ZASADNICZE POJĘCIA

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO.

Wielmożnemu Panu Profesorowi Uniwersytetu Lwowskiego i Prezesowi T. N. S. W. Dr K. Twardowskiemu wraz z wyrazami głębokiego poważania i szacunku przesyłają autorowie.

ZASADNICZE POJĘCIA

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

PRZYSTĘPNIE NAPISALI

Dr. ANTONI HOBORSKI i Dr. ANTONI WILK
PROFESOROWIE GIMNAZYALNI.

CENA 3 KORONY.

W KRAKOWIE.
NAKŁADEM AUTORÓW.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI G. GEBETHNERA I SPÓŁKI.
WARSZAWA. — GEBETHNER I WOLFF.
1910.

PRZEDMOWA.

Obok podręczników zasad analizy wyższej czyli rachunku różniczkowego i całkowego, podręczników znakomitych i bardzo obszernych, jakie posiadamy w języku polskim, są także podręczniki mniejsze, również dla samouków przeznaczone — spis ich podajemy w ostatnim rozdziale książki niniejszej; mimo to wydajemy tę książkę dlatego, że się różni od istniejących, bo różni się metodą wykładu. Brak niewielkiej książki polskiej, wprowadzającej czytelnika w początki analizy matematycznej w sposób dydaktyczny a przytem o ile możności ścisły, od dawna dawał się odczuwać. Wiadomo bowiem, że studenci opuszczający szkołę średnią nie są przeważnie na tyle przygotowani, by mogli czytać podręczniki wyższej analizy w języku polskim, a tem mniej w językach obcych. Nadto jest pewna grupa ludzi inteligentnych, nie zajmujących się zawodowo matematyką, a mimo to ciekawych, co to jest różniczka, względnie pochodna i całka.

Mając to na uwadze napisaliśmy książeczkę, w której podajemy kilka pojęć naczelnych rachunku różniczkowego i całkowego, a mianowicie określamy, co to jest *wielkość zmienna* i *stała*, *funkcya*, jej *ciągłość* i *granica*, co to jest *pochodna* i *różniczka*, *granica ciągu* i *całka* funkcyi. Nie chcieliśmy więcej wiadomości nagromadzać, przyjmowaliśmy bowiem, że czytelnik nie ma wielkiej i obszernej znajomości matematyki elementarnej. Żaden zawodowy matematyk też się nie zdziwi, że tak nie dużo podaliśmy materyału na tylu stronach, a to w myśl przysłowia: *non multa, sed multum.* Owszem, jeżeli ten tomik będzie dobrze przyjęty, to wydamy drugi tomik, który pierwszy dopełni. Chodziło nam przedewszystkiem o formę wykładu bardzo trudnych a zasadniczych pojęć, które podajemy. Wykład nasz jest indukcyjny; podajemy przykłady, które są tak dobrane, aby w czytelniku wytworzyły pojęcie intuicyjne, następnie formułujemy pojęcie ściste, określone, i znów podajemy przykłady. Dajemy pojęcia a jak najmniej »regułek«, »formułek« i »wzorów« — jesteśmy bowiem zdania, że nigdzie tak łatwo nie może panować nauka mechaniczna i czynić takich spustoszeń umysłowych, jak w matematyce nie odpowiednio wykładanej.

Książkę tę w pierwszym rzędzie chcielibyśmy widzieć w rękach naszej, uczącej się młodzieży, zamierzającej oddać się naukom ścisłym t. j. matematyce, przyrodoznawstwu i technice, młodzieży, która już w klasie VI. gimnazyalnej a V. szkoły realnej z niniejszej książeczki korzystać może. Sądzimy nadto, że po dokładnem jej przerobieniu może czytelnik z łatwością zabrać się do studyowania podręczników, których spis podajemy w ostatnim rozdziale.

Autorowie.

W październiku 1909 r.

SPROSTOWANIA.

Str.:	Wiersz:	
4	7 z dołu	po literze b winno być: gdzie b jest liczbą dodatnią.
7	12—15 z góry	obok nawiasu po słowie: »jedynek« dodać: »po jednej na końcu każdego wiersza«.
8	4—11 »	obok nawiasu po słowie: »jedynek« dodać jak wyżej.
9	6—5 z dołu	słowa: »o promieniu równym przyjętej przez nas jednostce« opuścić.
12	14 z góry	zamiast: $(-2\pi + 0{\cdot}8)$ ma być: $(2\pi - 0{\cdot}8)$.
12	4 z dołu	zamiast $+\frac{3}{5}$ winno być $+\frac{12}{18}$.
12	3 »	zamiast: »sin a $= +\frac{3}{5}$« winno być: »sin a $= +\frac{12}{18} = +\frac{2}{3}$ w przybliżeniu«.
13	4 z góry	zamiast $-\frac{3}{4}$ winno być $-\frac{13}{18}$.
13	5 »	zamiast: »cos a $= -\frac{3}{4}$« winno być: »cos a $= -\frac{13}{18}$ w przybliżeniu«.
13	20 »	zamiast: »tg a $= -1\frac{1}{10}$« winno być: »tg a $= -\frac{17}{18}$ w przybliżeniu«.
13	4 z dołu	zamiast: »ctg a $= -\frac{10}{11}$« winno być: »ctg a $= -\frac{20}{18} = -\frac{10}{9} = -1\frac{1}{9}$ w przybliżeniu«.
14 i 15	—	zamiast: β, γ czytaj: β^0, γ^0 i odtąd stale tak samo.
15	7, 8, 10, 11 z góry	zamiast: »*przez*« czytaj: »*razy*«.
45	—	Figura 15 winna mieć numer 16-tej.
46	—	Figura 16 winna mieć numer 15-tej.
49	8 z góry	po słowie: »rzędnej« dodaj: »na prostej AM«.
66	2 z dołu	po słowie: »kierunek« dodaj słowo: »ruchu«.
75	11 z góry	po słowie: »czyli« dodaj: »wyrazy«.
100	12 »	po słowie: »najmniejszej« winien być nawias zamykający:)

Str.:	Wiersz:	
105	12 z dołu	zamiast: »i« ma być: »lub«.
105	8 »	zamiast: »— d« winno być: »— ε«; zamiast: »+ d« winno być: »+ ε«.
106	9 »	zamiast: »x = 0« winno być: »x = 2«.
115	3 z góry	po słowie: »przedziałów« dodaj: »częściowych«.
117	—	Na figurze 27. punkt o współrzędnych a, f(a) należy oznaczyć literą A.
134	7 z dołu	opuścić wyraz: ponieważ.

W rozdziałach VI-tym i następnych zamiast »twierdzenie średniej wartości« winno być »twierdzenie o średniej wartości«.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Wstęp.

Rozdział niniejszy zawiera kwestye luźne, ze sobą niepowiązane, a będące przygotowaniem do rachunku różniczkowego i całkowego. Czytelnik, który poznał nieco dokładniej matematykę elementarną, dobrze zrobi, jeżeli mimo to rozdziału tego nie pominie.

§ 1. **Prosta liczbowa.** Jak wiadomo, rozpoczyna się arytmetykę od teoryi liczb szeregu naturalnego: 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., potem przechodzi się do teoryi ułamków, które wraz z liczbami całkowitemi tworzą liczby wymierne; następnie przechodzi się do liczb niewymiernych, a stąd do liczb względnych t. j. dodatnich i ujemnych; liczby te obejmujemy nazwą (mniej szczęśliwie obraną, ale historyczną) liczb rzeczywistych.

Uzmysłowieniem tych liczb jest tak zwana prosta liczbowa.

Uważajmy prostą nieograniczoną i naznaczmy jeden z jej punktów literą O (fig. 1), przez co rozpadnie się na dwie strony, stronę lewą i stronę prawą. Weźmy po stronie prawej tak punkt A, żeby odcinek OA był równy jednostce długości, którą obraliśmy. Punkt O uważajmy za obraz

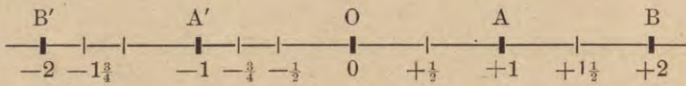

Fig. 1.

liczby 0, punkt A za obraz liczby 1; weźmy inny punkt B i wymierzmy odcinek OB przy jednostce OA, mierzy go liczba a (np. 2), to punkt B uważamy za obraz (geometryczny) liczby $+2$ lub -2 zależnie od tego, czy punkt B leży po stronie prawej czy lewej punktu O. Na figurze naznaczyliśmy kilka punktów i liczby, których są obrazami. Widzimy, jak to wiadomo z arytmetyki, że do każdej liczby rzeczywistej istnieje punkt na tej prostej, jako jej obraz i do każdego punktu prostej liczba rzeczywista, której jest obrazem.

Widać, że jeżeli uważamy dwie liczby a, b (np. -3, $-1\frac{1}{2}$ albo -2, 0 albo -1, $\frac{1}{2}$ albo 0, 2 albo 3, 4), to obraz liczby większej leży na prostej tej na prawo od obrazu liczby mniejszej.

Stąd też pochodzi zwyczaj mówienia »to lub owo dzieje się w punkcie 3« zamiast »to lub owo dzieje się dla liczby 3«.

§ 2. **O nierównościach.** Liczba 5 jest większa od liczby $\sqrt{7}$ i napiszemy $5 > \sqrt{7}$ lub $\sqrt{7} < 5$, co nazywamy nierównością.

Często mówimy: liczba $a = 3$ spełnia nierówność $a < \sqrt{29}$ t. zn. że gdy w nierówności $a < \sqrt{29}$ podstawimy liczbę 3 za a, to otrzymamy prawdziwą nierówność $3 < \sqrt{29}$; albo mówimy: liczby $a = 7$, $b = 1{\cdot}5$ nie spełniają nierówności $a < b$ t. zn. gdy w nierówności $a < b$ podstawimy liczbę 7 za a i liczbę $1{\cdot}5$ za b, to otrzymamy nieprawdziwą nierówność $7 < 1{\cdot}5$.

Przypomnijmy sobie dalej z arytmetyki następujące kwestye.

Jeżeli od t. zw. obu stron nierówności $7 < 12$ odejmiemy tę samą liczbę np. 3, to otrzymamy nierówność

$7-3<12-3$ czyli nierówność $4<9$ ze znakiem nierówności (tu $<$) tak samo ustawionym (a nie odwróconym na znak $>$); podobnie jest $7-20<12-20$ czyli $-13<-8$ itd. Jest $6\frac{34}{111}<6{\cdot}4$, bo jest $6\frac{34}{111}=6\frac{340}{1110}<6{\cdot}4=6\frac{4}{10}=6\frac{444}{1110}$, więc jest $6\frac{34}{111}-6{\cdot}3<6{\cdot}4-6{\cdot}3$. Mówimy krótko: *Równe liczby odjęte od liczb nierównych dają różnice nierówne z tym samym znakiem nierówności.*

Jeżeli zaś od liczby 5 odejmę raz 4, drugi raz 12, to oczywiście wtedy, gdym odjął więcej, muszę otrzymać na resztę mniej; mogę to tak napisać: od liczb równych $5=5$ odejmuję nierówne liczby $4<12$ i na resztę otrzymuję nierówne liczby $5-4=1$, $5-12=-7$ ale znak nierówności trzeba odwrócić $1>-7$, swoją rozwartością znak nierówności ma być zwrócony na lewo, a nie na prawo.

Podobnie, gdy jest $\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $1<2$, to $\sqrt{2}-1>\sqrt{2}-2$. Ogólnie powiemy: *Nierówne liczby odjęte od liczb równych, dają na wynik reszty nierówne z odwróconym znakiem nierówności.*

Często będziemy używali nierówności $3<4<7<\sqrt{50}<100$, t. zn. że jest $3<4$, $4<7$, $7<\sqrt{50}$, $\sqrt{50}<100$ i zamiast powtarzać liczby 4, 7, $\sqrt{50}$ piszemy jednym ciągiem $3<4<7<\sqrt{50}<100$.

Wiemy, że jest $4<10$; a w jakim stosunku są odwrotności obu stron czyli liczby $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$? Otóż jest $\frac{1}{4}>\frac{1}{10}$; podobnie jest $20\frac{1}{5}<30\frac{4}{7}$ czyli $\frac{101}{5}<\frac{214}{7}$, a stąd $\frac{5}{101}>\frac{7}{214}$; gdy jednak weźmiemy nierówność $-4<2$, to $-\frac{1}{4}$ nie jest większe od $\frac{1}{2}$. Powiemy więc: *Gdy obie strony nierówności są dodatnie, to ich odwrotności są również sobie nierówne z odwróconym znakiem nierówności.*

Często piszemy:

$$a \leq b \text{ lub } a \leqq b$$

t. zn. a jest albo mniejszą liczbą od b albo równą; znak $\leq$, $\leqq$ składa się z dwóch znaków $<$ $=$; powiemy krótko: *Liczba a co najwyżej równa się liczbie b.*

Wzór $a \geqq b$ czytamy, że liczba a jest większa od liczby b lub jej równa czyli: *Liczba a co najmniej równa się liczbie b.*

§ 3. **Bezwzględna wartość.** Liczby $-\sqrt{2}$, -10, 0, $+5$, $+7$ mają bezwzględne wartości $\sqrt{2}$, 10, 0, 5, 7. Oznaczać ją będziemy, biorąc liczbę w dwie pionowe kreski; a więc jest

$$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}; \quad |-10| = 10, \quad |0| = 0, \quad |+5| = 5, \quad |+7| = 7.$$

Można napisać też $|-10| < 20$ t. j. $10 < 20$.

Jakie liczby wolno podstawiać za x, aby było

$$|x - 1| < 0{\cdot}1$$

Oczywiście liczba $x = 5$ nie spełnia tej nierówności, bo jest $|5 - 1| = |4| = 4$ i jest $4 > 0{\cdot}1$. Ale np. niech $x = 1{\cdot}001$, to jest $|1{\cdot}001 - 1| = |0{\cdot}001| = 0{\cdot}001 < 0{\cdot}1$; albo niech $x = 0{\cdot}99$, to jest $|0{\cdot}99 - 1| = |-0{\cdot}01| = 0{\cdot}01 < 0{\cdot}1$: widać, że liczby, które wolno podstawić za x mają być dość bliskie liczby 1.

Zauważmy, że jest $|0{\cdot}3 - 1{\cdot}5| = |-1{\cdot}2| = 1{\cdot}2$ i podobnie $|1{\cdot}5 - 0{\cdot}3| = |1{\cdot}2| = 1{\cdot}2$ czyli jest $|0{\cdot}3 - 1{\cdot}5| = |1{\cdot}5 - 0{\cdot}3|$. Podobnie jest $|7 - 4| = |4 - 7|$, a ogólnie jest $|a - b| = |b - a|$.

Jeżeli jest $|a| < 2$, to liczba a może być równa liczbom 1, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$,.... ale także -1, $-1\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$,.... czyli liczba a ma być zawarta między liczbą -2 i 2; wyrazimy to wzorem

$$-2 < a < +2.$$

Ogólnie: jeżeli jest $|a| < b$, to jest także

$$-b < a < +b$$

Stąd np. jest

$$-b + c < a + c < +b + c$$

albo

$$-b - c < a - c < +b - c$$

itd.

Uważajmy sumę algebraiczną

$$(+5)+(-7)+(-1)=5-7-1=-3$$

otóż jest

$$|(+5)+(-7)+(-1)|=|5-7-1|=|-3|=3$$

i utwórzmy obok tego sumę bezwzględnych wartości każdego dodatnika z osobna:

$$|+5|+|-7|+|-1|=5+7+1=13$$

więc jest:

$$|(+5)+(-7)+(-1)|=|5-7-1|<|+5|+|-7|+(-1|,$$

bo jest $3<13$.

Podobnie: $|9-3|<|9|+|-3|$, bo jest $6<12$, ale jest $|-2-3|=|-5|=5=|-2|+|-3|=2+3=5$, podobnie $|5+8|=|5|+|8|=13$ czyli: *Bezwzględna wartość sumy kilku dodatników jest mniejsza lub równa sumie bezwzględnych wartości każdego dodatnika z osobna (ale nigdy od niej większa).*

Weźmy: $|(-3).(-5)|=|+15|=15$, a nadto iloczyn bezwzględnych wartości obu czynników z osobna $|-3|=3$, $|-5|=5$, więc

$$|(-3).(-5)|=|-3|.|-5|;$$

podobnie jest

$$|(-2).(+3)|=|-2|.|+3|,$$

bo jest $$6=2.3$$

czyli ogólnie jest: *Bezwzględna wartość iloczynu dwu lub kilku liczb jest równa iloczynowi bezwzględnych wartości każdego czynnika z osobna.*

§ 4. **Suma liczb szeregu naturalnego od 1 do n i suma ich kwadratów od 1^2 do n^2.**

1). Obliczmy sumę $s=1+2+3+4$, oczywiście jest także $s=4+3+2+1$ i dodajmy s do s w ten sposób $2s=(1+4)+(2+3)+(3+2)+(4+1)=5+5+5+5;$

tych piątek jest tyle, ile wzięliśmy liczb szeregu naturalnego, aby je zesumować; możemy więc napisać

$$s = \frac{4.(1+4)}{2} = \frac{4.5}{2} = 10.$$

Obliczmy podobnie:

$$s = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$

dodajmy do tego:

$$s = 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1;$$

będzie:

$$2s = 11+11+11+11+11+11+11+11+11+11;$$

dlaczego muszą zachodzić same jedenastki? oto pierwsza i ostatnia liczba dają na sumę liczbę 11; druga jest od pierwszej większa o 1, ale znów przedostatnia jest mniejsza od ostatniej o 1 czyli suma drugiej liczby i przedostatniej da znów sumę 11 itd. Będzie więc

$$s = \frac{10\,(1+10)}{2} = 55.$$

Ogólnie obliczmy:

$$s = 1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n;$$

dodajmy $s = n+(n-1)+\ldots\ldots+\ldots+2+1,$

stąd: $2s = (1+n)+(1+n)+\ldots\ldots+(1+n)+(1+n)$

i tych nawiasów jest n, więc

$$2s = n(1+n), \quad \text{a stąd:}$$

$$s = \frac{n(1+n)}{2}.$$

Np. obliczmy $s = 1+2+3+4+5+6+7$; tu $n = 7$, więc jest $s = \frac{7(1+7)}{2} = \frac{7.8}{2} = 28$. Obliczmy $s = 1+2+3+4+\ldots+(m-1)$; tu jest $n = m-1$, więc jest $s = \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Obliczmy $s = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2(m-1)$; otóż czynnik wspólny 2 weźmy przed nawias:

$$s = 2[1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1)]$$

i teraz stosujmy powyższy wzór, kładąc $n = m - 1$; będzie

$$s = 2 . \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = m(m-1).$$

2). Obliczmy sumę kwadratów liczb szeregu naturalnego:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2.$$

W tym celu obliczmy najpierw jako przykład:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2,$$

otóż jest:

$$\left.\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3 . 1^2 . 1 + 3 . 1 . 1 + 1, \\ 3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3 . 2^2 . 1 + 3 . 2 . 1 + 1, \\ 4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3 . 3^2 . 1 + 3 . 3 . 1 + 1, \\ 5^3 &= (4+1)^3 = 4^3 + 3 . 4^2 . 1 + 3 . 4 . 1 + 1, \\ 6^3 &= (5+1)^3 = 5^3 + 3 . 5^2 . 1 + 3 . 5 . 1 + 1, \end{aligned}\right\} \text{Równości 6 i tyleż jedynek.}$$

i dodajmy to, będzie:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) + {} + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + {} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, ale $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ obustronnie można odjąć tak, iż zostaje:

$$6^3 = 3 . S + 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 6, \text{ a więc:}$$

$$6^3 = 3S + 3 . \frac{5 . (1+5)}{2} + 6$$

a stąd:
$$6^3 - \frac{3 . 5 . (1+5)}{2} - 6 = 3S$$

czyli:
$$3S = 216 - 45 - 6 = 165$$
$$S = 165 : 3 = 55.$$

Obliczmy teraz ogólnie:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$$

w tym celu ułóżmy:

$$\left.\begin{aligned}
1^3 &= 1 \\
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1, \\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1, \\
4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1, \\
5^3 &= (4+1)^3 = 4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n^3 &= [(n-1)+1]^3 = (n-1)^3 + 3.(n-1)^2 + 3.(n-1) + 1, \\
(n+1)^3 &= (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Równości jest } (n+1) \\ \text{i tyleż jedynek.}\end{array}$$

dodając otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 &= [1^3+2^3+3^3+\ldots(n-1)^3+n^3] + \\
&+ 3[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2] + \\
&+ 3[1+2+3+4+\ldots(n-1)+n] + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Obustronnie można odjąć:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

to zostaje:

$$(n+1)^3 = 3S + 3.\frac{n}{2}(1+n) + n + 1,$$

stąd:

$$(n+1)^3 - \frac{3n(1+n)}{2} - n - 1 = 3S$$

czyli:

$$3S = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n+3n^2}{2} - n - 1,$$

$$3S = \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n - 3n^2 - 2n - 2}{2},$$

$$3S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2};$$

ale jest $2n^2+3n+1=(2n+1)(n+1)$, jak łatwo się przekonać, więc jest:

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obliczmy np. $S=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$; tu jest $n=5$, więc jest

$$S=\frac{5(5+1)(10+1)}{6}=\frac{5.6.11}{6}=55.$$

§ 5. Uważajmy **iloczyn 7.h** gdzie na h nadawać możemy różne wartości np. $h=10$, $h=0{\cdot}1$, $h=100$ etc. Dla $h=0{\cdot}1$ jest $7h=0{\cdot}7$, dla $h=0{\cdot}001$ jest $7h=0{\cdot}007$; dla $h=0{\cdot}000.0001$ jest $7h=0{\cdot}0000007$; dla $h=-0{\cdot}001$ jest $|7h|=0{\cdot}007$, dla $h=-0{\cdot}000001$ jest $|7h|=0{\cdot}000007$ czyli im bliższą zeru liczbę podstawimy za h (t. j. im mniejszą co do bezwzględnej wartości), to tem mniejszą wartość co do bezwzględnej wartości ma iloczyn 7h. Jaką np. liczbę trzeba podstawić za h, aby było $|7h|=0{\cdot}00024=$ $=\frac{24}{100000}$? Otóż jest $|7h|=|7|.|h|$ (według § 3), więc ma być:

$$7|h|=\frac{24}{100000} \quad \text{czyli:} \quad |h|=\frac{24}{700000}$$

a więc ma być

$$\text{albo: } h=\frac{24}{700000}, \text{ albo: } h=-\frac{24}{700000}.$$

Te same własności ma oczywiście iloczyn 3h lub 20h itd.

§ 6. **Radyan.** Jak wiadomo, kąt mierzymy w elementarnej geometryi na stopnie t. z. z wierzchołka kąta, jako środka rysujemy koło o promieniu równym przyjętej przez nas jednostce i obwód koła dzielimy na 360 równych części; przez dwa sąsiedne punkty podziału rysujemy promienie ze środka koła i kąt zawarty między nimi nazywamy 1 stopniem (1^0) (figura 2 w powiększeniu). Następnie badamy, ile takich stopni, względnie jego części mieści się na danym kącie. Jednostką kąta jest tu stopień, np. kąt może się równać 38·594°.

Ale jak długości można mierzyć na metry lub łokcie, tak samo możemy kąty mierzyć i w innych jednostkach. Otóż taką nową jednostką będzie *radyan*; jest to kąt, na którym mieści się łuk koła wielkości promienia (fig. 3). Jednostka kąta jest obecnie większą niż 1°.

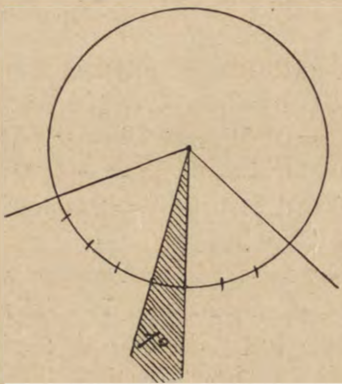

Fig. 2.

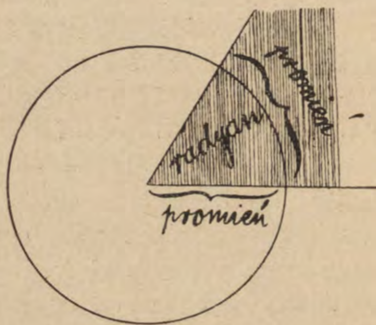

Fig. 3.

Zapytajmy, ile radyanów ma prosty, półpełny i pełny kąt.

Zauważmy najpierw, że jeżeli kąt obejmuje łuk równy dwom promieniom, to kąt ma dwa radyany; kąt, obejmujący łuk równy 3, 4, 5,... promieni, ma 3, 4, 5,... radyanów; kąt, obejmujący łuk długości $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,... promienia, ma też $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,... radyana. Ogólnie: kąt, obejmujący łuk równy b promieni, ma też b radyanów. Tasama liczba, która mierzy łuk w promieniach, mierzy odpowiedni kąt w radyanach.

Aby odpowiedzieć na nasze pytanie, trzeba się więc zastanowić, jak wielki łuk leży na kącie prostym, półpełnym i pełnym. Otóż obwód koła wynosi 2π (bo tu wzięliśmy $r = 1$), tedy na kącie prostym leży łuk koła równy $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ promieni, a więc kąt prosty ma $\frac{\pi}{2}$ radyanów.

Kąt 45^0 (połowa kąta prostego) ma $\frac{\pi}{4}$ radyanów.

Na kącie półpełnym leży połowa obwodu, mająca $\frac{2\pi}{2} = \pi$ promieni, więc kąt półpełny ma π radyanów.

Kąt, złożony z trzech kątów prostych, mający 270^0 ($= 3 . 90^0$) ma też $3 . \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ radyanów.

Kąt pełny ma 2π radyanów.

Jeżeli powiemy: kąt $\frac{\pi}{4}$ lub $\frac{\pi}{2}$ itd., to mamy na myśli kąt mający $\frac{\pi}{4}$ radyanów (45^0) lub $\frac{\pi}{2}$ radyanów (90^0) itd.

Obliczmy powierzchnię wycinka kołowego, utworzonego przez promienie tworzące ze sobą kąt a radyanów; łuk tego wycinka ma a promieni. Powierzchnia wycinka kołowego równa $\frac{\text{łuk} \times \text{promień}}{2}$ wynosi więc $\frac{a . 1}{2} = \frac{a}{2}$, przyczem jednostką powierzchni jest kwadrat zbudowany na promieniu.

Jeżeli jednostką powierzchni jest $1\ cm^2$, to trzeba łuk i promień wyrazić w cm.; otóż niech promień ma r cm, tedy łuk ma $(a . r)$ cm, więc powierzchnia wycinka kołowego wynosi $\frac{a r . r}{2} = \frac{a r^2}{2}\ cm^2$.

§ 7. **Z trygonometryi.** (Fig. 4). Narysujmy koło i w niem dwie proste przez środek A prostopadłe do siebie, z których poziomą nazwiemy osią cosinusów, a pionową osią sinusów; część od A ku B nazwiemy dodatnią osią cosinusów, od A ku C dodatnią osią sinusów. W punkcie B rysuję styczną do koła jakoteż i w punkcie C. Styczną w B nazywamy osią tangensów, styczną w C osią cotangensów; część od B ku D nazwiemy dodatnią osią tangensów, część od C do D dodatnią osią cotangensów.

Będziemy uważali kąty, których jedno ramię leży wzdłuż AB, drugie ramię albo powstało przez obrót w kierunku naznaczonym przez strzałkę jako dodatni, albo w kierunku ujemnym. Uważajmy ramię AE; możemy albo uważać kąt ostry BAE, który ma np. 0·8 radyanów (powiemy, że ma $+0·8$), albo kąt wypukły BAE powstały stąd, że ramię ruchome obróciło się w kierunku ujemnym, ma więc $(-2\pi+0·8)$ radyanów, a powiemy, że ma $-(2\pi-0·8)$ radyanów. Trzeba dobrze zrozumieć, że kąt nie może być ani dodatni ani ujemny, tylko przez umowę możemy go mierzyć liczbą dodatnią lub ujemną.

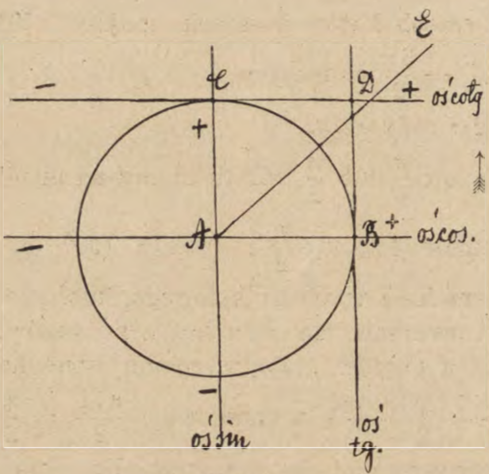

Fig. 4.

Uważajmy (fig. 5) kąt mający a radyanów; ramię drugie jest prostą AE. Punkt M przecięcia się drugiego ramienia z kołem rzutujmy prostopadle na oś sinusów, rzutem będzie punkt N, odcinek AN (zawsze od A) wymierzmy przy promieniu jako jednostce np. wypadnie liczba $\frac{3}{5}$ i oznaczmy ją znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy punkt N leży na dodatniej osi sinusów czy nie; tu wypadnie wziąć liczbę $+\frac{3}{5}$, tę liczbę nazywamy *sinusem* tego kąta, co piszemy: $\sin a = +\frac{3}{5}$.

Punkt M przecięcia się drugiego ramienia z kołem rzutujemy następnie prostopadle na oś cosinusów; rzutem będzie punkt P; odcinek AP (zawsze od A) wymierzmy przy promieniu jako jednostce i liczbę tę opatrzmy znakiem + lub — zależnie od tego, czy rzut P leży na dodatniej osi cosinusów czy nie; tu wypadnie (około) $-\frac{3}{4}$; liczbę tę nazywamy *cosinusem* danego kąta i piszemy $\cos a = -\frac{3}{4}$.

Dotąd rzutowaliśmy dla $\sin a$ i $\cos a$; obecnie będziemy osie przecinali, a mianowicie: drugie ramię AE doprowadzamy do przecięcia z osią tangensów (tu trzeba je przedłużyć wstecz) w punkcie R, wymierzamy odcinek BR (zawsze od B) i liczbę znalezioną opatrujemy znakiem + lub —, zależnie od tego, czy punkt R leży na dodatniej osi tangensów, czy nie; liczbę tę oznaczymy $tg\, a$; tu będzie $tg\, a = -1\frac{1}{10}$.

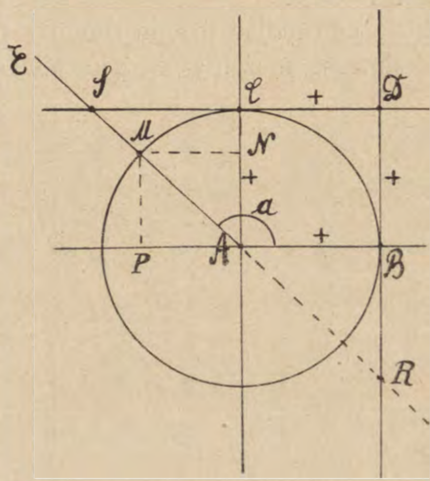

Fig. 5.

Drugie ramię AE doprowadźmy do przecięcia z osią cotangensów w punkcie S, wymierzmy odcinek CS (zawsze od C na tej osi) przy promieniu, jako jednostce i liczbę znalezioną opatrzmy znakiem + lub —, zależnie od tego czy punkt S leży na dodatniej osi cotangensów, czy nie; liczbę tę nazywamy *cotangensem* danego kąta i oznaczamy ją przez $\operatorname{ctg} a$; tu jest $\operatorname{ctg} a = -\frac{10}{11}$.

Trzeba jeszcze dodać, co czytelnik z łatwością usprawiedliwi: $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 0 = +1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$,

$\cos 2\pi = +1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ nie istnieje, bo nie ma punktu przecięcia drugiego ramienia idącego wzdłuż AC i osi tangensów, $\operatorname{tg}\pi = 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ nie istnieje, $\operatorname{tg} 2\pi = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ nie istnieje, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg}\pi$ nie istnieje, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg} 2\pi$ nie istnieje.

Obracając drugie ramię z położenia AB w kierunku dodatnim możemy śledzić jak się zmieniają sin, cos, tg, ctg kąta; podobnie, gdy kąt dość bliski zera, a ujemny np. $a = -0{\cdot}1$, to sinus jego jest ujemny, jak się łatwo czytelnik opisaną powyżej konstrukcyą i mierzeniem algebraicznem przekona.

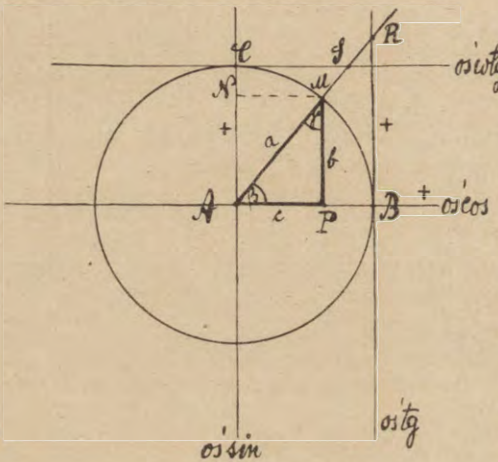

Fig. 6.

Widać dalej, że, gdy weźmiemy kąty ostre dodatnie, to ich sin, cos, tg, ctg są dodatnie.

§ 8. Dany jest trójkąt prostokątni, którego przeciwprostokątnia wynosi a cm, przyprostokątnie b cm i c cm, kąty ostre β^0 i γ^0 (fig. 6). Z jednego wierzchołka trójkąta, jako środka zatoczmy koło promieniem równym przeciwprostokątni i umieśćmy osie, jak na fig. 6. Widać, że jest:

$$\sin\beta = \frac{AN}{AB} = \frac{MP}{AM} = \frac{b}{a}, \quad b = a\sin\beta$$

$$\cos\beta = \frac{AP}{AB} = \frac{c}{a}, \quad c = a\cos\beta$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BR}{AB} = \frac{MP}{AP} = \frac{b}{c}, \quad b = c\operatorname{tg}\beta$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{CS}{AC} = \frac{MN}{AN} = \frac{AP}{MP} = \frac{c}{b}, \quad c = b\operatorname{ctg}\beta.$$

Zrobiwszy podobną figurę na wierzchołku kąta γ otrzymamy:

$$c = a\sin\gamma,\ b = a\cos\gamma,\ c = b\operatorname{tg}\gamma,\ b = c\operatorname{ctg}\gamma.$$

Widać stąd, że: *liczba mierząca przyprostokątnię równa się liczbie mierzącej przeciwprostokątnię przez sinus kąta przeciwległego przyprostokątni albo przez cosinus kąta przyległego; liczba mierząca przyprostokątnię równa się liczbie mierzącej drugą przyprostokątnię przez tangens kąta przeciwległego pierwszej przyprostokątni albo przez cotangens kąta przyległego pierwszej przyprostokątni;* wyrażają to krótko wzory:

$b = a\sin\beta.$	$b = a\cos\gamma.$	$b = c\operatorname{tg}\beta.$	$b = c\operatorname{cotg}\gamma.$
$c = a\sin\gamma.$	$c = a\cos\beta.$	$c = b\operatorname{tg}\gamma.$	$c = b\operatorname{cotg}\beta.$

Nadto stąd otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c} = \frac{a\sin\beta}{a\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b} = \frac{a\sin\gamma}{a\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

co wyprowadziliśmy dla kątów ostrych, a jest prawdziwe dla dowolnych kątów.

Ostatnie wzory wyrazimy słowami: *tangens kąta równa się ilorazowi sinusu tego kąta przez jego cosinus.*

Obliczmy jeszcze $\sin 45^0$, $\cos 45^0$, $\operatorname{tg} 45^0$, $\operatorname{cotg} 45^0$ czyli $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}$. Otóż trójkąt prostokątni mający jeden z kątów ostrych równy 45^0, ma drugi taki sam kąt czyli jest równoramienny i niech ramiona mają po 1 cm (fig. 7), przeto na mocy twierdzenia Pitagorasa przeciwprostokątnia ma $\sqrt{2}$ cm ($\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$); więc na mocy powyższych wzorów jest:

$$1 = \sqrt{2} \,.\, \sin 45^0 \,; \quad 1 = \sqrt{2} \,.\, \cos 45^0$$
$$1 = 1 \,.\, \operatorname{tg} 45^0 \,; \quad 1 = 1 \,.\, \operatorname{ctg} 45^0$$

czyli

$$\sin 45^0 = \sin \frac{\pi}{4} = \cos 45^0 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} 45^0 = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

§ 9. **Z geometryi analitycznej.** Uważajmy punkt na kartce papieru; aby jego położenie opisać, trzebaby wiedzieć, jak daleko leży od brzegów kartki. Przy pomocy tej uwagi zrozumiemy następujące rozumowanie.

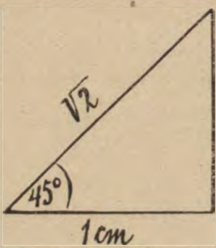

Fig. 7.

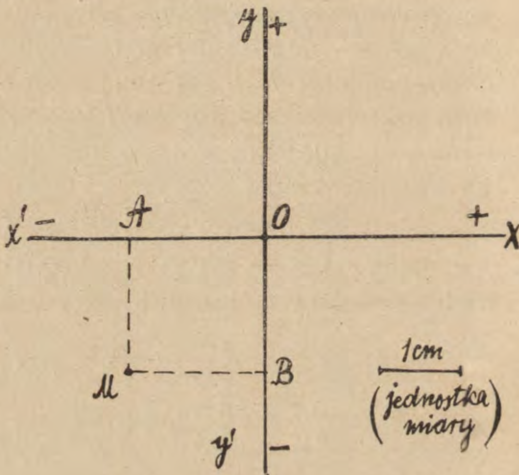

Fig. 8

Narysujmy prostopadłe do siebie proste $x'x$, $y'y$, przecinające się w punkcie O (który nazwiemy początkiem spółrzędnych). Część Ox nazwijmy dodatnią półosią x-ów, część Ox′ ujemną półosią x-ów; część Oy nazwijmy dodatnią półosią y-ów (ypsylonów), Oy′ ujemną półosią y-ów. Weźmy jakikolwiek punkt M (byle nie leżący na osiach) i rzutujmy go prostopadle na oś $x'x$ i oś $y'y$; otrzymamy (fig. 8) punkty A, B. Przy obranej jednostce odmierzmy odcinki OA, OB i liczby otrzymane zaopatrzymy znakiem + lub — zależnie od tego, czy punkt A, względnie B leży na dodatniej półosi x-ów, względnie y-ów, czy nie; pierwszą liczbę zowiemy odciętą, drugą rzędną; u nas odcięta (którą oznaczamy literą x) wynosi np. $x = -1\frac{2}{3}$, rzędna (którą oznaczamy literą y) wynosi np. $y = -1\frac{1}{2}$.

Czytelnik z łatwością usprawiedliwi, że wszystkie punkty osi $x'x$ mają rzędną $y = o$ i wszystkie punkty osi $y'y$ mają odciętą $x = o$; przeto początek O współrzędnych ma odciętą $x = o$, rzędną $y = o$. Odciętą i rzędną punktu

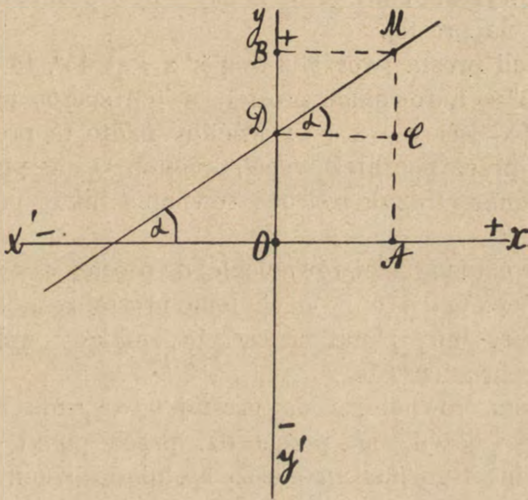

Fig. 9.

obejmujemy jedną nazwą współrzędnych punktu. Dwa różne punkty płaszczyzny mają niejednakowe odcięte i rzędne.

