considérations géometriques) n'a pas été publiée; son théorème fondamental a été signalé dans la note citée (Comptes Rendus, 8 janvier 1917).

dénombrable qui se transforme en un ensemble de mesure nulle par toute transformation biunivoque et continue de l'intervalle qui le contient (et ne contenant par conséquent aucun sous-ensemble parfait). Nous donnerons enfin une démonstration du théorème que voici: tout ensemble (A) est mesurable au sens de Lebesgue, et nous indiquerons une généralisation de ce théorème.

Ce mémoire a été rédigé de manière qu'il puisse être compris de personnes n'ayant pas connaissance des travaux de MM. Souslin et Lusin sur les ensembles (A).

---

1. Supposons qu'à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa$ corresponde un intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$; nous dirons que nous avons un *système déterminant*

$$S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}.$$

Considérons l'ensemble E de tous les points x tels que pour chacun d'entre eux au moins une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots,$ existe telle que x appartienne à chacun des intervalles

$$\delta_{n_1}, \delta_{n_1 n_2}, \delta_{n_1 n_2 n_3}, \ldots.$$

Nous dirons que l'ensemble E est déterminé par le système S.

M. Souslin appelle *ensemble* (A) tout ensemble qui admet au moins un système déterminant.

Le système déterminant est appelé *régulier*, si tout intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa n_{\varkappa+1}}$ est contenu dans l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ [1]). On pourrait démontrer sans peine que tout ensemble (A) admet au moins un système déterminant régulier. (Si l'on admettait des intervalles qui se réduisent à des points et à des intervalles vides, et si l'on regardait un intervalle vide comme contenu dans tout intervalle, il suffirait, pour obtenir un système déterminant régulier, de remplacer tout intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ du système S par la partie commune des intervalles $\delta_{n_1}, \delta_{n_1 n_2}, \ldots, \delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$).

2. Soit E un ensemble (A) donné, et soit $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}$ son système déterminant régulier. Considérons un point x qui n'appartient pas à E. Nous dirons que l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ du système S a, par

[1]) On pourrait toujours supposer que les longueurs des intervalles de $\varkappa$-ième rang, $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$, tendent vers 0 pour $\varkappa = \infty$, mais dans nos raisonnements cette restriction ne sera pas nécessaire.

rapport au point x, un *indice* 0, si x n'appartient pas à cet intervalle. Si x appartient à $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\chi}$, nous appellerons *indice* de l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\chi}$ par rapport au point x, et nous désignerons par $Ind_x \delta_{n_1 n_2 \ldots n_\chi}$ le plus petit nombre (naturel ou transfini) supérieur à tout nombre

$$Ind_x \delta_{n_1 n_2 \ldots n_\chi n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$ [1]

On voit sans peine que, si x est un point n'appartenant pas à E, tout intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\chi}$ du système S déterminant E a, par rapport à x, un indice déterminé qui est un nombre entier fini ($\geqslant 0$) ou transfini de la deuxième classe.

Admettons en effet que l'intervalle $\delta_{p_1 p_2 \ldots p_m}$ n'ait pas par rapport à x d'indice déterminé, ou que cet indice ne soit pas un entier fini ($\geqslant 0$) ou transfini de la deuxième classe. Il est bien évident que dans ce cas un au moins parmi les intervalles

$$\delta_{p_1 p_2 \ldots p_m n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jouit de la même propriété [2]. En répétant ce raisonnement nous serions conduits à une suite infinie d'intervalles du système S:

$$(1) \qquad \delta_{p_1 p_2 \ldots p_m}, \ \delta_{p_1 p_2 \ldots p_m p_{m+1}}, \ \delta_{p_1 p_2 \ldots p_m p_{m+1} p_{m+2}}, \ldots,$$

dans laquelle aucun intervalle n'a un indice déterminé par rapport à x ou bien a un indice qui n'est pas un entier fini ($\geqslant 0$) ou transfini de seconde classe. Il est évident d'ailleurs que tout intervalle (1) devrait contenir dans ce cas le point x; mais comme le système S est régulier, x appartient aussi à chacun des intervalles (qui contiennent tous $\delta_{p_1 p_2 \ldots p_m}$)

$$\delta_{p_1}, \ \delta_{p_1 p_2}, \ldots, \ \delta_{p_1 p_2 \ldots p_{m-1}},$$

et par conséquent x appartiendrait à une suite régulière d'intervalles du système S:

$$\delta_{p_1}, \ \delta_{p_1 p_2}, \ \delta_{p_1 p_2 p_3}, \ldots, \ \delta_{p_1 p_2 \ldots p_m}, \ \delta_{p_1 p_2 \ldots p_m p_{m+1}}, \ldots$$

[1]) La notion d'*indice* a été introduite (par voie géometrique) par M. Souslin et simplifiée ensuite par M. Lusin. Plusieurs propriétés des indices ont été étudiées par MM. Souslin et Lusin.