Ale i na odwrót mając odciętą i rzędną daną możemy narysować punkt płaszczyzny, który ma tę odciętą i rzędną daną; trzeba rysować proste prostopadłe odpowiadające rzutowaniu.

Uważajmy prostą, byle nie prostopadłą do osi $x'x$; kąt, jaki tworzy z osią $x'x$ wynosi α^0. Weźmy dowolny punkt M na tej prostej; jak widać z fig. 9 jest:

$$DC = OA$$
$$OB = AM = MC + CA$$
$$MC = DC \,.\, tg\,\alpha.$$

Jeżeli x, y są współrzędnemi punktu M, (o, b) współrzędnemi punktu D, to jest

$$y = x\,tg\,\alpha + b$$

i temu równaniu czynią zadość współrzędne x, y każdego punktu tej prostej; ale i na odwrót, jeżeli liczby x, y spełniają powyższe równanie, to są współrzędnemi punktu, leżącego na prostej.

Jeżeli prosta tworzy z osią $x'x$ kąt 45^0, to ponieważ jest $tg\,45^0 = 1$, równanie prostej, w ten sposób nachylonej do osi $x'x$, jest $y = x + b$; jeżeliby nadto ta prosta przechodziła przez początek współrzędnych O, to punktem D będzie punkt O czyli $b = o$ i równanie takiej prostej jest $y = x$.

Równanie prostej, równoległej do prostej $y = x\,tg\,\alpha + b$, będzie $y = x\,tg\,\alpha + c$, bo nachylenie prostej zostaje to samo, tylko przez inny punkt na osi $y'y$, mający współrzędne o, c przechodzi prosta.

Prosta, równoległa do prostej $y = x$, ma równanie: $y = x + c$; jeżeli ona przechodzi przez punkt (1, o), to współrzędne tego punktu muszą spełniać równanie prostej, a więc jest $o = 1 + c$ czyli $c = -1$; a więc równanie prostej będzie $y = x - 1$.

§ 10. **O ruchu jednostajnym.** Uważajmy pociąg, pędzący na torze; mówimy, że pędzi jednostajnie albo z jednakową prędkością. Otóż porusza się ruchem jednostajnym, jeżeli co sekundę przebiega jednakową drogę np. 1 m, co $\frac{1}{2}$ sekundy $\frac{1}{2}$ m, co 2 sekundy 2 m etc. czyli w dowolnie wielkich, równych czasach przebiega równe drogi.

Liczbę np. metrów, przebytych w 1 sekundzie, nazywamy prędkością; np. prędkość wynosi 3 t. zn. co sekundę owo ciało przebiega 3 metry. Im ciało prędzej pędzi, tem większa jest jego prędkość.

Jeżeli ciało porusza się ruchem niejednostajnym czyli co sekundę przebiega nierówne drogi, trzeba prędkość inaczej określić, co stanowi treść § 23, rozdziału IV.

W niniejszym rozdziele podaliśmy sporo twierdzeń bez dowodów — dowody znajdzie czytelnik w książkach zacytowanych w ostatnim rozdziele niniejszej książeczki.

ROZDZIAŁ II.

O funkcyach i ich ciągłości.

§ 11. **Przykład I.** Przypomnijmy sobie następujące twierdzenie: stosunek długości obwodu koła do jego średnicy jest dla wszystkich kół jednakową liczbą, która nosi nazwę Ludolfiny [1]) i oznacza się ją literą grecką π.

Prz. 2. Napiszmy jednomian $\frac{3}{4}a^2x$; jego spółczynnikiem jest liczba szczególna $\frac{3}{4}$.

Prz. 3. Rzućmy na staw kamień — od miejsca, gdzie upadł, wylatuje fala kolista, której promień nie jest ciągle ten sam, nie jest stały, ale się zmienia; im dłużej sekund upłynęło od chwili uderzenia kamienia o wodę, tem większy jest promień fali kolistej.

Prz. 4. Cena kilograma jabłek jest dziś inna, niż wczoraj, przed tygodniem, miesiącem itd.; cena nie jest stała, ale zmienia się.

Mamy więc w matematyce dwa rodzaje liczb: jedne mają stałą, niezmienną wartość, jak liczba π i wszystkie w ogóle liczby szczególne; nazywają się *stałemi*. Drugi rodzaj to liczby zmieniające swą wartość, zwane krótko *zmiennemi*; naznaczać je możemy tylko literami t. j. liczbami ogólnemi. W prz. 3 powiemy, że fala kolista ma pro-

---

[1]) Ludolf van Ceulen († 1610) obliczył π na 35 miejsc dzies.

mień, wynoszący x cm, w prz. 4 cena kilograma jabłek wynosi z halerzy. Liczby x, z są zmienne, bo dziś np. jest $z = 10$, wczoraj $z = 11$, przed tygodniem było $z = 6$ itd. Zmienne zwykle oznaczamy końcowemi literami alfabetu.

§ 12. Zmienne podzielimy na dwie kategorye, ale najpierw weźmy przykłady.

Prz. 5. Patrzmy na zegarek; przy końcu każdej sekundy, pierwszej, drugiej, drugiej i ćwierć, trzeciej i pół, trzeciej i trzy ćwierci od chwili uderzenia kamienia o wodę możemy na oko wymierzyć promień fali kolistej (prz. 3). Wielkość promienia fali kolistej zależy od ilości sekund, które upłynęły od chwili uderzenia kamienia o wodę.

Prz. 6. Cena kilograma jabłek na targu zależy (oprócz innych warunków) od ilości jabłek, przyniesionych przez kupców na targ.

Prz. 7. Niech jest $y = 10 - 2x$, gdzie x, y są zmienne t. zn. mogą mieć różne wartości. Jeżeli podstawimy za zmienną $x = 4, 5, 6, 20, 30$, to zmienna $y = 2, 0, -2, -30, -50$ czyli wartość zmiennej y zależy od wartości, którąśmy podstawili za zmienną x. Widać stąd, że można zmienne podzielić na dwie kategorye: na zmienne, których wartość mogę przyjmować dowolnie i na zmienne, których wartość zależy od tego, jaką wartość przyjęliśmy na pierwszą zmienną. Niech czytelnik jeszcze raz przejdzie przykłady 5-ty, 6-y i 7-my.

Ta zmienna, której wartość od niczego nie zależy, jak tylko od naszej woli, nazywa się *zmienną niezależną*, a ta zmienna której wartości po wyborze wartości na zmienną niezależną nie można sobie wybrać, ale jej wartość jest już nie dowolną, która więc od zmiennej niezależnej zależy, zowiemy *funkcyą zmiennej niezależnej*. Np. w prz. 7 mogę na x nadawać wartości 4, 5, 6 według mego upodobania, ale potem wartości na y nie są już dowolne, są więc wyznaczone, określone przez wybór wartości na zmienną niezależną x i jest $y = 2, 0, -2$.

Odnośnie do prz. 5, 6 i 7-go powiemy, że wielkość promienia fali kolistej jest funkcyą ilości sekund, które upłynęły od początku naszego doświadczenia, — że cena jabłek jest funkcyą ilości jabłek, przyniesionych do sprzedaży przez kupców — że wreszcie wartość dwumianu y jest funkcyą zmiennej x.

Prz. 8. Na płaszczyźnie narysujmy krzywą (fig. 10); oczywiście rzędna dowolnego punktu krzywej jest funkcyą odciętej; inna jest rzędna dla odciętej 5, inna dla odciętej 10·7.

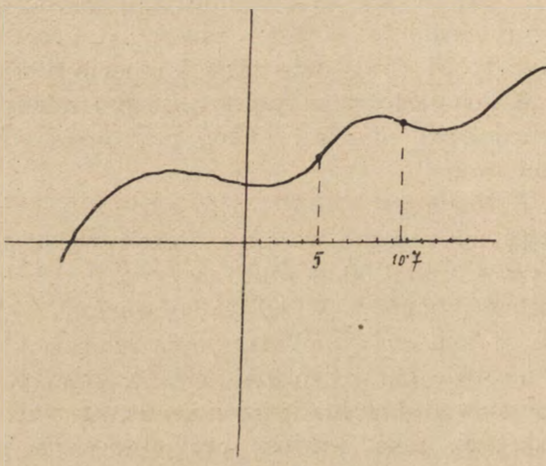

Fig. 10.

Prz. 9. Temperatura ciała (gorączka) chorego jest rozmaita wedle wyboru chwili, w której temperaturę mierzono — temperatura ciała jest funkcyą chwili w dniu.

Prz. 10. Zmienne x, y niech są takie, iż jest $y = 3x + 5$; dla $x = -2, -1, 2, 7, 8\frac{1}{3}, 10$ jest $y = -1, 2, 11, 26, 30, 35$. Na zmiennej x trzeba tu wykonać następujące działania arytmetyczne: zmienną x pomnożyć przez 3 i dodać do iloczynu 5, aby dostać na wypadek y. Gdy jest $z = \frac{20 + x}{x - 100}$, to inne działania trzeba wykonać na zmiennej x, aby otrzymać zmienną z; znów jest inaczej, gdy jest $t = x^3 - 1$; tu trzeba zmienną x podnieść do trzeciej potęgi (czyli przez siebie pomnożyć trójkrotnie) i odjąć liczbę jeden. Powiemy to ogólnie: wszystkie działania, które trzeba w pewnym wypadku wykonać na zmiennej x, oznaczymy krótko literą np. f (od słowa funkcya), a przez $f(x)$ rozumieć będziemy wynik działań f, które wykonaliśmy na zmiennej x; otóż zmienna y równa się wynikowi działań f wykonanych na zmiennej x czyli $y = f(x)$, czytamy to:

y równa się funkcyi f zmiennej x.

Funkcya z inaczej zależy od zmiennej x, inne działania trzeba wykonać na zmiennej x i w odróżnieniu oznaczymy je literą φ [grecka litera — czytaj fi], a więc $z = \varphi(x)$. Zmienna t jest wynikiem odmiennych działań wykonanych na zmiennej x, działań, które oznaczymy literą grecką ψ [czytaj psi], przeto jest $t = \psi(x)$ [czyt. t równa się funkcyi ψ zmiennej x]. Zdajmy sobie dokładnie sprawę, *co znaczy równość:*

$$y = f(x).$$

Otóż znaczy, że są trzy zmienne x, y, $f(x)$, z których jedna x jest zmienną niezależną, nadto dana jest funkcya $f(x)$ t. zn. wiemy, jakie wartości otrzymamy, gdy za x te lub owe wartości podstawiamy i wynik przedstawia $f(x)$, a zmienna y ma mieć te wartości, które przedstawia $f(x)$.

Prz. 11. Niech jest $y = x^2 + 1$; funkcya $x^2 + 1$ daje dla $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ wartości 1, 2, 5, 10.... i zmienna y ma być taką funkcyą zmiennej x, że dla $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ma się równać tym liczbom, którym równa się funkcya $x^2 + 1$ dla $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ t. j. ma być $y = 1, 2, 5, 10, \ldots$

§ 13. Czasami jednak byłoby dość trudno podać działania, które trzeba wykonać na zmiennej x, aby otrzymać y.

Prz. 12. Niech y równa się wartościom, które otrzymuje $\sin x$ czyli $y = \sin x$. Nie znaczy to, że mamy jakieś działanie »sin« wykonać na zmiennej x, bo takiego działania arytmetycznego nie ma, tylko przez »sin x« rozumiemy wynik pewnej konstrukcyi geometrycznej (zob. Wstęp, § 7) i mierzenia algebraicznego, gdy jest dany kąt x.

Prz. 13. Niech E(x) [od słowa entier = cały, francuski wyraz, czytaj ątje zmiennej x] oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w liczbie x (przytem na zmienną x nadawać będziemy tylko wartości dodatnie). A więc przez $E(\frac{3}{4})$ będziemy rozumieli liczbę 0, $E(\frac{3}{4}) = 0$, bo zero jest największą liczbą całkowitą w liczbie $\frac{3}{4}$ zawartą; podobnie jest

$$E(1) = 1,\quad E(1\tfrac{1}{4}) = 1,\quad E(1{\cdot}5) = 1,\quad E(1{\cdot}8) = 1,\quad E(1\tfrac{9}{11}) = 1,$$
$$E(1{\cdot}99999) = 1,\quad E(2) = 2, \ldots\ldots\quad E(50) = 50, \ldots\ldots$$

Niech zmienna y równa się E(x):

$$y = E(x).$$

Spróbujmy to wyrysować. Weźmy kartkę t. zw. milimetrowego papieru i uważajmy zmienne x, y za odciętą i rzędną dowolnego punktu na tym papierze (fig. 11).

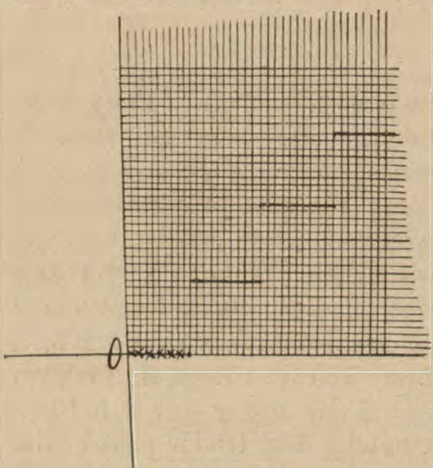

Fig. 11.

Na lewym brzegu kartki narysujmy oś y, na dolnym oś x; niech centymetr jest jednostką długości. Dla $x = 0$ jest $y = 0$; $x = 0{\cdot}1$, $y = 0$; $x = 0{\cdot}2$, $y = 0$; $x = 0{\cdot}3$, $y = 0; \ldots;$ $x = 0{\cdot}9$, $y = o$ i oznaczmy skośnym krzyżykiem te punkty, które mają powyższe spółrzędne. Widoczne że, gdybyśmy gęściej rysowali punkty, to, jak długo x jest mniejsze od 1, to jest $y = o$; te punkty dałyby odcinek prosty leżący na osi x, którego jeden koniec jest w początku spółrzędnych, a drugiego narysować nie można, bo już dla $x = 1$ jest $y = 1$ i jak długo jest x większe od 1, a mniejsze od 2, tak długo jest $y = 1$, ale $E(2) = 2$; dla $x > 2$, a mniejszego od 3 jest $y = 2$. Wyrysujmy to, o ile możemy; dostaniemy schodki. Zmienna y ma długo stałą wartość, a potem nagle skacze o jednostkę.

Tu także nie możnaby podać działania arytmetycznego na x, któreby zezwoliło wyrachować $E(x)$. Dlatego uogólniając nasze znakowanie, powiemy: przez $f(x)$ chcemy odtąd rozumieć liczbę nie tylko będącą wynikiem działania f, wykonanego na zmiennej x, ale także liczbę należącą do wartości na x; w każdym wypadku musi być podany przepis, jak znaleść $f(x)$, gdy jest dane x; przepis może zawierać konstrukcye geometryczne np. dające $\sin x$, $\cos x$, albo może to być przepis tego rodzaju jak w prz. 13. albo wprost może nim być tabelka np.

dla x	jest $f(x)$:
od 0 do $\frac{1}{2}$	0
od $\frac{1}{2}$ do 1	1
od 1 do $1\frac{1}{4}$	-1
od $1\frac{1}{4}$ do 3	$-1{\cdot}5$
od 3 do 4	0

Niech czytelnik spróbuje dla tej funkcyi wyrysować obrazek, jak zrobiliśmy w prz. 13. Tutaj $f(\frac{1}{4})$ t. zn. wartość funkcyi dla $x = \frac{1}{4}$ jest $f(\frac{1}{4}) = 0$, $f(\frac{3}{4}) = 1$, $f(0{\cdot}8) = 1$, $f(2{\cdot}7) = -1{\cdot}5$, $f(\pi) = 0$.

Wspomniemy jeszcze, że w prz. 3 nie moglibyśmy tak łatwo podać działań arytmetycznych, któreby trzeba wykonać na ilości sekund, aby obliczyć promień fali kolistej; obecnie napiszemy $r = f(t)$, gdzie r oznacza ilość centymetrów, które ma promień, gdy mija t-ta sekunda.

W podanej tabelce, jak i w prz. 13. może funkcya być stałą, nie zmieniać się np. gdy jest $y = E(x)$, to stale jest $y = 10$, gdy x zmieniamy od liczby 10 do np. liczby $10\frac{99}{100}$ albo do liczby $10\frac{999}{1000}$, byle nie dojść do liczby 11.

§ 14. W przykładzie 13. wyrysowaliśmy obrazek danej funkcyi t. zn. dana jest funkcya $y = f(x)$ i uważając x, y za współrzędne punktu, rysujemy krzywą, dla której rzędna y i odcięta x związane są związkiem $y = f(x)$; związek ten nosi nazwę równania krzywej wyrysowanej t. j. każdy punkt na krzywej ma spółrzędne spełniające równanie $y = f(x)$ i na odwrót, gdy narysujemy punkt, którego spółrzędne spełniają równanie $y = f(x)$, to leży na krzywej.

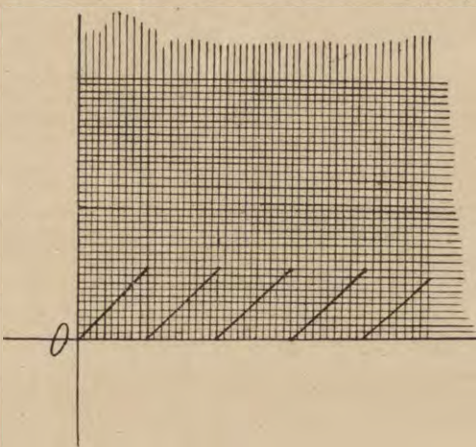

Fig. 12.

Krzywą, której równanie jest $y = f(x)$, nazywać będziemy obrazem funkcyi $y = f(x)$.

Prz. 14. Narysujmy obraz dla funkcyi $y = x - E(x)$. Weźmy znów kartkę milimetrowego papieru (fig. 12). Gdy x jest mniejsze od 1, to według przykł. 13. jest $E(x) = 0$, a więc jest $y = x$ t. zn. punkty x, y leżą na prostej wychodzącej z początku spółrzędnych, nachylonej do osi x pod kątem 45^0, ale nagle dla $x = 1$ jest $E(1) = 1$, więc jest $y = 1 - 1 = 0$; gdy x jest mniejsze od 2, a większe od 1, to jest $E(x) = 1$, więc jest $y = x - 1$, teraz więc leżą punkty x, y na równoległej prostej do tamtej, ale wychodzącej z punktu $x = 1$, $y = 0$; dla $x = 2$ jest $E(2) = 2$, a stąd jest $y = 2 - 2 = 0$, znów spada i to ciągle się powtarza.

Prz. 15. Wyrysujmy obraz funkcyi $y = \sin x$. Otóż dla $x = 0$ jest $y = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 1$, $x = \pi$, $y = 0$ i dotąd y nie było ujemne. Dla $x = \frac{3\pi}{2}$ jest $y = -1$; $x = 2\pi$, $y = 0$ i obecnie y nie jest dodatnie. Dostaniemy krzywą, jak na fig. 13.

§ 15. W ostatnim przykładzie krzywa nie ma przerw; ciągnąc po niej ołówkiem, nie trzeba skakać, jest ciągła, kiedy w prz. 13. i 14. są skoki, nieciągłości w punkcie

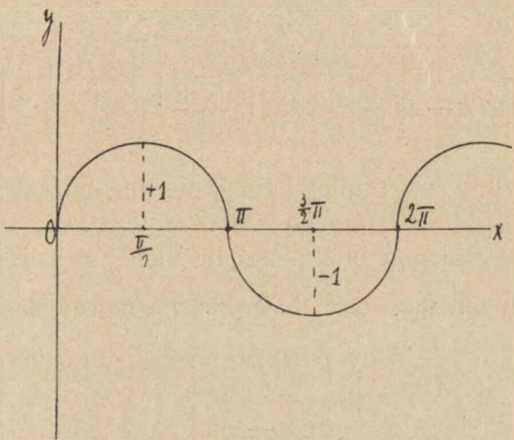

Fig. 13.

$x = 1, 2, 3, \ldots$; mówi się często, że funkcya prz. 13. i 14. ma nieciągłość w punkcie $x = 1, 2, 3, \ldots$ (zamiast dla liczby $x = 1, 2, 3, \ldots$), kiedy funkcya z prz. 15. jest ciągła w każdym punkcie.

Wyjaśnimy sobie, jak można podzielić funkcye na dwie kategorye.

Weźmy prz. 15. Niech $x = \frac{\pi}{2}$, to $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; weźmy liczbę x mało różną od $\frac{\pi}{2}$, jużto mniejszą od niej, jużto większą od niej np. $x = \frac{\pi}{2} + 0{\cdot}00001$ lub $x = \frac{\pi}{2} - 0{\cdot}00001$ i spytajmy się, o ile się sinus (wstawa) różni dla tego x od $\sin\frac{\pi}{2}$ czyli utwórzmy różnicę

$$\sin x - \sin\frac{\pi}{2}$$

Na mocy wzoru:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

otrzymujemy:

$$\sin x - \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

Widzimy z ostatniej figury, że im bliższą liczby $\frac{\pi}{2}$ jest odcięta, to tem bliższa rzędnej $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ jest rzędna, bo skoków nie ma. Czy mogę więc znaleść liczby x tak blisko liczby $\frac{\pi}{2}$, żeby powyższa różnica rzędnych:

$$\sin x - \sin\frac{\pi}{2}$$

wzięta bez znaku t. j.

$$\left|\sin x - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

była mniejsza od liczby wymyślonej naprzód np. $\varepsilon = 0{\cdot}0000000001$? Oczywiście, że tak można zrobić, o czem nas poucza rzut oka na figurę, a zresztą pouczy nas o tem następujący rachunek. Chcemy, aby było

$$\left|2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|$$

mniejsze od dowolnie wybranej, ale dodatniej liczby $\varepsilon = 0{\cdot}0000000001$. Otóż sinus jest co do bezwzględnej wartości mniejsze od bezwzględnej wartości kąta np.

$\sin\frac{1}{2} = 0{\cdot}47873\ldots$ i $|\sin\frac{1}{2}| < |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$
$\sin(-\frac{1}{4}) = -0{\cdot}24721\ldots$ $|\sin(-\frac{1}{4})| < |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ itd.,

jest więc

$$\left|\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| < \left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right| = \frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}{2},$$

wiadomo dalej, że bezwzględna wartość cosinusa jest mniejsza od jedności albo conajwyżej równa jedności; jest więc:

$$\left|\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| < 1 \quad \text{albo} \quad \left|\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| = 1$$

przeto jest:

$$\left|2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| < 2\,.\frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}{2}\,.\,1 = \left|x-\frac{\pi}{2}\right|,$$

gdy obierzemy x tak blisko liczby $\frac{\pi}{2}$, iżby było:

$$\left|x-\frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon = 0{\cdot}0000000001$$

wtedy różnica sinusów:

$$\left|\sin x - \sin\frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon = 0{\cdot}0000000001$$

przyczem x może być każdą liczbą np. od $\frac{\pi}{2} - 0{\cdot}00000000009$ do $\frac{\pi}{2} + 0{\cdot}00000000009$ (a więc także może być $x = \frac{\pi}{2}$, zresztą wtedy różnica wynosi zero).

Gdyby mi ktoś podał jeszcze mniejsze dodatnie ε niż obecne, tobym znów mógł wynaleść takie — jak się wyrazimy — bliskie sąsiedztwo liczby $\frac{\pi}{2}$, iżby dla każdej liczby x tego sąsiedztwa było:

$$\left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon.$$

Weźmy teraz funkcyę z prz. 13; jest $y = E(x)$. Niech jest $x = 1\frac{1}{2}$, to $E(1\frac{1}{2}) = 1$; weźmy liczbę x dość bliską liczby $1\frac{1}{2}$, to będzie $E(x) = 1$, byle x nie było mniejsze od liczby 1, a nie doszło do liczby 2 czyli gdy jest $|x - 1\frac{1}{2}|$ mniejsze od $\frac{1}{2}$, to napewne $E(x) = 1$.

Różnica wartości funkcyi dla liczby $1\frac{1}{2}$ i dla liczby x ze sąsiedztwa jest $E(x) - E(1\frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$; byleby było $|x - 1\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, to różnica wartości funkcyi dla x i $1\frac{1}{2}$ jest zerem, a więc jest co do bezwzględnej wartości mniejsza od każdej liczby dodatniej ε, choćby była tak małą, jak nam się ją podoba pomyśleć.

Funkcya ta jest ciągła w punkcie $a = 1\frac{1}{2}$ (zamiast litery x piszemy a, bo litery x na co inne użyliśmy).

Weźmy atoli wartość $a = 2$ na zmienną niezależną i x dość bliskie liczby 2; jakie jest $E(x)$? Aby na to odpowiedzieć, to rzut oka na fig. 11 do prz. 13. każe nam odróżnić, czy x jest mniejsze od liczby 2, czy też większe. Jeżeli bowiem jest $x < 2$, to jest $E(x) = 1$, byleby x nie było mniejsze od liczby 1; jeżeli jest znów $x > 2$, to jest $E(x) = 2$, byleby x nie dochodziło do liczby 3. Różnica

$$E(x) - E(2)$$

jest więc albo równa $1 - 2 = -1$, gdy jest $x < 2$, albo jest równa $2 - 2 = 0$ gdy jest $x > 2$. Otóż gdy jest $x < 2$, to choćbyśmy nie wiedzieć, jak blisko liczby 2 obrali x, to różnica funkcyi $E(x) - E(2)$ nie może być mniejsza co do bezwzględnej wartości od dowolnie małej liczby ε, bo jest stale równa 1 co do swej bezwzględnej wartości; dość wybrać $\varepsilon = 0{\cdot}9$. Rzut oka na figurę przykładu 13-go wykazuje, że tu jest skok, nieciągłość.

We wypadku funkcyi z prz. 15 powiadamy, że funkcya jest ciągła (w danym punkcie a albo) dla danej liczby a, a w ostatnim razie, że jest tamże nieciągła; ale ta funkcya $y = E(x)$ jest ciągła dla $a = 1\frac{1}{2}$.

Teraz zrozumiemy następujące określenie: *Niech będzie dana funkcya $y = f(x)$; powiadamy, że ona jest ciągła dla $x = a$, jeżeli do każdej dowolnej dodatniej liczby ε można znaleść taką dodatnią liczbę h, iż, gdy tylko jest $|x - a| < h$, to jest $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Prz. 16. Niech jest $y = 7x + 5$ i badajmy ciągłość tej funkcyi dla $a = 10$; mamy więc zbadać, czy można znaleść takie dodatnie h, żeby było

$$|\underbrace{(7x + 5)}_{f(x)} - \underbrace{(7 \,.\, 10 + 5)}_{f(a)}| < \varepsilon, \text{ czyli } |7(x - 10)| < \varepsilon,$$

gdy jest $|x - 10| < h$. Stąd $|7(x - 10)| < 7h$; gdy więc pomyśleliśmy sobie pewną liczbę dodatnią ε, to obierzmy tak h, żeby było $7h = \varepsilon$ czyli $h = \frac{\varepsilon}{7}$, wtedy jest:

$$|7(x - 10)| < 7h = \varepsilon$$

o co chodziło. Gdy wezmę $\varepsilon = 0{\cdot}0001 = \frac{1}{10000}$, to biorę $h = \frac{1}{70000}$ i wtedy $f(x)$ dla $x = 10 - \frac{1}{80000}$, $10 - \frac{1}{90000}, \ldots$, $10 + \frac{1}{90000}$, $10 + \frac{1}{80000}$, różnią się od $f(a)$ co do bezwzględnej wartości o mniej niż ε.

Prz. 17. Niech jest $y = x^2 + x + 1$ i badajmy ciągłość tej funkcyi dla liczby a; spytajmy, czy można znaleść taką dodatnią liczbę h, iż, gdy jest $|x - a| < h$, to jest:

$$|\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{f(x)} - \underbrace{(a^2 + a + 1)}_{f(a)}| < \varepsilon,$$

czyli $|(x^2 - a^2) + (x - a)| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolną liczbą. Czyli ma być $|(x - a)(x + a + 1)| < \varepsilon$. A jest:

$$|(x - a)(x + a + 1)| = |x - a|\,|x + a + 1| < h\,|x + a + 1| <$$
$$< h\{|x| + |a| + 1\}.$$

Tu x zmienia się od $(a-h)$ do $(a+h)$; chodzi nam o wyznaczenie liczby h — otóż kontentujmy się, co nam wystarcza, liczbą $h<1$; tedy jest $|x|<|a|+1$, przeto jest:

$$h\{|x|+|a|+1\}<h\{|a|+1+|a|+1\}=2h\{|a|+1\}$$

i niech to będzie mniejsze od ε czyli ma być

$$h<\frac{\varepsilon}{2\{|a|+1\}}$$

i zarazem

$$h<1.$$

Wtedy jest:

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Możemy powiedzieć, że ta funkcya (jak i z prz. 16, 15) jest ciągła dla każdego a. Podobnie łatwo się przekonać, że funkcya $y=\cos x$ jest ciągła. Ciągłe funkcye dają wszystkie wielomiany $7x+5$, x^2+x+1 itd. dowolnych stopni np. $3x^{10}+7x^8-1$; nazywamy je funkcyami wymiernemi całkowitemi — one nie mają mianownika z liczbą x; np. funkcya $y=\frac{3}{4}x^7-0{\cdot}25x^4+\sqrt{3}$ jest również funkcyą wymierną i całkowitą, choć liczby szczególne (t. zw. spółczynniki) są ułamkami ($\frac{3}{4}$, 0·25) lub liczbą niewymierną ($\sqrt{3}$), atoli nie zachodzi tu wyraz jak np. $\frac{1}{x}$ lub $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$....

ROZDZIAŁ III.

O granicach.

§. 16. **Przykład I.** Weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcyę zmiennej niezależnej x np.

$$y = f(x) = 2x + 3$$

i nadawajmy zmiennej x kolejno coraz większe wartości liczebne takie, aby bezwzględna wartość różnicy każdej z tych liczb i liczby np. 3 była mniejszą od dodatniej liczby δ [1]) równej np. 0·0028. Nadawajmy więc stosownie do tego zmiennej x wartości np. następujące: 2·9973,... 2·9985,... 2·9996,... z wyjątkiem liczby 3, to oznaczając każdą z nich przez x, wyrazimy w piśmie rzeczoną ich własność zapomocą nierówności:

$$|x - 3| < \delta = 0{\cdot}0028.$$

Dla powyższych wartości zmiennej niezależnej x, jak to łatwo obliczyć, otrzymamy następujący szereg wartości na y: 8·9946,... 8·9970,... 8·9992,... to jest liczby wzrastające, zbliżające się widocznie do liczby 9, a nadto wszystkie one posiadają tę własność, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 9 jest mniejszą od dodatniej liczby ε równej np. 0·0055 dowolnie naprzód danej.

---

[1]) litera grecka — delta.

Oznaczając każdą z nich przez y, wyrażamy w piśmie powyższą ich własność zapomocą nierówności:

$$|y - 9| < \varepsilon = 0{\cdot}0055.$$

W powyższym przykładzie spostrzegamy więc rzecz następującą. Jeżeli obierzemy zupełnie dowoli dodatnią bardzo małą liczbę ε równą np. 0·0055, to można będzie zawsze znaleść inną dodatnią liczbę, zależną od niej δ, w naszym przypadku równą np. 0·0028 taką, że gdy zachodzi nierówność:

$$|x - 3| < \delta = 0{\cdot}0028.$$

to zachodzi równocześnie koniecznie nierówność:

$$|y - 9| < \varepsilon = 0{\cdot}0055.$$

Innemi słowy gdy w powyższym przykładzie nadajemy zmiennej x wartości rosnące, zbliżające się dowolnie do liczby np. 3 z wyjątkiem tejże, to dla funkcyi y otrzymujemy z rachunku wartości także rosnące zbliżające się do liczby 9.

Obierzmy teraz inną dowolnie małą dodatnią liczbę ε równą np. 0·000031 i żądajmy, aby spełniała się nierówność następująca:

$$|y - 9| < 0{\cdot}000031,$$

t. j. aby funkcya y przyjmowała wartości np. 8·999970,... ...8·999976,... 8·999982,.... Zachodzi pytanie, czy można zmiennej niezależnej x nadawać takie wartości blizkie liczby 3, aby powyższa nierówność istotnie zachodziła. Tak jest rzeczywiście, albowiem, aby funkcya y przyjmowała wyżej podane wartości, wystarczy nadawać zmiennej x wartości np. 2·999985,... 2·999988,... 2·999991,..., t. j. liczby posiadające tę własność, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 3 jest mniejszą od liczby δ równej np. 0·000016. A więc mając daną dowolnie małą dodatnią liczbę ε można zawsze znaleść zależną od niej liczbę δ taką, że gdy zachodzi nierówność:

$$|x - 3| < \delta,$$

to koniecznie zachodzi także równocześnie nierówność:

$$|y-9|<\varepsilon.$$

Liczba 9 w naszym przykładzie nazywa się *granicą* (limes pisze się lim.) funkcyi y dla wartości zmiennej x zbliżających się rosnąc do liczby 3, co zaznaczamy w piśmie w następujący sposób:

$$\lim_{x_r=3}(2x+3)=9,$$

gdzie litera x_r oznacza, że zbliżamy się do liczby 3 przez wartości rosnące.

§. 17. Nadawajmy teraz zmiennej niezależnej x w naszym przykładzie liczby kolejno malejące, zbliżające się do liczby 3 z wyjątkiem tejże, a więc np. liczby 3·00079,... ...3·00068,... 3·00013,... 3·00004... t. j. takie, że bezwzględna wartość różnicy każdej z tych liczb x i liczby 3 jest mniejszą np. od liczby $\delta=0{\cdot}0008$, czyli takie, że zachodzi nierówność:

(1). $$|x-3|<\delta=0{\cdot}0008.$$

Nadając te wartości zmiennej niezależnej x obliczymy wartości funkcyi y następujące: 9·00158,... 9·00136,... ...9·00026,... 9·00008,... t. j. otrzymamy wartości funkcyi zbliżające się kolejno do liczby 9 i posiadające tę własność, że bezwzględna wartość różnicy każdej z tych liczb y i liczby 9 jest mniejszą od liczby dodatniej ε równej np. 0·0016. Jeżeli więc damy sobie dowolnie małą liczbę dodatnią ε np. 0·0016 i żądamy, aby bezwzględna wartość różnicy funkcyi y i liczby 9 była mniejszą od tej dowolnie małej liczby ε, to jest, aby zachodziła nierówność:

(2). $$|y-9|<\varepsilon=0{\cdot}0016,$$

to widzimy, że zawsze można znaleść taką drugą liczbę δ zależną od liczby ε, że gdy chcemy, aby zachodziła nierówność (2), to koniecznie równocześnie musi zachodzić

3*

nierówność (1). Liczbę 9, jak poprzednio, nazywamy granicą funkcyi y, gdy zmiennej niezależnej nadajemy wartości coraz bardziej malejące, zbliżające się dowolnie blizko do liczby 3 z wyjątkiem tejże, co zaznaczamy w piśmie w podobny sposób jak poprzednio:

$$\lim_{x_m = 3} (2x + 3) = 9,$$

gdzie litera x_m oznacza, że zbliżamy się do liczby 3 przez wartości malejące.

W pierwszym przypadku nadawaliśmy zmiennej niezależnej x wartości kolejno rosnące, zbliżające się do liczby 3, z wyjątkiem tejże, wtedy wartości funkcyi y zbliżały się rosnąc do granicy 9. W drugim przypadku nadawaliśmy zmiennej niezależnej wartości kolejno malejące, zbliżające się do liczby 3, z wyjątkiem tejże i otrzymywaliśmy na wartości funkcyi y liczby malejące większe od granicy 9 i zbliżające się do niej. Zbliżaliśmy się więc do liczby 3 pierwszym razem przez liczby rosnące, w drugim przypadku przez liczby malejące, czyli jak krótko będziemy mówić, zbliżaliśmy się do liczby 3 najpierw od strony lewej, w drugim przypadku od strony prawej. W pierwszym przypadku będziemy nazywać granicę *lewostronną*, w drugim granicę *prawostronną*. W naszym przykładzie obie te granice były równe liczbie 9. Ponieważ w przykładzie powyższym granica lewostronna i prawostronna są sobie równe, to będziemy mówić krótko, bez odróżnienia, że funkcya powyższa posiada granicę 9 dla wartości x równej 3.

Z powyższych rozważań dochodzimy więc do następującego wniosku. Aby liczba 9 była granicą funkcyi danej y = f(x), gdy zmiennej niezależnej x nadajemy wartości kolejno czyto rosnące, czyto malejące, zbliżające się do liczby 3, z wyjątkiem tejże, to jest rzeczą konieczną, aby mając daną dowolnie małą dodatnią liczbę ε, można było znaleść inną, zależną od niej liczbę dodatnią δ taką, że gdy wartości x są takie, iż jest:

$$|x-3|<\delta,$$

to koniecznie musi być równocześnie:

$$|y-9|<\varepsilon.$$

Obliczmy teraz wartość funkcyi powyższej dla wartości zmiennej $x=3$. Widać, że jest wtedy $2.3+3=9$, a więc, że granica tej funkcyi, gdy zmienna x zbliża się jakkolwiek do liczby 3, równa się wartości funkcyi dla $x=3$, którą to własność posiadają, jak zobaczymy, funkcye ciągłe.

§. 18. **Prz. 2.** Weźmy teraz pod uwagę funkcyę $E(x)$ rozważaną w poprzedzającym rozdziale. Gdy zmiennej niezależnej x nadajemy kolejno wartości rosnące, zbliżające się do liczby 2 od strony lewej np. 1·95764,... 1·96895,... ...1·98729,... 1·99057,..., z wyjątkiem liczby 2, a więc takie, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 2 jest mniejszą od liczby dodatniej np. $\delta=0{\cdot}0424$, t. j. że:

$$|x-2|<\delta=0{\cdot}0424,$$

to na y otrzymujemy wartości: 1,... 1,... 1,... 1,..., to jest takie, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 1 jest mniejszą od dowolnie małej dodatniej liczby ε równej np. 0·000001, bo jest tu przypadkowo zerem, czyli, że:

$$|y-1|<\varepsilon=0{\cdot}000001.$$

Liczba 1 jest w tym przypadku, jak poprzednio, granicą lewostronną funkcyi $E(x)$ dla wartości x zbliżających się do liczby 2 od strony lewej t. j. rosnąc, co wyrazimy w piśmie:

$$\lim_{x_r=2} E(x)=1.$$

Nadawajmy następnie zmiennej niezależnej x wartości malejące, większe od liczby 2, z wyjątkiem liczby 2, czyli zbliżające się do liczby 2 od strony prawej np. 2·19857,... ...2·08694,... 2·00236,... 2·00051,..., a więc takie, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 2 jest mniejszą od liczby dodatniej δ równej np. liczbie 0·19857 t. j.

$$|x-2|<\delta=0{\cdot}19857.$$

Funkcya $y=E(x)$ będzie wtedy otrzymywała kolejno wartości: 2,... 2,... 2,... 2,... a więc takie liczby, że bezwzględna wartość różnicy każdej z nich i liczby 2 będzie mniejszą od dowolnie danej liczby dodatniej ε równej np. 0·000015, bo tu jest przypadkowo zerem, czyli że mamy:

$$|y-2|<\varepsilon=0{\cdot}000015.$$

Liczba 2 jest w tym przypadku granicą prawostronną funkcyi $E(x)$, gdy zmiennej niezależnej x nadajemy kolejno wartości malejące, większe od liczby 2, z wyjątkiem tejże, czyli gdy zbliżamy się do liczby 2 od strony prawej. Zaznaczamy to w piśmie, jak poprzednio:

$$\lim_{x_m=2} E(x)=2.$$

W przykładzie tym widzimy, że granica lewostronna jest 1, a granica prawostronna jest 2, a więc są nierówne, a wartość funkcyi dla $x=2$ wynosi $E(2)=2$. Jak wiemy z rozdziału drugiego funkcya ta jest dla $x=2$ nieciągłą.

§. 19. **Prz. 3.** Weźmy jeszcze pod uwagę funkcyę $y=x-E(x)$ i obliczmy wartości dla tej funkcyi, gdy zmiennej niezależnej x nadajemy wartości kolejno rosnące, zbliżające się do liczby np. 2 z wyjątkiem tejże, a więc np. 1·78574,... 1·85641,... 1·92364,..., dla których mamy:

$$|x-2|<\delta,$$

gdzie δ ma wartość np. 0·21427. Nadając te wartości zmiennej niezależnej x czyli zbliżając się od strony lewej do liczby 2, obliczymy kolejno, że $y=x-E(x)$ będzie się równać: 1·78574 —1= 0·78574,... 1·85641—1= 0·85641, . 1·92364 —1=

$= 0{\cdot}92364, \ldots$, a więc będziemy otrzymywać wartości zbliżające się rosnąc do liczby 1, czyli, że:

$$|y - 1| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest liczbą dowolnie małą równą np. 0·24586. Liczba 1 jest więc granicą lewostronną funkcyi rozważanej y dla $x_r = 2$, t. j.

$$\lim_{x_r = 2} [x - E(x)] = 1.$$

Nadawajmy następnie zmiennej niezależnej x wartości malejące, zbliżające się do liczby 2 od strony prawej, z wyjątkiem tejże np. 2·00574,... 2·00086,... 2·00004,..., t. j. liczby takie, że mamy:

$$|x - 2| < \delta,$$

gdzie δ równa się np. 0·00575. Wtedy obliczymy na $y = x - E(x)$ wartości następujące: 0·00574,... 0·00086,... ...0·00004,... dla których mamy:

$$|y - 0| < \varepsilon,$$

gdzie dowolnie mała dodatnia liczba ε może się równać np. 0·00586. Widzimy więc, że granicą prawostronną funkcyi y jest liczba 0, t. j.

$$\lim_{x_m = 2.} [x - E(x)] = 0.$$

Nadajmy teraz zmiennej niezależnej x liczbę 2 t. j. $x = 2$, a wtedy otrzymamy, że $y = x - E(x) = 2 - E(2) = 2 - 2 = 0$. Spostrzegamy więc, że dla badanej funkcyi granica lewostronna równa się 1, granica prawostronna 0, a wartość jej dla $x = 2$ jest 0.

§. 20. **Prz. 4.** Weźmy jeszcze pod uwagę funkcyę poprzednio rozważaną $y = E(x)$ i nadawajmy zmiennej niezależnej x wartości np. następujace: 1·45825,... 1·46689,... ...1·4892,... a więc wartości rosnące zbliżające się od strony lewej do liczby 1·5 z wyjątkiem tejże t. j. takie, że mamy:

$$|x - 1{\cdot}5| < \delta,$$

gdzie, jak poprzednio, δ jest liczbą dodatnią. Nadając te wartości zmiennej x, otrzymamy na y kolejno wartości: 1,... 1,... 1,... t. j. takie, że mamy:

$$|y-1|<\varepsilon,$$

gdzie ε jest naprzód dowolnie daną liczbą dodatnią, gdyż tu przypadkowo wartość tej różnicy jest 0. Widzimy więc, że gdy zmiennej niezależnej x nadajemy wartości rosnące zbliżające się do liczby 1·5 z wyjątkiem tejże, to funkcya y przybiera stale wartość 1 i ma granicę 1.

Nadając następnie zmiennej niezależnej x wartości malejące czyli zbliżające się od strony prawej do liczby 1·5 z wyjątkiem tejże, np. 1·59246,... 1·56281,... 1·50732,... ...1·50003,... otrzymamy na y wartości: 1,... 1,... 1,... 1,... a więc także stale wartość 1. Dając zmiennej x wartość 1·5, otrzymamy na y wartość 1. Z tego rozważania wynika, że, gdy funkcya dana y przybiera wartość stałą, dla różnych wartości zmiennej niezależnej x, to granica jej dla pewnej wartości zmiennej x równa się jej stałej wartości, jakkolwiek się zbliżamy do tej wartości zmiennej x.

§. 21. Po tych przykładach przystąpimy teraz do ogólnego określenia granicy funkcyi $y=f(x)$, gdy zmiennej niezależnej x nadajemy wartości, czyto rosnące, czy malejące, zbliżające się do pewnej obranej liczby a, z wyjątkiem tejże. Mówimy mianowicie, że funkcya f(x) zbliża się do granicy A, gdy zmienna niezależna zbliża się jakkolwiek do wartości a, gdy jest rzeczą możliwą dla każdej dowolnie małej dodatniej liczby ε znaleść odpowiednią, zależną od niej, dodatnią liczbę δ i taką, że mamy:

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

dla każdej wartości zmiennej niezależnej x, dla której jest:

$$|x-a|<\delta,$$

przyczem nie wolno za x podstawić liczby a, [bo gdy badamy granicę funkcyi, to nas nie obchodzi jej wartość dla $x=a$, tylko te wartości, które funkcya przyjmuje, gdy zmiennej niezależnej x nadajemy wartości nieco mniejsze od a i nieco większe od a].

Powyższe określenie wyraża w sposób ścisły rzecz następującą. Zmiennej niezależnej x zawsze można nadawać wartości tak blizkie liczbie a, aby odpowiadające wartości funkcyi y różniły się od liczby A tak mało, jak się nam podoba, gdyż liczba ε zależna jest tylko od naszej woli. Aby zaznaczyć, że liczba A jest granicą funkcyi y, gdy zmienna niezależna x zbliża się do liczby a, piszemy:

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

§. 22. Obliczmy teraz granicę funkcyi $y = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, gdy zmienny łuk AM dąży do 0 (fig. 14). Niechaj α będzie

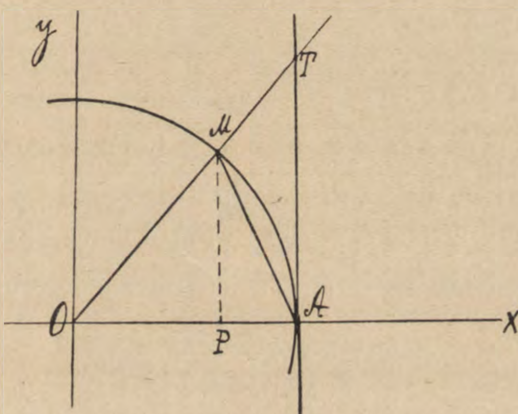

Fig. 14.

miarą łuku AM[1]) dodatniego, mniejszego od ćwiartki obwodu koła t. j. $\alpha < \frac{\pi}{2}$, nakreślonego promieniem równym jedności, to wtedy $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ są dodatnie i mamy $MP = \sin\alpha$,

[1]) gdy promień jest jednostką; wtedy kąt AOM mierzy w radyanach tasama liczba, co łuk.

$AT = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie długości MP i AT są mierzone promieniem OA wziętym za jednostkę. Porównajmy następnie ze sobą pola trójkątów OMA, OAT i wycinka koła OAM, to widocznem jest z figury, że pole wycinka koła OAM jest większe od pola trójkąta OMA, a mniejsze od pola trójkąta OAT, t. j. mamy następujące nierówności:

$$\text{pole } \triangle OMA < \text{pole wycinka } OAM < \text{pole } \triangle OAT.$$

Zastępując pola przez ich wyrażenia, otrzymamy z powyższych nierówności następujące:

$$\tfrac{1}{2} OA . MP < \tfrac{1}{2} OA . \text{łuk } AM < \tfrac{1}{2} OA . AT.$$

Dzieląc powyższe nierówności przez czynnik $\frac{1}{2} OA$ otrzymamy:

$$MP < \text{łuk } AM < AT$$

lub:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Wykażemy teraz, że stosunek łuku α do jego wstawy $\sin\alpha$ t. j. $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ dąży do jedności, gdy łuk α dąży do zera. Należy w tym celu rozróżnić dwa przypadki, a mianowicie załóżmy najpierw, że łuk α jest dodatni i mniejszy od $\frac{\pi}{2}$, to wtedy na mocy powyższej nierówności otrzymamy:

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Powyższe nierówności nie ulegną żadnej zmianie, jeżeli ich wyrazy podzielimy przez $\sin\alpha$, a wtedy otrzymamy:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Otóż gdy łuk α dąży do zera przez wartości dodatnie, to jak wiadomo, $\cos\alpha$ dąży wtedy do 1. Stosunek zaś $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$, jak widzimy, zawiera się stale między 1 i wielkością, która także dąży do jedności, gdy α dąży do zera, czyli że także ten stosunek $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ musi dążyć do 1, gdy łuk α dąży do 0 przez wartości dodatnie.

Założmy następnie, że łuk α jest ujemny i połóżmy:

$$\alpha = -\alpha',$$

gdzie łuk α' jest dodatnim. Wtedy mamy:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\alpha'}{\sin(-\alpha')} = \frac{-\alpha'}{-\sin\alpha'} = \frac{\alpha'}{\sin\alpha'}.$$

Otóż gdy α dąży do zera przez wartości ujemne, to α' dąży do zera przez wartości dodatnie, stosunek $\frac{\alpha'}{\sin\alpha'}$ ma więc granicę 1 według poprzedniego rozważania. A więc stosunek $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ ma także granicę 1, gdyż stale równa się stosunkowi $\frac{\alpha'}{\sin\alpha'}$. Mamy więc w każdym przypadku:

$$\lim_{\alpha=0}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right) = 1.$$

Ponieważ powyższy stosunek dąży do 1, gdy α dąży do zera, to odwrotność tego stosunku t. j. stosunek $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ dąży do granicy, która jest odwrotnością jedności, t. j. dąży także do 1, gdyż odwrotnością jedności jest jedność. A więc mamy także:

$$\lim_{\alpha=0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 1.$$

W praktycznych rachunkach nie popełnimy więc wielkiego błędu, gdy weźmiemy zamiast $\sin\alpha$ łuk α, jeżeli ten łuk jest bardzo mały albo odwrotnie.

Jeżeli funkcya f(x) jest ciągłą dla wartości zmiennej $x = a$, to według określenia ciągłości znaczy to, że:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

gdy tylko:

$$|x - a| < \delta.$$

Innemi słowy, gdy zmienna x zbliża się do wartości a, to f(x) zbliża się do wartości f(a), tak, że możemy napisać:

$$\lim_{x = a} f(x) = f(a);$$

to znaczy, że wartość funkcyi dla $x = a$ t. j. f(a) jest granicą funkcyi, gdy zmienna niezależna x dąży do wartości a.

ROZDZIAŁ IV.

O pochodnej i różniczkowaniu.

§. 23[1]). **Przykład I.** Narysujmy krzywą na kartce z osiami x, y, jak na fig. 15 i weźmy na niej dwa punkty A, B. Pytamy, gdzie więcej przyrasta rzędna, gdy o tak

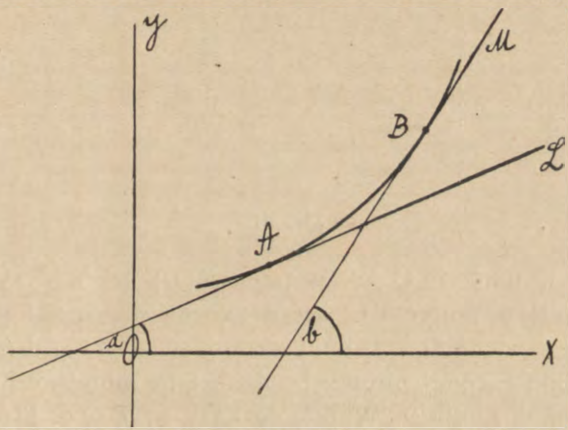

Fig. 15.

samo długi kawałek wzdłuż osi x się posuniemy czyli gdzie szybcej przyrasta rzędna: czy w punkcie A, czy

[1]) § 23 częściowo nie jest ścisły i ma służyć do tego, by najpierw wytworzyć w czytelniku pojęcie intuicyjne.

w punkcie B? Jak to osądzić? po jakiej liczbie zależnej od krzywej możnaby to osądzić — czem to mierzyć?

Otóż wyrysujmy w punkcie A (fig. 15) prostą, która się z krzywą styka w punkcie A, t. zw. styczną L; ta prosta L tworzy kąt a z osią x; w drugim punkcie B wyrysujmy styczną M do krzywej; ta styczna tworzy kąt b z osią x. Widać, że tam, gdzie rzędna szybcej przyrasta, większy kąt tworzy styczna z osią x (fig. 16).

Weźmy inną krzywą (fig. 17); w punkcie C ubywa rzędnej, jak i w punkcie D; tylko prędzej ubywanie na-

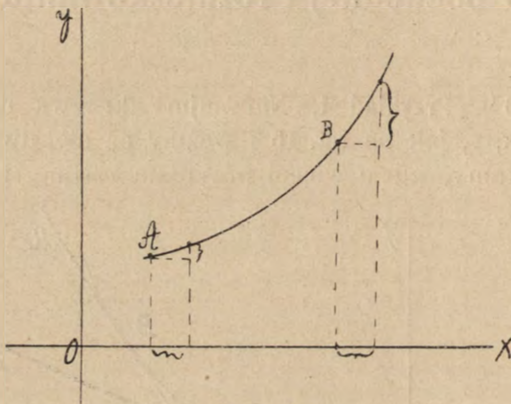

Fig. 16.

stępuje w punkcie C jak w punkcie D; jeżeli wyrysujemy styczną N w punkcie C, która tworzy z osią x kąt c, zaś styczna P w punkcie D narysowana tworzy kąt d z osią x; tam, gdzie rzędnej ubywa prędzej, tam mniejszy kąt tworzy styczna z osią x. Widać, że kąty a, b, c, d, które tworzą styczne do krzywej z osią x, są w pewnym związku ze szybkością przyrastania lub ubywania rzędnej.

Zajmijmy się teraz pierwszym wypadkiem, gdzie rzędna przyrasta i mierzmy szybkość przyrastania rzędnej nie wprost kątami a, b, ale ich funkcyami trygonometrycznemi, a mianowicie weźmy liczby tg a, tg b. U nas kąty a, b są ostre (z pierwszego kwadrantu), więc jest tg b $>$ tg a, bo jest b $>$ a.

W miejscu, gdzie rzędna szybcej przyrasta, jest tangens kąta, utworzonego przez styczną do krzywej z osią x, większy.

Przejdźmy do drugiego wypadku. Zamiast mówić o ubywaniu rzędnej będziemy mówili o przyrastaniu rzędnej, tylko obecnie przyrastanie rzędnej może być doda-

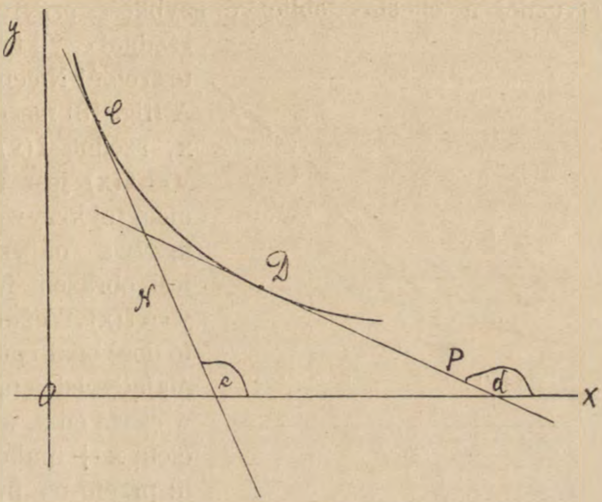

Fig. 17.

tnie lub ujemne; a więc zamiast powiedzieć: w punkcie C szybcej ubywa rzędnej, niż w punkcie D, powiemy: w punkcie C powolniej przyrasta rzędna niż w punkcie D i w obu punktach przyrosty rzędnej są ujemne. Ponieważ kąty c, d są rozwarte i kąt c jest mniejszy od kąta d, więc tg c, tg d są ujemne i bezwzględna wartość liczby tg c jest większa od bezwzględnej wartości liczby tg d: $|\operatorname{tg} c| > |\operatorname{tg} d|$ przeto jest tg c $<$ tg d. Z tego widzimy, że praktycznie jest wziąć tg a, tg b, tg c, tg d za szybkości przyrastania rzędnej; jeżeli bowiem w jednym punkcie krzywej rzędna przyrasta szybcej niż w drugim, to w pierwszym tangens kąta, utworzonego przez styczną w tym punkcie do krzywej z osią, jest większy niż w drugim, a znak tego tangens będzie wskazywał, czy przyrost ma znak dodatni czy ujemny.

Jak te liczby tg a, tg b, tg c, tg d z krzywej wyrachować?

Prz. 2. Weźmy krzywą z prz. 1. Nie umiemy rysować stycznej a chcemy obliczyć szybkość przyrastania rzędnej czyli tg a. Jak to zrobić? Niech punkt A (fig. 18) ma odciętą x, rzędną f(x) czyli y = f(x) jest równaniem tej krzywej albo krzywa narysowana jest obrazem funkcyi y = f(x). Weźmy nadto dość blizki punkt M, mający odciętą nieco większą od x, więc odciętą x + mała liczba h; przeto ten punkt M ma rzędną f(x + h); przez punkty A, M poprowadźmy linię prostą, która z osią x tworzy kąt g i obliczmy tg g; oczywiście tg g będzie szybkością przyrastania rzędnej, ale nie dla krzywej, tylko dla prostej AM; można zamiast o szybkości przyrastania rzędnej mówić też o szybkości wznoszenia się krzywej, bo jedno z drugiem złączone. Oczywiście tg g nie będzie szybkością wznoszenia się *krzywej* tylko szybkością wznoszenia się *prostej* AM; ale gdy punkt M jest dość blizki punktowi A, to tg g można przybliżenie uważać za szybkość przyrastania rzędnej (wznoszenia się krzywej) w punkcie A i przybliżenie będzie tem lepsze, im bliżej punktowi A

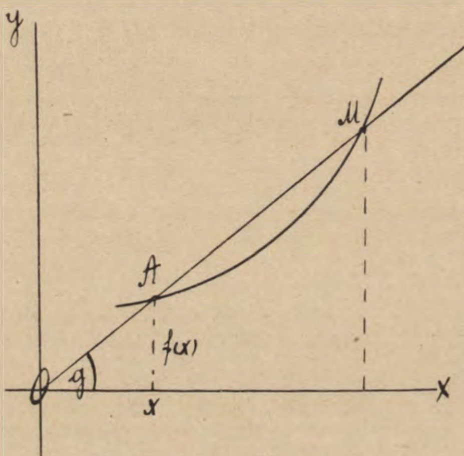

Fig. 18.

leży punkt M t. zn. im bliżej punktowi A leży punkt M, tem mniej się różni tg g od tg a. Trzeba więc wyrachować tg g — jak to zrobić? Rzut oka na fig. 19. wykazuje, że jest

$$\operatorname{tg} g = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a więc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

jest szybkością wznoszenia się *prostej* AM a nie *krzywej* czyli jest szybkością przyrastania rzędnej. Można to także

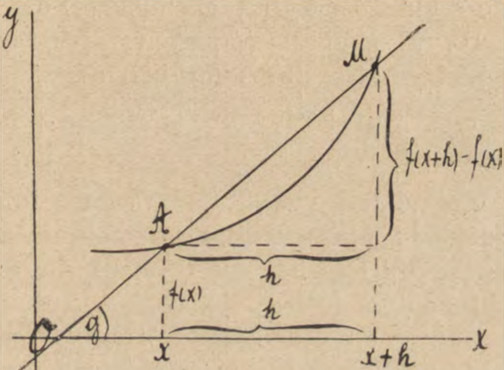

Fig. 19.

tak wyrachować: niech odcięta x przyrasta o liczbę h, to rzędna przyrasta o tyle, o ile rzędna dla odciętej $(x+h)$ różni się od rzędnej dla odciętej x t. j. rzędna wzrośnie o $f(x+h) - f(x)$; aby więc powiedzieć, ile razy szybciej przyrasta rzędna niż odcięta, to musimy utworzyć ułamek:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

czyli podzielić przyrost rzędnej przez przyrost odciętej. Ale wiemy, że ten ułamek jest tylko szybkością przyrastania rzędnej na *prostej*, którąśmy zastąpili krzywą; im mniejsze h, tem jest ów ułamek bliższy szybkości przyrastania rzędnej na *krzywej* w punkcie A (lub jak się mówi: w punkcie x), a więc granica tego ułamka dla $h=0$ (gdy x uważamy za stałe w rachunku) będzie dawała $\operatorname{tg} \alpha$.

Prz. 3. Weźmy funkcyę $y=x^2$; gdy na papierze milimetrowym wyrysujemy do tego obraz, to dostaniemy taką krzywą, jak na fig. 20.; dla $x=0$ jest $y=0$; $x=0{\cdot}1$, $y=0{\cdot}01$; $x=0{\cdot}5$, $y=0{\cdot}25$; $x=1$, $y=1$; $x=-0{\cdot}1$, $y=0{\cdot}01$; $x=-0{\cdot}5$, $y=0{\cdot}25$; $x=-1$, $y=1$; $x=2$, $y=4$; $x=-2$, $y=4$..... Obliczmy dla tej krzywej szybkość przyrastania rzędnej (co dla funkcyi samej oznaczać będzie szybkość przyrastania funkcyi) dla $x=1$. Tu jest $f(1)=1^2=1$; nadto utwórzmy $f(1+h)=(1+h)^2=$ $=1+2h+h^2$, a teraz uważajmy ułamek:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+2h+h^2)-1}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h.$$

Ten ułamek nie daje szybkości przyrastania funkcyi (rzędnej) dla odciętej $x=1$, bo zależy jeszcze od h; dla $h=0{\cdot}1$ ma ten ułamek wartość $2{\cdot}1$, dla $h=0{\cdot}01$ ma ten ułamek wartość $2{\cdot}01$ itd. Chcąc tedy znaleść szybkość przyrastania funkcyi (rzędnej) dla odciętej $x=1$, trzeba szukać granicy tego ułamka dla $h=0$; otóż dwumian $(2+h)$, im mniejsze jest h, zbliża się coraz bardziej do liczby 2; jest bowiem $(2+h)$ funkcyą wymierną i całkowitą względem h (§ 15.), przeto ciągłą względem h (§ 22.), więc jej granica dla $h=0$ równa się wartości funkcyi, jaką ma dla $h=0$ czyli

$$\lim_{(h=0)}(2+h)=2+0=2.$$

Szybkość przyrastania rzędnej (funkcyi) dla wartości $x=1$ jest 2.

Wyrachujmy tę szybkość ogólnie t. zn. nie przyjmując pewnej szczególnej wartości dla odciętej x. Otóż jest tu $f(x)=x^2$, $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$, przeto ułamek:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

Przez punkt A o spółrzędnych x, x^2 i punkt M o spółrzędnych $x+h$, $(x+h)^2$ narysujmy prostą AM, która z osią x tworzy kąt g i jest

$$\operatorname{tg} g = 2x + h.$$

Gdy za h będę brał coraz mniejsze liczby, to punkt M będzie coraz bliższy punktowi A i przez to prosta AM

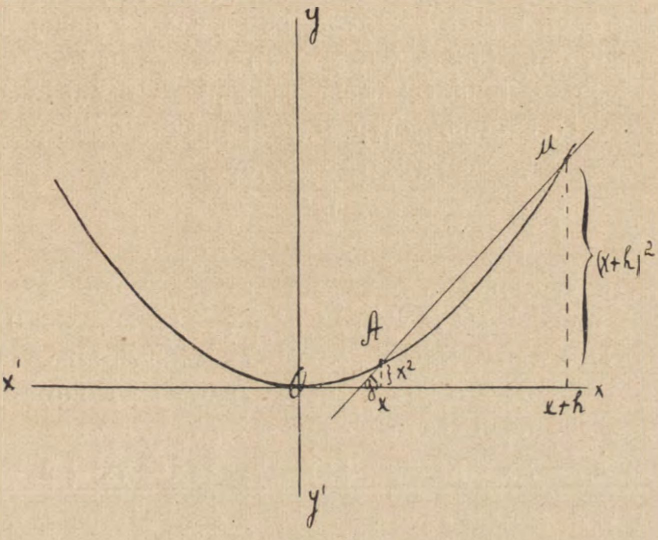

Fig. 20.

w nowem położeniu będzie coraz to bliższa stycznej; jak powiadamy: prosta AM kręci się naokoło punktu A. Jej położenie zależy od wyboru liczby h, przyczem punkt A jest stały, nieruchomy czyli x mamy tu uważać za stałe. Na tg g otrzymaliśmy funkcyę wymierną i całkowitą zmiennej h, a więc ciągłą i dla $h=0$, przeto jej granica dla $h=0$ i wartość dla $h=0$ są sobie równe:

$$\lim_{(h=0)}(2x+h)=2x+0=2x.$$

Szybkość przyrastania rzędnej (funkcyi) dla wartości x na odciętą (zmienną niezależną) wynosi $2x$ t. zn. jest różna dla różnych punktów. Dla $x = 0$ wynosi ta szybkość $2 . 0 = 0$ czyli tu styczną do krzywej jest oś x; dla $x = 0{\cdot}5$ jest szybkość równa $2 . 0{\cdot}5 = 1$ czyli styczna tworzy kąt 45^0 z osią x itd.; dla $x = 0{\cdot}5$ rośnie funkcya (rzędna) powolniej niż dla $x = 1$.

Szybkość przyrastania funkcyi (wynosząca tu $2x$) jest znów funkcyą zmiennej x — nazwano ją *funkcyą pochodną* czyli krótko *pochodną*, bo pochodzi z danej funkcyi, kiedy dana funkcya (tu $y = x^2$) nazywa się *pierwotną*. A więc przez (funkcyę) pochodną funkcyi danej (pierwotnej) $y = f(x)$ rozumiemy granicę ułamka

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla $h = 0$ (o ile taka granica istnieje).

Prz. 4. Obliczmy pochodną (czyli szybkość przyrastania) funkcyi $y = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 1$. Dla $x = 0$ jest $y = -1$; $x = 5$, $y = 369$; $x = 10$, $y = 3389$ albo kładąc $4x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = f(x)$ mamy $f(0) = -1$, $f(5) = 369$, $f(10) = 3389$ itd. Utwórzmy ułamek:

$$\frac{\{4(x+h)^3 - 7(x+h)^2 + 9(x+h) - 1\} - \{4x^3 - 7x^2 + 9x - 1\}}{h}$$

t. zn. badamy ile razy szybcej przyrasta funkcya, niż zmienna niezależna. Ten ułamek po wyrachowaniu jest równy:

$$12x^2 + 12xh + 4h^2 - 14x - 7h + 9.$$

Mamy teraz obliczyć granicę tego wielomiana dla $h = 0$, uważając x za stałe; otóż jest to funkcya wymierna i całkowita względem zmiennej h, więc jest ciągła, przeto jej granica dla $h = 0$ jest równa wartości tej funkcyi, gdy położymy w niej $h = 0$, a więc granicą będzie:

$$12x^2 - 14x + 9.$$

Pochodną funkcyi $y = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ jest więc funkcya $12x^2 - 14x + 9$.

Tę funkcyę, która jest pochodną funkcyi y, oznaczamy przez y' [czytaj y prim — znaczy y pierwsze]; jest więc:

$$y' = 12x^2 - 14x + 9.$$

Dla $x = 0$ jest $y = -1$, $y' = 9$; dla $x = 1$ jest $y = 5$, $y' = 7$ itd.; ponieważ dla $x = 0$ jest $y' = 9$, a dla $x = 1$ jest $y' = 7$, więc ta funkcya szybcej rośnie przy wartości $x = 0$ niż dla $x = 1$.

Prz. 5. Obliczmy pochodną (szybkość przyrastania) funkcyi $y = \sin x$. Otóż jest

$$\sin(x + h) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

więc

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

co umyślnie napiszemy tak:

$$= \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

uważając tu x za stałe, obliczmy granicę tego wyrażenia dla $h = 0$.

Pierwszy czynnik ma granicę 1 (§ 22 trzeciego rozdziału), drugi jest funkcyą ciągłą dla $h = 0$ i ma więc granicę $\cos x$; okażemy, że iloczyn granic $1 . \cos x$ będzie granicą iloczynu powyższego. Otóż granicą pierwszego czynnika jest liczba 1 t. zn. do każdej dodatniej liczby ε (np. $\varepsilon = 0{\cdot}0000 \ldots . 0001$) mogę znaleść taką dodatnią liczbę d, iż jest:

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} - 1\right| < \varepsilon,$$

gdy tylko jest $|h| < d$; drugi czynnik ma granicę $\cos x$ t. zn. znów, że do każdej liczby dodatniej np. ε istnieje liczba (innej wielkości, bo o innej funkcyi mowa) d_1 [czytaj: d ze skaźnikiem jeden u dołu] taka, iż jest:

$$\left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) - \cos x\right| < \varepsilon,$$

gdy tylko jest $|h| < d_1$. Pierwsza nierówność jest prawdą dla $|h| < d$, druga dla $|h| < d_1$, obie równocześnie są prawdą, gdy będzie i $|h| < d$ i $|h| < d_1$; np. niech ma być $|h| < 0{\cdot}3$ i $|h| < 0{\cdot}08$ — więc jakie musi być $|h|$? nie może wystarczać powiedzenie, że ma być $|h| < 0{\cdot}3$, bo np. $h = 0{\cdot}2$ spełnia nierówność $|h| < 0{\cdot}3$, ale nie spełnia drugiej nierówności $|h| < 0{\cdot}08$, bo jest $0{\cdot}2 > 0{\cdot}08$; gdy h tak obierzemy, iż jest $|h| < 0{\cdot}08$, to obie nierówności są spełnione czyli $|h|$ musi być *mniejsze* od *mniejszej* z liczb $0{\cdot}3$, $0{\cdot}08$ albo ogólnie musi być $|h|$ mniejsze od mniejszej z liczb d, d_1.

A więc gdy jest $|h|$ mniejsza od mniejszej z liczb d, d_1, to jest równocześnie prawdą:

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} - 1\right| < \varepsilon; \quad \left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) - \cos x\right| < \varepsilon.$$

Otóż mogę dalej napisać:

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) - 1.\cos x = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) - 1.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) +$$

$$+1 \, . \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-1 \, . \cos x =$$

$$=\left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}-1\right] . \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)+\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-\cos x\right],$$

ponieważ $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ nigdy co do bezwzględnej wartości nie jest większe od liczby 1, przeto jest

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-1 \, . \cos x\right| < \left|\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}-1\right| +$$

$$+\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-\cos x\right|,$$

a więc jest mniejsze od $\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$, gdy jest $|h|$ mniejsza od mniejszej z liczb d, d_1 czyli granicą iloczynu

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \text{ jest } 1 \, . \cos x = \cos x,$$

jest więc

$$y' = \cos x.$$

Prz. 6. Niech jest $y = \cos x$ i obliczmy pochodną (szybkość przyrastania) tej funkcyi. Mamy więc wyliczyć ułamek:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}.$$

Według wzoru $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ będziemy mieli:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -2\,\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \, . \sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

granicą pierwszego czynnika jest 1 (§. 22.), drugi czynnik, jako funkcya ciągła, ma granicę $\sin x$; znów, jak w prz. 5.

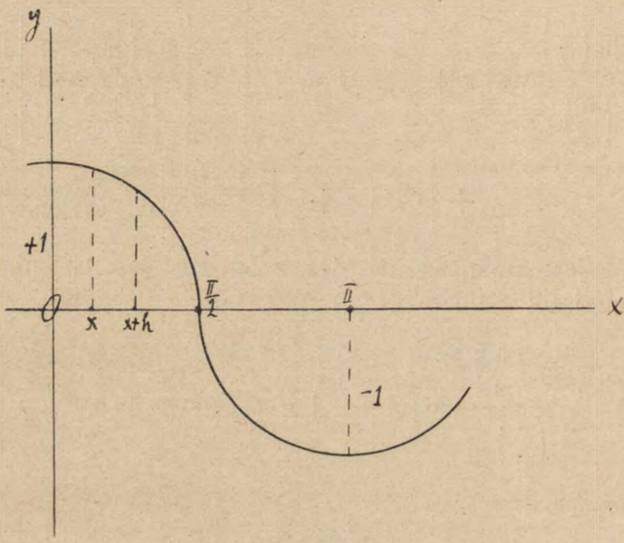

Fig. 21.

można wykazać, że iloczyn ma, jako granicę, iloczyn granic swych czynników t. zn. tu będzie granicą $\sin x$, więc jest

$$y' = -\sin x.$$

Gdy zmiennej x nadawać będziemy wartości od 0 do π, to $\sin x$ ma wartość nie ujemną, przeto pochodna będzie miała wartości nie dodatnie t. j. ujemne lub zero czyli szybkość przyrastania funkcyi jest ujemną lub zerem; wyrysujmy obraz dla funkcyi $y = \cos x$; $x = 0$, $y = 1$; $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$; $x = \pi$, $y = -1$ otrzymamy krzywą, jak na fig. 21.; gdy wezmę dwa punkty na osi x, których odcięte są x, $x+h$, położone między 0 i π, to do nich należne wartości funkcyi są $\cos x$, $\cos(x+h)$ i jest $\cos(x+h)$ mniejsze od $\cos x$, gdy jest $h > 0$ — krzywa się nie wznosi, ale opada, funkcya maleje. Gdy zaś jest $x > \pi$, to funkcya rośnie, szybkość przyrastania krzywej jest dodatnia; otóż gdy jest $x > \pi$ a mniejsze od 2π, to $\sin x$ jest ujemną liczbą, przeto $y' = -\sin x$ jest dodatnie.

Prz. 7. Niech jest

$$y = \frac{x^2+7}{x-5},$$

tu wolno na x nadawać wszelkie liczby, tylko nie pięć; dla $x = 5$ mielibyśmy $\frac{32}{0}$, a ułamka o mianowniku zerowym arytmetyka nie zna. Obliczmy pochodną tej funkcyi; w tym celu tworzymy ułamek:

$$\frac{\frac{(x+h)^2+7}{(x+h)-5} - \frac{x^2+7}{x-5}}{h} = \frac{\frac{\{(x+h)^2+7\}(x-5)-(x+h-5)(x^2+7)}{(x+h-5)(x-5)}}{h} =$$

$$= \frac{x^3+2hx^2+h^2x+7x-5x^2-10hx-5h^2-35-x^3-hx^2+5x^2-7x-7h+35}{h(x+h-5)(x-5)}$$

a że licznik i mianownik można skrócić przez h, więc

$$= \frac{2x^2+hx-10x-5h-x^2-7}{(x+h-5)(x-5)} = \frac{x^2+hx-10x-7-5h}{(x+h-5)(x-5)}.$$

Licznik ostatniego ułamka jest funkcyą wymierną i całkowitą względem zmiennej h, jest więc funkcyą ciągłą, a jako taka, ma granicę dla $h = 0$, która się równa wartości funkcyi dla $h = 0$; granica licznika równa się: $x^2 - 10x - 7$; granicą mianownika jest $(x-5)^2$.

A jaką jest granica ułamka? czy jest nią ułamek z granic licznika i mianownika?. Spróbujemy wykazać ogólnie, że granica ułamka równa się ułamkowi z granic licznika i mianownika, jeżeli tylko granicą mianownika nie jest zero. Niech bowiem ogólnie jest:

$$y = \frac{f(h)}{\varphi(h)},$$

gdzie licznikiem jest pewna funkcya, która ma granicę a dla $h = 0$:

$$\lim_{(h=0)} f(h) = a$$

a mianownik $\varphi(h)$ jest funkcyą, która ma granicę b dla $h = 0$:

$$\lim_{(h=0)} \varphi(h) = b$$

przyczem b może być jakąkolwiek liczbą, byle różną od zera. Do każdej dodatniej liczby ε mogę znaleść taką dodatnią liczbę d, iż jest:

$$|f(h) - a| < \varepsilon, \text{ gdy jest } |h| < d,$$

i podobnie mogę znaleść takie dodatnie d_1, iż jest:

$$|\varphi(h) - b| < \varepsilon, \text{ gdy jest } |h| < d_1,$$

więc dla h mniejszych co do bezwzględnej wartości od mniejszej z liczb d, d_1 jest równocześnie:

$$|f(h) - a| < \varepsilon; \quad |\varphi(h) - b| < \varepsilon.$$

Ponieważ b jest różne od zera (jak wyżej założyliśmy), więc wolno utworzyć ułamek $\frac{a}{b}$ i uważajmy różnicę:

$$\frac{f(h)}{\varphi(h)} - \frac{a}{b} = \frac{f(h)\,b - \varphi(h)\,a}{\varphi(h)\,b} = \frac{f(h)\,b - a\,b + a\,b - \varphi(h)\,a}{\varphi(h).\,b} =$$

$$= \frac{\{f(h) - a\}\,b + a\,\{b - \varphi(h)\}}{\varphi(h)\,b}$$

licznik:

$$\left|\{f(h)-a\}b+a\{b-\varphi(h)\}\right|<$$
$$<|f(h)-a||b|+|a|.|b-\varphi(h)|<(|b|+|a|)\varepsilon,$$

a mianownik nie zbliża się do zera, więc gdy liczby d, d_1 są dość małe, to już mogę znaleść liczbę dodatnią A taką, iż jest $|\varphi(h)|>A$. Cały ułamek jest więc co do bezwzględnej wartości mniejszy od liczby

$$\frac{(|b|+|a|)\varepsilon}{A|b|},$$

bo jeżeli jest

$$|\varphi(h)|>A, \text{ to } \frac{1}{|\varphi(h)|}<\frac{1}{A}.$$

Jak widzimy ułamek można zrobić tak małym co do bezwzględnej wartości, jak chcemy czyli jest

$$\lim_{(h=0)} \frac{f(h)}{\varphi(h)}=\frac{a}{b}.$$

W naszym przykładzie mianownik ma granicę $(x-5)^2$, co mogłoby być zerem dla $x=5$, ale właśnie na x nie wolno nadawać wartości 5; przeto jest:

$$y'=\frac{x^2-10x-7}{(x-5)^2}.$$

Prz. 8. Niech jest $y=\operatorname{tg} x$; jak wiemy jest $\operatorname{tg} x=$ $=\frac{\sin x}{\cos x}$ (§. 8.), a więc jest $y=\frac{\sin x}{\cos x}$; aby obliczyć dla tej funkcyi pochodną, obliczmy ułamek:

$$\frac{\dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{h}=\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

ale jest $\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)$, więc ułamek ma wartość

$$\frac{\sin h}{h \cos x \cos(x+h)} = \frac{\frac{\sin h}{h}}{\cos x \cos(x+h)},$$

licznik ma granicę 1 dla $h = 0$ (§. 22.), mianownik jest funkcyą ciągłą i ma więc granicę dla $h = 0$ równą $\cos x \cos(x+0) = \cos^2 x$, więc według twierdzenia z poprzedzającego przykładu ułamek ma granicę $\frac{1}{\cos^2 x}$ czyli pochodna:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Prz. 9. Niech po prostych szynach (nie zakrzywionych) porusza się wagon; liczmy od początku szyn odległość wagonu np. wagon jest od początku szyn odległy na 158 cm lub 127 cm lub 200 cm — niech ta odległość ogólnie wynosi s cm (od słowa łacińskiego spatium = przestrzeń); liczmy też czas w sekundach od chwili kiedy ruszył — od tej chwili minęła może 2-ga, 2·5 sekundy etc. ogólnie t-ta sekunda (od słowa łacińskiego tempus = czas); otóż s będzie pewną funkcyą zmiennej niezależnej t:

$$s = f(t)$$

np. dla $t = 0''$ jest $s = 158$ cm i stamtąd wagon rusza, dla $t = 1''$ jest $s = 173$ cm, a dla $t = 2''$ jest $s = 140$ cm czyli mógł się w pierwszej sekundzie wagon oddalić od początku szyn, a potem zbliżył się do niego. Jeżeli więc znamy tę funkcyę $f(t)$ (t. zn. wiemy, jaka wartość $f(t)$ należy do końca t-tej sekundy), to znamy też cały ruch, bo wiemy, gdzie wagon był o każdym czasie. Niech np. $s = 2t^2 + 1$; to dla $t = 0''$ jest $s = 1$ cm i stąd wagon wyruszył; dla $t = 1''$ jest $s = 3$ cm; $t = 1\frac{1}{2}''$, $s = 5\frac{1}{2}$ cm; $t = 2''$, $s = 9$ cm; $t = 3''$, $s = 19$ cm itd.; wagon w tym wypadku oddala się od początku szyn i nie cofa się (fig. 22.). W czasie od 2-giej do 3-ciej sekundy przebył wagon drogę $19 - 9 = 10$ cm; gdyby przez tę sekundę pędził jednostajnie, to prędkość

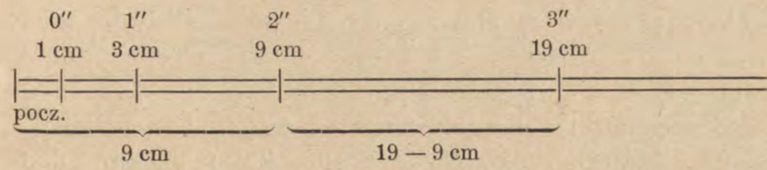

Fig. 22.

jego wynosiłaby 10; niech $t = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}''$, to $s = 2 \cdot (\frac{5}{2})^2 + 1 =$ $= 13\frac{1}{2}$ cm; w ciągu pół sekundy, trwającej od końca 2-giej do końca 2-giej i $\frac{1}{2}$ sekundy, przebiegł wagon drogę: $13\frac{1}{2} - 9 = 4\frac{1}{2}$ cm; gdyby w ciągu tej połowy sekundy pędził jednostajnie, toby prędkość jego wynosiła $\frac{4\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2} \times 2 = 9$ (długość drogi należy podzielić przez ilość sekund, do przebycia tej drogi potrzebnych) — już wypadła inna prędkość. Niech $t = 2\frac{1}{3}''$, to $s = 11\frac{8}{9}$ cm; w ciągu $\frac{1}{3}$-ciej sekundy, trwającej od 2-giej do 2-giej i $\frac{1}{3}$ sekundy przebył drogę $11\frac{8}{9} - 9 = 2\frac{8}{9}$ cm; gdyby wagon się poruszał jednostajnie w ciągu tego czasu, toby prędkość wynosiła $\frac{2\frac{8}{9}}{\frac{1}{3}} = 2\frac{8}{9} \times 3 = 8\frac{2}{3}$, znów inna — dochodzimy do wniosku, że prędkość taka byłaby zależna od tego, jak wielki przeciąg czasu zaczynający się z końcem drugiej sekundy, bierzemy pod uwagę.