[2]) Pour voir qu'il ne peut en être autrement, il suffit de se fonder sur le théorème d'après lequel, pour toute suite infinie (dénombrable) de nombres de première ou de deuxième classe, existe un nombre de deuxième classe qui est supérieur à tous les termes de la suite donnée.

et serait ainsi un point de l'ensemble E, ce qui serait contraire à notre hypothèse.

3. Appelons *indice du système S par rapport au point x* (n'appartenant pas à E) et désignons par $Ind_x S$ le plus petit nombre naturel ou transfini supérieur à tous les indices des intervalles $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ du système S (par rapport à x). On voit sans peine que $Ind_x S$ sera le plus petit nombre supérieur à tout indice $Ind_x \delta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $Ind_x S$ sera donc (pour tout point x n'appartenant pas à E) un nombre naturel ou transfini de deuxième classe.

Pour tout nombre donné α, naturel ou transfini de deuxième classe, désignons par $P^{(\alpha)}$ l'ensemble de tous les points x (n'appartenant pas à E) pour lesquels

$$Ind_x S = \alpha;$$

nous démontrerons que tous les ensembles $P^{(\alpha)}$ sont mesurables (B).

L'assertion précédente est vraie pour $\alpha = 1$ puisque $P^{(1)}$ est évidemment l'ensemble de tous les points x qui n'appartiennent à aucun des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

Soit maintenant β un nombre naturel ou transfini de la seconde classe > 1; admettons que notre assertion soit vraie pour tout nombre $\alpha < \beta$ et tout système déterminant S.

Pour tout p naturel donné, désignons par $S^{(p)}$ le système

$$S^{(p)} = \{\delta^{(p)}_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\},$$

où

$$\delta^{(p)}_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa} = \delta_{p n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}, \text{ pour } n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit $E^{(p)}$ l'ensemble dont le système déterminant est $S^{(p)}$ et désignons par $P^{(\alpha)}_p$ l'ensemble de tous les points x n'appartenant pas à $E^{(p)}$ pour lesquels

$$Ind_x S^{(p)} = \alpha.$$

Les ensembles $P^{(\alpha)}_p$ $(\alpha < \beta;\ p = 1, 2, 3, \ldots)$ seront, d'après l'hypothèse adoptée, tous mesurables (B).

On vérifie sans peine la formule:

$$P^{(\beta)} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha < \beta} P^{(\alpha)}_p \right) - \sum_{\alpha < \beta} P^{(\alpha)} \tag{4}$$

$\left(\sum\limits_{\alpha < \beta}\right.$ désignant une sommation qui s'étend à tous les nombres naturels ou transfinis α inférieurs à β).

Les ensembles $P_p^{(\alpha)}$ et $P^{(\alpha)}$ ($\alpha < \beta$) sont, d'après l'hypothèse adoptée, mesurables (B); la somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables (B) et la différence de deux ensembles mesurables (B) étant mesurable (B), il résulte de la formule (4) que l'ensemble $P^{(\beta)}$ est mesurable (B). La formule (4) permet donc de démontrer par induction transfinie que tous les ensembles $P^{(\alpha)}$ sont mesurables (B) c. q. f. d.

Or, en désignant par CE le complémentaire de l'ensemble E, nous avons évidemment la formule:

$$(5) \quad CE = P^{(1)} + P^{(2)} + \dots + P^{(\omega)} + P^{(\omega+1)} + \dots + P^{(\alpha)} + \dots \qquad (\alpha < \Omega)$$

(l'inégalité $\alpha < \Omega$ désignant que la sommation s'étend à tous les nombres naturels et transfinis de deuxième classe).