Obliczmy ogólnie prędkość ruchu wagonu w chwili kończenia się t-tej sekundy; weźmy czas bardzo króciutki, wynoszący h sekund (np. $h = \frac{1}{3}$ sek.), niech on trwa od końca t-tej sekundy do końca $(t + h)$-tej sekundy; dla chwili t'' jest $s = f(t)$, dla chwili $(t + h)''$ jest $s = f(t + h)$, droga w tym czasie przebyta równa się więc

$$[f(t + h) - f(t)] \text{ cm}.$$

Gdyby to był ruch jednostajny, tobyśmy długość drogi, przebytej od t-tej sekundy do $(t + h)$-tej sekundy, podzielili przez ilość h sekund, który na przebycie drogi upłynął, czyli

$$\frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

byłoby prędkością; ułamek ten nietylko zależy od t ale i od h, jak widzieliśmy w przykładzie; ponieważ jednak ruch jednostajnym nie jest, więc ułamek powyższy nie daje prędkości; tylko im mniejsze jest h, tem lepiej powyższy ułamek się zbliża do liczby, którą uznamy jako prędkość ruchu. Gdybyśmy za prędkość ruchu ten ułamek przyjęli, tobyśmy milczkiem ruch od t-tej sekundy do $(t+h)$-tej sekundy zastąpili w myśli ruchem jednostajnym o prędkości równej ułamkowi powyższemu. Widać, że prędkością ruchu nazwać możemy granicę tego ułamka dla $h=0$, gdy t uważamy za stałe czyli prędkością ruchu jest pochodna s' funkcyi s.

Gdy jest $s=2t^2+1$, to jest:

$$\frac{\{2(t+h)^2+1\}-\{2t^2+1\}}{h}=4t+2h$$

a stąd w granicy dla $h=0$ jest:

$$s'=4t.$$

Dla $t=1$ sek. jest $s'=4$, dla $t=2''$ jest już $s'=8$ — większa prędkość niż przedtem, dla $t=3''$ jest $s'=12$ itd. — co sekundę prędkość zwiększa się o tę samą ilość (4). Gdyby nagle wagon w pewnej chwili przestał poruszać się ruchem coraz to szybszym (ruchem przyspieszonym), a poruszał się od tej chwili ruchem jednostajnym, toby musiał się poruszać nadal z prędkością s', jaką miał w tej chwili, o której była mowa.

W tym przykładzie widać, że prędkość ruchu jest zmienna, że im dłużej wagon się porusza, to tem prędzej pędzi; jego prędkość jest coraz to większa czyli wagon przyspiesza ruch. Co to więc jest przyspieszenie ruchu? Wagon przyspiesza ruch t. zn. prędkość swą zwiększa i im prędzej zwiększa się prędkość, tem większe będzie przyspieszenie; a więc powiemy: przyspieszeniem jest prędkość, z jaką się zmienia prędkość ruchu czyli pochodna prędkości ruchu; a że prędkość ruchu jest pochodną funkcyi s, więc przyspieszenie jest pochodną pochodnej funkcyi s czyli, jak się mówi, jest drugą pochodną funkcyi s i oznaczamy ją znakiem s″ i dlatego też mówimy, że s′ jest *pierwszą pochodną* funkcyi s.

W naszym przypadku jest $s' = 4t$; aby obliczyć przyspieszenie, obliczmy

$$\frac{4(t+h) - 4t}{h} = 4$$

i granicą dla $h = 0$ musi być znów 4, bo się tu nic nie zmienia; przyspieszenie ruchu wynosi 4, jest więc stałe — prędkość więc co sekundę jednostajnie się zwiększa o 4 i dlatego ruch ten zowiemy *jednostajnie przyspieszonym*.

Prz. 10. Weźmy inny przykład; niech $s = 20t + 7$; dla $t = 0$ jest $s = 7$; $t = 1$, $s = 27$; $t = 2$, $s = 47$ itd. Aby obliczyć pochodną s′, utwórzmy ułamek

$$\frac{\{20(t+h)+7\} - \{20t+7\}}{h} = 20$$

i granicą dla $h = 0$ jest liczba 20, więc $s' = 20$. Obliczmy drugą pochodną s″ t. j. pochodną pochodnej; utwórzmy więc ułamek:

$$\frac{20 - 20}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

jego granicą dla $h = 0$ jest więc liczba 0. Przyspieszenie wynosi zero czyli ruch nie ma przyspieszenia, ma stałą prędkość równą 20 — ruch jest jednostajny.

Nadto widzimy, że pochodna stałej jest równa zeru.

Prz. 11. Weźmy funkcyę $y = \sin x$; jej pierwsza pochodna według przykł. z obecnego rozdziału jest

$$y' = \cos x$$

stąd druga pochodna (według prz. 6.) jest $y'' = -\sin x$; możemy szukać dalej pochodnej drugiej pochodnej czyli trzeciej pochodnej; weźmy ułamek:

$$\frac{[-\sin(x+h)]-[-\sin x]}{h} = \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h} =$$

$$= \frac{2\sin\left(-\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

z czego widzimy, że będzie granicą dla $h = 0$ liczba $(-\cos x)$; a że trzecią pochodną oznaczamy przez y''', więc jest $y''' = -\cos x$.

Podobnie łatwo stwierdzić, że czwarta pochodna, którą oznaczamy przez y^{IV}, będzie $y^{IV} = \sin x$.

Prz. 12. Niech będą szyny (fig. 23.), a na nich mały wóz; odległość w metrach jego od środka szyn A oznaczymy

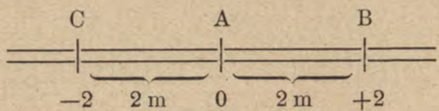

Fig. 23.

przez s, przyczem ta liczba będzie dodatnią, gdy wózek znajduje się po prawej stronie środka A, a będzie liczbą ujemną, gdy wózek znajduje się po lewej stronie środka A; czas będziemy liczyli w sekundach od chwili, kiedy wózek przechodzi przez A z lewej strony na prawą.

Wózek niech się tak porusza, iż jest $s = 2\sin(3t)$, gdzie t jest ilością sekund od chwili dopieroco opisanej.

Otóż tak się wysłowiliśmy, że możemy pytać się o to, gdzie był wózek o chwili $t = -1''$ t. zn. na sekundę *przed* chwilą $0''$, albo o chwili $t = -2''$ t. j. na dwie sekundy *przed* chwilą $0''$ itd.

Dla $t = 0$ jest $s = 0$ czyli wózek znajduje się w punkcie A; dla rosnącego t rośnie s, aż zmienna t przybierze wartość $3t = \frac{\pi}{2}$ czyli $t = \frac{\pi}{6}$; wtedy jest $s = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

wózek znajduje się w miejscu B odległem na 2 m na prawo od punktu A; od miejsca B cofa się wózek ku A; gdy jest $3t = \pi$ czyli $t = \frac{\pi}{3}$, to wózek znów jest w środku A; gdy zmienna t bardziej rośnie, to sinus staje się ujemne czyli wózek idzie na lewo poza punkt A aż, gdy $3t = \frac{3\pi}{2}$ czyli $t = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$; wtedy jest $s = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$ czyli wózek jest w miejscu C, odległem o 2 m na lewo od punktu A; odtąd s jest nadal ujemne, ale maleje co do bezwzględnej wartości czyli odtąd wózek zbliża się ku punktowi A, który osiąga w chwili $3t = 2\pi$ czyli $t = \frac{2\pi}{3}$, jest bowiem $s = 2\sin(2\pi) = 0$. Odtąd wózek idzie na prawo od punktu A i jak widać (z powodu własności funkcyi sinus), cały ruch się powtórzy od A ku B, od B ku A, od A ku C, od C ku A i znów to samo. Powiadamy, że ruch jest peryodyczny i powtarza się co okres czasu $\frac{2\pi}{3}$; największe oddalenie wózka od środka A wynosi obecnie 2 m i nazywa się obszernością drgania — a ruch wózka ruchem drgającym, bo podobny ruch wykonują ciała drgające.

Jaka jest prędkość ruchu? Obliczmy więc (jak wiemy z przykł. 9.) pochodną s'; utwórzmy więc najpierw ułamek:

$$\frac{2\sin[3(t+h)] - 2\sin 3t}{h} = 2 . \frac{\sin(3t+3h) - \sin 3t}{h} =$$

$$= 2 . \frac{2\sin\left(\frac{3t+3h-3t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t+3h+3t}{2}\right)}{h} =$$

$$= 4 \frac{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\cos\left(3t+\frac{3h}{2}\right)}{h},$$

co napiszemy tak:

$$= 6 \frac{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}{\left(\frac{3h}{2}\right)} . \cos\left(3t + \frac{3h}{2}\right),$$

więc w granicy dla $h = 0$ mamy:

$$s' = 6 \cos 3t.$$

W chwili $t = 0$ w miejscu A ma wózek prędkość $s' = 6 \cos(3 . 0) = 6$; w punkcie B t. j. o chwili $t = \frac{\pi}{6}$ jest $s' = 6 \cos\left(3 . \frac{\pi}{6}\right) = 0$ — prędkość wózka równa się zeru, co można przewidzieć, bo odtąd wózek się cofa ku środkowi A. Napowrót w punkcie A ma wózek prędkość $s' = 2 \cos\left(3 . \frac{\pi}{3}\right) = -2$ — prędkość jest więc ujemna.

Zapytajmy, coby to znaczyło. Wyobraźmy sobie, że wózek znajduje się gdziekolwiek na szynach i że ma prędkość np. 1·5; czy tyle podać wystarcza? czy znamy już ruch wózka w tej chwili, o której mowa? czyż nie zapytamy, czy wózek pędzi na lewo, czy na prawo od punktu A? Zamiast mówić: »wózek pędzi na prawo z prędkością 1·5« powiemy: »wózek pędzi z prędkością + 1·5«; zamiast mówić: »wózek pędzi na lewo z prędkością 1·5« powiemy: »wózek pędzi z prędkością — 1·5«.

Jeżeli się więc umówimy nadawać znak + lub — prędkości [czytelnik studyujący mechanikę matematyczną zauważy że obecna umowa jest szczególnym przypadkiem znacznie ogólniejszej umowy], zrozumiemy, że wózek, znajdujący się w punkcie A i pędzący na lewo, ma prędkość — 2. W miejscu C jest $s' = 6 \cos\left(3 . \frac{\pi}{2}\right) = 0$ czyli prędkość jest zerem, bo odtąd wózek zmienia kierunek i idzie na prawo itd.

Jakie jest przyspieszenie ruchu? Trzeba obliczyć drugą pochodną s'' czyli pochodną pochodnej s'; a że jest $s' = 6\cos 3t$, więc utwórzmy ułamek:

$$\frac{6\cos[3(t+h)] - 6\cos 3t}{h} = 6 . \frac{\cos(3t+3h) - \cos 3t}{h} =$$

$$= 6 . \frac{-2\sin\left(\frac{3h}{2}\right)\sin\left(3t+\frac{3h}{2}\right)}{h} = -18 . \frac{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)}{\left(\frac{3h}{2}\right)} . \sin\left(3t+\frac{3h}{2}\right),$$

przeto granicą dla $h = 0$ będzie:

$$s'' = -18\sin 3t.$$

Dla $t = 0$ w punkcie A jest $s'' = 0$ czyli nie ma przyspieszenia, prędkość ruchu w tem miejscu bardzo powoli się zmienia. Dla $t = \frac{\pi}{6}$ w punkcie B jest $s'' = -18\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -18$. Co to znaczy, że przyspieszenie jest ujemne? Ponieważ przyspieszenie jest pochodną pochodnej pierwszej, więc będzie dodatnie, gdy pochodna pierwsza nie maleje, a jest ujemne, gdy pierwsza pochodna nie rośnie. Otóż od A do B prędkość malała do zera, a od B ku A maleje dalej, bo przyjmuje wartości ujemne; a więc wózek przyspiesza swój ruch na lewo. Dla $t = \frac{\pi}{3}$ w punkcie A jest $s'' = -18\sin\pi = 0$; dla $t = \frac{\pi}{2}$ w punkcie C jest $s'' = -18\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 18$ czyli prędkość rośnie, bo w punkcie C była zerem, a odtąd jest dodatnią czyli ruch będzie przyspieszony na prawo.

§. 24. Otóż co to jest **różniczkowanie?** Słowo różniczkowanie pochodzi od dawnego, nieco humorystycznie brzmiącego słowa: różniczka. *Różniczką zmiennej niezależnej x* dla funkcyi $y = f(x)$ jest dowolny przyrost h, który ma granicę zero; oznacza się go także znaczkiem dx, gdzie litera *d* pochodzi od słowa łacińskiego differentia (różnica), bo $h = dx$ jest różnicą dwóch wartości na zmienną niezależną, wartości x i $(x + h)$. (Niechaj czytelnik dx nie uważa za iloczyn $d \times x$). *Różniczką funkcyi y*, którą oznaczymy znów znakiem dy, nazywamy iloczyn pochodnej funkcyi i różniczki zmiennej niezależnej x:

$$dy = y' dx$$

tak, iż stąd jest:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

t. zn. pochodna funkcyi y równa się ilorazowi różniczki funkcyi y przez różniczkę zmiennej niezależnej x i dlatego na pochodną funkcyi y używamy znaku $\frac{dy}{dx}$ zamiast y'. Wobec tego jest:

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \text{ itd.}$$

Otóż przez *różniczkowanie* funkcyi rozumiemy obliczenie jej pochodnej pierwszej; »zróżniczkujmy funkcyę po raz drugi« znaczy »obliczmy jej drugą pochodną« itd.

ROZDZIAŁ V.

O ciągach.

§. 25. **Przykład I.** Weźmy na prostej liczbowej (§. 1.) punkt A, który jest obrazem geometrycznym liczby 0, drugi punkt B, będący obrazem liczby $\frac{1}{2}$, trzeci C, będący obrazem liczby $\frac{2}{3}$, czwarty D, będący obrazem liczby $\frac{3}{4}$, piąty E, będący obrazem liczby $\frac{4}{5}$ itd.

Wymieniamy pewne punkty A, B, C, D, E itd. w pewnym porządku, wymieniamy też liczby 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ itd. w pewnym porządku czyli powiadamy, którą liczbę chcemy uważać jako pierwszą, drugą, trzecią itd.; krótko będziemy mówili, że liczby 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ itd. tworzą *ciąg liczb*, że punkty A, B, C, D itd. tworzą na prostej liczbowej *ciąg punktów* albo mówić będziemy, że jest dany ciąg liczb lub ciąg punktów t. zn. wiemy, która liczba (wzgl. punkt) jest pierwszą czyli na pierwszem miejscu, a która jest drugą, trzecią, na czwartem miejscu itd. Punkty czy liczby, które tworzą ciąg, będziemy nazywali wyrazami ciągu. Poznaliśmy tu ciąg liczb i punktów, podobnie mówić możemy o ciągu brył mineralogicznych, trójkątów, przyrządów fizycznych itd.

Np. ciąg liczb:

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{10}{11},\ \tfrac{15}{16},\ \tfrac{21}{22},$$

składa się ze siedmiu wyrazów; ciąg taki nazywamy ciągiem, złożonym ze skończonej ilości wyrazów albo krótko ciągiem *skończonym*. Ciąg liczb:

$$-10,\ -5,\ -100,\ 0,\ 1000$$

jest skończony. Ale są ciągi, których wyrazów mogę tyle wymienić, ile mi się podoba, a wszystkich nie wymienię np. ciąg liczb:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{7}{8},\ldots.$$

(dajemy w tym celu kropki), ale wtedy musimy oczywiście wiedzieć, jaki jest wyraz na dziesiątem miejscu, jedenastem,... pięćdziesiątem... setnem... itd. miejscu, wogóle na n-tem miejscu, gdzie za liczbę n mogę podstawić liczbę 1, 2, 3, 4,... 10,... 50... 100... 1,000000... wogóle jakąkolwiek dodatnią liczbę całkowitą. Taki ciąg nazywamy *nieskończonym*.

W podanym przykładzie pierwszym wyrazem jest liczba $\frac{1}{2}$, drugim $\frac{2}{3}$, trzecim $\frac{3}{4} = \dfrac{3}{3+1}$, czwartym $\dfrac{4}{4+1}$, piątym $\dfrac{5}{5+1}\ldots$ dwudziestym $\dfrac{20}{20+1}\ldots$ setnym $\dfrac{100}{100+1}\ldots.$ ogólnie n-tym wyrazem jest liczba $\dfrac{n}{n+1}$. Na 283-ciem miejscu będzie liczba $\frac{283}{284}$, na tysiącznem $\frac{1000}{1001}$ itd. »Nieskończony ciąg liczb jest dany« t. zn. że muszę mieć dane prawo, receptę, przepis, według którego mogę obliczyć, jaka liczba jest na tem lub owem miejscu. W obecnym przykładzie widzimy, że na n-tem miejscu jest liczba $\dfrac{n}{n+1}$ [1]).

Prz. 2. Uważajmy na prostej liczbowej ciąg punktów nieskończony (fig. 24):

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots,\ A_n,\ldots.$$

---

[1]) Odtąd będziemy się zajmowali tylko ciągami nieskończonymi.

(czytaj A pierwsze, A drugie, A trzecie.... An-te....), które mają być obrazami geometrycznymi nieskończonego ciągu liczb:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

tak, iż punkt A_n jest obrazem liczby $\frac{1}{n}$. Jeżeli punkt O jest obrazem liczby 0, to widać, że żaden z punktów A_1, A_2, $A_3, \ldots$ nie leży poza odcinkiem OA_1 i że tych punktów

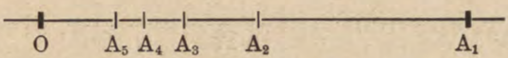

Fig. 24.

ku punktowi O coraz to gęściej, ale żaden z punktów A_1, A_2, $A_3, \ldots$ nie jest punktem 0, bo nie możemy znaleść tak wielkiej liczby na *n*, aby było $\frac{1}{n} = 0$; odcinki OA_1, OA_2, $OA_3, \ldots OA_n, \ldots$ są coraz to krótsze i wynoszą:

OA_1	ma	długość	1
OA_2	»	»	$\frac{1}{2}$
OA_3	»	»	$\frac{1}{3}$
—	—	—	—
OA_n	ma	długość	$\frac{1}{n}$
—	—	—	—

i im dalszy wyraz ciągu liczb wezmę, to tem mniejszy będzie i coraz to bliższy zeru to znaczy, że, gdybym pomyślał sobie liczbę dodatnią ε, nie wiedzieć jak małą, np. $\varepsilon = 0{\cdot}00.000,000.381$ to zawsze znajdę takie miejsce w ciągu (tu miejsce 100.000,000.381-wsze) iż od tego miejsca *wszystkie* dalej stojące wyrazy (a więc na 100.000,000.382-giem, 100.000,000.383-ciem itd. miejscu) są mniejsze od ε. Wyrazy ciągu liczb zbliżają się coraz bardziej do zera czyli powiemy, że ciąg dany ma *granicę* i granicą jego jest liczba zero.

Oznaczmy pierwszy wyraz ciągu przez w_1, drugi przez w_2, trzeci przez w_3 itd., *n*-ty przez w_n; więc u nas:

$$w_1 = 1, \; w_2 = \frac{1}{2}, \; w_3 = \frac{1}{3}, \ldots, \; w_n = \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

Prz. 3. Uważajmy ciąg:

$$-0{\cdot}1, \; -0{\cdot}01, \; -0{\cdot}001, \; -0{\cdot}0001, \ldots\ldots$$

otóż tu jest: $w_1 = -0{\cdot}1 = -\frac{1}{10^1}$, $w_2 = -0{\cdot}01 = -\frac{1}{100} = -\frac{1}{10^2}$, $w_3 = -0{\cdot}001 = -\frac{1}{1000} = -\frac{1}{10^3}$, $w_4 = -0{\cdot}0001 = -\frac{1}{10000} = -\frac{1}{10^4}, \ldots, \; w_n = -\frac{1}{10^n}, \ldots\ldots$

Wyrazy tego ciągu rosną i coraz bardziej zbliżają się do zera tak, iż gdybym wziął dowolną dodatnią liczbę ε np. $\varepsilon = 0{\cdot}00041$, to mogę znaleść takie miejsce N-te (tu $N = 3$), iż wszystkie wyrazy stojące na $(N+1)$-wszem (tu 4-tem), $(N+2)$-giem (tu 5-tem) itd. miejscu są mniejsze od ε co do bezwzględnej wartości.

Ten ciąg ma granicę zero.

Przez[1] $\lim\limits_{(n=\infty)} w_n$ rozumiemy granicę ciągu, którego n-tym wyrazem jest w_n. A więc jest:

$$\lim_{(n=\infty)} \left(\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad \text{(prz. 2)}$$

$$\lim_{(n=\infty)} \left(-\frac{1}{10^n}\right) = 0. \qquad \text{(prz. 3)}$$

Prz. 4. Uważajmy ciąg nieskończony liczb:

$$\tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2}, \; \tfrac{1}{4}, \; -\tfrac{1}{4}, \; \tfrac{1}{8}, \; -\tfrac{1}{8}, \ldots\ldots$$

---

[1]) znak ∞ powiada, że n rośnie nieograniczenie.

Wyrazy, stojące na nieparzystych miejscach, są:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4}=(\tfrac{1}{2})^2,\ \tfrac{1}{8}=(\tfrac{1}{2})^3,\ldots\ldots$$

a więc na n-tem nieparzystem miejscu jest $(\frac{1}{2})^n$. Na parzystych miejscach są wyrazy:

$$-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{8},\ldots\ldots$$

a więc na n-tem parzystem miejscu jest wyraz $-(\frac{1}{2})^n$.

Na 25-tem miejscu w danym ciągu jest więc wyraz $(\frac{1}{2})^{13}$, bo 25-ty wyraz jest 13-tym wyrazem nieparzystym; na 18-tem miejscu jest wyraz $-(\frac{1}{2})^9$, bo liczba 18 jest 9-tą liczbą parzystą.

Wyrazy danego ciągu są coraz to mniejsze co do bezwzględnej wartości i zbliżają się coraz to więcej do zera. Do każdej dodatniej liczby ε możemy znaleść takie miejsce N-te, iż gdy miejsce n-te jest tylko dalsze od N-tego ($n > N$) to już jest:

$$|w_n| < \varepsilon,$$

a więc

$$\lim_{(n=\infty)} w_n = 0.$$

Często zamiast mówić, że ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots.$ ma granicę zero, mówi się, że w_n staje się *nieskończenie małą.*

W pierwszej połowie XIX wieku dużo rozprawiano o nieskończenie małych, choć ich nie określano. Czytelnik niech się wystrzega przed tem, aby innego znaczenia nie nadawał słowom »nieskończenie mały«, niż to znaczenie, które podaliśmy.

Możemy powiedzieć, że $\frac{1}{n}$ staje się nieskończenie małe (czyli może być tak małe, jak nam się podoba); to samo można powiedzieć o liczbie $\frac{1}{10^n}$ lub $\left(-\frac{1}{10^n}\right)$, gdy n rośnie nieograniczenie.

Ogólnie *ciąg*: $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ *ma granicę zero*, jeżeli do każdej dowolnej dodatniej liczby ε można znaleść takie miejsce N, iż dla wszystkich miejsc $n > N$ (dalszych od N-tego) jest:

$$|w_n| < \varepsilon.$$

§. 26. **Prz. 5.** Uważajmy na prostej liczbowej punkty (fig. 25):

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$$

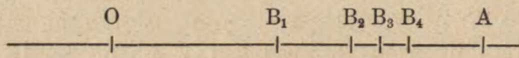

Fig. 25.

które są obrazami liczb

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1}$$

tak, iż punkt B_n jest obrazem geometrycznym liczby $\frac{n}{n+1}$; niech punkt O jest obrazem liczby 0, punkt A obrazem liczby 1. Poza odcinek OA nie wychodzi żaden z punktów:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots.$$

ale widać, że ich coraz gęściej ku punktowi A; albowiem odcinki B_1A, B_2A, $B_3A, \ldots, B_nA, \ldots$ są coraz krótsze i mianowicie:

odcinek B_1A ma długość $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
» B_2A » » $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
» B_3A » » $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
— — — — — — — — — — —
» B_nA » » $1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$
— — — — — — — — — — —

a więc długości odcinków stają się nieskończenie małe.

Uważajmy drugi ciąg liczb:

$$\tfrac{1}{2} - 1,\ \tfrac{2}{3} - 1,\ \tfrac{3}{4} - 1,\ \tfrac{4}{5} - 1, \ldots, \frac{n}{n+1} - 1,$$

powstały z danego w ten sposób, że od każdego wyrazu danego ciągu odjęliśmy liczbę 1. Wyrachowując, otrzymujemy jako drugi ciąg liczby:

$$-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{5},\ldots,\ -\frac{1}{n},\ldots.$$

ten ciąg, jak wiemy, ma granicę zero.

Powiemy, że dany ciąg:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{5},\ldots,\ \frac{n}{n+1},\ldots.$$

ma granicę 1:

$$\lim_{(n=\infty)}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1,$$

czyli zbliżają się coraz bardziej do liczby 1.

Prz. 6. Uważajmy ciąg nieskończony:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,\ n,\ldots.$$

wyrazy rosną i nie można znaleść liczby, aby nowy ciąg powstały w ten sposób, że od każdego wyrazu odejmiemy tę samą liczbę, miał granicę zero.

Weźmy bowiem liczbę dość wielką np. 1,000.000, to przecież w nowym ciągu będą wyrazy:

$$1{,}000.008 - 1{,}000.000 = 8,\ldots.$$
$$100.000{,}000.000 - 1{,}000.000 = 99.999{,}000.000\ldots.$$

i jak widać, wyrazy tego ciągu nie zbliżają się do zera.

Prz. 7. Uważajmy ciąg:

$$1,\ 1\tfrac{1}{2},\ 2,\ 2,\ 2,\ldots.$$

przyczem wszystkie wyrazy, od 3-go począwszy, są równe liczbie 2; utwórzmy drugi ciąg:

$$1-2,\ 1\tfrac{1}{2}-2,\ 2-2,\ 2-2,\ 2-2,\ldots.$$

czyli ciąg:

$$-1,\ -\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ldots.$$

w którym wszystkie wyrazy, od 3-go począwszy, są równe zeru.

Do każdej dodatniej liczby ε można znaleść takie miejsce $N = 2$, iż każdy wyraz tego nowego ciągu, stojący na miejscu $N + 1 = 3$-ciem, $N + 2 = 4$-tem,.... jest co do bezwzględnej wartości mniejszy od ε, bo jest zerem; ciąg ten ma więc granicę zero, a dany ma granicę 2.

Prz. 8. Uważajmy ciąg:

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots. 1, 2, 1, 2, \ldots.$$

tak, iż na parzystem miejscu jest liczba 2, na nieparzystem jest liczba 1. Gdybyśmy utworzyli ciąg:

$$1 - 1,\ 2 - 1,\ 1 - 1, \ldots.$$

czyli ciąg:

$$0, 1, 0, \ldots.$$

albo ciąg:

$$1 - 2,\ 2 - 2,\ 1 - 2, \ldots.$$

czyli ciąg:

$$-1, 0, -1, \ldots.$$

to widać, że żaden z nich nie ma granicy zero; ani liczba 1 ani liczba 2 nie może być granicą danego ciągu, ale też i żadna inna liczba granicą być nie może. Mamy już drugi przykład (prz. 6), że ciąg może być pozbawiony granicy.

Prz. 9. Uważajmy ciąg nieskończony:

$$w_1 = \frac{7^1}{1} = 7;\quad w_2 = \frac{7^2}{1.2} = 24\tfrac{1}{2},\quad w_3 = \frac{7^3}{1.\,2.\,3} = 57\tfrac{1}{6},$$

$$w_4 = \frac{7^4}{1.2.3.4}, \ldots.\quad w_{10} = \frac{7^{10}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} \ldots\ldots$$

$$\ldots.. w_n = \frac{7^n}{1.2.3\ldots.n} \ldots..$$

Okażemy, że ciąg ten ma granicę zero, czegoby się czytelnik nie spodziewał może wobec wyrachowanych trzech pierwszych wyrazów; oczywiście będzie tak, że z początku wyrazy rosną, a potem maleją do zera; właśnie to wykażemy.

Widać, że jest

$$w_2 = w_1 \cdot \tfrac{7}{2};\ w_3 = w_2 \cdot \tfrac{7}{3};\ w_4 = w_3 \cdot \tfrac{7}{4};\ w_5 = w_4 \cdot \tfrac{7}{5};$$
$$w_6 = w_5 \cdot \tfrac{7}{6};\ w_7 = w_6 \cdot \tfrac{7}{7} = w_6;\ w_8 = w_7 \cdot \tfrac{7}{8}$$

czyli jest

$$w_2 > w_1;\ w_3 > w_2;\ w_4 > w_3;\ w_5 > w_4;\ w_6 > w_5;$$

bo ułamki $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{6}$ są niewłaściwe; wyraz w_7 jest równy wyrazowi w_6 i to są wyrazy największe i jest, jak łatwo wyrachować:

$$w_7 = w_6 = 163\tfrac{289}{720},$$

ale wyraz w_8 jest już mniejszy od wyrazu w_7, bo $\frac{7}{8}$ jest ułamkiem właściwym. Dalej jest:

$$w_9 = w_8 \cdot \tfrac{7}{9} = w_7 \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{7}{9}$$

otóż jest $\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$, więc jest

$$\tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{7}{9} < \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{7}{8} = (\tfrac{7}{8})^2$$

a stąd jest

$$w_9 < w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^2;$$

podobnie widać, że jest:

$$w_{10} = w_9 \cdot \tfrac{7}{10};\ w_{11} = w_{10} \cdot \tfrac{7}{11};\ w_{12} = w_{11} \cdot \tfrac{7}{12}, \ldots$$

a że jest

$$\tfrac{7}{10} < \tfrac{7}{8},\ \tfrac{7}{11} < \tfrac{7}{8},\ \tfrac{7}{12} < \tfrac{7}{8} \ldots\ldots$$

więc jest:

$$w_{10} < w_9 \cdot \tfrac{7}{8} < w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^2 \cdot \tfrac{7}{8} = w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^3;$$
$$w_{11} < w_{10} \cdot \tfrac{7}{8} < w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^3 \cdot \tfrac{7}{8} = w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^4;$$
$$w_{12} < w_{11} \cdot \tfrac{7}{8} < w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^4 \cdot \tfrac{7}{8} = w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^5 \ldots\ldots$$

czyli jest:

$w_9 < w_7 \cdot (\frac{7}{8})^2$	wykładnik	$2 = 9 - 7$
$w_{10} < w_7 \cdot (\frac{7}{8})^3$	»	$3 = 10 - 7$
$w_{11} < w_7 \cdot (\frac{7}{8})^4$	»	$4 = 11 - 7$
$w_{12} < w_7 \cdot (\frac{7}{8})^5$	»	$5 = 12 - 7$

przeto ogólnie jest:

$$w_n < w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^{n-7}.$$

Wiadomo dalej, że im do wyższej potęgi podniesiemy ułamek właściwy ($\frac{7}{8}$), tem mniejszy się staje ułamek i można go uczynić tak małem, jak się nam podoba, przez odpowiednio wielki wykładnik potęgowy n.

Do każdej liczby dodatniej ε obierzemy takie N, aby dla liczb $n > N$ było:

$$w_7 \cdot (\tfrac{7}{8})^{n-7} < \varepsilon,$$

a wtedy tembardziej jest $w_n < \varepsilon$ dla $n > N$, a że liczba w_n nie jest ujemna, więc jest $\lim\limits_{(n=\infty)} w_n = 0$, co chcieliśmy udowodnić.

Ciąg nieskończony:

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4, \ldots\ldots,\ w_n, \ldots\ldots$$

ma granicę a t. zn., że ciąg:

$$w_1 - a,\ w_2 - a,\ w_3 - a, \ldots\ldots,\ w_n - a, \ldots\ldots$$

ma granicę zero; przez $\lim\limits_{(n=\infty)} w_n$ rozumiemy granicę ciągu, którego n-tym wyrazem jest w_n, więc, jeżeli granicą jest liczba a, to napiszemy:

$$\lim_{(n=\infty)} w_n = a.$$

Prz. 10. Uważajmy ciąg dodatnich ułamków dziesiętnych:

6·3, 6·30, 6·306, 6·3063, 6·30630, 6·306306, 6·3063063,.......

w którym drugi wyraz powstał z pierwszego przez doczepienie (po prawej stronie) cyfry 0 do niezmienionego pierwszego wyrazu; trzeci wyraz powstał z drugiego przez dalsze doczepienie (po prawej stronie) cyfry 6 itd. Każdy wyraz powstaje więc z poprzedniego przez doczepienie jednej cyfry z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 po prawej stronie do niezmienionego wyrazu poprzedniego. Wyraz piąty jest równy czwartemu, ale szósty jest większy od piątego itd. czyli wyrazy rosną lub zostają tej samej wielkości, ale nigdy nie maleją. Ogólny przepis będzie polegał na tem, iż grupa cyfr 306 ma się stale powtarzać po sobie czyli, jak się mówi, 306 ma być *peryodem*, co oznaczamy znakami $6\cdot\dot{3}0\dot{6}$; trzynastym wyrazem ciągu będzie liczba:

$$6\cdot\underbrace{\underbrace{306}_{1}\,\underbrace{306}_{2}\,\underbrace{306}_{3}\,\underbrace{306}_{4}}_{4\times3=12}\,\underbrace{3}_{+1=13,}$$

trzydziestym piątym wyrazem jest liczba:

$$6\cdot\underbrace{\underbrace{306}_{1}\,\underbrace{306}_{2}\,\underbrace{306}_{3}\ldots\ldots\underbrace{306}_{11}}_{11\times3=33}\,\underbrace{30}_{+2=35,}$$

a sto czterdziestym czwartym wyrazem będzie liczba:

$$6\cdot\underbrace{\underbrace{306}_{1}\,\underbrace{306}_{2}\,\underbrace{306}_{3}\ldots\ldots\underbrace{306}_{47}\,\underbrace{306}_{48}}_{48\times3=144.}$$

Wiadomo z arytmetyki, że dany ciąg liczb jest ciągiem przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar na jedno, dwa, trzy, cztery,.... sto.... miejsc dziesiętnych pewnej liczby czyli coraz bardziej się zbliżają do pewnej liczby, łatwej do obliczenia, a mianowicie do liczby $6\frac{306}{999}=6\frac{34}{111}$; dany ciąg zawiera największy ułamek dziesiętny na jedno miejsce dziesiętne, a mniejszy od liczby $6\frac{34}{111}$, największy ułamek dzies. na dwa miejsca dziesiętne a mniejszy od liczby $6\frac{34}{111}$, największy ułamek dziesiętny na trzy miejsca dzies. a mniejszy od liczby $6\frac{34}{111}$ itd., jest bowiem:

$6\cdot3 < 6\frac{34}{111} < 6\cdot4$, bo jest $\frac{3}{10}=\frac{333}{1110}$, $\frac{34}{111}=\frac{340}{1110}$, $\frac{4}{10}=\frac{444}{1110}$;
$6\cdot30 < 6\frac{34}{111} < 6\cdot31$, bo jest $\frac{30}{100}=\frac{3330}{11100}$, $\frac{34}{111}=\frac{3400}{11100}$;

$$\frac{31}{100}=\frac{3441}{11100};$$

podobnie jest:

$$6\cdot306 < 6\frac{34}{111} < 6\cdot307;\ 6\cdot3063 < 6\frac{34}{111} < 6\cdot3064\ldots..$$

Stąd jest:

$$6\tfrac{34}{111} - 6{\cdot}3 < 6{\cdot}4 - 6{\cdot}3 = 0{\cdot}1$$
$$6\tfrac{34}{111} - 6{\cdot}30 < 6{\cdot}31 - 6{\cdot}30 = 0{\cdot}01$$
$$6\tfrac{34}{111} - 6{\cdot}306 < 6{\cdot}307 - 6{\cdot}306 = 0{\cdot}001$$
$$6\tfrac{34}{111} - 6{\cdot}3063 < 6{\cdot}3064 - 6{\cdot}3063 = 0{\cdot}0001 \text{ itd.}$$

czyli dany ciąg przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar liczby $6\tfrac{34}{111}$ ma za granicę tę liczbę $6\tfrac{34}{111}$, bo ciąg nowy:

$$6{\cdot}3 - 6\tfrac{34}{111},\ 6{\cdot}30 - 6\tfrac{34}{111},\ 6{\cdot}306 - 6\tfrac{34}{111}, \ldots..$$

ma co do bezwzględnej wartości wyrazy mniejsze od wyrazów ciągu trzeciego:

$$0{\cdot}1,\ 0{\cdot}01,\ 0{\cdot}001, \ldots..$$

który ma granicę zero, przeto tembardziej drugi ciąg ma granicę zero, a dany ciąg ma granicę równą $6\tfrac{34}{111}$.

Weźmy inny ciąg:

$$3{\cdot}1,\ 3{\cdot}14,\ 3{\cdot}141,\ 3{\cdot}1415,\ 3{\cdot}14159, \ldots..$$

utworzony z kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar liczby π, ma właśnie liczbę π jako granicę; jest bowiem liczba π mniejsza od każdej z liczb:

$$3{\cdot}2,\ 3{\cdot}15,\ 3{\cdot}142,\ 3{\cdot}1416,\ 3{\cdot}14160, \ldots..$$

które powstały z danego ciągu w ten sposób, żeśmy dodali liczbę 1 do ostatniego miejsca dziesiętnego (czyli 0·1, 0·01, 0·001,...). Jest więc:

$$\pi - 3{\cdot}1 < 3{\cdot}2 - 3{\cdot}1 = 0{\cdot}1$$
$$\pi - 3{\cdot}14 < 3{\cdot}15 - 3{\cdot}14 = 0{\cdot}01$$
$$\pi - 3{\cdot}141 < 3{\cdot}142 - 3{\cdot}141 = 0{\cdot}001$$
$$\pi - 3{\cdot}1415 < 3{\cdot}1416 - 3{\cdot}1415 = 0{\cdot}0001$$
$$\pi - 3{\cdot}14159 < 3{\cdot}14160 - 3{\cdot}14159 = 0{\cdot}00001$$

— — — — — — — — — —

a więc ciąg:

$$3{\cdot}1 - \pi,\ 3{\cdot}14 - \pi,\ 3{\cdot}141 - \pi,\ 3{\cdot}1415 - \pi,\ 3{\cdot}14159 - \pi, \ldots..$$

ma granicę zero czyli dany ciąg ma granicę π.

Możemy więc ogólnie powiedzieć: ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar liczby a ma tę liczbę a jako granicę.

Jak powiedzieliśmy wyżej, każdy ciąg przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar zawiera największe ułamki dziesiętne na jedno, dwa, trzy,..... miejsc dziesiętnych, a mniejsze od danej liczby. Np. ułamki dziesiętne na jedno miejsce dzies.:

$$0{\cdot}0,\ 0{\cdot}1, \ldots,\ 0{\cdot}9,\ 1{\cdot}0,\ 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}2,\ 1{\cdot}3,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}6,\ 1{\cdot}7$$

są mniejsze od liczby $\sqrt{3}$ t. zn. od liczby dodatniej, której kwadrat jest mniejszy od liczby 3, bo np. jest $1{\cdot}7^2 = 2{\cdot}89 < 3$, ale już ułamek 1·8 jest większy od liczby $\sqrt{3}$, bo jest $1{\cdot}8^2 = 3{\cdot}24 > 3$; ułamki na dwa miejsca dziesiętne: 0·00,..., 0·10,.... 1·00, 1·01, 1·02,.... 1·10, 1·11, 1·12,.... 1·20.... 1·30.... 1·40.... 1·50.... 1·60.... 1·70, 1·71, 1·72, 1·73 są mniejsze od liczby $\sqrt{3}$, bo jest $1{\cdot}73^2 = 2{\cdot}9929 < 3$, a już ułamek 1·74 jest większy od liczby $\sqrt{3}$, bo jest $1{\cdot}74^2 = 3{\cdot}0276 > 3$; podobnie ułamki na trzy miejsca dzies.: 0·000,..., 1·000, 1·010,..., 1·500... 1·600... 1·700... 1·730, 1·731, 1·732 są mniejsze od liczby $\sqrt{3}$, bo jest $1{\cdot}732^2 = 2{\cdot}999824 < 3$, a już ułamek 1·733 jest większy od liczby $\sqrt{3}$, bo jest $1{\cdot}733^2 = 3{\cdot}003289 > 3$ itd.; podobnie się okaże, że ułamki dzies. na 4 miejsca dzies.: 0·0000,... 1·1000,... ...1·2000... 1·6000... 1·7000... 1·7320 są mniejsze od liczby $\sqrt{3}$, a ułamek 1·7321 jest większy od liczby $\sqrt{3}$; ułamki dziesiętne na 5 miejsc dzies.: 0·00000,....., 1·00001..... ...1·10000.... 1·50000.... 1·70000.... 1·73200, 1·73201,.... 1·73202, 1·73203, 1·73204, 1·73205 są mniejsze od liczby $\sqrt{3}$, a ułamek 1·73206 jest już większy od liczby $\sqrt{3}$ itd. Przybliżeniami kolejnemi przez niedomiar na 1-no, 2-a, 3-y, 4, 5,... miejsc dziesiętnych liczby $\sqrt{3}$ są te największe ułamki z pośród ułamków mniejszych od liczby $\sqrt{3}$, a więc to ułamki:

$$1{\cdot}7,\ 1{\cdot}73,\ 1{\cdot}732,\ 1{\cdot}7320,\ 1{\cdot}73205, \ldots\ldots$$

a granicą tego ciągu jest liczba $\sqrt{3}$. Liczba $\sqrt{3}$ jest większa od wszelkich liczb tego ciągu, a mniejsza od wszystkich liczb następującego ciągu

$$1{\cdot}8,\ 1{\cdot}74,\ 1{\cdot}733,\ 1{\cdot}7321,\ 1{\cdot}73206\ldots..$$

Ale i naodwrót — jak wiadomo z arytmetyki (z teoryi liczb niewymiernych) — jeżeli utworzymy nieskończony ciąg ułamków dziesiętnych na 1, 2, 3, 4, 5,... miejsc dziesiętnych, a nieujemnych (dodatnich lub równych zeru), które oznaczymy przez:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, \ldots,\ u_n, \ldots..$$

utworzonych w ten sposób, że każdy następny ułamek powstał z poprzedniego przez doczepienie jednej z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na końcu do niezmienionego poprzedniego ułamka (np. 0·0, 0·01, 0·013, 0·0135, 0·01357,...), to ciąg ten jest ciągiem kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar pewnej liczby (wymiernej lub niewymiernej), która będzie granicą tego ciągu; o tym ciągu wiemy więc, że na pewne ma granicę.

§. 27. **Prz. 11.** Uważajmy ciąg liczb:

$$w_1 = 4{\cdot}6;\ w_2 = 4{\cdot}72;\ w_3 = 4{\cdot}731;\ w_4 = 4{\cdot}7319;\ w_5 = 4{\cdot}73204; ..$$

nie można tego ciągu uważać za ciąg przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar pewnej liczby, bo już drugi wyraz (jak i dalsze) nie powstał z pierwszego przez doczepienie cyfry do końca pierwszego wyrazu, ale przez zmianę i doczepienie etc. (Liczbą całkowitą tych wyrazów jest zawsze liczba 4, cyfry dziesiętne utworzyliśmy z cyfr dziesiętnych kolejnych przybliżeń dzies. przez niedomiar liczby $\sqrt{3}$ przez odjęcie liczby 1 od ostatniego miejsca; zob prz. 10, $7-1=6$, $73-1=72$, $732-1=731$, itd.).

Dany ciąg jest nigdy nie malejący, a każdy wyraz jest mniejszy od liczby np. 5. Pytamy, czy ma granicę; damy dowód na to, że granicę posiada; jego myśl przewodnia będzie na tem polegała, żeby przy pomocy danego ciągu wytworzyć nowy, drugi ciąg, o którem na pewne wiemy, że posiada granicę i potem wykażemy, że dany ciąg ma tę samą granicę, co drugi.

Wyszukajmy największy ułamek dziesiętny na jedno miejsce, któremu przynajmniej jeden wyraz danego ciągu się równa albo od którego jeden (co najmniej) wyraz jest większy; ułamki 0·0, 0·1, 0·2,..., 1·0,..., 2·0,... 3·0,... 4·0, 4·1, 4·2, 4·3, 4·4, 4·5, 4·6, 4·7 są albo równe jednemu wyrazowi albo mniejsze od jednego wyrazu danego ciągu; ułamek 4·7 jest z pomiędzy nich największym; taki ułamek musi istnieć (mogliśmy być tego pewni), bo szukany ułamek musiał być mniejszy od liczby 5; ułamek 4·8 jest już większym od wszystkich wyrazów ciągu.

Największym ułamkiem na 2 miejsca, który jest co najmniej jednemu wyrazowi ciągu równy lub mniejszy od (co najmniej) jednego wyrazu ciągu, jest ułamek 4·73, a już ułamek 4·74 jest większy od wszystkich wyrazów ciągu; podobne własności będą miały ułamki 4·732, 4·7320, 4·73205 itd. Utwórzmy drugi ciąg

$$u_1 = 4{\cdot}7;\ u_2 = 4{\cdot}73;\ u_3 = 4{\cdot}732;\ u_4 = 4{\cdot}7320;\ u_5 = 4{\cdot}73205; \ldots$$

powiadamy, że każdy z tych ułamków powstał z poprzedniego przez proste doczepienie jednej z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na końcu; jeżeli bowiem mamy wyszukany ułamek na 3 miejsca dzies. 4·732 o podanej własności, to ułamek na 4 miejsca nie może się zaczynać od cyfr 4·731. ani od cyfr 4·733., boby inaczej ułamkiem na 3 miejsca dzies. o podanej własności był ułamek 4·731 albo ułamek 4·733.

Ten drugi ciąg jest więc ciągiem kolejnych przybliżeń dzies. przez niedomiar pewnej liczby, którą oznaczymy przez g, wobec tego liczba g będzie też granicą tego drugiego ciągu.

Ta granica g nie może być mniejsza od żadnego wyrazu drugiego ciągu, ale ponieważ do liczby g wyrazy tego ciągu się zbliżają, to, choćbyśmy wzięli liczbę dodatnią ε, nie wiedzieć, jak małą, to znajdzie się taki ułamek drugiego ciągu u_N, stojący na N-tem miejscu, iż jest

$$g - \varepsilon < u_N,$$

a do wyrazu u_N znajdzie się w pierwszym ciągu wyraz w_M, stojący na M-tem miejscu, który nie jest mniejszy od liczby u_N (albo jej równy albo od niej większy), bo taką miał własność ułamek u_N; jest więc tembardziej

$$g - \varepsilon < w_M,$$

a stąd

$$g - w_M < \varepsilon,$$

a że wyrazy po w_M nie są mniejsze od w_M, więc mamy:

$$\ldots\ldots\ldots < g - w_{M+3} < g - w_{M+2} < g - w_{M+1} < g - w_M < \varepsilon,$$

lub mogą być znaki równości $=$ zamiast znaku $<$.

Jest więc

$$g - w_n < \varepsilon$$

gdy jest $n > M$. Trzeba być tu ostrożnym, liczba $g - w_n$ (możnaby przypuścić) jest mniejsza od *liczby dodatniej* ε, bo może jest ujemna; trzeba się będzie upewnić o tem, że różnice $g - w_n$ nie są nigdy ujemne.

Załóżmy, że są ujemne, że jest $g < w_n$; w każdym razie (nawet gdyby nie było $g < w_n$) możemy w drugim ciągu znaleść tak daleko stojący wyraz u_m, iż $\frac{1}{10^m}$ jest mniejsze od różnicy $w_n - g$:

$$\frac{1}{10^m} < w_n - g;$$

liczba $u_m + \frac{1}{10^m}$ jest już większa od liczby g; z dwóch liczb $u_m + \frac{1}{10^m}$, w_n większych od liczby g pierwsza byłaby bliższa liczby g:

$$g < u_m + \frac{1}{10^m} < w_n,$$

ale wiemy, że już liczba $u_m + \frac{1}{10^m}$ ma być większa od wszystkich wyrazów danego ciągu, a więc jest

$$u_m + \frac{1}{10^m} > w_n,$$

czyli przypuściwszy, iż jest $g < w_n$ wypadło nam, że jest równocześnie:

$$u_m + \frac{1}{10^m} < w_n, \quad u_m + \frac{1}{10^m} > w_n,$$

co jest sprzecznością.

Jest więc $g - w_n$ nieujemne dla $n > M$, a więc

$$|g - w_n| = g - w_n,$$

przeto jest

$$|g - w_n| < \varepsilon$$

gdy jest $n > M$ czyli ciąg dany ma granicę g.

Każdy więc ciąg dodatnich liczb nie malejących a mniejszych od pewnej stałej liczby (tu 5), ma granicę.

W obecnym przykładzie łatwo wyrachować tę granicę — ogólnego sposobu na wyrachowanie granic nie znamy.

Ciąg

$$4{\cdot}6,\ 4{\cdot}72,\ 4{\cdot}731,\ 4{\cdot}7319,\ 4{\cdot}73204, \ldots\ldots$$

jak wykazaliśmy, ma tę samą granicę, co ciąg:

$$4{\cdot}7,\ 4{\cdot}73,\ 4{\cdot}732,\ 4{\cdot}7320,\ 4{\cdot}73205, \ldots\ldots$$

a ciąg drugi napiszmy tak:

$$3 + 1{\cdot}7,\ 3 + 1{\cdot}73,\ 3 + 1{\cdot}732,\ 3 + 1{\cdot}7320,\ 3 + 1{\cdot}73205, \ldots\ldots$$

ma więc, jak łatwo widzieć, granicę $3 + \sqrt{3}$.

Prz. 12. W poprzednim przykładzie były dwa ciągi, które mają wspólną granicę. Zapytajmy, czy jeden ciąg może mieć dwie nierówne liczby jako granice.

Uważajmy ciąg:

$$w_1 = 2{\cdot}1\,,\quad w_2 = 2{\cdot}101\,,\quad w_3 = 2{\cdot}101001\,,\quad w_4 = 2{\cdot}1010010001,$$
$$w_5 = 2{\cdot}101001000100001,\ldots.,$$
$$w_n = 2{\cdot}1\underbrace{0}_{\substack{\text{1-no}\\ \text{zero}}}1\underbrace{00}_{\substack{\text{dwa}\\ \text{zera}}}1\underbrace{000}_{\substack{\text{trzy}\\ \text{zera}}}1\underbrace{0000}_{\substack{\text{cztery}\\ \text{zera}}}1\ldots\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zer}}}1,\ldots\ldots$$

jest ciągiem rosnącym, którego wyrazy są mniejsze od liczby 3, ma więc granicę, którą oznaczymy przez g; do każdej więc dodatniej, dowolnie małej liczby ε można znaleść takie miejsce N-te w ciągu, iż dla wszystkich miejsc późniejszych niż N-te ($n > N$) jest $|g - w_n| < \varepsilon$. Niech ten ciąg ma drugą liczbę, różną od liczby g, jako granicę — oznaczymy ją przez G; do liczby ε można więc znaleść takie miejsce M-te (wogóle będzie może inne, niż N te), iż jest $|G - w_n| < \varepsilon$ dla miejsc $n > M$. Weźmy wyrazy stojące na miejscach dalszych, niż miejsce N-te i M-te — to dla $n > N$ i równocześnie $n > M$ jest równocześnie:

$$|G - w_n| < \varepsilon,\quad |g - w_n| < \varepsilon.$$

Weźmy różnicę liczb G i g, ona jest stała, choćby drobna, ale można obrać liczbę dodatnią ε tak małą, iżby było

$$|g - G| > 2\varepsilon.$$

Ale jest

$$g - G = g - w_n + w_n - G,$$

więc jest

$$|g - G| < |g - w_n| + |w_n - G| < 2\varepsilon,$$

bo jest

$$|g - w_n| < \varepsilon,\quad |w_n - G| = |G - w_n| < \varepsilon;$$

otrzymaliśmy więc, że jest równocześnie:

$$|g - G| > 2\varepsilon$$
$$|g - G| < 2\varepsilon$$

co jest niemożliwe. Przypuszczenie nasze, że jakiś ciąg ma dwie nierówne sobie liczby, jako granice, prowadzi do sprzeczności.

Prz. 13. Uważajmy ciąg:

$$-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \ldots..$$

i drugi ciąg już nam znany:

$$w_1 = \tfrac{1}{2},\ w_2 = \tfrac{2}{3},\ w_3 = \tfrac{3}{4},\ w_4 = \tfrac{4}{5}, \ldots..$$

powstał on z pierwszego przez proste skreślenie trzech początkowych wyrazów; drugi ciąg ma granicę 1, a pierwszy ma tę samą granicę, bo chodzi tu tylko o dość dalekie wyrazy.

A więc dwa ciągi, różniące się tylko o kilka pierwszych wyrazów mają oba albo tę samą granicę albo oba nie mają żadnej granicy; łatwo zrozumieć to uogólnienie.

Prz. 14. Uważajmy ciąg:

$$w_1 = 5{\cdot}9;\ w_2 = 5{\cdot}72;\ w_3 = 5{\cdot}711;\ w_4 = 5{\cdot}7101;\ w_5 = 5{\cdot}70999;$$
$$w_6 = 5{\cdot}709977;\ w_7 = 5{\cdot}7099761; \ldots..$$

Ciąg ten jest nigdy nierosnący, a każdy wyraz jest dodatni. (Cyfrą całkowitą jest stale 5, zaś cyfry dzies. wytworzyliśmy w ten sposób, żeśmy do cyfr dziesiętnych kolejnych przybliżeń dzies. liczby $\sqrt[3]{5}$:

$$1{\cdot}7,\ 1{\cdot}70,\ 1{\cdot}709,\ 1{\cdot}7099,\ 1{\cdot}70997,\ 1{\cdot}709975,\ 1{\cdot}7099759, \ldots..$$

dodali liczbę 2 na ostatniem miejscu).

Udowodnimy, że ciąg ma granicę; myśl przewodnia dowodu będzie polegała na tem, aby przy pomocy danego ciągu wytworzyć nowy, drugi ciąg, który napewne ma granicę.

Z pomiędzy ułamków, na jedno miejsce dzies., a mniejszych od *wszystkich* wyrazów danego ciągu weźmy największy; ułamki 0·0, 0·1,..., 1·0,..., 2·0,..., 4·0,..., 5·0, 5·1, 5·2, 5·3, 5·4, 5·5, 5·6, 5·7 są mniejsze od wszystkich wyrazów ciągu, a już ułamek $5{\cdot}7 + 0{\cdot}1 = 5{\cdot}8$ nie ma tej własności; z pomiędzy ułamków na dwa miejsca dzies., a mniejszych od *wszystkich* wyrazów danego ciągu weźmy największy; ułamki 0·00, 0·01,..., 4·00,..., 5·00,..., 5·69, *5·70*, są mniejsze od wszystkich wyrazów danego ciągu, a ułamek $5{\cdot}70 + 0{\cdot}01 = 5{\cdot}71$ jest większy od piątego wyrazu danego ciągu; z pomiędzy ułamków na trzy miejsca dzies., a mniejszych od *wszystkich* wyrazów danego ciągu weźmy największy; ułamki 0·000,..., 1·000,..., 4·000,... 5·700, 5·701, 5·702, 5·703, 5·704, 5·705, 5·706, 5·707, 5·708, *5·709* są mniejsze od wszystkich wyrazów danego ciągu, a ułamek $5{\cdot}709 + \frac{1}{1000} = 5{\cdot}710$ jest już większy od wszystkich wyrazów ciągu, od piątego wyrazu począwszy; podobnie ułamki na cztery miejsca dzies. 0·0000,..., 5·0000,..., 5·7090,..., 5·7095, 5·7096, 5·7097, 5·7098, *5·7099* są mniejsze od wszystkich wyrazów danego ciągu, a ułamek

$$5{\cdot}7099 + \frac{1}{10^4} = 5{\cdot}7100$$ jest większy od wyrazów ciągu, od piątego począwszy.

Utwórzmy ciąg ułamków największych z pomiędzy ułamków na jedno, dwa, trzy, cztery, pięć... miejsc dzies. mniejszych od wszystkich wyrazów danego ciągu:

$$u_1 = 5{\cdot}7,\ u_2 = 5{\cdot}70,\ u_3 = 5{\cdot}709,\ u_4 = 5{\cdot}7099, \ldots\ldots$$

twierdzimy, co zaraz wykażemy, że ciąg ten jest ciągiem kolejnych przybliżeń dzies. pewnej liczby g t. zn. następny wyraz otrzymuje się z poprzedniego przez doczepienie jednej z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 po prawej stronie bez zmiany poprzedniego wyrazu. Jeżeli bowiem liczba 5·70 jest mniejsza od wszystkich wyrazów danego ciągu, to liczba 5·700 musi też być mniejsza od wszystkich wyrazów danego ciągu i albo 5·700 jest największym ułamkiem na 3 miejsca dzies. z ułamków mniejszych od wszystkich wyrazów danego ciągu albo istnieją ułamki większe od ułamka 5·700 a mniejsze od wszystkich wyrazów danego ciągu; mogą to być tylko pewne z ułamków 5·701, 5·702, 5·703, 5·704, 5·705, 5·706, 5·707, 5·708, 5·709 a już nie może to być ułamek 5·710, boby w takim razie ułamek 5·71 był mniejszy od wszystkich wyrazów danego ciągu, kiedy ułamek 5·70, jak się powiedziało, jest największy z ułamków na 2 miejsca dzies. mniejszych od wszystkich wyrazów danego ciągu; widać więc, że trzeci wyraz powstał z drugiego przez doczepienie jednej z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 do wyrazu drugiego do jego końca po stronie prawej.

Ciąg drugi ma więc granicę g. Wykażemy, że dany ciąg ma także granicę g.

Najpierw wykażemy, że wyrazy w_n są większe od liczby g.

Gdyby tak nie było, to albo jest jaki wyraz w_m równy liczbie g albo od pewnego M-tego miejsca począwszy wszystkie wyrazy w_n są mniejsze od g.

W pierwszym wypadku albo *wszystkie* wyrazy $w_m = w_{m+1} = w_{m+2} = \ldots\ldots$ są jednakowe i równe liczbie g i wtedy dany ciąg ma postać

$$w_1, w_2, \ldots, w_m = g, g, g, g, \ldots\ldots$$

czyli ma granicę g; to mogłoby się zdarzyć w innym przykładzie, ale tu nie ma miejsca; albo istnieje wyraz w_p po wyrazie w_m mniejszy od liczby g — co (widocznie) należy do drugiego wypadku.

Załóżmy więc, że wszystkie wyrazy w_n od pewnego miejsca M-tego począwszy są mniejsze od liczby g ($w_n < g$, $n > M$).

Otóż wyrazy drugiego ciągu są coraz to bliższe liczby g, a więc znajdzie się wtedy wyraz u_m bliższy g niż w_n czyli byłoby $w_n < u_m < g$, co być nie może, bo ułamki u_m mają być *mniejsze* od wszystkich wyrazów danego ciągu czyli ma być $u_m < w_n$. Jest więc $w_n > g$ lub $w_n = g$ dla $n > M$, a nie mniejsze.

W naszym przykładzie jest $w_n > g$ zawsze.

Okażmy teraz, że dany ciąg ma granicę g.

Liczby

$$u_1 + \frac{1}{10}, \quad u_2 + \frac{1}{10^2}, \quad u_3 + \frac{1}{10^3}, \ldots\ldots$$

są większe od liczby g, ale coraz bliższe tej liczbie, bo jest

$$u_1 + \frac{1}{10} - g < u_1 + \frac{1}{10} - u_1 = \frac{1}{10},$$

$$u_2 + \frac{1}{10^2} - g < u_2 + \frac{1}{10^2} - u_2 = \frac{1}{10^2},$$

$$u_3 + \frac{1}{10^3} - g < u_3 + \frac{1}{10^3} - u_3 = \frac{1}{10^3},$$

— — — — — — — — —

$$u_m + \frac{1}{10^m} - g < u_m + \frac{1}{10^m} - u_m = \frac{1}{10^m},$$

gdyż liczba g jest mniejsza od wszystkich liczb u_m.

Wobec tego, gdy ε oznacza dodatnią liczbę, choćby bardzo małą, mogę znaleść liczbę $u_m + \frac{1}{10^m}$ bliższą liczbie g niż liczba $g + \varepsilon$ czyli jest:

$$u_m + \frac{1}{10^m} < g + \varepsilon,$$

ale ułamek $u_m + \frac{1}{10^m}$ jest większy od jednego wyrazu w_p na p-tem miejscu albo mu równy, więc jest tem bardziej

$$w_p < g + \varepsilon$$

czyli

$$w_p - g < \varepsilon,$$

a że wyrazy nie rosną, więc jest

$$\ldots < w_{p+4} - g < w_{p+3} - g < w_{p+2} - g < w_{p+1} - g < w_p - g < \varepsilon$$

albo mogą zachodzić tu znaki równości $=$ zamiast znaku $<$.

Jest tedy

$$w_n - g < \varepsilon,$$

gdy jest $n > p$, a że różnice $w_n - g$ nie mogą być ujemne, więc jest

$$w_n - g = |w_n - g|;$$

tedy jest

$$|w_n - g| < \varepsilon$$

dla $n > p$, czyli dany ciąg ma granicę g.

W obecnym przykładzie łatwo wyrachować granicę.

Drugi ciąg napiszmy tak:

$$4 + 1{\cdot}7,\ 4 + 1{\cdot}70,\ 4 + 1{\cdot}709,\ 4 + 1{\cdot}7099, \ldots.$$

ma więc granicę $4 + \sqrt[3]{5}$, dany więc ciąg ma też granicę $4 + \sqrt[3]{5}$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie: ciąg dodatnich liczb nierosnących ma granicę.

Prz. 15. Uważajmy ciąg:

$$w_1 = -3{\cdot}1,\ w_2 = -3{\cdot}14,\ w_3 = -3{\cdot}141,\ w_4 = -3{\cdot}1415,$$
$$w_5 = -3{\cdot}14159, \ldots.$$

mamy tu ciąg nierosnący, którego wszystkie wyrazy są ujemne i większe od liczby np. -4. Czy ma granicę?

Utwórzmy stąd drugi ciąg, zmieniając znak wszystkich wyrazów na przeciwny; otrzymamy ciąg:

$$d_1 = 3{\cdot}1,\ d_2 = 3{\cdot}14,\ d_3 = 3{\cdot}141,\ d_4 = 3{\cdot}1415,\ d_5 = 3{\cdot}14159, \ldots$$

którego wyrazy nigdy nie maleją i są mniejsze od liczby np. 4 i dodatnie; przeto ciąg ten ma granicę i nią jest liczba π (bo tak dobraliśmy wyrazy ciągu); do każdej więc liczby dodatniej ε można znaleść takie miejsce N-te, iż dla miejsc $n > N$ jest

$$|\pi - d_n| < \varepsilon$$

a że jest:

$$|\pi - d_n| = |-\pi + d_n| = |-\pi - (-d_n)|$$
$$-d_n = w_n$$

więc jest:

$$|(-\pi) - w_n| < \varepsilon \text{ dla } n > N$$

czyli dany ciąg ma granicę $(-\pi)$.

Prz. 16. Uważajmy ciąg:

$$w_1 = -2{\cdot}1,\ w_2 = -2{\cdot}081,\ w_3 = -2{\cdot}08009,$$
$$w_4 = -2{\cdot}0800839 \ldots.$$

który jest nigdy nie malejącym i wyrazy jego są wszystkie ujemne.

Utwórzmy z tego drugi ciąg, zmieniając znak wszystkich wyrazów na przeciwny; otrzymamy ciąg:

$$d_1 = 2{\cdot}1,\ d_2 = 2{\cdot}081,\ d_3 = 2{\cdot}08009,\ d_4 = 2{\cdot}0800839, \ldots\ldots$$

nierosnący o wyrazach dodatnich — posiada więc granicę i, jak można się przez pierwiastkowanie przekonać, wyrazy tego drugiego ciągu różnią się o 0·1 wzgl. 0·001, wzgl. 0·00001.... od odpowiednich przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar liczby $\sqrt[3]{9}$ na jedno, trzy, pięć,.... miejsc dziesiętnych. Tak, jak w poprzednim przykładzio, wykazuje się, że dany ciąg ma granicę $(-\sqrt[3]{9})$.

Prz. 17. Uważajmy ciąg:

$$-1,\ -0{\cdot}9,\ -0{\cdot}8,\ -0{\cdot}4,\ -0{\cdot}1,\ 0,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}44,\ 1{\cdot}442,\ 1{\cdot}4422,$$
$$1{\cdot}44224,\ 1{\cdot}442249,\ 1{\cdot}4422496, \ldots\ldots$$

jest to ciąg niemalejący, którego wyrazy są mniejsze od liczby np. 2; pięć wyrazów jest ujemnych, jeden zerowy, pozostałe dodatnie. Jak wiemy z prz. 13., wolno odrzucić pierwszych sześć wyrazów bez zmiany granicy; ciąg

$$1{\cdot}4,\ 1{\cdot}44,\ 1{\cdot}442,\ 1{\cdot}4422,\ 1{\cdot}44224, \ldots\ldots$$

ma już wyrazy dodatnie niemalejące mniejsze od liczby 2; ma więc granicę (jak wiemy) i jest nią liczba $\sqrt[3]{3}$; tę samą granicę posiada dany ciąg.

Podobnie, gdy jest dany ciąg:

$$1{\cdot}5,\ 1{\cdot}3,\ 1{\cdot}3,\ 0{\cdot}9,\ 0{\cdot}4,\ -1{\cdot}4,\ -1{\cdot}44,\ -1{\cdot}442,\ -1{\cdot}4422,$$
$$-1{\cdot}44224,\ -1{\cdot}442249,\ -1{\cdot}4422496, \ldots\ldots$$

o nierosnących wyrazach, większych od liczby (-2), uważamy ciąg

$$-1{\cdot}4,\ -1{\cdot}44,\ -1{\cdot}442,\ -1{\cdot}4422,\ -1{\cdot}44224,\ -1{\cdot}442249, \ldots\ldots$$

o wyrazach już tylko ujemnych, nierosnących, większych od liczby (-2), ma więc granicę $(-\sqrt[3]{3})$ i tę samą granicę posiada dany ciąg.

Wykazaliśmy więc ogólne dwa twierdzenia:

Ciąg o wyrazach niemalejących, mniejszych od stałej liczby A, ma granicę.

Ciąg o wyrazach nierosnących, większych od stałej liczby A, ma granicę.

Prz. 18. Uważajmy ciąg, którego ogólny wyraz na n-tem miejscu jest

$$w_n = \frac{n^2 - 7}{n^2 + n + 1}.$$

Jest więc

$w_1 = -2$, $w_2 = -\frac{3}{7}$, $w_3 = +\frac{2}{13}$, $w_4 = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$, $w_5 = \frac{18}{31} \ldots$; oczywiście nie można by stąd podać granicy ciągu. Ażeby ją obliczyć podzielmy licznik i mianownik przez n^2:

$$w_n = \frac{1 - \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Granicą licznika jest 1, granicą mianownika 1, a więc liczba różna od zera. Jak w §. 23., można udowodnić, że granicą ułamka jest 1. [Zamiast funkcyi $f(h)$, $\varphi(h)$ trzeba użyć wyrazów l_n, m_n t. j. uważać ciąg, którego n-tym wyrazem jest licznik l_n, i drugi ciąg, którego n-tym wyrazem jest mianownik m_n].

Podobnie ciąg, którego n-ty wyraz jest:

$$w_n = \frac{3n - 9}{4n + 1} = \frac{3 - \frac{9}{n}}{4 + \frac{1}{n}},$$

ma granicę $\frac{3}{4}$.

ROZDZIAŁ VI.

Własności funkcyj ciągłych i twierdzenie średniej wartości.

§. 28. **Przykład I.** Uważajmy funkcyę $y = x^2 - 4$ dla wartości na zmienną niezależną x od $x = 1$ do $x = 5$; będzie wartości funkcyi nieskończenie wiele i nie możemy ich wypisać w ciągu — będziemy mówić, że wartości funkcyi stanowią *mnogość* liczb i mianowicie dla $x = 1$ jest $y = -3$, a dla $x = 5$ jest $y = 25 - 4 = 21$; liczby mnogości, o której mowa, są mniejsze od liczby 21 a większe od liczby -3, raczej niema liczb w rozważanej przez nas mnogości mniejszych od liczby -3 i większych od liczby 21.

Ale weźmy liczbę mniejszą od 21 a dość bliską np. 20·9 — znajdziemy liczbę w naszej mnogości większą od liczby 20·9, a mianowicie dla $x = 4{\cdot}99$ jest $y = 24{\cdot}9001 - 4 = 20{\cdot}9001 > 20{\cdot}9$. Gdybyśmy wogóle wzięli liczbę mniejszą od 21 np. $21 - \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą, dodatnią liczbą, to mogę znaleść liczbę mnogości większą od $21 - \varepsilon$. Liczbę 21 nazwiemy *górnym krańcem* mnogości.

Podobnie, gdybyśmy wzięli liczbę większą od liczby -3, a dostatecznie bliską np. $-2{\cdot}999$, to mogę znaleść liczbę mnogości mniejszą od liczby $-2{\cdot}999$; dla $x = 1{\cdot}0003$ jest $y = 1{\cdot}00060009 - 4 = -2{\cdot}9993991 < -2{\cdot}999$. Ogólnie, gdy weźmiemy liczbę $-3 + \varepsilon$, gdzie ε oznacza liczbę dodatnią, dowolnie małą, to zawsze można znaleść liczbę mnogości mniejszą od liczby $-3+\varepsilon$. Liczbę -3 nazywamy *dolnym krańcem* mnogości.

Zauważmy, że dla $x=1$ funkcya równa się dolnemu krańcowi mnogości rozważanej, a dla $x=5$ funkcya równa się górnemu krańcowi mnogości rozważanej.

Prz. 2. Uważajmy mnogość wartości funkcyi $y = x - E(x)$ (zob. Rozdz. II. prz. 14.) dla x od $x=3$ do $x=4$; wartości funkcyi nie są mniejsze od 0 i są mniejsze od 1. Gdy wezmę liczbę $0+\varepsilon=\varepsilon$, gdzie ε oznacza dowolnie małą, dodatnią liczbę, to znajdzie się wartość funkcyi mniejsza od ε np. dla $x=3+\frac{\varepsilon}{2}$ jest $y=3+\frac{\varepsilon}{2}-E\left(3+\frac{\varepsilon}{2}\right)=3+\frac{\varepsilon}{2}-3=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$; liczba 0 jest dolnym krańcem mnogości. Gdy wezmę liczbę $1-\varepsilon$, to znajdę wartość mnogości większą od $1-\varepsilon$, bo dla $x=4-\frac{\varepsilon}{2}$ jest $y=4-\frac{\varepsilon}{2}-E\left(4-\frac{\varepsilon}{2}\right)=4-\frac{\varepsilon}{2}-3=1-\frac{\varepsilon}{2}>1-\varepsilon$. Liczba 1 jest więc górnym krańcem. Dla $x=3$ jest $y=3-E(3)=3-3=0$, a więc dla $x=3$ funkcya równa się dolnemu krańcowi mnogości, a nie ma takiego x, aby dla niego funkcya równała się górnemu krańcowi mnogości, bo dla $x=4$ jest $y=4-E(4)=4-4=0$.

Czy każda mnogość musi mieć górny i dolny kraniec? Weźmy mnogość:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots\ldots,\ n,\ -n, \ldots\ldots$$

wprost widoczne, że ta mnogość nie ma ani dolnego ani górnego krańca. Mnogość:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots,\ n, \ldots\ldots$$

ma dolny kraniec (zero), a nie ma górnego krańca; mnogość $0, -1, -2, -3, \ldots -10, \ldots -n, \ldots$, ma górny kraniec (zero), a nie ma dolnego krańca. Jeżeli atoli wszystkie liczby mnogości nie przewyższają pewnej liczby a i nie są mniejsze od pewnej liczby b, to udowodnimy, że ma kraniec dolny i górny. Np. niech mnogość składa się z ułamków dodatnich i ujemnych właściwych — wszystkie te ułamki są większe od liczby -1 i mniejsze od liczby $+1$.

Udowodnimy najpierw, że istnieje górny kraniec mnogości.

Uważajmy kolejno największe ułamki dziesiętne na jedno, dwa, trzy,... miejsca, które są równe jakiej liczbie w mnogości albo mniejsze od jednej co najmniej liczby w mnogości; otrzymamy ułamki

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

każdy następny ułamek tego ciągu nie jest mniejszy od ułamka poprzedniego, jak łatwo czytelnik wykaże (§. 27).

W naszym przykładzie mnogości ułamków właściwych dodatnich i ujemnych otrzymamy ciąg:

$$0{\cdot}9,\ 0{\cdot}99,\ 0{\cdot}999, \ldots$$

Dostaniemy więc ciąg nie malejący, którego każdy wyraz nie jest większy od liczby a, przeto ciąg ten (§. 27.) ma granicę, którą oznaczymy literą g.

Udowodnimy, że właśnie liczba g jest górnym krańcem.

Żadna liczba mnogości nie jest większa od g; gdyby bowiem było $c > g$, gdzie c jest liczbą w mnogości, tobyśmy wyszukali ułamek u dziesiętny na odpowiednią ilość miejsc dziesiętnych, któryby był mniejszy od liczby c (lub jej równy) i był bliższy liczbie c niż liczba g ($u > g$), wtedyby ułamek u lub od niego większy na tę samą ilość miejsc dzies., co ułamek u należał do ciągu: $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ale wtedyby była znów liczba g większa od ułamka u; doszliśmy więc do sprzeczności, czyli żadna z liczb mnogości nie jest większa od liczby g.

Niech ε jest dowolnie małą, dodatnią liczbą; jak wiadomo w ciągu

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

można znaleść ułamek u_n tak blizki liczby g, iż jest większy od liczby $g - \varepsilon$, ale pamiętając o tem, jak dobieraliśmy liczby $u_1, u_2, \ldots$, widzimy, że istnieje albo liczba w mnogości równa liczbie u_n, albo co najmniej jedna większa od liczby u_n, ale, jak wiemy, nie większa od liczby g; istnieje więc co najmniej jedna liczba w mnogości większa od liczby $g - \varepsilon$; z tego widzimy, że liczba g jest górnym krańcem mnogości.

Podobnie uważając kolejno największe ułamki dziesiętne na 1, 2, 3,... miejsc dzies., które są mniejsze od wszystkich liczb w mnogości, wykaże czytelnik łatwo, że istnieje dolny kraniec.

W przypadku mnogości ułamków właściwych dodatnich i ujemnych dostaniemy następujący ciąg największych ułamków dziesiętnych na 1, 2, 3,... miejsc dzies. mniejszych od wszystkich liczb mnogości:

$$-1{\cdot}0,\ -1{\cdot}00,\ -1{\cdot}000,\ -1{\cdot}0000, \ldots\ldots$$

czyli każdy wyraz ciągu jest równy liczbie -1, granicą jego jest liczba -1 i dolnym krańcem jest liczba -1.

§. 29. Wszystkie liczby od 1 do 3 nazywać będziemy *przedziałem (1, 3)* i wogóle, jeżeli jest $a < b$, to wszystkie liczby od a do b nazywamy *przedziałem (a, b).*

Uważajmy funkcyę $y = f(x)$ i mnogość wartości tej funkcyi, jakie ma dla x w przedziale (a, b); jeżeli funkcya jest ciągła dla każdego x przedziału (a, b), to mnogość jej wartości ma dolny i górny kraniec, jak to łatwo udowodnimy.

Funkcya $y = f(x)$ jest ciągłą dla $x = a$, więc do liczby dodatniej, dowolnej ε istnieje dodatnia liczba δ_1 taka, że gdy jest $|x - a| < \delta_1$ to jest:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

czyli:

$$-\varepsilon < f(x) - f(a) < +\varepsilon,$$

więc:

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Wartość więc funkcyi dla każdego punktu x należącego do przedziału $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ jest zawarta między liczbami $f(a) - \varepsilon$, $f(a) + \varepsilon$.

Weźmy punkt c przedziału $(a, a + \delta_1)$; dla niego jest funkcya ciągłą, więc do liczby ε mogę znaleść dodatnią liczbę δ_2 taką, iż, gdy jest $|x - c| < \delta_2$, to jest:

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon,$$

czyli:

$$-\varepsilon < f(x) - f(c) < +\varepsilon;$$

stąd:

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon,$$

ale było:

$$f(a) - \varepsilon < f(c) < f(a) + \varepsilon,$$

więc:

$$f(c) + \varepsilon < f(a) + 2\varepsilon$$
$$f(a) - 2\varepsilon < f(c) - \varepsilon,$$

przeto jest:

$$f(a) - 2\varepsilon < f(x) < f(a) + 2\varepsilon.$$

Weźmiemy liczbę d przedziału $(c, c + \delta_2)$, to wykaże się, że istnieje przedział $(d - \delta_2, d + \delta_2)$, w którym jest:

$$f(a) - 3\varepsilon < f(x) < f(a) + 3\varepsilon$$

i idę dalej w ten sposób, aż dojdę do liczby b np. po $n = 100$ takich rozumowaniach i w ostatnim przedziale będzie:

$$f(a) - 100\varepsilon < f(x) < f(a) + 100\varepsilon.$$

Wogóle:

$$f(a) - n.\varepsilon < f(x) < f(a) + n.\varepsilon$$

i będzie w całym przedziale (a, b) stale:

$$f(a) - n\varepsilon < f(x) < f(a) + n\varepsilon;$$

istnieją więc dwie liczby A, B takie, że wszystkie liczby mnogości są mniejsze od liczby A i większe od liczby B; istnieją więc według poprzedniego paragrafu górny i dolny kraniec.