La formule (5) démontre que le complémentaire d'un ensemble (A) est toujours une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables B (ou vides) et par conséquent que tout ensemble (A) est un produit de $\aleph_1$ ensembles mesurables B (d'après la formule $E = \prod\limits_{\alpha < \Omega} CP^{(\alpha)}$).

Nous démontrerons maintenant que, pour qu'un ensemble (A), E, soit mesurable B, il faut et il suffit qu'à partir d'une certaine place, tous les termes de la série (5) soient vides (c'est-à-dire que la suite (5) ne contienne qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles non vides). Il est évident que la condition que nous venons d'énoncer est suffisante (puisqu'alors CE est une somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles mesurables (B) et par suite est mesurable (B), donc aussi E); il suffira donc de démontrer qu'elle est nécessaire. Avant de le faire, nous démontrerons un lemme assez général.

4. Soit M un sous-ensemble de CE donné quelconque. Appelons *indice du système* S (resp. de l'intervalle $\delta_{n_1 n_2 \dots n_\chi}$) *par rapport à l'ensemble* M, et désignons par $Ind_M S$ (resp. $Ind_M \delta_{n_1 n_2 \dots n_\chi}$), le plus petit entier (fini ou transfini) supérieur aux indices $Ind_x S$ (resp. $Ind_x \delta_{n_1 n_2 \dots n_\chi}$) par rapport à tous les points x de l'ensemble M. Les indices $Ind_x S$ étant des nombres de première ou de deuxième classe, il est évident que $Ind_M S$ sera toujours (pour un sous-ensemble M de CE) un nombre fini ou transfini $\leqslant \Omega$, où Ω désigne le plus petit nombre de troisième classe. Or nous démontrerons le lemme que voici:

Lemme. Si S est un système régulier déterminant un ensemble E, M un sous-ensemble de CE, et si M est un ensemble (A), nous avons

$$Ind_M S < \Omega.$$

Démonstration. Soit $S' = \{\gamma_{p_1p_2\ldots p_\varkappa}\}$ un système régulier, déterminant l'ensemble M. Désignons généralement par $M(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ le sous-ensemble de M, déterminé par le système

$$S'(n_1, n_2, \ldots, n_q) = \{\gamma^{(n_1n_2\ldots n_q)}_{p_1p_2\ldots p_\varkappa}\}, \text{ où}$$

$$\gamma^{(n_1n_2\ldots n_q)}_{p_1p_2\ldots p_\varkappa} = \gamma_{n_1n_2\ldots n_qp_1p_2\ldots p_\varkappa} \text{ (pour } p_1, p_2, \ldots, p_\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous aurons évidemment:

$$(6) \qquad M = M(1) + M(2) + M(3) + \ldots$$

et

$$(7) \quad M(n_1, n_2, \ldots, n_q) = M(n_1, n_2, \ldots, n_q, 1) + M(n_1, n_2, \ldots, n_q, 2) + \ldots$$

Supposons

$$(8) \qquad Ind_M S = \Omega.$$

En vertu de (8) et de la définition du symbole $Ind_M S$, on reconnaît sans peine qu'il existe au moins un nombre naturel n'_1 pour lequel

$$(9) \qquad Ind_M \delta_{n'_1} = \Omega.$$

Or, d'après (9) et (6), on voit de même qu'il existe au moins un nombre naturel p'_1 tel que

$$(10) \qquad Ind_{M(p'_1)} \delta_{n'_1} = \Omega.$$

D'après (10) nous concluons de même qu'il existe un nombre naturel n'_2, tel que

$$Ind_{M(p'_1)} \delta_{n'_1n'_2} = \Omega,$$

et enfin, d'après (7), qu'un nombre p'_2 existe pour lequel

$$Ind_{M(p'_1p'_2)} \delta_{n'_1n'_2} = \Omega.$$

Généralement, nous concluons que deux suites infinies de nombres naturels

$$n'_1, n'_2, n'_3, \ldots$$

et

$$p'_1, p'_2, p'_3, \ldots,$$

existent telles que

$$(11) \qquad Ind_{M(p'_1,p'_2,\ldots,p'_s)}\delta_{n'_1n'_2\ldots n'_s} = \Omega, \text{ pour } s = 1, 2, 3, \ldots$$