Ale mógłby ktoś zarzucić, że nie można dojść do liczby b, bo $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ stają się z konieczności coraz bliższemi zeru tak, iż mają granicę zero i po żadnej ilości skończonej rozumowań nie dosięgniemy liczby ξ[1]), która jest albo równą liczbie b albo nawet jest mniejszą od liczby b; t. zn. liczby:

$$a + \delta_1, \; c + \delta_2, \; d + \delta_3, \ldots$$

mają granicę ξ; przeto liczba $m + \delta_m$ jest już dość blizka liczby ξ i stąd w przedziale $(m - \delta_m, m + \delta_m)$ jest:

$$f(a) - m\varepsilon < f(x) < f(a) + m\varepsilon.$$

W punkcie ξ jest funkcya ciągła, przeto istnieje taka dodatnia liczba δ, iż jest:

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon,$$

gdy jest $|x - \xi| < \delta$; jest więc w przedziale $(\xi - \delta, \xi + \delta)$:

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon.$$

Liczba $m + \delta_m$ może być tak blizka liczby ξ, iż przedział $(m, m + \delta_m)$ pada cały w przedział $(\xi - \delta, \xi + \delta)$; a więc w przedziale $(m, \xi + \delta)$ jest:

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon,$$

czyli przekroczyliśmy liczbę ξ i przekonaliśmy się, że w przedziale $(a, \xi + \delta)$ jest $f(x)$ mniejsze od większej z liczb:

$$f(a) + m\varepsilon, \; f(\xi) + \varepsilon,$$

i większe od mniejszej z liczb:

$$f(a) - m\varepsilon, \; f(\xi) - \varepsilon.$$

Później wykażemy, że taki punkt ξ istnieć nie może, teraz widzimy, że, gdyby istniał, to nie może nam kłopotu sprawić i łatwo go przekroczyć i iść dalej.

Powiemy: Mnogość wartości funkcyi ciągłej w każdym punkcie przedziału (a, b) posiada na pewne dolny

---

[1]) grecka litera, czyt. ksi.

i górny kraniec. Niech górnym krańcem jest liczba M, dolnym liczba m.

§. 30. Uważajmy mnogość wartości funkcyi nieciągłej $y = x - E(x)$ [zob. §. 14.] dla przedziału (2, 3); jak widać dolnym krańcem jest liczba 0, górnym liczba 1. Spytajmy, jaka jest największa liczba mnogości. Widać, że jej nie ma; liczba 1 jest górnym krańcem, ale nie ma takiej liczby x, iżby było $x - E(x) = 1$, bo tej wartości funkcya ta nie osiąga. Można podać wartość funkcyi większą od innej, ale nie można podać wartości największej. Trzeba więc dobrze odróżnić *górny (dolny) kraniec* od *liczby największej (najmniejszej* w mnogości. Jeżeli istnieje największa (najmniejsza) liczba w mnogości, to ona jest zarazem górnym (dolnym) krańcem mnogości; gdy istnieje dolny (górny) kraniec, to nie musi być najmniejszą (największą) liczbą w mnogości, chyba że ten kraniec górny czy dolny jest liczbą *należącą* do mnogości.

Udowodnimy, że we wypadku funkcyi ciągłej w każdym z punktów przedziału (a, b) mnogość jej wartości dla x tego przedziału ma największą i najmniejszą liczbę czyli istnieje takie ξ, należące do przedziału (a, b), iż $f(\xi)$ równa się górnemu krańcowi M mnogości i takie η [1]), iż $f(\eta)$ równa się dolnemu krańcowi m mnogości.

Udowodnimy pierwsze twierdzenie.

Uważajmy na prostej liczb (§. 1.) obraz geometryczny A liczby a np. $a = -1$ (fig. 26.) i obraz B liczby b np. $b = 2$; niech punkt C jest środkiem odcinka AB; łatwo widzieć, że punkt C jest obrazem liczby $\frac{a+b}{2} =$ $= \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; liczbę $\frac{a+b}{2}$ nazywać będziemy *środkiem przedziału (a, b);* a więc liczba $\frac{1}{2}$ jest środkiem przedziału (—1, 2).

---

[1]) litera grecka — czytaj eta.

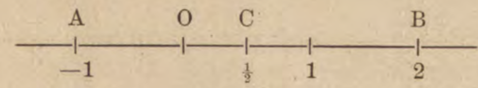

Fig. 26.

Przedział (a, b) rozdzielmy na dwa przedziały $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; co najmniej w jednym z nich górnym krańcem wartości funkcyi będzie liczba M; większa liczba od liczby M górnym krańcem być nie może, a gdyby w obu przedziałach częściowych był górny kraniec liczbą mniejszą od liczby M, to w przedziale całkowitym (a, b) liczba M nie mogłaby być górnym krańcem. Weźmy więc ten z przedziałów częściowych $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, w którym górnym krańcem jest znów liczba M; gdyby zaś w obu przedziałach częściowych była liczba M górnym krańcem wartości funkcyi, to weźmy dowolnie jeden z nich.

Gdy dany jest przedział (c, d), to liczbę c nazwijmy *lewym końcem* przedziału, liczbę d *prawym końcem* tego przedziału.

Ten z przedziałów częściowych $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, w którym liczba M jest górnym krańcem wartości funkcyi, oznaczmy krótko (a_1, b_1); więc jest albo $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, stąd $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, albo $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$, skąd jest $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, i jest albo $a_1 = a$ albo $a_1 > a$.

Przedział (a_1, b_1) rozłóżmy znów na dwa przedziały częściowe $\left(a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right)$, $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right)$; co najmniej w jednym z nich będzie liczba M górnym krańcem wartości funkcyi; niech to będzie przedział (a_2, b_2); jest więc albo

$a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, stąd jest $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$,

albo $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$, skąd jest $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} =$

$= \frac{b-a}{4}$ i jest albo $a_2 = a_1$ albo $a_2 > a_1$. W ten sam sposób postąpmy z przedziałem (a_2, b_2), jak z przedziałem (a_1, b_1) itd.; dostaniemy przedziały:

$$(a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), \ldots, (a_n, b_n), \ldots\ldots$$

i jest:

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{8} = \frac{b-a}{2^3},$$

$$b_4 - a_4 = \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{b-a}{2^4},$$

— — — — — — —

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Uważajmy ciąg $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ utworzony z lewych końców przedziałów $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots\ldots$; widzieliśmy, że jest $a_2 = a_1$ albo $a_2 > a_1$, $a_3 = a_2$ albo $a_3 > a_2$ itd., czyli, że ciąg ten jest niemalejący i nadto żaden wyraz nie jest większy od liczby b; ma więc ciąg ten granicę, którą oznaczymy przez g.

Twierdzimy, że jest właśnie $f(g) = M$. Niech bowiem jest $f(g) = K$, gdzie liczba K jest mniejsza od liczby M (bo większą od liczby M być nie może); otóż dla $x = g$ funkcya jest ciągła, jak założyliśmy, więc do każdej dodatniej liczby ε można znaleść taką dodatnią liczbę h, iż, gdy jest $|x - g| < h$, to jest:

$$|f(x) - f(g)| < \varepsilon,$$

stąd:

$$-\varepsilon < f(x) - f(g) < +\varepsilon,$$

tedy:

$$f(g) - \varepsilon = K - \varepsilon < f(x) < f(g) + \varepsilon = K + \varepsilon.$$

W przedziale $(g - h, g + h)$ wartości funkcyi są mniejsze od $K + \varepsilon$; ale mogę zawsze obrać tak małą liczbę ε, iż liczba $K + \varepsilon$ jest mniejsza od liczby M, przeto w przedziale $(g - h, g + h)$ jest górnym krańcem liczba mniejsza od liczby M.

Ale mogę obrać liczbę a_n tak blizką liczby g, iż liczba a_n leży w przedziale $(g - h, g)$, a liczba b_n leży w przedziale $(g, g + h)$, bo jest $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$, więc $b_n = a_n + \frac{b - a}{2^n}$, tedy można znaleść zawsze taką liczbę n, iż ułamek $\frac{b - a}{2^n}$ jest bardzo mały.

Przedział (a_n, b_n) leży więc w przedziale $(g - h, g + h)$; ale w przedziale (a_n, b_n), jak powiedzieliśmy, górnym krańcem jest liczba M, przeto w przedziale $(g - h, g + h)$ nie może być górnym krańcem liczba mniejsza od liczby M; doszliśmy więc do sprzeczności przez przyjęcie, że jest $f(g) = K < M$.

A więc jest $f(g) = M$ czyli górny kraniec mnogości jest liczbą w mnogości czyli górny kraniec wartości funkcyi jest zarazem największą wartością funkcyi.

Podobnie utworzy czytelnik dowód na to, że istnieje liczba k w przedziale (a, b) taka, iż jest $f(k) = m$, gdzie m jest dolnym krańcem wartości funkcyi.

§. 31. Uważajmy funkcyę $y = x^2 + x - 6$; dla $x = 1$ jest $y = 1 + 1 - 6 = -4$, a dla $x = 4$ jest $y = 16 + 4 - 6 = 14$; jeżeli weźmiemy przedział (1, 4), to na lewym końcu przedziału funkcya staje się ujemna, na prawym dodatnia. Jeżeli narysujemy punkt $x = 1$, $y = -4$ i punkt $x = 4$, $y = 14$, to pierwszy z nich padnie pod oś $x'x$, drugi nad oś $x'x$; jeżeli je połączymy łukiem, ale tak, żeby łuk był ciągły i by nie odpowiadały dla żadnego x przedziału (1, 4) dwa punkty tego łuku, to łuk ten musi przeciąć się z osią $x'x$ między $x = 1$ i $x = 4$; ten punkt przecięcia ma rzędną $y = 0$.

Fakt ten wypowiemy analitycznie w ten sposób: Jeżeli funkcya $y = f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b) i na jednym końcu tego przedziału jest funkcya dodatnią, na drugim ujemną, to istnieje co najmniej jedna wartość c w przedziale (a, b) taka, iż jest $f(c) = 0$.

Udowodnimy to twierdzenie i niech np. jest $f(a) > 0$, $f(b) < 0$; wypadek kiedy jest $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ zupełnie podobnie się dowodzi.

Niechaj jest $f(a) > 0$, $f(b) < 0$; uważajmy liczbę $\frac{a+b}{2}$ czyli t. zw. środek przedziału (a, b) i obliczmy $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; gdy jest $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, to udowodniliśmy twierdzenie; gdy zaś jest $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, to uważajmy przedział $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; gdy jest $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, to uważajmy przedział $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, czyli uważajmy ten z przedziałów $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ na którego lewym końcu jest funkcya dodatnią, a na którego prawym końcu jest funkcya ujemną — przedział ten oznaczymy przez (a_1, b_1); jest więc albo $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, albo $a_2 = \frac{a+b}{2}$, $b_2 = b$, $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$.

Dalej rozważamy środek $\frac{a_1 + b_1}{2}$ przedziału (a_1, b_1) i bierzemy ten z przedziałów $\left(a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right)$, $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right)$, na którego lewym końcu funkcya jest dodatnią, a na prawym jest ujemną — oznaczymy ten przedział (a_2, b_2); jest więc albo $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{4}$,

albo $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{4}$;

w ten sposób, jak powyżej, postępujemy z przedziałem (a_2, b_2) i dostajemy kolejno przedziały:

$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), \ldots\ldots, (a_n, b_n)\ldots\ldots$

gdzie jest:

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2},\ b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2},\ b_3 - a_3 = \frac{b - a}{2^3}, \ldots\ldots,$$
$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \ldots\ldots$$

Uważajmy ciąg z lewych końców tych przedziałów:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\ldots$$

jest to ciąg niemalejący, którego wyrazy są mniejsze od liczby b, ma przeto granicę, którą oznaczymy przez g. Udowodnimy, że właśnie jest $f(g) = 0$.

Gdyby bowiem było $f(g)$ różne od zera, toby było $f(g) > 0$ albo $f(g) < 0$; w każdym razie funkcya $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie g, przeto do dowolnej liczby dodatniej ε można znaleść taką liczbę d, iż, gdy jest:

$$|x - g| < d \text{ i } |x - g| = d,$$

to jest:

$$|f(x) - f(g)| < \varepsilon,$$

czyli:

$$-d < f(x) - f(g) < +d,$$

a stąd:

$$f(g) - \varepsilon < f(x) < f(g) + \varepsilon.$$

Gdy więc jest $f(g)$ liczbą dodatnią, to mogę tak małe ε obrać, iż jest $f(g) - \varepsilon$ dodatnie, przeto w przedziale $(g - d, g + d)$ funkcya ma tylko wartości dodatnie; gdy jest $f(g)$ liczbą ujemną, to obierzemy tak małe ε, iż $f(g) + \varepsilon$ jest i nadal liczbą ujemną, a więc w przedziale $(g - d, g + d)$

funkcya jest tylko ujemną. Ale mogę obrać a_n tak bliskie g, iż liczba a_n jest w przedziale $(g-d, g)$, liczba b_n jest w przedziale $(g, g+d)$, bo jest $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ czyli $b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$; możemy obrać n tak wielkie, iż $\frac{b-a}{2^n}$ jest dość małą liczbą; ale jest $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$, kiedyśmy doszli do wniosku, że w przedziale $(g-d, g+d)$ ma funkcya wartości jednego znaku; doszliśmy do sprzeczności czyli być musi $f(g)=0$.

We wypadku funkcyi $y = x^2 + x - 6$ i przedziału $(1, 4)$ otrzymujemy kolejno przedziały: $(1, 2\frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2})$, $(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{8})$, $(1\frac{15}{16}, 2\frac{1}{8})$, $(1\frac{15}{16}, 2\frac{1}{32})$, $(1\frac{63}{64}, 2\frac{1}{32})$,..... i można się przekonać, że lewe końce tych przedziałów dają ciąg:

$$1,\ 1\tfrac{3}{4},\ 1\tfrac{3}{4},\ 1\tfrac{15}{16},\ 1\tfrac{15}{16},\ 1\tfrac{63}{64},\ldots$$

mający granicę 2; podobnie ciąg, utworzony z prawych końców tych przedziałów:

$$2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{32},\ 2\tfrac{1}{32},\ldots$$

także ma granicę 2. I jest dla $x=0$ $y = 2^2 + 2 - 6 = 0$.

Że granicą powyższego ciągu będzie liczba 2 można się w ten sposób przekonać. Przedział $(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{8})$ mogę tak napisać: $\left(1\frac{2^{2.1}-1}{2^{2.1}}, 2\frac{1}{2^{2.1+1}}\right)$, przedział $(1\frac{15}{16}, 2\frac{1}{32})$ mogę tak napisać: $\left(1\frac{2^{2.2}-1}{2^{2.2}}, 2\frac{1}{2^{2.2+1}}\right)$ więc może ogólnie jest:

$$\left(1+\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}},\ 2+\frac{1}{2^{2k+1}}\right),$$

dla $k=1$ dostajemy rzeczywiście $(1+\frac{3}{4}, 2+\frac{1}{8})$, a dla $k=2$ przedział $(1+\frac{15}{16}, 2+\frac{1}{32})$. Otóż jest $\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}$, więc przedział będzie $\left(2-\frac{1}{2^{2k}}, 2+\frac{1}{2^{2k+1}}\right)$. Otóż dla

$x = 2 - \frac{1}{2^{2k}}$ jest $y = \left(2 - \frac{1}{2^{2k}}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2^{2k}}\right) - 6 = 4 -$

$- \frac{4}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{4k}} + 2 - \frac{1}{2^{2k}} - 6 = - \frac{5}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{4k}} = \frac{1 - 5 . 2^{2k}}{2^{4k}}$;

gdy jest $k = 1, 2, \ldots$, to jest więc y liczbą ujemną dla lewego końca tego przedziału; dla $x = 2 + \frac{1}{2^{2k+1}}$ jest

$y = \left(2 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^2 + 2 + \frac{1}{2^{2k+1}} - 6 = 4 + \frac{4}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{4k+2}} +$

$+ 2 + \frac{1}{2^{2k+1}} - 6 = \frac{5}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{4k+2}}$ jest więc liczbą dodatnią. Przedział powyższy ma więc tę własność, że na jego lewym końcu funkcya jest ujemna, a na prawym jest dodatnia. Długość odcinka, którego końcami są obrazy geom. t. zw. lewego i prawego końca przedziału wynosi

$2 + \frac{1}{2^{2k+1}} - 2 + \frac{2}{2^{2k}} = \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k}}$ i dąży więc do zera, gdy liczba k coraz bardziej rośnie. Możemy przedziały:

$$\left(2 - \frac{1}{2^{2k}},\ 2 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$$

wziąć zamiast przedziałów, o których mowa w dowodzie. Tu zresztą łatwo znaleść tę wartość na zmienną niezależną x, dla której funkcya y staje się zerem, bo w obecnym wypadku otrzymujemy równanie $x^2 + x - 6 = 0$ stopnia drugiego, którego pierwiastkami są liczby $x = 2$, $x = -3$.

§. 32. Uważajmy znów funkcyę $y = x^2 + x - 6$ w przedziale $(1, 4)$; największą jej wartością jest liczba 14 (dla $x = 4$), a najmniejszą liczba -4 (dla $x = 1$). Zapytajmy, czy istnieją takie wartości na zmienną x w przedziale $(1, 4)$, iż funkcya będzie się równała jakiejkolwiek liczbie pośredniej między -4 i $+14$. Czy równa się y

liczbie 10? Weźmy liczbę $x = \frac{\sqrt{65} - 1}{2}$; ponieważ jest $8 < \sqrt{65} < 9$, więc jest:

$$\frac{8-1}{2} = 3\tfrac{1}{2} < \frac{\sqrt{65}-1}{2} < \frac{9-1}{2} = 4,$$

a więc należy do przedziału (1, 4) i jest:

$$y = \left(\frac{\sqrt{65}-1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{65}-1}{2} - 6 = \frac{65 - 2\sqrt{65} + 1}{4} +$$

$$+ \frac{\sqrt{65}-1}{2} - 6 = \frac{66}{4} - \frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{66}{4} - \frac{1}{2} - 6 =$$

$$= 16 - 6 = 10.$$

Uważajmy dalej (§. 13.) funkcyę $y = E(x)$ w przedziale (2, 3); otóż jest $E(2) = 2$ i jak długo liczba x jest mniejszą od liczby 3 i nie mniejszą od liczby 2 jest $E(x) = 2$ ale $E(3) = 3$.

Mnogość wartości funkcyi dla przedziału (2, 3) składa się z dwu liczb 2, 3, mniejsza (2) jest najmniejszą wartością funkcyi, większa (3) jest największą wartością funkcyi w przedziale (2, 3).

Gdy wezmę liczbę np. 2·8 pośrednią między liczbami 2 i 3, to nie ma liczby x, zawartej w przedziale (2, 3), żeby było $E(x) = 2{\cdot}8$.

Otóż udowodnimy ogólnie następujące twierdzenie: Jeżeli funkcya $y = f(x)$ jest ciągłą w każdym punkcie przedziału (a, b), jeżeli liczba M jest największą wartością funkcyi w tym przedziale, liczba m najmniejszą wartością funkcyi, to, gdy jest $M > m$, istnieje liczba c należąca do przedziału (a, b) taka, iż $f(c)$ równa się liczbie C pośredniej między liczbami M, m t. zn. że jest $f(c) = C$, gdzie jest $m < C < M$.

Funkcya bowiem jest ciągła, a więc istnieją liczby g, k przedziału (a, b) takie, że jest $f(g) = M$, $f(k) = m$

i uważajmy przedział (g, k), jeżeli jest $g < k$, lub przedział (k, g), jeżeli jest $g > k$; ponieważ on nie wychodzi poza przedział (a, b), więc funkcya jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału nowego, ale także ciągła jest funkcya $z = f(x) - C$. Funkcya $y = f(x)$ jest ciągła w dowolnym punkcie l przedziału (g, k) lub (k, g) t. zn. do każdej dodatniej liczby ε można znaleść taką dodatnią liczbę h, iż, gdy jest $|x - l| < h$, to jest $|f(x) - f(l)| < \varepsilon$; otóż jest $[f(x) - C] - [f(l) - C] = f(x) - f(l)$ a więc, gdy jest $|x - l| < h$, to jest też:

$$|[f(x) - C] - [f(l) - C]| < \varepsilon,$$

czyli funkcya $z = f(x) - C$ jest ciągła. Dla $x = g$ jest $z = f(g) - C = M - C > 0$, dla $x = k$ jest $z = f(k) - C = m - C < 0$ czyli funkcya $z = f(x) - C$ na jednym końcu przedziału (g, k) czy (k, g) jest dodatnia, na drugim ujemna, a więc gdzieś pomiędzy liczbami k, g staje się conajmniej raz zerem np. dla liczby $x = d$ t. zn. jest:

$$z = f(d) - C = 0,$$

czyli $f(d) = C$, a więc twierdzenie udowodnione.

§. 33. Uważajmy funkcyę ciągłą $y = x^2 + 1$ i nadawajmy na zmienną niezależną x wartości od 0 do 5; dla tych wartości funkcya przyjmie też różne wartości, a największą z pomiędzy nich przyjmie, jak widać, wartość 26, najmniejszą 1.

Powiemy: Gdy x jest w przedziale (0, 5), to największa wartość funkcyi wynosi 26, najmniejsza 1. Wartości funkcyi *wahają się* w przedziale (0, 5) od wartości 1 do 26; różnicę 26 — 1 t. j. między największą a najmniejszą wartością, jakie funkcya ma w przedziale (0, 5), nazywamy *wahaniem się* funkcyi w przedziale (0, 5) albo z łacińskiego *oscylacyą*. Oscylacya funkcyi $y = x^2 + 1$ w przedziale (0, 5) wynosi więc 25.

Uważajmy przedziały »*częściowe*« przedziału (0, 5) np. przedziały (0, 2), (2, 4), (4, 5).

W przedziale (0, 2) najmniejsza wartość badanej funkcyi wynosi 1, największa wartość wynosi 5, oscylacya wynosi $5 - 1 = 4$.

W przedziale (2, 4) najmniejsza wartość funkcyi wynosi $m = 5$, a największa wartość wynosi 17, stąd oscylacya wynosi $17 - 5 = 12$.

W przedziale (4, 5) najmniejsza wartość funkcyi wynosi $m = 17$, a największa wartość wynosi $M = 26$, więc oscylacya wynosi $M - m = 26 - 17 = 9$.

Widzimy więc, że gdy przedział (0, 5) podzielimy na przedziały częściowe (0, 2), (2, 4), (4, 5), to największa wartość funkcyi w przedziałach częściowych wynosiła 5, 17, 26, a więc nie więcej, niż w przedziale, jak możemy powiedzieć, całkowitym (0, 5); gdyby bowiem w jednym z przedziałów częściowych największa wartość funkcyi była większa niż największa wartość 26 w przedziale całkowitym, toby w przedziale całkowitym największą wartością była ta liczba większa od liczby 26, a nie liczba 26.

Podobnie najmniejsze wartości funkcyi w przedziałach częściowych (0, 2), (2, 4), (4, 5) są 1, 5, 17, a więc nie mniej, niż najmniejsza wartość funkcyi w przedziale całkowitym (0, 5); gdyby bowiem w jednym z przedziałów częściowych najmniejsza wartość funkcyi była mniejszą liczbą, niż najmniejsza wartość 1 w przedziale całkowitym, toby oczywiście w przedziale całkowitym najmniejszą wartością była ta liczba mniejsza od liczby 1, a nie liczba 1.

Jeżeli liczba M jest największą wartością funkcyi w przedziale całkowitym (a, b), to największa wartość funkcyi w jakimkolwiek z przedziałów częściowych przedziału (a, b) nie może być większa od liczby M, jest równa M, albo mniejsza od M.

Jeżeli liczba m jest najmniejszą wartością funkcyi w przedziale całkowitym (a, b), to najmniejsza wartość funkcyi w jakimkolwiek z przedziałów częściowych przedziału (a, b) nie może być mniejsza od liczby m, jest równą m albo większą od m.

Oscylacya funkcyi w przedziale (0, 5) wynosi 25, w przedziałach częściowych (0, 2), (2, 4), (4, 5) wynosi 4, 12, 9, a nie więcej niż 25, bo w różnicach $M - m$ największa wartość funkcyi w przedziale częściowym mogłaby być mniejszą niż największa wartość funkcyi w przedziale całkowitym, a najmniejsza wartość funkcyi w przedziale częściowym mogła być większą niż najmniejsza wartość funkcyi w przedziale całkowitym — odjemna mogła zmaleć, odjemnik mógł wzróść, różnica mogła więc zmaleć.

Rozłóżmy przedział (0, 5) na przedziały: $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 1\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}, 2)$, $(2, 2\frac{1}{2})$, $(2\frac{1}{2}, 3)$, $(3, 3\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}, 4)$, $(4, 4\frac{1}{2})$, $(4\frac{1}{2}, 5)$; największe wartości funkcyi wynoszą: $1\frac{1}{4}$, 2, $3\frac{1}{4}$, 5, $7\frac{1}{4}$, 10, $13\frac{1}{4}$, 17, $21\frac{1}{4}$, 26; najmniejsze wartości funkcyi w tych przedziałach częściowych wynoszą: 1, $1\frac{1}{4}$, 2, $3\frac{1}{4}$, 5, $7\frac{1}{4}$, 10, $13\frac{1}{4}$, 17, $21\frac{1}{4}$; oscylacye wynoszą więc: $1\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$, $2 - 1\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4} - 2 = 1\frac{1}{4}$, $5 - 3\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{4} - 5 = 2\frac{1}{4}$, $10 - 7\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$, $13\frac{1}{4} - 10 = 3\frac{1}{4}$, $17 - 13\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$, $21\frac{1}{4} - 17 = 4\frac{1}{4}$, $26 - 21\frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$.

Widać, że można było podzielić przedział (0, 5) na tak małe przedziały częściowe, iż w każdym z nich oscylacya wynosi mniej niż 5. (Musimy zauważyć, że oscylacya jest albo liczbą dodatnią, gdy jest $M > m$, albo zerem, gdy jest $M = m$ np. dla funkcyi $y = E(x)$ [§. 13] w przedziale $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$ jest stale $y = 2$, więc $M = m = 2$ i oscylacya jest równa zeru).

Czy można przedział (0, 5) na tak małe przedziały częściowe podzielić, żeby w każdym z nich oscylacya wynosiła mniej niż np. 1? Rozdzielmy przedział (0, 5) na 50 małych przedziałów: (0, 0·1), (0·1, 0·2), (0·2, 0·3), (0·3, 0·4), ...(2·0, 2·1).... (4·0, 4·1).... (4·9, 5). Największe wartości funkcyi w częściowych przedziałach są odpowiednio: 1·01, 1·04, 1·09, 1·16,.... 5·41,.... 17·81,.... 26; najmniejsze wartości funkcyi w częściowych przedziałach są odpowiednio: 1, 1·01, 1·04, 1·09.... 5.... 17.... 25·01; oscylacye wynoszą więc: $1{\cdot}01 - 1 = 0{\cdot}01$, $1{\cdot}04 - 1{\cdot}01 = 0{\cdot}03$, $1{\cdot}09 - 1{\cdot}04 = 0{\cdot}05$, $1{\cdot}16 - 1{\cdot}09 = 0{\cdot}07, \ldots 5{\cdot}41 - 5 = 0{\cdot}41, \ldots 17{\cdot}81 - 17 = 0{\cdot}81, \ldots$, $26 - 25{\cdot}01 = 0{\cdot}99$. Oscylacya wynosi więc najwięcej w ostatnim przedziale częściowym i wynosi mniej niż 1, o co nam chodziło.

Czy można przedział (0, 5) podzielić na tak małe przedziały częściowe, żeby w każdym z nich oscylacya wynosiła mniej niż np. 0·1? W tym celu podzielmy przedział (0, 5) na 500 małych przedziałów (0, 0·01), (0·01, 0·02) ...(1, 1·01)... (2, 2·01)... (3, 3·01),... (4, 4·01)... (4·99, 5). Największe wartości funkcyi w tych częściowych przedziałach są: 1·0001, 1·0004,...., 2·0201,...., 5·0401,....., 10·0601,..., 17·0801,..., 26; najmniejsze wartości funkcyi w tych przedziałach wynoszą: 1, 1·0001,... 2... 5... 10... 17... 25·9001; oscylacye więc wynoszą: $1{\cdot}0001 - 1 = 0{\cdot}0001$, $1{\cdot}0004 - 1{\cdot}0001 = 0{\cdot}0003, \ldots\ldots$ $2{\cdot}0201 - 2 = 0{\cdot}0201, \ldots\ldots$, $5{\cdot}0401 - 5 = 0{\cdot}0401, \ldots\ldots$, $10{\cdot}0601 - 10 = 0{\cdot}0601, \ldots\ldots$ $17{\cdot}0801 - 17 = 0{\cdot}0801 \ldots\ldots$ $26 - 25{\cdot}9001 = 0{\cdot}0999$; w ostatnim częściowym przedziale wynosi oscylacya 0·0999 i więcej niż w innych; we wszystkich tych przedziałach wynosi mniej, niż 0·1.

Można się ogólnie zapytać, czy można przedział (0, 5) podzielić na takie częściowe przedziały, iżby w każdym z nich oscylacya wynosiła mniej, niż naprzód dana dodatnia liczba ε, choćby była bardzo małą.

Udowodnimy ogólne twierdzenie: Jeżeli funkcya $y = f(x)$ jest ciągła dla każdej wartości x przedziału (a, b) [np. (0, 5)], to do każdej dodatniej liczby ε można znaleść takie dodatnie d, iżby w każdym z przedziałów częściowych $(a, a + d)$, $(a + d, a + 2d)$, $(a + 2d, a + 3d), \ldots$ oscylacya była mniejsza od liczby ε.

Dowód polega na tem, że wykażemy, iż niemożebność wyszukania liczby d o własności opisanej nie jest zgodna z ciągłością funkcyi.

Najpierw udowodnimy, że można znaleść liczbę dodatnią h_1 taką, że w przedziale $(a, a+h_1)$ oscylacya będzie mniejsza od liczby dodatniej ε.

Powiedzieliśmy bowiem, że funkcya $y=f(x)$ jest ciągła i dla $x=a$; do liczby dodatniej $\frac{\varepsilon}{4}$ można więc znaleść taką dodatnią liczbę h_1, iż dla liczb x:

$$|x-a|<h_1 \text{ i dla liczb } |x-a|=h_1$$

jest:

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Jeżeli dla $x=x_1$ przedziału $(a, a+h_1)$ ma funkcya największą wartość $f(x_1)$, dla $x=x_2$ tego samego przedziału ma funkcya najmniejszą wartość $f(x_2)$ w tym przedziale, to jest:

$$|f(x_1)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f(x_2)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{4},$$

a stąd oscylacya:

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f(a)+f(a)-f(x_2),$$

więc:

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|f(x_1)-f(a)|+|f(a)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2},$$

bo:

$$|f(a)-f(x_2)|=|f(x_2)-f(a)|;$$

ale różnica

$$f(x_1)-f(x_2)$$

nie może być ujemna, więc dla tego przedziału $(a, a+h_1)$ oscylacya wynosi mniej niż $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ponieważ dalej w punkcie $a+h_1$ (o ile nie przekracza liczby b) znów funkcya jest ciągła, więc można znów znaleść liczbę dodatnią h_2, iż w przedziale $(a+h_1,$

$a + h_1 + h_2$) znów oscylacya wynosi mniej niż $\frac{\varepsilon}{2}$; podobnie znajdziemy dodatnią liczbę h_3, iż w przedziale $(a + h_1 + h_2, a + h_1 + h_2 + h_3)$ znów oscylacya jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$; w ten sposób postępujemy dalej, aż osiągniemy liczbę b.

Dlaczegoby ten podział na przedziały częściowe $(a, a + h_1), (a + h_1, a + h_1 + h_2) \ldots$ nie był możliwy? W każdym z punktów $a, a + h_1, a + h_1 + h_2, a + h_1 + h_2 + h_3 \ldots$ można wynaleść odpowiednie h, tylko mogłoby się zdarzyć, iż liczby b nie możnaby osiągnąć przez to, że liczby h_1, h_2, $h_3, \ldots$ maleją i mają granicę zero tak, że ciąg liczb:

$$a + h_1, \; a + h_1 + h_2, \; a + h_1 + h_2 + h_3, \ldots$$

ma granicę c albo równą liczbie b albo mniejszą od b.

Ale dla liczby c jest funkcya ciągłą, a więc można znaleść taką dodatnią liczbę h, iż gdy jest $|x - c| < h$ lub $|x - c| = h$ to jest

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

dla przedziału $(c - h, c + h)$, oscylacya wynosi więc mniej niż $\frac{\varepsilon}{2}$, jak widzieliśmy.

Ponieważ granicą ciągu powyższego jest c, więc znajdzie się taki wyraz np. $a + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n$ na n-tem miejscu, iż wyraz ten leży między $c - h$ i c; przeto w przedziale

$$(a + h_1 + h_2 + \ldots + h_n, \; c + h),$$

który jest częścią przedziału $(c - h, c + h)$, jest oscylacya funkcyi mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$; doszedłszy więc do liczby

$$a + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$$

można znaleść przedział

$$(a + h_1 + h_2 + \ldots + h_n, \; c + h),$$

w którym oscylacya jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$ i który to przedział przekracza liczbę c, czyli liczby $h_1, h_2, h_3, \ldots$ nie muszą mieć granicy zero, i przedziałów od a do b będzie skończona ilość.

Najmniejszą z liczb $h_1, h_2, h_3, \ldots$ oznaczmy przez d; jest ona dodatnia, bo żadna z liczb $h_1, h_2, h_3, \ldots$ nie jest zerem ani liczbą ujemną i jest ich skończona ilość. Weźmy przedział $(a, a+d)$, on nie wychodzi poza przedział $(a, a+h_1)$, a więc oscylacya jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$; gdyby przedział $(a, a+d)$ był krótszy od przedziału $(a, a+h_1)$, to przedział $(a+d, a+2d)$ albo jeszcze jest w przedziale $(a, a+h_1)$, albo już koniec jego $a+2d$ leży w przedziale $(a+h_1, a+h_1+h_2)$, bo poza ten przedział przechodzić nie może, gdyż liczba d nie jest większa od liczby h_2. Jeżeli przedział $(a+d, a+2d)$ nie wychodzi poza przedział $(a, a+h_1)$ to oscylacya musi w nim być mniejsza od liczby $\frac{\varepsilon}{2}$. Jeżeli zaś przedział $(a+d, a+2d)$ częścią leży w przedziale $(a, a+h_1)$, a częścią w przedziale $(a+h_1, a+h_1+h_2)$, to oscylacya przedziału $(a+d, a+2d)$ nie może być większa od oscylacyi przedziału obejmującego obydwa przedziały $(a, a+h_1)$, $(a+h_1, a+h_1+h_2)$ t. zn. przedziału $(a, a+h_1+h_2)$.

Jaką jest więc oscylacya przedziału $(a, a+h_1+h_2)$?

Oznaczmy przez M_1 i M_2 największe wartości funkcyi w przedziale $(a, a+h_1)$ i w przedziale $(a+h_1, a+h_1+h_2)$, przez m_1 i m_2 najmniejsze wartości funkcyi w przedziale $(a, a+h_1)$ i w przedziale $(a+h_1, a+h_1+h_2)$.

Wartość funkcyi w przedziale $(a, a+h_1+h_2)$ nie może przekraczać większej z liczb M_1, M_2, o ile nie są sobie równe, podobnie nie może być mniejsza od mniejszej z liczb m_1, m_2, czyli największą wartością funkcyi w przedziale $(a, a+h_1+h_2)$ jest większa z liczb M_1, M_2, a gdyby sobie były równe, to jest nią liczba $M_1 = M_2$; najmniejszą wartością funkcyi jest liczba mniejsza z liczb m_1, m_2, a gdyby były sobie równe, to jest nią liczba $m_1 = m_2$.

Wystarczy odróżnić dwa wypadki: 1) największą wartością funkcyi w przedziale $(a, a + h_1 + h_2)$ jest M_1, najmniejszą m_1; tem samem jest $M_2 < M_1$ lub $M_2 = M_1$, $m_2 > m_1$ lub $m_2 = m_1$; 2) największą wartością funkcyi w przedziale $(a, a + h_1 + h_2)$ jest M_2, a najmniejszą m_1 — tem samem jest $M_1 < M_2$, zaś $m_2 > m_1$ lub $m_2 = m_1$.

Wypadki, kiedy największą wartością jest M_1, a najmniejszą m_2 lub największą jest M_2, najmniejszą m_2, zupełnie się tak załatwia, jak 2) lub 1).

1) Oscylacyą w przedziale $(a, a+h_1+h_2)$ jest $M_1 - m_1$ czyli jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$ czyli oscylacya funkcyi w prze działe $(a + d, a + 2d)$ jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$. Wypadek załatwiony.

2) Oscylacyą w przedziale $(a, a+h_1+h_2)$ jest $M_2 - m_1$.

Otóż jakie są względem siebie liczby M_1, m_2? Oczywiście albo jest $M_1 < m_2$ albo $M_1 = m_2$ albo $M_1 > m_2$.

Gdy jest $M_1 < m_2$, to liczby M_1, m_1, M_2, m_2 idą w porządku rosnącym następująco:

$$m_1,\ M_1,\ m_2,\ M_2,$$

czyli funkcya w przedziale $(a, a + h_1)$ jest zawarta między M_1, m_1, a w przedziale $(a + h_1, a + h_1 + h_2)$ zawarta między liczbami M_2, m_2, nie przyjmuje więc funkcya wartości od M_1 do m_2, a że w przedziale $(a, a + h_1 + h_2)$ jest funkcyą ciągłą, więc to być nie może (§. 32.).

Gdy jest $M_1 = m_2$, to jest $M_1 - m_2 = 0$, przeto jest:

$$M_2 - m_1 = M_2 - m_1 + M_1 - m_2 = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

czyli oscylacya $M_2 - m_1$ jest mniejsza od ε w przedziale $(a, a + h_1 + h_2)$, a więc oscylacya funkcyi w przedziale $(a + d, a + 2d)$ jest mniejsza od ε.

Gdy jest $M_1 > m_2$, to jest $M_1 - m_2 > 0$, więc jest:

$$M_2 - m_1 < M_2 - m_1 + M_1 - m_2 = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

czyli oscylacya $M_2 - m_1$ jest mniejsza od ε w przedziale $(a, a + h_1 + h_2)$, a więc oscylacya funkcyi w przedziale $(a + d, a + 2d)$ jest mniejsza od ε.

Uważajmy dalej przedział $(a + 2d, a + 3d)$; albo on zostaje w przedziale $(a + h_1, a + h_1 + h_2)$ albo poza ten przedział wychodzi itd. — widać, że całe dotychczasowe rozumowanie się powtórzy.

Udowodniliśmy więc zapowiedziane twierdzenie.

§. 34. Uważajmy łuk AB, jak na fig. 27., i narysujmy cięciwę AB; widać, że istnieje styczna do łuku w punkcie pośrednim D równoległa do cięciwy AB.

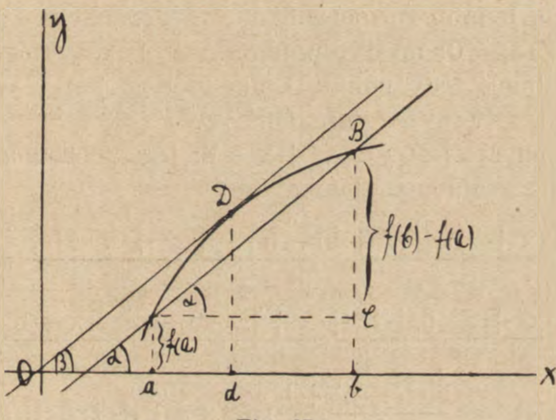

Fig. 27.

Jeżeli równanie krzywej jest $y = f(x)$ i punkt A ma odciętą a, rzędną f(a), punkt B odciętą b, rzędną f(b), kąt nachylenia cięciwy i stycznej do osi $x'x$ oznaczymy przez α i β, to z powodu równoległości jest $\alpha = \beta$, a stąd $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Z trójkąta ABC widać, że jest:

$$BC = f(b) - f(a) = AC \,.\, \operatorname{tg} \alpha = (b - a) \operatorname{tg} \alpha,$$

stąd:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

nadto wiadomo z §. 23., że $\operatorname{tg}\beta$ równa się wartości pochodnej funkcyi $f(x)$, którą to pochodną możemy oznaczyć znakiem $f'(x)$, gdy zmienna niezależna x będzie miała wartość równą odciętej punktu pośredniego D; oznaczmy przez d odciętą punktu D, więc $\operatorname{tg}\beta = f'(d)$; przeto z równości $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ otrzymujemy:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(d);$$

stanowi to t. zw. *twierdzenie średniej wartości.*

Gdyby w przypadku szczególnym punkty A i B leżały na osi $x'x$, to cięciwa AB byłaby odcinkiem osi $x'x$, a styczna byłaby równoległą do osi $x'x$ czyli $\alpha = \beta = 0$, a więc $f'(d) = 0$; między punktami A, B, dla których jest $y = 0$, istnieje tedy punkt D, dla którego jest $y' = 0$; stanowi to t. zw. *twierdzenie Rolle'go.*

Niech np. jest $y = x^2 + x - 6$; jego pochodną obliczy się, biorąc granicę z ułamka:

$$\frac{\{(x+h)^2 + (x+h) - 6\} - \{x^2 + x - 6\}}{h} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 6 - x^2 - x + 6}{h} =$$

$$= \frac{2xh + h^2 + h}{h} = 2x + h + 1;$$

dla $h = 0$ granicą będzie:

$$y' = 2x + 1.$$

Dla $x = 2$ i $x = -3$ jest $y = 0$ i w punkcie $x = -\frac{1}{2}$ między liczbami -3 i 2 jest $y' = 2.(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$.

Podobnie weźmy punkt A na tej krzywej o odciętej $a = 1$, rzędnej $f(a) = f(1) = 1 + 1 - 6 = -4$ i punkt B o odciętej $b = 4$, rzędnej $f(b) = f(4) = 4^2 + 4 - 6 = 14$; cięciwa AB tworzy z osią $x'x$ kąt α taki, iż jest:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{14 - (-4)}{4 - 1} = \frac{18}{3} = 6.$$

W punkcie D na łuku AB o odciętej $d = \frac{5}{2}$ narysujmy styczną, która z osią $x'x$ tworzy kąt β taki, iż jest:

$$\operatorname{tg}\beta = f'(d) = f'(\tfrac{5}{2}) = 2 \,.\, \tfrac{5}{2} + 1 = 6,$$

a więc jest:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta;$$

styczna w punkcie D jest równoległa do cięciwy AB.

§. 35. Udowodnimy ściśle twierdzenie Rolle'go, które opiewa w ten sposób: Jeżeli funkcya $y = f(x)$ ma w każdym punkcie przedziału (a, b) określoną pochodną i jest $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, to istnieje taki punkt d przedziału (a, b) między liczbami a i b, iż jest pochodna $f'(d) = 0$.

Jeżeli c jest dowolną liczbą przedziału (a, b), to zakładamy, że istnieje pochodna $f'(c)$, a więc ułamek:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

dąży do granicy $f'(c)$ dla $h = 0$; ponieważ mianownik zbliża się do zera, to i licznik zdąża do zera, bo w przeciwnym razie ułamek rósłby nieograniczenie co do bezwzględnej wartości, a więc do każdej dowolnie małej dodatniej liczby ε można znaleść taką liczbę dodatnią η, iż jest:

$$|f(c + h) - f(c)| < \varepsilon,$$

gdy jest $|h| < \eta$; połóżmy $c + h = x$; gdy więc jest $|x - c| = |h| < \eta$, to jest $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, czyli funkcya jest ciągła dla $x = c$. Funkcya $y = f(x)$ jest tedy ciągła w całym przedziale (a, b); — według §. 30. istnieje taka liczba d przedziału (a, b), iż $f(d)$ równa się M, gdzie M jest największą wartością funkcyi, gdy zmienna niezależna zmienia się od a do b; istnieje też liczba g przedziału (a, b) taka, że jest $f(g) = m$, gdzie m jest najmniejszą wartością funkcyi, gdy x zmienia się od a do b.

Jest albo $M = m$ albo $M > m$.

Gdy jest $M = m$, to ponieważ jest $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, więc jest w całym przedziale (a, b) funkcya $y = 0$ stale, tak, iż pochodna jest równa zeru w każdym punkcie (a, b); twierdzenie w tym wypadku trywialnym udowodnione.

Gdy jest $M > m$, to ponieważ jest $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, jest: 1) $M = 0$, $m < 0$, albo 2) $M > 0$, $m = 0$, albo 3) jest $M > 0$, $m < 0$.

Np. funkcya $y = x^2 - 3x + 2$ dla $x = 1$ ma wartość $y = 1 - 3 + 2 = 0$ i dla $x = 2$ ma wartość $y = 4 - 6 + 2 = 0$, w przedziale (1, 2) jest zerem lub ujemne, a nigdy dodatnie, więc jest $M = 0$, zaś $m < 0$ i mianowicie jest $m = -\frac{1}{4}$. Funkcya zaś $y = 3x - x^2$ ma dla $x = 0$ wartość $y = 3.0 - 0^2 = 0$, dla $x = 3$ wartość $y = 9 - 9 = 0$, w przedziale (0, 3) nigdy nie jest ujemną tak, iż jest $m = 0$, $M > 0$ i mianowicie jest $M = 4\frac{1}{2}$. Funkcya $y = \sin x$ ma dla $x = 0$ wartość $y = 0$ i dla $x = 2\pi$ wartość $y = 0$, a w przedziale $(0, 2\pi)$ jest dodatnie i ujemne i przeto jest $M > 0$, $m < 0$ a mianowicie jest $M = 1$, $m = -1$.

1) Gdy jest $M = 0$, $m < 0$, to weźmy punkt g, dla którego jest $f(g) = m$; otóż jest $a < g < b$, bo jest $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. W sąsiedztwie punktu g funkcya nie może być mniejsza od liczby m, może być jej równa lub większa od niej; założyliśmy, że istnieje pochodna funkcyi dla $x = g$ $f'(g)$, ona jest granicą ułamka $\frac{f(g+h) - f(g)}{h}$, gdy h dąży do zera, będąc albo ujemne albo dodatnie.

Pokażemy, że jest właśnie $f'(g) = 0$. Niech jest $h > 0$; ponieważ w sąsiedztwie punktu g funkcya nie jest mniejsza od liczby m, więc różnica:

$$f(g + h) - f(g) = f(g + h) - m$$

nie może być ujemna; ponieważ jest $h > 0$, więc cały ułamek nie może być ujemny, a granica liczby nieujemnej nie jest ujemna, jest więc 0 lub dodatnia, czyli jest:

$$f'(g) \geq 0.$$

Niech dalej jest $h < 0$, to licznik dalej nie jest ujemny, więc cały ułamek nie jest dodatni, przeto granica nie jest dodatnia, albo jest zerem albo ujemna:

$$f'(g) \leq 0.$$

Jakże pogodzić obie konsekwencye? Co mają wspólnego?

Oto tylko w ten sposób nie są sprzeczne, że jest:

$$f'(g) = 0.$$

Twierdzenie więc w tym wypadku udowodnione.

2) Niech jest $m = 0$, $M > 0$; istnieje liczba d w przedziale (a, b) i taka, że jest $a < d < b$ i $f(d) = M$. Funkcya w sąsiedztwie liczby d nie może być większa od liczby M.

Założyliśmy, że istnieje pochodna $f'(d)$ i udowodnimy, że jest $f'(d) = 0$. Pochodna $f'(d)$ jest granicą ułamka $\frac{f(d+h) - f(d)}{h}$ dla $h = 0$. Niech jest $h > 0$; licznik

$$f(d+h) - f(d) = f(d+h) - M$$

nie jest dodatni i ułamek nie jest dodatni, przeto jest:

$$f'(d) \leq 0.$$

Niech jest $h < 0$; licznik nadal nie jest dodatni i ułamek nie jest ujemny, przeto jest $f'(d) \geq 0$; pogodzić się dadzą obie konsekwencye równością $f'(d) = 0$. Twierdzenie więc w tym wypadku udowodnione.

3) Gdy jest $M > 0$, $m < 0$, $f(d) = M$, $f(g) = m$ zajmujemy się, jak pod 1) lub 2), punktem g lub d i wykazujemy, że jest $f'(d) = 0$, $f'(g) = 0$.

Twierdzenie więc całkowicie udowodnione.

§. 36. Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia średniej wartości, które ściśle wysłowimy w ten sposób: Jeżeli funkcya $y = f(x)$ ma pochodną określoną w każdym punkcie przedziału (a, b), to istnieje liczba d pośrednia między liczbami a, b $(a < d < b)$, iż jest:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(d).$$

Utwórzmy ułamek: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ i oznaczmy jego wartość przez H:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = H,$$

stąd jest:

$$f(b) - f(a) = H.(b - a).$$

Uważajmy funkcyę:

$$z = f(x) - f(a) - H(x - a);$$

ona jest ciągła, bo jest ciągłą funkcya $y = f(x)$ i funkcya $u = Hx$; jeżeli c jest dowolną liczbą przedziału (a, b), to jest:

$$\{f(x) - f(a) - H(x - a)\} - \{f(c) - f(a) - H(c - a)\} =$$
$$= f(x) - f(a) - Hx + Ha - f(c) + f(a) + Hc - Ha =$$
$$= f(x) - f(c) - Hx + Hc = f(x) - f(c) - H(x - c);$$

nadto jest:

$$|f(x) - f(c) - H(x - c)| < |f(x) - f(c)| + |H(x - c)|;$$

stąd widoczne, że funkcya z jest ciągła. Funkcya z ma pochodną w każdym punkcie x przedziału (a, b), bo ma ją funkcya $y = f(x)$. Pochodna z' jest granicą ułamka:

$$\frac{\{f(x+h) - f(a) - H[(x+h) - a]\} - \{f(x) - f(a) - H(x - a)\}}{h} =$$

$$= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - H;$$

granicą dla $h = 0$ jest więc $z' = f'(x) - H$.

Nadto dla $x = a$ jest $z = f(a) - f(a) - H(a - a) = 0$, dla $x = b$ jest $z = f(b) - f(a) - H(b - a) = H(b - a) - H(b - a) = 0$; znajdujemy się w takich warunkach, iż możemy się powołać na twierdzenie Rollego; istnieje tedy liczba d zawarta między liczbami a, b ($a < d < b$), iż jest $z' = 0$ t. zn. jest $f'(d) - H = 0$, więc jest $H = f'(d)$ czyli:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(d),$$

c. b. d. u.[1]).

§. 37. Wyciągniemy stąd wniosek następujący.

Kładąc zamiast b jakąkolwiek liczbę x przedziału (a, b) i zamiast d liczbę ξ zawartą między liczbami (a, x) [$a < \xi < x$], co wolno, to otrzymujemy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$

Załóżmy, że jest stale w przedziale (a, b) pochodna równa zeru; z równości $f(\xi) = 0$ mamy $f(x) - f(a) = 0$ czyli stale jest $f(x) = f(a)$ t. zn. funkcya równa się stałej liczbie $f(a)$.

Wniosek ten wypowie się słowami: Jeżeli w przedziale (a, b) funkcya $y = f(x)$ ma pochodną stale równą zeru, to y jest stałą w przedziale (a, b).

Niech dalej dwie funkcye:

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

mają w każdym punkcie przedziału (a, b) jednakową pochodną:

$$f'(x) = \varphi'(x),$$

to funkcya y różni się od funkcyi z o stałą liczbę, czyli jest:

$$y = z + \text{stała}.$$

---

[1]) co było do udowodnienia; temi słowy kończy się wiele dowodów u greckiego matematyka Euklidesa (około 300 lat przed Chr.).

Albowiem uważajmy funkcyę:

$$u = f(x) - \varphi(x);$$

ona ma pochodną, która jest granicą dla $h = 0$ ułamka:

$$\frac{[f(x+h) - \varphi(x+h)] - [f(x) - \varphi(x)]}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h};$$

granicą jest więc:

$$u' = f'(x) - \varphi'(x),$$

przeto w całym przedziale (a, b) jest $u' = 0$; stąd wynika, że w całym przedziale (a, b) jest $u =$ stała czyli:

$$f(x) - \varphi(x) = \text{stała}$$
$$f(x) = \varphi(x) + \text{stała}$$
$$y = z + \text{stała}.$$

Stąd możemy podać wszystkie funkcye, które np. w danym przedziale mają pochodną równą $\cos x$; wiemy, że funkcya $y = \sin x$ ma właśnie pochodną:

$$y' = \cos x,$$

a więc funkcya:

$$\sin x + \text{stała},$$

jest najogólniejszą funkcyą, która ma pochodną, równą $\cos x$ np. funkcye:

$$\sin x + 1, \ \sin x - 1, \ \text{itd.}$$

mają pochodną, równą $\cos x$.

ROZDZIAŁ VII.

O całkach.

§. 38. **Przykład I.** Weźmy pod uwagę funkcyę $y = f(x)$ np. $y = x$ i obliczmy pewne jej wartości od $x = 0$ do $x = 1$. Jeżeli narysujemy obraz tej funkcyi, to ponieważ $y = x$

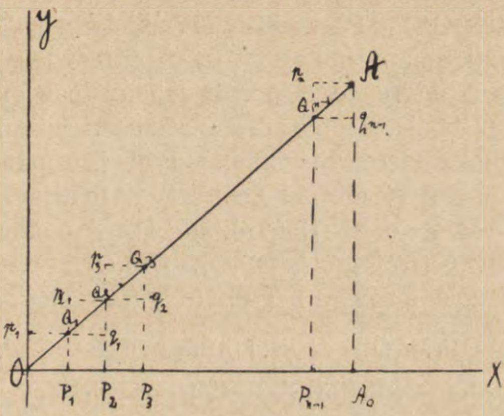

Fig. 28.

jest równaniem linii prostej, to otrzymamy odcinek linii prostej OA (fig. 28). Rozwiążemy następujące zagadnienie. Obliczyć pole S zawarte między odcinkiem OA, równoległą do osi yy' AA_0 i osią xx'. Można to łatwo wykonać zapomocą metody elementarnej, pomnożywszy liczbę wymiarową podstawy i wysokości i podzieliwszy ten iloczyn przez 2. Ale zrobimy to inaczej i w tym celu podzielmy odcinek $OA_0 = 1$ na n równych odcinków częściowych zapomocą punktów podziału $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ tak, że $OP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_{n-1}A_0$, i przez punkty podziału narysujmy równoległe do osi yy', które przetną odcinek OA w punktach $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$. Wykreślmy następnie kolejno z punktów $O, Q_1, Q_2 \ldots Q_{n-1}$ na prawo równoległe do osi xx', które przetną rzędne $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 \ldots P_{n-1}Q_{n-1}$, AA_0 odpowiednio w punktach $P_1, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$. Weźmy teraz pod uwagę prostokąty następujące: OP_1P_1O, $P_1P_2q_1Q_1$, $P_2P_3q_2Q_2$, $\ldots P_{n-1}A_0q_{n-1}Q_{n-1}$ i oznaczmy wielkości ich pól kolejno przez $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$, gdzie $r_1 = 0$. Podstawą każdego z tych prostokątów jest odcinek o długości $h = \frac{1}{n}$, a wysokością jest rzędna, której długość równa się wartości funkcyi w punktach $O, P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$. Widzimy więc, że suma r pól wszystkich prostokątów leży całkowicie wewnątrz pola S i w miarę tego, jak będziemy powiększali ilość punktów podziału, zmniejszając równocześnie długość każdego odcinka częściowego, suma tych prostokątów będzie się coraz mniej różniła od liczby S. Albowiem suma prostokątów różni się od pola trójkąta OA_0A o sumę równych sobie małych trójkątów $OP_1Q_1, Q_1q_1Q_2, \ldots\ldots Q_{n-1}q_{n-1}A$. Obliczmy pole każdego z tych trójkątów, to otrzymamy:

$OP_1Q_1 = \frac{1}{2} OP_1 . P_1Q_1 = \frac{1}{2} . h . f(h) = \frac{1}{2} . h . h = \frac{1}{2} h^2$, $Q_1q_1Q_2 = \frac{1}{2} Q_1q_1 . q_1Q_2 = \frac{1}{2} P_1P_2 . (P_2Q_2 - P_2q_1) = \frac{1}{2} P_1P_2(P_2Q_2 - P_1Q_1) = \frac{1}{2} h \big(f(2h) - f(h)\big) = \frac{1}{2} h(2h - h) = \frac{1}{2} h . h = \frac{1}{2} h^2$, $Q_2q_2Q_3 = \frac{1}{2} Q_2q_2 . q_2Q_3 = \frac{1}{2} P_2P_3(P_3Q_3 - P_3q_2) = \frac{1}{2} P_2P_3(P_3Q_3 - P_2Q_2) = \frac{1}{2} h \big(f(3h) - f(2h)\big) = \frac{1}{2} h(3h - 2h) = \frac{1}{2} h^2, \ldots$ $Q_{n-1}q_{n-1}A = \frac{1}{2} Q_{n-1}q_{n-1} . q_{n-1}A = \frac{1}{2} P_{n-1}A_0(A_0A - P_{n-1}Q_{n-1}) = \frac{1}{2} h \big(nh - (n-1)h\big) = \frac{1}{2} h . h = \frac{1}{2} h^2$. A więc suma s tych trójkątów równa się:

$$s = OP_1Q_1 + Q_1q_1Q_2 + Q_2q_2Q_3 + \ldots + Q_{n-1}q_{n-1}A =$$
$$= \tfrac{1}{2}h^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}h^2 = \tfrac{1}{2}(h^2 + h^2 + \ldots + h^2) = \tfrac{1}{2}n \, . \, h^2.$$

Ponieważ $h = \frac{1}{n}$, to podstawiając za h tę wartość, otrzymamy:

$$s = \frac{1}{2} n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}.$$

A więc, gdy liczba n będzie wzrastać nieograniczenie, to suma tych trójkątów $s = \frac{1}{2n}$ będzie dążyć do zera. Gdy tedy liczba n rośnie nieograniczenie, tak aby długość każdego odcinka częściowego dążyła do 0, to granica sumy prostokątów będzie się równać S.

Oznaczając bowiem sumę poprzednio rozważanych prostokątów przez r t. j.:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n,$$

otrzymamy:

$$r = h f(0) + h \, . \, f(h) + h f(2h) + \ldots + h \, . \, f\big((n-1)h\big),$$

czyli:

$$r = \frac{1}{n} \, . \, f(0) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Ponieważ tu jest $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}, \ldots$ $f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$, to powyższa suma będzie się równać:

$$r = \frac{1}{n} \, . \, 0 + \frac{1}{n} \, . \, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \, . \, \frac{2}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \, . \, \frac{n-1}{n},$$

czyli:

$$r = 0 + \frac{1}{n^2} \, . \, 1 + \frac{1}{n^2} \, . \, 2 + \ldots + \frac{1}{n^2} \big(n-1\big),$$

t. j.:

$$r = \frac{1}{n^2} \Big[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\Big].$$

W nawiasie mamy sumę liczb szeregu naturalnego od 1 do $n-1$, a więc będziemy mieć:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=$$
$$=\frac{n-1}{2}\left(1+(n-1)\right)=\frac{n-1}{2}\cdot n=\frac{n^2-n}{2}.$$

A więc powyższa suma r będzie się równać:

$$r=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2-n}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

A więc np. dla $n=100$ otrzymamy $r=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{100})=$ $=\frac{1}{2}0{\cdot}99=0{\cdot}495$; dla $n=1000$ będzie $r=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{1000})=$ $=\frac{1}{2}0{\cdot}999=0{\cdot}4995$; dla $n=10000$ otrzymamy $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{10000})=$ $=\frac{1}{2}0{\cdot}9999=0{\cdot}49995$ i t. d., a więc wartości, jakie otrzymuje suma r, tworzą ciąg rosnący, a każdy wyraz jest mniejszy od $\frac{1}{2}$, a więc ma granicę i tą granicą jest liczba $\frac{1}{2}$; gdy liczba n będzie wzrastać nieograniczenie, to $\frac{1}{n}$ będzie dążyć do zera, a r będzie dążyć do wartości $\frac{1}{2}$. Napiszemy więc, że $\lim\limits_{n=\infty} r=\frac{1}{2}=S$.

Weźmy teraz pod uwagę inne prostokąty na tej samej figurze narysowane w następujący sposób. Przez punkty $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_{n-1}$, A narysujmy równoległe do osi xx' na lewo tak, aby się przecinały z przedłużonemi rzędnemi w punktach $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, a wtedy otrzymamy prostokąty wystające ponad pole S: $OP_1Q_1p_1$, $P_1P_2Q_2p_2$, $P_2P_3Q_3p_3 \ldots$ $P_{n-1}A_0Ap_n$ i oznaczmy wielkości ich pól kolejno przez $R_1, R_2, \ldots R_n$. Utwórzmy sumę R pól tych prostokątów, i porównajmy ją z polem S, to spostrzegamy, że pole S leży całkowicie wewnątrz tej sumy R i różnica między polem S i sumą R wynosi tyle, ile wynosi suma s_1 pól trójkątów Op_1Q_1, $Q_1p_2Q_2$, $Q_2p_3Q_3, \ldots Q_{n-1}p_nA$. Ponieważ trójkąt Op_1Q_1 przystaje do trójkąta OP_1Q_1, trójkąt $Q_1p_2Q_2$ do trójkąta $Q_1q_1Q_2 \ldots$ trójkąt $Q_{n-1}p_nA$ do trójkąta $Q_{n-1}q_{n-1}A$, więc pola przystających trójkątów są sobie równe, a suma s_1 równa się sumie poprzednio rozważanej s, i gdy liczba n wzrasta nieograniczenie, to s_1, podobnie jak s, dąży do zera. A więc gdy ilość rozważanych prostokątów będzie wzrastać nieograniczenie tak, aby ich podstawy malały nieograniczenie, to granicą sumy R będzie S. Sumę pól prostokątów R obliczymy w następujący sposób:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,$$

czyli:

$$R = h \, . \, f(h) + h f(2h) + h f(3h) + \ldots + h f(nh)$$
$$R = h\bigl(f(h) + f(2h) + f(3h) + \ldots. + f(nh)\bigr).$$

Ponieważ $f(h) = h$, $f(2h) = 2h$, $f(3h) = 3h, \ldots..$ $f(n.h) = nh$, to otrzymamy:

$$R = h(h + 2h + 3h + \ldots + nh)$$
$$R = h^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

W nawiasie mamy:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}\Bigl(1 + n\Bigr) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Podstawiając za h wartość $\frac{1}{n}$, otrzymamy:

$$R = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}\Bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr).$$

Gdy za n będziemy kolejno podstawiali wartości 1, 2, 3, 4,... 100,... 1000,... 10000,... to otrzymamy na R wartości $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{2} . 2 = 1$; $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} . \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} . \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \ldots..$ $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{100}) = \frac{1}{2} 1{\cdot}01 = 0{\cdot}505, \ldots..$ $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1000}) = \frac{1}{2} . 1{\cdot}001 = 0{\cdot}5005, \ldots$, a więc wartości tworzące ciąg malejący, którego wszystkie wyrazy są większe od 0, bo są dodatnie, przeto ma granicę i tą granicą, jak widać, jest liczba $\frac{1}{2}$, t. j. $\lim\limits_{n = \infty} R = \frac{1}{2} = S$.

Porównajmy teraz ze sobą oba te przypadki. Gdy liczba n jest skończoną, to S znajduje się między r i R t. j. mamy nierówności:

$$R > S > r,$$

lub:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) > S > \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Gdy liczba n rośnie nieograniczenie, to r i R, między któremi stale znajduje się S, dążą do wspólnej granicy $\frac{1}{2}$, a więc i S równa się tej granicy. Granica $\frac{1}{2}$ nazywa się sumą lub powszechnie nazywamy ją *całką określoną* funkcyi $y = f(x) = x$ od $x = 0$, do $x = 1$ i oznaczamy ją przez:

$$\int_0^1 f(x)\,dx,$$

gdzie dx oznacza długość podstaw rozważanych prostokątów, dążącą do zera. A więc mamy:

$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}.$$

W przypadku tak prostym, jak obecny, wydaje się powyższa metoda obliczania pola nie bardzo stosowną, gdyż metoda geometryi elementarnej daje nam bezpośrednio liczbę $\frac{1}{2} . 1 . 1 = \frac{1}{2}$ jako liczbę wymiarową pola S.

§. 39. **Prz. 2.** Weźmy teraz pod uwagę funkcyę $y = f(x) = 2x^2 + 1$ i narysujmy obraz tej funkcyi (fig. 29). Rozwiążemy następujące zagadnienie. Obliczyć pole S zawarte między łukiem krzywej A_0A, równoległemi do osi y A_0B_0 i AB i osią xx', gdzie $OB_0 = 1$, $OB = 2$, więc $B_0B = 1$. Podzielmy odcinek B_0B na n równych części czyli odcinków częściowych zapomocą punktów podziału $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ i oznaczmy długość każdego odcinka częściowego przez h t. j. $h = \frac{1}{n}$. Wykreślmy następnie przez punkty podziału należące do nich rzędne, które przetną łuk krzywej A_0A w punktach $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$. Wykreślmy następnie przez punkty $A_0, Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ równoległe do osi xx' na prawo tak, aby przecięły rzędne $P_1Q_1, P_2Q_2 \ldots P_{n-1}Q_{n-1}$, AB w punktach $q_1, q_2, \ldots q_n$ [1]. Otrzymamy wtedy szereg prostokątów $B_0P_1q_1A_0, P_1P_2q_2Q_1, \ldots P_{n-1}Bq_nQ_{n-1}$, których wielkości pól oznaczymy, jak poprzednio, przez r_1, r_2,

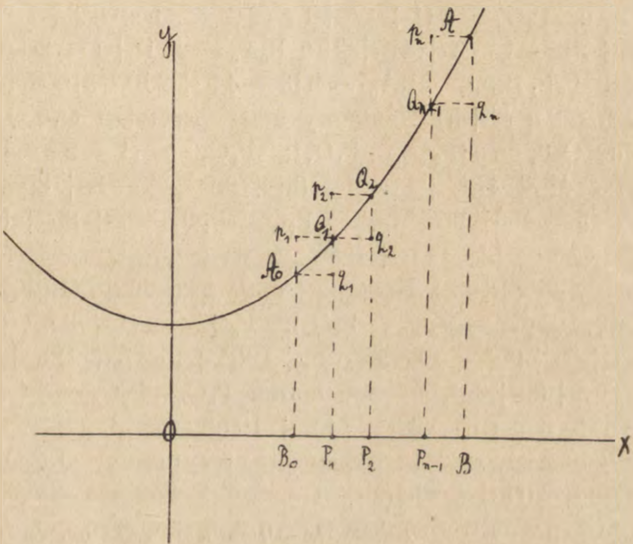

Fig. 29.

$r_3, \ldots r_n$. Suma powierzchni tych prostokątów leży całkowicie na polu $S = B_0BAA_0$.

Gdy będziemy zwiększali ilość punktów podziału tak, aby odcinki częściowe malały, to różnica pola S i sumy r tych prostokątów będzie mniejszą od sumy s małych prostokątów: $A_0q_1Q_1p_1, Q_1q_2Q_2p_2, \ldots Q_{n-1}q_nAp_n$, z których ka-

[1]) i podobnie przez punkty $Q_1, Q_2, \ldots A$ na lewo, aby przecięły rzędne $A_0B_0, P_1Q_1, \ldots P_{n-1}Q_{n-1}$ w punktach $p_1, p_2, \ldots p_n$.

żdy jest większy od pola odpowiedniego małego trójkąta: $A_0q_1Q_1$, $Q_1q_2Q_2$, ... $Q_{n-1}q_nA$, których suma s_1 jest różnicą pól S i sumy r. Aby więc wykazać, że różnica pola S i sumy r rozważanych prostokątów dąży do zera, gdy ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie, wykażemy, że powyższa suma s małych prostokątów dąży do zera, gdy ilość przedziałów częściowych n rośnie nieograniczenie. Mały prostokąt $A_0q_1Q_1p_1 = A_0q_1 . A_0p_1 = B_0P_1 (P_1Q_1 - B_0A_0)$; $B_0P_1 = h$, $P_1Q_1 = 2(1+h)^2+1 = 2(1+2h+h^2)+1 = 2+ +4h+2h^2+1 = 3+4h+2h^2$, $B_0A_0 = 2.1^2+1 = 2+1 = 3$. A więc $B_0P_1 (P_1Q_1 - B_0A_0) = h[3+4h+2h^2-3] = h(4h+ +2h^2) = 2h^2(2+h)$. Następny mały prostokąt $Q_1q_2Q_2p_2 = = Q_1q_2 . Q_1p_2 = h(P_2Q_2 - P_1Q_1)$; $P_2Q_2 = 2(1+2h)^2+1 = = 2(1+4h+4h^2)+1 = 2+8h+8h^2+1 = 3+8h+8h^2$, $P_1Q_1 = 3+4h+2h^2$, a więc $P_2Q_2 - P_1Q_1 = 3+8h+8h^2 - -3-4h-2h^2 = 4h+6h^2$. A więc $Q_1q_2Q_2p_2 = h(4h+ +6h^2) = 2h^2(2+3h)$. Następny mały prostokąt $Q_2q_3Q_3p_3 = = Q_2q_3 . Q_2p_3 = h(P_3Q_3 - P_2Q_2)$; $P_3Q_3 = 2(1+3h)^2+1 = = 2(1+6h+9h^2)+1 = 2+12h+18h^2+1 = 3+12h+18h^2$, $P_2Q_2 = 3+8h+8h^2$, a więc mamy $P_3Q_3 - P_2Q_2 = 3+12h+ +18h^2-3-8h-8h^2 = 4h+10h^2$.

Podstawiwszy te wartości otrzymamy $Q_2q_3Q_3p_3 = = h(4h+10h^2) = 2h^2(2+5h)$.

Ostatni mały kwadrat $Q_{n-1}q_nAp_n = Q_{n-1}q_n . Q_{n-1}p_n = = h(AB - Q_{n-1}P_{n-1})$; $AB = 2(1+nh)^2+1 = 2(1+2nh+ +n^2h^2)+1 = 2+4nh+2n^2h^2+1 = 3+4nh+2n^2h^2$, $Q_{n-1}P_{n-1} = 2[1+(n-1)h]^2+1 = 2[1+2(n-1)h+(n-1)^2h^2]+ +1 = 2+4(n-1)h+2(n-1)^2h^2+1 = 3+4(n-1)h+2(n-1)^2h^2$. Mamy więc $AB - Q_{n-1}P_{n-1} = 3+4nh+2n^2h^2-3- -4(n-1)h-2(n-1)^2.h^2 = 4h[n-(n-1)]+2h^2[n^2-(n-1)^2] = = 4h+2h^2(n^2-n^2+2n-1) = 4h+2h^2(2n-1)$. Podstawiając te wartości otrzymamy: $Q_{n-1}q_nAp_n = h[4h+ +2(2n-1)h^2] = 2h^2[2+(2n-1)h]$. Utwórzmy teraz sumę s wszystkich powyższych małych prostokątów a otrzymamy:

$$s = 2h^2(2+h) + 2h^2(2+3h) + 2h^2(2+5h) + \dots$$
$$\dots + 2h^2[2+(2n-1)h] =$$
$$= 2h^2[(2+h)+(2+3h)+(2+5h)+\dots+(2+(2n-1)h)] =$$
$$= 2h^2[(2+2+2+\dots+2)+(h+3h+5h+\dots+(2n-1)h)] =$$
$$= 2h^2[2n + h(1+3+5+\dots+(2n-1))].$$

Obliczmy następującą sumę:

$$1+3+5+\dots+(2n-1);$$

jest to suma szeregu arytmetycznego i równa się:

$$\frac{n}{2}(1+2n-1) = \frac{n}{2}.2n = n^2.$$

Otrzymujemy więc:

$$s = 2h^2(2n + hn^2).$$

Ponieważ $h = \frac{1}{n}$, przeto podstawiając tę wartość za h otrzymamy:

$$s = 2\frac{1}{n^2}\left(2n + \frac{1}{n}.n^2\right) = \frac{2}{n^2}\left(2n+n\right) = \frac{2}{n^2}.3n = \frac{6}{n}.$$

A więc, gdy n rośnie nieograniczenie, to suma s pól małych prostokątów dąży do zera, gdyż suma ta równa się $\frac{6}{n}$. Gdy tedy będziemy zwiększali ilość punktów podziału tak, aby odcinki częściowe malały, to suma r dużych prostokątów i pole S będą się coraz mniej od siebie różniły, jak to powyżej wykazaliśmy, a gdy liczba n wzrośnie nieograniczenie tak, aby odcinki częściowe malały nieograniczenie, to granicą tej sumy r będzie S. Obliczmy teraz sumę r t. j.:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n.$$

Będziemy mieć:

$$r = hf(1) + hf(1+h) + hf(1+2h) + \dots + hf(1+(n-1)h).$$

$$f(1)=2.1^2+1=3;\ f(1+h)=2(1+h)^2+1=2(1+2h+h^2)+1=$$
$$=2+4h+2h^2+1=3+4h+2h^2=3+2h(2+h);\ f(1+2h)=$$
$$=2(1+2h)^2+1=2(1+4h+4h^2)+1=2+8h+8h^2+1=$$
$$=3+4h(2+2h);\quad f(1+3h)=2(1+3h)^2+1=2(1+6h+$$
$$+9h^2)+1=2+12h+18h^2+1=3+6h(2+3h);\ldots\ldots$$
$$f[1+(n-1)h]=2[1+(n-1)h]^2+1=2[1+2(n-1)h+$$
$$+(n-1)^2h^2]+1=3+4(n-1)h+2(n-1)^2h^2=3+$$
$$+2(n-1)h[2+(n-1)h].$$

A więc podstawiając te wartości, otrzymamy:

$$r=h.3+h\{3+2h(2+h)\}+h\{3+4h(2+2h)\}+$$
$$+h\{3+6h(2+3h)\}+\ldots+h\{3+2(n-1)h[2+(n-1)h]\}=$$
$$=h\{3+3+2h(2+h)+3+4h(2+2h)+3+6h(2+3h)+\ldots$$
$$\ldots+3+2(n-1)[2+(n-1)h]\}=$$
$$=h\{3n+2h[(2+h)+(4+4h)+(6+9h)+\ldots$$
$$\ldots+(2(n-1)+(n-1)^2.h)]\}=$$
$$=h\{3n+2h[(2+4+6+\ldots+2(n-1))+$$
$$+(h+4h+9h+\ldots+(n-1)^2h)]\}.$$

A ponieważ mamy:

$$2+4+6+\ldots+2(n-1)=\frac{n-1}{2}(2+2(n-1))=$$
$$=\frac{n-1}{2}(2+2n-2)=\frac{2n(n-1)}{2}=n(n-1).$$

Wiemy z Rozdz. I. §. 4., że:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Podstawiając te wartości, otrzymamy:

$$r=h\left\{3n+2h\left[n(n-1)+hn(n-1)\frac{2n-1}{6}\right]\right\}=$$

$$= h\left\{3n + 2h\left[n(n-1)\left(1 + \frac{2n-1}{6}h\right)\right]\right\}.$$

Podstawiając za h wartość $\frac{1}{n}$, otrzymamy:

$$r = \frac{1}{n}\left\{3n + \frac{2}{n}\left[n(n-1)\left(1 + \frac{2n-1}{6}\cdot\frac{1}{n}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{3n + \frac{2}{n}\left[n(n-1)\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6n}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{3n + \frac{2}{n}\left[\frac{4}{3}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{6}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{3n + \frac{2}{n}\cdot\frac{4}{3}n^2 - \frac{2}{n}\cdot\frac{3}{2}n + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{6}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{3n + \frac{8}{3}n - 3 + \frac{1}{3n}\right\} = \frac{1}{n}\left(\frac{17}{3}n - 3 + \frac{1}{3n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{17}{3}n - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2} = \frac{17}{3} - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Pole S jest większe od sumy r t. j. od liczby:

$$\left(\frac{17}{3} - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}\right).$$

Gdy liczba n rośnie nieograniczenie, to wartość wyrażenia $\frac{17}{3} - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}$ zbliża się do liczby $\frac{17}{3}$ np. gdy $n = 100$, to mamy $r = \frac{17}{3} - \frac{3}{100} + \frac{1}{3.10000} = \frac{17}{3} - \frac{9}{3.100} + \frac{1}{3.10000} = \frac{1}{3}\left(17 - 0{\cdot}09 + 0{\cdot}0001\right) = \frac{1}{3}\,16{\cdot}9101$; gdy $n = 1000$, to otrzymujemy $r = \frac{17}{3} - \frac{9}{3.1000} + \frac{1}{3.1000000} = \frac{1}{3}\left(17 - 0{\cdot}009 + 0{\cdot}000001\right) = \frac{1}{3}\,16{\cdot}991001$ i t. d. Gdy więc liczba n wzrasta nieograniczenie, to wartość sumy r zbliża się do liczby $\frac{1}{3}17$ t. j.:

$$\lim_{n=\infty} r = \frac{1}{3} . 17.$$

Kreśląc następnie (uw. str. 131.) przez punkty Q_1, Q_2, $Q_3 \dots Q_{n-1}$, A równoległe do osi xx' na lewo tak, aby się przecięły z przedłużonemi do góry rzędnemi w punktach p_1, p_2, $p_3 \dots p_n$, otrzymamy znów inny szereg prostokątów $B_0P_1Q_1p_1$, $P_1P_2Q_2p_2$, $P_2P_3Q_3p_3, \dots P_{n-1}BAp_n$, których pola oznaczymy kolejno przez R_1, R_2, $R_3, \dots R_n$. Łatwo spostrzedz, że pole S jest zawarte w polu R utworzonym przez sumę pól R_1, $R_2 \dots R_n$, albowiem pole każdego prostokąta jest większe od odpowiadającej mu części pola S o małe trójkąty $A_0Q_1p_1$, $Q_1Q_2p_2, \dots Q_{n-1}Ap_n$. Każdy z tych małych trójkątów jest mniejszym od odpowiadającego mu małego prostokąta $A_0q_1Q_1p_1$, $Q_1q_2Q_2p_2, \dots Q_{n-1}q_nAp_n$. Wykazaliśmy poprzednio, że suma s pól tych prostokątów dąży do zera, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, a więc tem bardziej suma pól małych trójkątów $A_0Q_1p_1$, $Q_1Q_2p_2 \dots Q_{n-1}Ap_n$ dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie.