Cependant l'ensemble $M(p'_1, p'_2, \ldots, p'_s)$ (dont le système déterminant est

$$S'(p'_1, p'_2, \ldots, p'_s) = \{\gamma^{p'_1p'_2\ldots p'_s}_{p_1p_2\ldots p_\varkappa}\})$$

est évidemment contenu dans l'intervalle $\gamma_{p'_1p'_2\ldots p'_s}$ (puisque, le système S' étant régulier, tous les intervalles

$$\gamma^{p'_1p'_2\ldots p'_s}_{p_1p_2\ldots p_\varkappa} = \gamma_{p'_1p'_2\ldots p'_sp_1p_2\ldots p_\varkappa}$$

sont contenus dans l'intervalle $\gamma_{p'_1p'_2\ldots p'_s}$); la formule (11) montre donc que les intervalles $\gamma_{p'_1p'_2\ldots p'_s}$ et $\delta_{n'_1n'_2\ldots n'_s}$ ont des points communs.

Nous arrivons ainsi à deux suites infinies d'intervalles:

$$\delta_{n'_1}, \delta_{n'_1n'_2}, \delta_{n'_1n'_2n'_3}, \ldots$$

et

$$\gamma_{p'_1}, \gamma_{p'_1p'_2}, \gamma_{p'_1p'_2p'_3}, \ldots,$$

telles que chaque intervalle contienne le suivant et que les intervalles de même rang dans les deux suites aient toujours des points communs. On voit sans peine qu'il existe dès lors au moins un point x_0 commun à tous les intervalles de chacune de ces deux suites.

Le point x_0 appartiendrait donc aux ensembles E et M, déterminés respectivement par les systèmes S et S'. ce qui est impossible, puisque M est contenu dans CE. L'égalité (8) implique donc une contradiction et le lemme est démontré.

5. Supposons maintenant que l'ensemble CE soit un ensemble (A). D'après le lemme du § 4 nous avons

$$Ind_{CE}S = \alpha_0 < \Omega,$$

donc, pour tout point x de CE:

$$Ind_x S < \alpha_0,$$

et par conséquent (d'après la définition des ensembles $P^{(\alpha)}$) tous les ensembles $P^{(\alpha)}$ seront vides pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, ce qui entraîne comme conséquence que la série (5) contient seulement un nombre fini ou une infinité dénombrable de termes non nuls. Tous les termes de la série (5) étant des ensembles mesurables B, nous en concluons que CE (qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B) est elle-même mesurable B. Nous avons donc démontré que, *si CE est un ensemble (A), il est mesurable B.* L'ensemble E est alors évidemment aussi mesurable B. Donc: si CE est un ensemble (A), E est mesurable B. La réciproque de cette proposition étant évidemment vraie (puisque, comme l'a démontré M. Souslin dans la note citée, tout ensemble mesurable B est un ensemble (A) [1]), nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème de M. Souslin: Pour qu'un ensemble (A) soit mesurable B, il faut et il suffit que son complémentaire soit aussi un ensemble (A).

6. M. Souslin a construit un ensemble (A), E, dont le complémentaire CE (par rapport à l'intervalle $(0, 1)$) n'est pas un ensemble (A) [2]; la série (5) correspondante contiendra donc une infinité non dénombrable (de puissance $\aleph_1$) de termes $P^{(\alpha)}$ qui seront des ensembles non vides. Dans chacun de ces ensembles, choisissons un point: nous obtiendrons ainsi un ensemble non dénombrable de points, Q (de puissance $\aleph_1$), situé dans l'intervalle $(0, 1)$. Nous affirmons que l'ensemble Q est de mesure (lebesguienne) nulle.

Tout ensemble (A) est mesurable au sens de Lebesgue; nous en donnerons une démonstration détaillée au § 7. Il en résulte que tout complémentaire d'un ensemble (A) est aussi mesurable L. On sait cependant que tout ensemble mesurable L est une somme d'un ensemble de mesure nulle et d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés ou vides (par conséquent mesurables B). Nous pouvons donc poser:

$$CE = N + M_1 + M_2 + M_3 + \dots \tag{12}$$

[1]) Ceci résulte immédiatement des trois propriétés suivantes des ensembles (A): 1) Tout intervalle est un ensemble (A); 2) une somme d'un infinité dénombrable d'ensembles (A) est un ensemble (A); 3) un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles (A) est un ensemble (A). Cf. la note de W. Sierpiński: „Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables B", insérée au numéro précédent de ce *Bulletin*.

[2]) La classe de tous les ensembles (A) a évidemment la puissance du continu; donc, par un procédé bien connu de M. Cantor (par lequel on démontre que la classe de tous les ensembles de points d'un intervalle a une puissance supérieure à celle du continu) on peut définir un ensemble E_0 qui n'est pas un ensemble (A). Or M. Souslin a prouvé que son complémentaire $CE_0 = E_1$ est un ensemble (A). La démonstration de M. Souslin, simplifiée par M. Lusin, sera publiée dans un mémoire ultérieur.

où $m(N) = 0$ ($m(N)$ désignant la mesure lebesguienne de l'ensemble N), et où $M_1, M_2, M_3, \ldots$ sont des ensembles mesurables B, donc, à plus forte raison, des ensembles (A).

D'après le lemme du § 4, pour tout n naturel nous avons:

$$Ind_{M_n} S = \alpha_n < \Omega,$$

ce qui montre que, pour $\alpha \geqslant \alpha_n$, les ensembles $P^{(\alpha)}$ n'ont pas de points communs avec M_n. La formule (5) donne donc (M_n étant un sous-ensemble de CE):

$$M_n = \sum_{\alpha < \alpha_n} M_n P^{(\alpha)},$$

et par suite:

$$M_n Q = \sum_{\alpha < \alpha_n} M_n P^{(\alpha)} Q \tag{13}$$

Mais de la définition de l'ensemble Q il résulte que chacun des ensembles $P^{(\alpha)} Q$ contient au plus un point; la somme (13) contient donc un nombre au plus dénombrable de points et par conséquent l'ensemble $M_n Q$ est de mesure nulle. Nous arrivons donc à la conclusion:

$$m(M_n Q) = 0, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

D'autre part, la formule (12) donne (Q étant un sous-ensemble de CE):

$$Q = NQ + M_1 Q + M_2 Q + M_3 Q + \cdots,$$

d'où, d'après (14) et d'après $m(N) = 0$:

$$m(Q) = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Soit maintenant φ une transformation biunivoque et continue de l'intervalle (0, 1). Désignons généralement par $\varphi(x)$ le point en lequel se transforme le point x par la transformation φ, et par $\varphi(M)$ l'ensemble en lequel se transforme l'ensemble M. Soit $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}$ le système déterminant de l'ensemble E; tout intervalle $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ de ce système sera transformé par la transformation φ en un intervalle $\varphi(\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa})$, et le système S en un système $\varphi(S)$. Il est bien évident que $\varphi(S)$ sera un système déterminant pour l'ensemble $\varphi(E)$

et que $\varphi(P^{(\alpha)})$ sera l'ensemble de tous les points x de $\varphi(CE) = C\varphi(E)$ pour lesquels

$$Ind_x \varphi(S) = \alpha\,;$$

nous aurons donc la formule:

$$\varphi(CE) = \varphi(P^{(1)}) + \varphi(P^{(2)}) + \ldots + \varphi(P^{(\omega)}) + \ldots + \varphi(P^{(\alpha)}) + \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

qui nous permettra de démontrer, de la manière dont nous l'avons fait précédemment pour la formule (5) relative à l'ensemble Q, que l'ensemble $\varphi(Q)$ est de mesure nulle.

Nous avons démontré qu'il existe un ensemble non dénombrable qui se transforme en un ensemble de mesure nulle par toute transformation biunivoque et continue de l'intervalle [1]. Cette propriété n'est donc nullement caractéristique pour les ensembles dénombrables.

En se fondant sur la propriété démontrée de l'ensemble Q on reconnaît sans peine qu'il ne contient aucun ensemble parfait (puisque tout ensemble parfait peut être transformé, par une transformation biunivoque et continue convenable de l'intervalle qui le contient, en un ensemble de mesure positive [2]). Nous avons ainsi un exemple d'un ensemble non dénombrable qui ne contient aucun ensemble parfait [3].

7. Nous démontrerons maintenant le théorème suivant:

Théorème [4]: Tout ensemble (A) est mesurable L.

Démonstration. Soit E un ensemble (A) donné, $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}$ son système déterminant régulier. Désignons généralement par $E^{(p_1 p_2 \ldots p_s)}$ l'ensemble déterminé par le système

$$S^{(p_1 p_2 \ldots p_s)} = \{\delta^{(p_1 p_2 \ldots p_s)}_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\},$$

où

$$\delta^{(p_1 p_2 \ldots p_s)}_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa} = \delta_{p_1 p_2 \ldots p_s n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}, \text{ pour } n_1, n_2, \ldots n_\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

L'ensemble $E^{(p_1 p_2 \ldots p_s)}$ sera évidemment situé dans l'intervalle $\delta_{p_1 p_2 \ldots p_s}$. On voit aussi aisément que nous avons

[1]) Notre démonstration fait évidemment usage du principe du choix.

[2]) Cf. la note de W. Sierpiński (Sur une propriété générale des ensembles de points) insérée aux C. R., t. 162 (du 8 mai 1916).

[3]) Le problème de l'existence de tels ensembles a été posé par M. L. Schaeffer et résolu (à l'aide de l'axiome de M. Zermelo) par M. F. Bernstein. Cf. A. Schoenfliess: Entwickelung der Mengenlehre etc., Erste Hälfte (1913), p. 361.

[4]) Ce théorème a été déjà signalé par M. N. Lusin dans la note citée.

$$E = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + \dots \tag{15}$$

et

$$E^{(p_1 p_2 \dots p_s)} = E^{(p_1 p_2 \dots p_s 1)} + E^{(p_1 p_2 \dots p_s 2)} + \dots \tag{16}$$

Grâce à la théorie de mesure donnée par M. Lebesgue, on sait qu'il existe, pour tout ensemble E, un ensemble M mesurable (L) contenant E et tel que sa mesure soit égale à la mesure extérieure de E, c'est-à-dire que

$$m(M) = m_e(E). \tag{17}$$

Désignons généralement par $M^{(p_1 p_2 \dots p_s)}$ un ensemble mesurable (L) qui est situé dans l'intervalle $\delta_{p_1 p_2 \dots p_s}$ contenant l'ensemble $E^{(p_1 p_2 \dots p_s)}$ et tel que

$$m(M^{(p_1 p_2 \dots p_s)}) = m_e(E^{(p_1 p_2 \dots p_s)}). \tag{18}$$

Posons

$$T = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + \dots \tag{19}$$

et

$$T^{(p_1 p_2 \dots p_s)} = M^{(p_1 p_2 \dots p_s 1)} + M^{(p_1 p_2 \dots p_s 2)} + \dots \tag{20}$$

Ces expressions seront des ensembles mesurables, en tant que sommes d'infinités dénombrables d'ensembles mesurables. Posons encore

$$R = M - T, \tag{21}$$

$$R^{(p_1 p_2 \dots p_s)} = M^{(p_1 p_2 \dots p_s)} - T^{(p_1 p_2 \dots p_s)} \tag{22}$$

et

$$N = R + \sum R^{(p_1 p_2 \dots p_s)}, \tag{23}$$

la sommation $\sum$ s'étendant à tous les systèmes finis de nombres naturels $p_1, p_2, \dots p_s$.

Observons tout d'abord que l'ensemble $M^{(n)}$ contient, pour tout n naturel donné, l'ensemble $E^{(n)}$; nous en concluons, d'après (15) et (19), que l'ensemble T contient l'ensemble E. Par conséquent, l'ensemble

$$Q = M - R \tag{24}$$

contient l'ensemble E (puisque, d'après (21) et (24), nous avons $Q = MT$, les ensembles M et T contenant E). Or, d'après (21) et

(24), Q est mesurable; nous avons donc, d'après (24) (Q contenant E):

$$m_e(E) \leqslant m(Q) \leqslant m(M),$$

donc, d'après (17):

$$(25) \qquad m(Q) = m(M).$$

Or, d'après (21), R est contenu dans M; les formules (24) et (25) donnent donc facilement:

$$m(R) = 0.$$

De même, en partant des formules (16), (18), (20) et (22) (au lieu de (15), (17), (19) et (21)), nous trouverons:

$$m(R^{(p_1 p_2 \dots p_s)}) = 0$$

pour tout système fini de nombres naturels $p_1, p_2, \dots p_s$.

D'après (23), l'ensemble N est donc une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle; nous avons donc:

$$(26) \qquad m(N) = 0.$$

Posons maintenant:

$$(27) \qquad P = M - N;$$

nous aurons, d'après (26): $m(P) = m(M)$, donc, d'après (17):

$$(28) \qquad m(P) = m_e(E).$$

Nous allons démontrer maintenant que l'ensemble P est contenu dans E. Soit, en effet, x un point de l'ensemble P. L'ensemble P étant, d'après (27), contenu dans M, x est un point de M. D'autre part, d'après (27) et (23), nous concluons sans peine que x n'appartient pas à l'ensemble R, c'est à dire, d'après (21), à l'ensemble $M - T$. Donc x appartient à M sans appartenir à $M - T$; il en résulte que x appartient à l'ensemble T, donc, d'après (19), à un au moins des ensembles $M^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Soit q_1 le plus petit nombre naturel, tel que x appartienne à l'ensemble $M^{(q_1)}$. D'après (27) et (23), le point x n'appartient pas à l'ensemble $R^{(q_1)}$, c'est-à-dire, d'après (22), à l'ensemble $M^{(q_1)} - T^{(q_1)}$; donc x appartient à $M^{(q_1)}$ sans appartenir à $M^{(q_1)} - T^{(q_1)}$; il en résulte que x appartient à l'ensemble $T^{(q_1)}$, c'est-à-dire, d'après (20), à l'ensemble

$$T^{(q_1)} = M^{(q_1 1)} + M^{(q_1 2)} + M^{(q_1 3)} + \dots;$$

par conséquent x appartient à un au moins des ensembles $M^{(q_1 n)}$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Soit q_2 le plus petit nombre naturel, tel que x appartienne à l'ensemble $M^{(q_1 q_2)}$.

Généralement, supposons que nous ayons déjà déterminé les indices $q_1, q_2, \ldots, q_\varkappa$ et que x appartienne à l'ensemble $M^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)}$. D'après (27) et (23), x n'appartient pas à l'ensemble $R^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)}$, c'est-à-dire, d'après (22), à l'ensemble $M^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)} - T^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)}$; nous en concluons, comme précédemment, que x appartient à l'ensemble $T^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)}$, par conséquent, d'après (20), à un au moins des ensembles $M^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nous désignerons par $q_{\varkappa+1}$ le plus petit nombre naturel, tel que x appartienne à l'ensemble $M^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa q_{\varkappa+1})}$.

La suite infinie des nombres naturels $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sera ainsi déterminée complètement et x appartiendra, pour tout $\varkappa$ naturel, à l'ensemble $M^{(q_1 q_2 \ldots q_\varkappa)}$, donc à l'intervalle $\delta_{q_1 q_2 \ldots q_\varkappa}$. Par conséquent x appartiendra à chacun des intervalles de la suite infinie

$$\delta_{q_1}, \delta_{q_1 q_2}, \delta_{q_1 q_2 q_3}, \ldots;$$

ce sera donc un point du noyau E du système déterminant

$$S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}.$$

Nous avons démontré de cette manière que tout point x de P appartient à E ce qui entraîne l'inégalité

$$m(P) \leqslant m_i(E) \tag{29}$$

($m_i(E)$ désignant la mesure intérieure de l'ensemble E).

Les formules (28) et (29) donnent:

$$m_e(E) \leqslant m_i(E),$$

ce qui prouve que l'ensemble E est mesurable (L).

Notre théorème est donc établi [1]).

8. Nous arrivons à la généralisation du théorème que nous venons de démontrer.

Supposons qu'à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa$ corresponde un ensemble (linéaire) $E_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$.

Désignons par E l'ensemble de tous les points x, tels que pour chacun d'eux au moins une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ existe telle que x appartienne à chacun des ensembles

$$E_{n_1}, E_{n_1 n_2}, E_{n_1 n_2 n_3}, \ldots$$

[1]) Il résulte aisément du théorème démontré que les ensembles (A) et leurs complémentaires ont la propriété de se transformer en ensembles mesurables (L) par toute transformation biunivoque et continue de l'intervalle qui les contient.

Nous dirons que l'ensemble E est le résultat d'une *opération* A, effectuée sur le système d'ensembles

$$\Sigma = \{E_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}.$$

(Tout ensemble (A) peut donc être regardé comme résultat d'une opération A, effectuée sur un système d'intervalles $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}$ et réciproquement: l'opération A, effectuée sur un système d'intervalles, conduit toujours aux ensembles (A) [1]).

On pourrait démontrer sans peine que l'opération A contient comme cas particuliers la somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles, ainsi que la limite complète et restreinte d'une suite infinie d'ensembles.

Supposons que les ensembles $E_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ du système $\Sigma = \{E_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}\}$ soient tous mesurables L. Pour ce système nous pouvons répéter mot à mot la démonstration du § 7, en remplaçant seulement les intervalles $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$ par les ensembles $E_{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}$. Nous avons donc le théorème que voici:

Théorème: L'opération A, effectuée sur un système d'ensembles mesurables L, donne toujours un ensemble mesurable L.

[1]) M. N. Lusin a démontré que l'opération A effectuée sur un système d'ensembles (A) conduit toujours à des ensembles (A).

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.
SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES.
DERNIERS MÉMOIRES PARUS.

(Les titres des Mémoires sont donnés en abrégé).

W. Lampe und **M. Godlewska**. Synthese von pp-Dioxy- und p-Oxy-dicinnamoylmethan . . . . Juillet 1917

L. T. Bratz und **S. Niementowski**. Oxydativer Abbau des Phlorchinyls. I. Pyrchinacridin und seine Carbonsäuren Juillet 1917

A. Korczyński und **S. Piasecki**. Reduktion nitrierter Benzolderivate . . . . Juillet 1917

A. Rosenblatt. Représentation conforme de domaines limités sur le cercle de rayon un . . . . Juillet 1917

S. Fabiani. Dispersion und Extinktion einiger Metalle . . . Juillet 1917

R. Negrusz. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von Metalldrähten von ihrem Querschnitt u. a. . . . . . Juillet 1917

K. Dziewoński und **S. Suknarowski**. Über eine neue Dehydrogenisationsmethode . . . . Oct.—Déc. 1917

S. Loria. Die Verflüchtigungskurven des Systems ThB + ThC auf Au . . . . Oct.—Déc. 1917

J. Kroo. Über einen Satz der Dynamik . . . . Oct.—Déc. 1917

W. Staszewski. Messungen von elektrosmotischen Spannungen in schlecht leitenden Flüssigkeiten . . . . Oct.—Déc. 1917

A. Hoborski. Ein Beitrag zur Theorie der Resolvente der Fredholm'schen Integralgleichungen . . . . Oct.—Déc. 1917

L. Birkenmajer. Über den Zusammenhang des Wilson'schen Lehrsatzes mit der Theorie der quadratischen Reste . Oct.—Déc. 1917

— Rationelle Dreiecke bei Heron und bei den Indern . . Oct.—Déc. 1917

J. Smoleński. Über die hohen Diluvialterrassen an den Rändern des Beckens von Sącz . . . . Oct.—Déc. 1917

A. Gałecki. Einfluß des Lichtes auf kolloide Lösungen. I. Einfluß des Lichtes auf die Viskosität von Goldhydrosolen Oct.—Déc. 1917

L. Birkenmajer. Über Fernwirkung einer heterogenen Kugel nach einem beliebigen Gesetze . . . . Janv.—Mars 1918

J. Morozewicz. Staszicit, ein neues Mineral des Kupfererzvorkommens Miedzianka . . . . Janv.—Mars 1918

L. Sawicki. Lubartower Seen . . . . Janv.—Mars 1918

W. Sierpiński Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables (*B*) . . . . Janv.—Mars 1918

Avis.

Le «*Bulletin International*» de l'Académie des Sciences de Cracovie (Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles) paraît en deux séries: la première (*A*) est consacrée aux travaux sur les Mathématiques, l'Astronomie la Physique, la Chimie, la Minéralogie, la Géologie etc. La seconde série (*B*) contient les travaux qui se rapportent aux Sciences Biologiques. Les abonnements sont annuels et partent de janvier. Prix pour un an (dix numéros): Série *A* ... 8 K; Série *B* ... 10 K

Les livraisons du «*Bulletin International*» se vendent aussi séparément.

Adresser les demandes à la Librairie «G. Gebethner & Cie»
Rynek Gł., Cracovie (Pologne).