Widzimy, że różnica pól S i R równa się sumie s_1 powyższych małych trójkątów, a więc gdy ilość punktów podziału rośnie coraz bardziej tak, aby odcinki częściowe malały coraz więcej, to różnica pól S i R dąży do zera. Obliczmy teraz sumę R, mamy tedy:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n.$$

Pole każdego prostokąta równa się iloczynowi liczby wymiarowej podstawy przez wysokość, t. j. wartość funkcyi w punktach P_1, $P_2, \dots$ B. Wartość funkcyi w punkcie P_1 równa się $2(1+h)^2+1 = 3+4h+2h^2$, w punkcie P_2: $2(1+2h)^2+1 = 3+8h+8h^2$, w punkcie P_3: $2(1+3h)^2+1 = 3+12h+18h^2, \dots\dots$ w punkcie B: $2(1+nh)^2+1 = 3+4nh+2n^2h^2$. Otrzymamy więc:

$$R = h[(3+4h+2h^2)+(3+8h+8h^2)+(3+12h+18h^2)+\dots$$
$$\dots+(3+4nh+2n^2h^2)] = h[3n+(4h+8h+12h+\dots+4nh)+$$
$$+(2h^2+8h^2+18h^2+\dots+2n^2h^2)] =$$
$$= h[3n+4h(1+2+3+\dots+n)+2h^2(1+4+9+\dots+n^2)].$$

Wiemy, że:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+4+9+\dots+n^2 = 1+2^2+3^2+\dots+n^2 = n(n+1)\frac{2n+1}{6}.$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy:

$$R = h\left[3n+4h.\frac{n(n+1)}{2}+2h^2 n(n+1)\frac{2n+1}{6}\right] =$$

$$= h\left[3n+2hn(n+1)\left(1+h.\frac{2n+1}{6}\right)\right].$$

Podstawmy za h jego wartość $\frac{1}{n}$, a wtedy otrzymamy:

$$R = \frac{1}{n}\left[3n+2\frac{1}{n}.n(n+1)\left(1+\frac{1}{n}.\frac{2n+1}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[3n+2(n+1).\frac{8n+1}{6n}\right] = \frac{1}{n}\left[3n+\frac{16n^2+18n+2}{6n}\right] =$$

$$= 3n\frac{1}{n}+\frac{1}{n}.\frac{16n^2+18n+2}{6n} = 3+\frac{16n^2+18n+2}{6n^2} =$$

$$= 3+\frac{8}{3}+\frac{3}{n}+\frac{1}{3n^2} = \frac{17}{3}+\frac{3}{n}+\frac{1}{3n^2}.$$

Połóżmy np. $n = 100$, a otrzymamy: $R = \frac{1}{3}17 +$ $+ \frac{1}{3}.\frac{9}{100} + \frac{1}{3}.\frac{1}{10000} = \frac{1}{3}(17 + 0{\cdot}09 + 0{\cdot}0001) = \frac{1}{3}17{\cdot}0901$; połóżmy następnie $n = 1000$, a otrzymamy: $R = \frac{1}{3}17 +$ $+ \frac{1}{3}\frac{9}{1000} + \frac{1}{3}\frac{1}{1000000} + \frac{1}{3}(17 + 0{\cdot}009 + 0{\cdot}000001) =$ $= \frac{1}{3}17{\cdot}009001$ i t. d.

Spostrzegamy więc, że gdy n rośnie nieograniczenie, to wartość sumy R zbliża się do liczby $\frac{1}{3}17$ t. j.:

$$\lim_{n=\infty} R = \tfrac{1}{3}17.$$

Porównajmy znów ze sobą oba przypadki. Gdy liczba n jest skończoną, to S znajduje się między r i R t. j. mamy nierówności:

$$R > S > r,$$

lub:

$$\frac{17}{3} + \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2} > S > \frac{17}{3} - \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Gdy liczba n rośnie nieograniczenie, to r i R, między którymi stale znajduje się S, dążą do wspólnej granicy $\frac{1}{3}17$ a więc S równa się tej granicy. Granicę $\frac{1}{3}17$ nazywamy tak, jak poprzednio, sumą lub *całką określoną* funkcyi $y = f(x) = 2x^2 + 1$ od $x = 1$ do $x = 2$ i oznaczamy ją przez:

$$\int_1^2 f(x)\,dx,$$

gdzie dx, jak już (str. 130.) zaznaczyliśmy w poprzednim przykładzie, oznacza długość podstaw prostokątów, dążącą do zera. A więc mamy:

$$S = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (2x^2 + 1)\,dx = \tfrac{1}{3}17.$$

§. 40. **Prz. 3.** Obliczmy jeszcze pole S zawarte między łukiem krzywej OB, której równaniem jest $y = \sin x$, osią odciętych i rzędną AB, od $x = 0$, do $x = \frac{\pi}{2}$. Narysujmy obraz funkcyi $y = \sin x$ (fig. 30.), gdzie $OA = \frac{\pi}{2}$, $AB = 1$. Podzielmy, jak poprzednio, przedział OA na n równych części zapomocą punktów podziału P_1, P_2, P_3... P_{n-1}, tak, że:

$$OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{n-1}A = h = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Wykreślmy w punktach P_1, P_2, P_3... P_{n-1} rzędne należące do tych punktów: P_1Q_1, P_2Q_2,... $P_{n-1}Q_{n-1}$. Przez punkty O, Q_1, Q_2, Q_3,... Q_{n-1} wykreślmy równoległe do osi $x\,x'$ na prawo, które przetną się z odpowiedniemi rzędnemi w punktach P_1, q_1, q_2,... q_{n-1}. Oznaczmy pole pro-

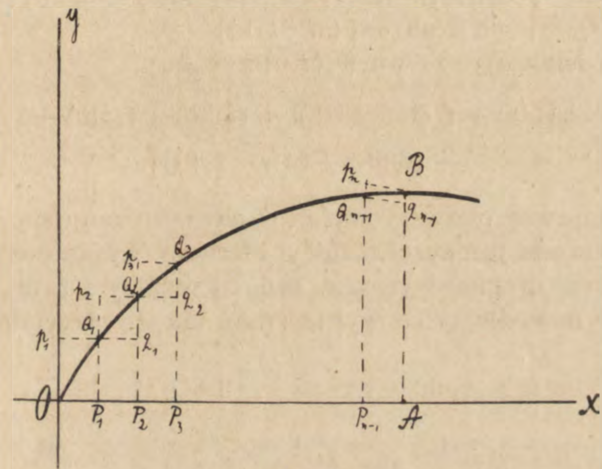

Fig. 30.

stokąta OP_1P_1O przez r_1, prostokąta $P_1P_2q_1Q_1$ przez r_2, prostokąta $P_2P_3q_2Q_2$ przez r_3,... prostokąta $P_{n-1}Aq_{n-1}Q_{n-1}$ przez r_n. Suma pól tych prostokątów r leży całkowicie wewnątrz pola S, a różnica pola S i sumy r równa się sumie trójkątów OP_1Q_1, $Q_1q_1Q_2$, $Q_2q_2Q_3$,... $Q_{n-1}q_{n-1}B$. Wykreślmy z punktów Q_1, Q_2,... Q_{n-1} równoległe do osi $x\,x'$ na lewo tak, aby się przecinały z przedłużonemi rzędnemi w punktach p_1, p_2, p_3,... p_n. Pole każdego z powyższych małych trójkątów jest mniejsze od pola odpowiedniego małego prostokąta $OP_1Q_1p_1$, $Q_1q_1Q_2p_2$, $Q_2q_2Q_3p_3$,... $Q_{n-1}q_{n-1}Bp_n$.

Wykażemy, że suma tych prostokątów s dąży do zera, gdy ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie tak, aby przedziały częściowe OP_1, $P_1P_2, \dots P_{n-1}A$ dążyły do zera. Mamy więc:

$$s = OP_1Q_1p_1 + Q_1q_1Q_2p_2 + Q_2q_2Q_3p_3 + \dots + Q_{n-1}q_{n-1}Bp_n.$$

Pole prostokąta $O P_1 Q_1 p_1 = O P_1 . P_1 Q_1 = h f(h)$, prostokąta $Q_1 q_1 Q_2 p_2 = P_1 P_2 . q_1 Q_2 = P_1 P_2 (P_2 Q_2 - P_1 Q_1) = = h[f(2h) - f(h)]$, prostokąta $Q_2q_2Q_3p_3 = P_2P_3(P_3Q_3 - P_2Q_2) = = h[f(3h) - f(2h)], \dots$ prostokąta $Q_{n-1}q_{n-1}Bp_n = P_{n-1}A(AB - - P_{n-1}Q_{n-1}) = h[f(nh) - f((n-1)h)]$.

Podstawiając te wartości otrzymamy:

$$s = h\left[f(h) + (f(2h) - f(h)) + (f(3h) - f(2h)) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (f(nh) - f((n-1)h))\right].$$

Ponieważ pierwszy wyraz w nawiasie znosi się z drugim wyrazem pierwszej różnicy, pierwszy wyraz pierwszej różnicy z drugim wyrazem drugiej różnicy i t. d. pozostaje w nawiasie tylko wyraz $f(nh)$, tak, że otrzymujemy:

$$s = h . f(nh) = h f\left(n . \frac{1}{n} . \frac{\pi}{2}\right) = h f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} . \frac{\pi}{2} . 1 = \frac{\pi}{2n}.$$

Widoczną jest rzeczą, że, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, to s dąży do 0, a więc tem bardziej suma małych trójkątów dąży do 0, to jest różnica pól S i r. Obliczmy teraz sumę pól prostokątów OP_1P_1O, $P_1P_2q_1Q_1, \dots$ $P_{n-1}Aq_{n-1}Q_{n-1}$ t. j.:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n.$$

Mamy więc $r_1 = OP_1 . f(0) = h . 0$, $r_2 = P_1P_2 . P_1Q_1 = = h f(h)$, $r_3 = P_2P_3 . P_2Q_2 = h f(2h), \dots r_n = P_{n-1}A . P_{n-1}Q_{n-1} = = h f((n-1)h)$, a więc otrzymamy:

$$r = h[f(0) + f(h) + f(2h) + \ldots + f((n-1)h)] =$$
$$= h[\sin 0 + \sin h + \sin 2h + \ldots + \sin(n-1)h].$$

Ponieważ $\sin 0 = 0$, to otrzymamy:

$$r = h[\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin(n-1)h].$$

Aby prawą stronę tej równości obliczyć, użyjemy następującego fortelu: prawą stronę pomnóżmy i podzielmy przez $2\sin\frac{h}{2}$, przez co wartość liczebna tej prawej strony się nie zmieni, to otrzymamy:

$$r = \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[2\sin h + 2\sin 2h + \ldots + 2\sin(n-1)h\right].\sin\frac{h}{2} =$$

$$= \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[2\sin h\sin\frac{h}{2} + 2\sin 2h\sin\frac{h}{2} + \ldots + 2\sin(n-1)h\sin\frac{h}{2}\right].$$

Ponieważ wiemy, że:

$$2\sin h.\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{h}{2} - \cos\frac{3h}{2},\ 2\sin 2h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{3h}{2} - \cos\frac{5h}{2}, \ldots$$
$$\ldots 2\sin(n-1)h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{2n-3}{2}h - \cos\frac{2n-1}{2}h,$$

a to na mocy znanego wzoru z trygonometryi:

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Podstawiając te wartości, otrzymamy:

$$r = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\left(\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{3h}{2}\right) + \left(\cos\frac{3h}{2} - \cos\frac{5h}{2}\right) + \ldots\right.$$

$$\ldots + \left(\cos\frac{2n-3}{2}h - \cos\frac{2n-1}{2}h\right)\Bigg].$$

Widoczną jest rzeczą, że drugi wyraz pierwszej różnicy znosi się z pierwszym wyrazem drugiej różnicy, drugi wyraz drugiej różnicy z pierwszym wyrazem następnej różnicy i t. d. tak, że w nawiasie zostanie tylko pierwszy wyraz pierwszej różnicy i drugi wyraz ostatniej różnicy, a więc otrzymamy:

$$r = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}.h\right].$$

Stosując powyższy ogólny wzór trygonometryi, wyrażający różnicę dostaw dwóch kątów, przez podwójny iloczyn wstaw połowy sumy i różnicy kątów, otrzymamy, że:

$$\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}h = 2\sin\frac{\frac{2n-1}{2}h + \frac{h}{2}}{2}.\sin\frac{\frac{2n-1}{2}h - \frac{h}{2}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{nh}{2}.\sin\frac{(n-1)h}{2},$$

otrzymamy:

$$r = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.2\sin\frac{nh}{2}.\sin\frac{(n-1)h}{2}.$$

Podstawmy za h jego wartość $\frac{\pi}{2n}$, to otrzymamy:

$$r = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}.2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right).$$

Gdy liczba n rośnie nieograniczenie, to $\frac{\pi}{4n}$ dąży do 0, a więc granicą stosunku $\dfrac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$, jak poprzednio (str. 43.) okazaliśmy, jest 1. A więc dla $n = \infty$ mamy:

$$\lim_{n=\infty} r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ponieważ wiemy z trygonometryi, że $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (str. 16.), to $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, a więc:

$$\lim_{n=\infty} r = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 . \frac{1}{2} = 1.$$

Rozważajmy teraz prostokąty $OP_1Q_1p_1$, $P_1P_2Q_2p_2$, $P_2P_3Q_3p_3, \ldots P_{n-1}ABp_n$. Oznaczmy ich pola kolejno przez R_1, R_2, $R_3, \ldots R_n$, a ich sumę przez R. Spostrzegamy, że pole S mieści się całkowicie w sumie pól R, a różnica ich równa się sumie małych trójkątów: OQ_1p_1, $Q_1Q_2p_2$, $Q_2Q_3p_3, \ldots Q_{n-1}Bp_n$, a każdy z tych trójkątów jest mniejszym od odpowiedniego prostokąta $OP_1Q_1p_1$, $Q_1q_1Q_2p_2$, $Q_2q_2Q_3p_3, \ldots Q_{n-1}q_{n-1}Bp_n$, a ich suma równa się prostokątowi $OP_1Q_1p_1 + s$. Wykazaliśmy poprzednio, że suma s dąży do zera, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, pole prostokąta $OP_1Q_1p_1$ także dąży do zera, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, t. j. jego podstawa OP_1 maleje nieograniczenie, jak również jego wysokość P_1Q_2, a więc tem bardziej suma pól powyższych małych trójkątów dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie. Znaczy to innemi słowy, że suma pól R i pole S różnią się coraz mniej, gdy n rośnie coraz bardziej. Obliczymy teraz, czemu się równa R. Mamy:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n =$$
$$= OP_1 . P_1Q_1 + P_1P_2 . P_2Q_2 + P_2P_3 . P_3Q_3 + \ldots + P_{n-1}A . AB.$$

$OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{n-1}A = h$; $P_1Q_1 = f(h)$, $P_2Q_2 = f(2h)$, $P_3Q_3 = f(3h), \ldots$ $AB = f(nh)$. Podstawiając te wartości otrzymamy:

$$R = h\,f(h) + h\,f(2h) + h\,f(3h) + \ldots + h\,f(nh) =$$
$$= h\,[f(h) + f(2h) + f(3h) + \ldots + f(nh)] =$$
$$= h\,[\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \ldots + \sin nh].$$

Pomnożywszy prawą stronę powyższej równości i podzieliwszy przez $2\sin\frac{h}{2}$, otrzymamy:

$$R = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[2\sin h \sin\frac{h}{2} + 2\sin 2h \sin\frac{h}{2} + \ldots + 2\sin nh \sin\frac{h}{2}\right].$$

Podstawiając w nawiasie wartości tak samo, jak przy obliczaniu sumy r, otrzymamy:

$$R = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\left(\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{3h}{2}\right) + \left(\cos\frac{3h}{2} - \cos\frac{5h}{2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left(\cos\frac{2n-1}{2}h - \cos\frac{2n+1}{2}h\right)\right].$$

Widoczną jest rzeczą, że drugi wyraz pierwszej różnicy znosi się z pierwszym wyrazem drugiej różnicy, drugi wyraz drugiej różnicy z pierwszym wyrazem następnej różnicy i t. d. tak, że w nawiasie pozostanie tylko pierwszy wyraz pierwszej różnicy i drugi wyraz ostatniej różnicy. Otrzymamy więc:

$$R = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\,.\,h\right].$$

Stosując do różnicy stojącej w nawiasie takie samo podstawienie, jak dla sumy r, otrzymamy:

$$R = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\,.\,2\sin\frac{\frac{2n+1}{2}h+\frac{h}{2}}{2}\,.\sin\frac{\frac{2n+1}{2}h-\frac{h}{2}}{2} =$$

$$= 2\,\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\sin\frac{(n+1)}{2}h\,.\sin\frac{nh}{2}.$$

Podstawiając za h jego wartość $\frac{\pi}{2n}$, otrzymamy:

$$R = 2\,\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right)\sin\frac{\pi}{4}.$$

Granicą stosunku $\dfrac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$ jest 1, gdy n rośnie nieograniczenie, a granicą liczby $\frac{\pi}{4n}$ jest 0, a więc mamy:

$$\lim_{n=\infty} R = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,.\,\tfrac{1}{2} = 1.$$

Wiemy, że pole $S > r$ a $S < R$, t. j.:

$$2\,\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right) < S < 2\,\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\,.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right).$$

Gdy więc liczba n rośnie nieograniczenie, to zewnętrzne wyrazy powyższych nierówności dążą do wspólnej granicy $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, a więc i pole S, które stale zawiera się między sumami r i R, równa się tej samej granicy, czyli $S = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Granica powyższa $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ nazywa się *całką określoną* od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{2}$ funkcyi $f(x) = \sin x$ i oznaczamy ją zapomocą znaku:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1.$$

Mamy więc, że:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1.$$

§. 41. Weźmy teraz ogólnie pod uwagę funkcyę ciągłą $f(x)$, określoną i skończoną dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej x od $x = a$ do $x = b$ włącznie czyli w przedziale (a, b), przyczem załóżmy, że liczby a i b są skończone i że $a < b$. Podzielmy ten przedział na skończoną ilość n mniejszych dowolnych przedziałów i oznaczmy przez $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ wartości zmiennej x w punktach podziału. Otrzymamy w ten sposób przedziały częściowe $x_1 - a = \delta_1$, $x_2 - x_1 = \delta_2, \ldots$ $b - x_{n-1} = \delta_n$ [1]. Dana funkcya ciągła $f(x)$ przyjmuje w przedziale (a, b), jak wiadomo (§. 30.), dla pewnych wartości zmiennej niezależnej x wartość największą M i wartość najmniejszą m, obie skończone (§. 29.); tak samo w przedziale częściowym (a, x_1) przyjmuje funkcya $f(x)$ wartość największą M_1 i wartość najmniejszą m_1;

---

[1]) W przykładach §. 38. — §. 40. były przedziały równe dla ułatwienia rachunku; tu w ogólnej teoryi nie muszą być sobie równe.

w przedziale (x_1, x_2) wartość największą M_2 i najmniejszą m_2;... w przedziale (x_{n-1}, b) wartość największą M_n i najmniejszą m_n. Ustaliwszy pewien sposób podziału przedziału (a, b) na przedziały częściowe (a, x_1), (x_1, x_2),... (x_{n-1}, b), weźmy pod uwagę następującą sumę:

$$M_1 (x_1 - a) + M_2 (x_2 - x_1) + \ldots + M_n (b - x_{n-1}) = S_1.$$

Suma ta S_1 ma wartość skończoną i ściśle oznaczoną, gdyż czynniki M_1, M_2... M_n są największemi wartościami funkcyi $f(x)$ w przedziałach częściowych (a, x_1), (x_1, x_2)... (x_{n-1}, b), a nadto każdy z nich jest mniejszym lub co najwyżej równym największej wartości M funkcyi danej $f(x)$ w przedziale (a, b), o której założyliśmy, że jest skończoną, a więc i one są skończone (§. 33.). Czynniki drugie $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$,... $(b - x_{n-1})$ mają także wartości oznaczone i dodatnie, gdyż założyliśmy, że liczby a i b są dane; ponieważ $a < b$, przeto różnica $(b - a)$ jest dodatnią i większą od każdej z dodatnich różnic: $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$,... $(b - x_{n-1})$, których suma równa się $(b - a)$. Każdy tedy iloczyn ma wartość skończoną, a więc także ich suma S_1. Podzielmy teraz każdy z poprzednio ustalonych przedziałów częściowych (a, x_1), (x_1, x_2),... (x_{n-1}, b) na pewną skończoną ilość α, β,... λ nowych przedziałów częściowych zapomocą punktów pośrednich czyli przez zagęszczanie punktów podziału. A więc przedział (a, x_1) podzielmy na α nowych przedziałów, zapomocą punktów podziału $\overset{(\alpha)}{x_1}$, $\overset{(\alpha)}{x_2}$,... $\overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}$, to otrzymamy nowe przedziały $\left(a, \overset{(\alpha)}{x_1}\right)$, $\left(\overset{(\alpha)}{x_1}, \overset{(\alpha)}{x_2}\right)$,... $\left(\overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}, x_1\right)$. Oznaczmy największe i najmniejsze wartości funkcyi $f(x)$ w tych nowych przedziałach przez $\overset{(\alpha)}{M_1}$, $\overset{(\alpha)}{M_2}$,... $\overset{(\alpha)}{M_\alpha}$ i $\overset{(\alpha)}{m_1}$, $\overset{(\alpha)}{m_2}$,... $\overset{(\alpha)}{m_\alpha}$. Utwórzmy następującą sumę:

$$\overset{(\alpha)}{M_1}\left(\overset{(\alpha)}{x_1} - a\right) + \overset{(\alpha)}{M_2}\left(\overset{(\alpha)}{x_2} - \overset{(\alpha)}{x_1}\right) + \ldots + \overset{(\alpha)}{M_\alpha}\left(x_1 - \overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}\right) = \sigma_1.$$

Suma ta σ_1 ma wartość skończoną i ściśle oznaczoną, gdyż wszystkie czynniki mają wartości skończone i oznaczone. Porównajmy sumę σ_1 z iloczynem $M_1(x_1 - a)$. Wartości $M_1^{(\alpha)}, M_2^{(\alpha)}, \ldots M_\alpha^{(\alpha)}$ są mniejsze lub co najwyżej równe wartości M_1 (§. 33.), suma dodatnich różnic $\left(x_1^{(\alpha)} - a\right) \ldots$ równa się różnicy $(x_1 - a)$, a więc suma σ_1 jest mniejszą, lub najwyżej równą $M_1(x_1 - a)$ t. j. $\sigma_1 \leqq M_1(x_1 - a)$[1]).

Weźmy teraz pod uwagę drugi przedział częściowy (x_1, x_2) pierwszego podziału i podzielmy go na β nowych przedziałów zapomocą punktów $x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \ldots x_{\beta-1}^{(\beta)}$, to otrzymamy nowe przedziały $\left(x_1, x_1^{(\beta)}\right), \left(x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}\right), \ldots \left(x_{\beta-1}^{(\beta)}, x_2\right)$. Oznaczmy, jak poprzednio, największe i najmniejsze wartości funkcyi $f(x)$ w tych nowych przedziałach przez $M_1^{(\beta)}, M_2^{(\beta)}, \ldots M_\beta^{(\beta)}$ i $m_1^{(\beta)}, m_2^{(\beta)}, \ldots m_\beta^{(\beta)}$.

Utwórzmy następującą sumę:

$$M_1^{(\beta)}\left(x_1^{(\beta)} - x_1\right) + M_2^{(\beta)}\left(x_2^{(\beta)} - x_1^{(\beta)}\right) + \ldots + M_\beta^{(\beta)}\left(x_2 - x_{\beta-1}^{(\beta)}\right) = \sigma_2.$$

Suma ta ma wartość skończoną i ściśle oznaczoną. Porównajmy ją z iloczynem $M_2(x_2 - x_1)$. Wszystkie wartości $M_1^{(\beta)}, M_2^{(\beta)}, \ldots M_\beta^{(\beta)}$ są mniejsze lub co najwyżej równe M_2, a więc mamy także $\sigma_2 \leqq M_2(x_2 - x_1)$ i t. d. Weźmy pod uwagę ostatni n-ty przedział (x_{n-1}, b) pierwszego podziału i podzielmy go na λ nowych podziałów częściowych zapomocą punktów podziału $x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, \ldots x_{\lambda-1}^{(\lambda)}$, to otrzy-

[1]) Nierówność pomnożona przez liczbę dodatnią pozostaje nierównością z tym samym znakiem nierówności np. $-3 < -2$, stąd $(-3).(+7) < (-2)(+7)$, bo $-21 < -14$.

mamy nowe przedziały $\left(x_{n-1}, \overset{(\lambda)}{x_1}\right), \left(\overset{(\lambda)}{x_1}, \overset{(\lambda)}{x_2}\right), \ldots \left(\overset{(\lambda)}{x_{\lambda-1}}, b\right)$. Oznaczmy największe i najmniejsze wartości funkcyi $f(x)$ w tych nowych przedziałach przez $\overset{(\lambda)}{M_1}, \overset{(\lambda)}{M_2}, \ldots \overset{(\lambda)}{M_\lambda}$ i $\overset{(\lambda)}{m_1}, \overset{(\lambda)}{m_2}, \ldots \overset{(\lambda)}{m_\lambda}$ i utwórzmy sumę:

$$\overset{(\lambda)}{M_1}\left(\overset{(\lambda)}{x_1}-x_{n-1}\right)+\overset{(\lambda)}{M_2}\left(\overset{(\lambda)}{x_2}-\overset{(\lambda)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\lambda)}{M_\lambda}\left(b-\overset{(\lambda)}{x_{\lambda-1}}\right)=\sigma_n.$$

Suma ta ma wartość skończoną i oznaczoną. Porównując ją z iloczynem $M_n(b-x_{n-1})$ dochodzimy do wniosku, że $\sigma_n \leqq M_n(b-x_{n-1})$, gdyż każde $\overset{(\lambda)}{M_1}, \overset{(\lambda)}{M_2}, \ldots \overset{(\lambda)}{M_\lambda}$ jest mniejsze lub co najwyżej równe M_n. Uskutecznilišmy więc najpierw podział przedziału (a, b) na przedziały częściowe $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, b)$, utworzyliśmy sumę S_1, następnie podzieliliśmy każdy z poprzedzających przedziałów na pewną ilość nowych przedziałów, czyli zagęściliśmy ilość punktów podziału przedziału (a, b), otrzymaliśmy w ten sposób punkty podziału postępujące, rosnące w następującym porządku:

$$\mathbf{a}, \overset{(\alpha)}{x_1}, \overset{(\alpha)}{x_2}, \ldots \overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}, \mathbf{x_1}, \overset{(\beta)}{x_1}, \overset{(\beta)}{x_2}, \ldots \overset{(\beta)}{x_{\beta-1}}, \mathbf{x_2}, \ldots$$
$$\mathbf{x_{n-1}}, \overset{(\lambda)}{x_1}, \overset{(\lambda)}{x_2}, \ldots \overset{(\lambda)}{x_{\lambda-1}}, \mathbf{b}.$$

Utwórzmy teraz sumę następującą:

$$\begin{aligned}&\overset{(\alpha)}{M_1}\left(\overset{(\alpha)}{x_1}-a\right)+\overset{(\alpha)}{M_2}\left(\overset{(\alpha)}{x_2}-\overset{(\alpha)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\alpha)}{M_\alpha}\left(x_1-\overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}\right)+\\&+\overset{(\beta)}{M_1}\left(\overset{(\beta)}{x_1}-x_1\right)+\overset{(\beta)}{M_2}\left(\overset{(\beta)}{x_2}-\overset{(\beta)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\beta)}{M_\beta}\left(x_2-\overset{(\beta)}{x_{\beta-1}}\right)+\\&+ - - - - - - - - - - - - - +\\&+\overset{(\lambda)}{M_1}\left(\overset{(\lambda)}{x_1}-x_{n-1}\right)+\overset{(\lambda)}{M_2}\left(\overset{(\lambda)}{x_2}-\overset{(\lambda)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\lambda)}{M_\lambda}\left(b-\overset{(\lambda)}{x_{\lambda-1}}\right)=S_2,\end{aligned}$$

którą możemy także napisać:

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n=S_2,$$

gdyż sumę pierwszego wiersza oznaczyliśmy poprzednio przez σ_1, drugiego przez $\sigma_2, \ldots$ n-tego przez σ_n. Wykazaliśmy, że $\sigma_1 \leqq M_1(x_1 - a)$, $\sigma_2 \leqq M_2(x_2 - x_1), \ldots \sigma_n \leqq M_n(b - x_{n-1})$. A więc mamy, że:

$$S_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n \leqq M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + M_n(b - x_{n-1}) = S_1,$$

t. j. mamy:

$$S_2 \leqq S_1.$$

Dzieląc każdy z poprzedzających przedziałów prowadzących do sumy S_2 znów na pewną ilość przedziałów częściowych, czyli zagęszczając w dalszym ciągu punkty podziału przedziału (a, b), otrzymamy nową sumę S_3, o której tak samo wykazać można, że $S_3 \leqq S_2$, i tak postępując dalej wytworzymy coraz nowe sumy $S_4, S_5, \ldots S_n \ldots$, i takie, że:

$$\ldots \leqq S_n \leqq S_{n-1} \leqq \ldots \leqq S_3 \leqq S_2 \leqq S_1.$$

A więc gdy ilość punktów podziału będziemy zwiększali czyli zagęszczali nieograniczenie w ten sposób, że każdy z poprzednich przedziałów będziemy dzielić na pewną ilość nowych przedziałów tak, aby te przedziały malały nieograniczenie, to wytwarzając dla każdego nowego podziału odpowiednią sumę, utworzymy ciąg nierosnący nieograniczony $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$, którego każdy wyraz nie jest mniejszym od wartości $m(b - a)$, gdyż w przedziale (a, b) wszystkie wartości $M_1, M_2, \ldots M_n, M_1^{(\alpha)}, M_2^{(\alpha)}, \ldots M_\alpha^{(\alpha)}, M_1^{(\beta)}, M_2^{(\beta)}, \ldots M_\beta^{(\beta)}, \ldots M_1^{(\lambda)}, \ldots M_\lambda^{(\lambda)} \ldots$ są zawsze nie mniejsze od wartości m, a więc mamy:

$$S_1 \geqq m(b - a),\ S_2 \geqq m(b - a), \ldots\ S_n \geqq m(b - a);$$

albowiem np. $M_1 \geqq m$, $M_2 \geqq m, \ldots M_n \geqq m$, a więc także:

$$M_1(x_1 - a) \geqq m(x_1 - a),\ M_2(x_2 - x_1) \geqq m(x_2 - x_1), \ldots$$
$$\ldots M_n(b - x_{n-1}) \geqq m(b - x_{n-1}),$$

a więc także i suma:

$$M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(b-x_{n-1})\geqq$$
$$\geqq m[(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})]=m(b-a),$$

t. j.:

$$S_1\geqq m(b-a),\text{ i t. d.}$$

Dochodzimy więc do wniosku (str. 93.), że ciąg nieskończony i nierosnący $S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$, ma granicę, którą oznaczymy przez S.

Weźmy teraz pod uwagę następującą sumę:

$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(b-x_{n-1})=s_1;$$

suma ta s_1 ma wartość skończoną i ściśle oznaczoną, gdyż wszystkie czynniki według założenia mają wartości skończone. Podzieliwszy każdy z poprzednio ustalonych przedziałów częściowych $(a, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_{n-1}, b)$ na przedziały częściowe poprzednio rozważane, otrzymamy sumy:

$$\overset{(\alpha)}{m_1}\left(\overset{(\alpha)}{x_1}-a\right)+\overset{(\alpha)}{m_2}\left(\overset{(\alpha)}{x_2}-\overset{(\alpha)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\alpha)}{m_\alpha}\left(x_1-\overset{(\alpha)}{x_{\alpha-1}}\right)=\rho_1,$$
$$\overset{(\beta)}{m_1}\left(\overset{(\beta)}{x_1}-x_1\right)+\overset{(\beta)}{m_2}\left(\overset{(\beta)}{x_2}-\overset{(\beta)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\beta)}{m_\beta}\left(x_2-\overset{(\beta)}{x_{\beta-1}}\right)=\rho_2,$$
— — — — — — — — — — — — — —
$$\overset{(\lambda)}{m_1}\left(\overset{(\lambda)}{x_1}-x_{n-1}\right)+\overset{(\lambda)}{m_2}\left(\overset{(\lambda)}{x_2}-\overset{(\lambda)}{x_1}\right)+\ldots+\overset{(\lambda)}{m_\lambda}\left(b-\overset{(\lambda)}{x_{\lambda-1}}\right)=\rho_n.$$

Każda z tych sum $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ ma wartość skończoną i ściśle oznaczoną. Porównajmy sumę ρ_1 z iloczynem $m_1(x_1-a)$; każda z wartości $\overset{(\alpha)}{m_1}, \overset{(\alpha)}{m_2}, \ldots \overset{(\alpha)}{m_\alpha}$ jest większą lub co najmniej równą wartości m_1, gdyż ona jest najmniejszą wartością funkcyi $f(x)$ w przedziale (a, x_1) (§. 33.), a więc będzie $\rho_1 \geqq m_1(x_1-a)$. Tak samo można okazać, że suma $\rho_2 \geqq m_2(x_2-x_1), \ldots \rho_n \geqq m_n(b-x_{n-1})$. Utwórzmy teraz następującą sumę:

$$m_1^{(\alpha)}\left(x_1^{(\alpha)} - a\right) + m_2^{(\alpha)}\left(x_2^{(\alpha)} - x_1^{(\alpha)}\right) + \ldots + m_\alpha^{(\alpha)}\left(x_1 - x_{\alpha-1}^{(\alpha)}\right) +$$
$$+ m_1^{(\beta)}\left(x_1^{(\beta)} - x_1\right) + m_2^{(\beta)}\left(x_2^{(\beta)} - x_1^{(\beta)}\right) + \ldots + m_\beta^{(\beta)}\left(x_2 - x_{\beta-1}^{(\beta)}\right) +$$
$$+ - - - - - - - - - - - - +$$
$$+ m_1^{(\lambda)}\left(x_1^{(\lambda)} - x_{n-1}\right) + m_2^{(\lambda)}\left(x_2^{(\lambda)} - x_1^{(\lambda)}\right) + \ldots + m_\lambda^{(\lambda)}\left(b - x_{\lambda-1}^{(\lambda)}\right) = s_2,$$

którą możemy także napisać:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = s_2,$$

gdyż sumę pierwszego wiersza oznaczyliśmy przez ρ_1, drugiego przez $\rho_2, \ldots$ ostatniego przez ρ_n. Wykazaliśmy, że $\rho_1 \geqq m_1(x_1 - a)$, $\rho_2 \geqq m_2(x_2 - x_1), \ldots \rho_n \geqq m_n(b - x_{n-1})$. Otrzymamy tedy, że:

$$s_2 = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n \geqq m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + m_n(b - x_{n-1}) = s_1,$$

t. j. że:

$$s_2 \geqq s_1.$$

Każdy dalszy z poprzednio rozważanych podziałów daje nam sumy s_3, $s_4, \ldots s_n \ldots$, i takie, że:

$$\ldots \geqq s_n \geqq s_{n-1} \geqq \ldots \geqq s_2 \geqq s_1.$$

A więc, gdy ilość punktów podziału będziemy zwiększali czyli zagęszczali nieograniczenie w sposób poprzednio rozważany, to otrzymamy ciąg nieograniczony nie malejący $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$, którego każdy wyraz nie jest większym od wartości $M(b - a)$, gdyż w przedziale (a, b) wszystkie wartości $m_1, m_2, \ldots m_n, m_1^{(\alpha)}, \ldots m_\alpha^{(\alpha)}, m_1^{(\beta)}, \ldots m_\beta^{(\beta)}, \ldots m_1^{(\lambda)}, \ldots m_\lambda^{(\lambda)}$ są nie większe od wartości M największej, jaką funkcya $f(x)$ przyjmuje w przedziale (a, b), a więc mamy:

$$s_1 \leqq M(b - a), \quad s_2 \leqq M(b - a), \ldots \quad s_n \leqq M(b - a);$$

albowiem np. $m_1 \leqq M$, $m_2 \leqq M, \ldots$ $m_n \leqq M$ (uw. str. 148.), a więc także:

$$m_1(x_1-a) \leqq M(x_1-a),\ m_2(x_2-x_1) \leqq M(x_2-x_1), \ldots$$
$$\ldots m_n(b-x_{n-1}) \leqq M(b-x_{n-1}),$$

a więc także i suma:

$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(b-x_{n-1}) \leqq$$
$$\leqq M[(x_1-a)+(x_2-x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})] = M(b-a),$$

t. j. że:

$$s_1 \leqq M(b-a), \text{ i t. d.}$$

Dochodzimy więc do wniosku (str. 93.), że ciąg nie malejący nieskończony $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ ma granicę, którą oznaczymy przez s. *Czy poprzednia granica S równa się granicy s?*

Weźmy więc pod uwagę sumy:

$$S_1 = M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(b-x_{n-1}),$$
$$s_1 = m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(b-x_{n-1}),$$

i utwórzmy ich różnicę, a otrzymamy:

$$S_1 - s_1 = (x_1-a)(M_1-m_1)+(x_2-x_1)(M_2-m_2)+\ldots$$
$$\ldots+(b-x_{n-1})(M_n-m_n).$$

Różnice $(M_1-m_1), (M_2-m_2), \ldots (M_n-m_n)$ są to oscylacye funkcyi $f(x)$ w przedziałach $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, b)$ (§. 33.). Jeżeli uskuteczniamy podział przedziału (a, b) na przedziały częściowe coraz mniejsze czyli zagęszczamy ilość punktów podziału, to wreszcie dojdziemy do przedziałów tak małych δ_i, że oscylacye funkcyi w tych przedziałach będą mniejsze od dowolnie małej, danej, dodatniej liczby ε' (str. 112.). Przypuśćmy, że tym przedziałom odpowiadają sumy S_n i s_n, to ich różnica $(S_n - s_n)$ będzie mniejszą od sumy iloczynów, z których każdy składa się z dwóch czynników, to jest przedziału δ_i i oscylacyi O_i funkcyi $f(x)$ w tym przedziale, t. j. że:

$$S_n - s_n = \delta_1 O_1 + \delta_2 O_2 + \ldots + \delta_p O_p.$$

Ponieważ $O_1 < \varepsilon'$, $O_2 < \varepsilon', \ldots O_p < \varepsilon'$, a więc będzie także:
$\delta_1 O_1 + \delta_2 O_2 + \ldots + \delta_p O_p < \varepsilon'(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_p) = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon$,
gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą, a więc mamy $(S_n - s_n) < \varepsilon$.

Udowodnimy teraz, że, gdy ilość punktów podziału rośnie czyli zagęszcza się nieograniczenie w sposób poprzednio rozważany, to granice S i s obu sum są sobie równe. Wykazaliśmy, że ciąg $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ ma granicę S, to znaczy innemi słowy, że mając daną dowolnie małą dodatnią liczbę ε można znaleść takie δ, że gdy wszystkie przedziały częściowe są mniejsze od tego δ, to wtedy $|S - S_n| < \varepsilon$. Tak samo wykazaliśmy, że ciąg $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ ma granicę s, to znaczy, że $|s - s_n| < \varepsilon$, gdy tylko przedziały częściowe są mniejsze od δ. Wykazaliśmy następnie, że w tych samych warunkach $|S_n - s_n| < \varepsilon$. A mamy:

$$S - s = (S - S_n) + (S_n - s_n) + (s_n - s),$$

stąd (§. 3.):

$$|S - s| \leqq |S - S_n| + |S_n - s_n| + |s - s_n|.$$

Ponieważ bezwzględna wartość każdej z trzech różnic jest mniejszą od liczby dodatniej, dowolnie małej ε, to $|S - s| < 3\varepsilon = \varepsilon''$; ponieważ zaś granice S i s są liczbami stałemi, to może być tylko $S = s$, co właśnie mieliśmy okazać; gdyby bowiem S nie równało się s, to możnaby z powodu dowolności obrać ε'' takie, iżby było mniejsze od $|S - s|$, ale ma być zawsze $|S - s| < \varepsilon''$, tedy $S = s$.

Weźmy teraz pod uwagę sumę następującą:

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1});$$

o sumie tej wykażemy, że posiada granicę, którą oznaczymy przez I, gdy ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie tak, że przedziały częściowe dążą do zera, i że ta granica równa się granicy wspólnej S poprzednich dwóch sum. W istocie suma ta jest zawarta stale między sumami:

$$M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(b-x_{n-1}),$$
$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(b-x_{n-1}),$$

albowiem wartość f(a) zawiera się między M_1 i m_1, gdzie M_1 jest wartością funkcyi największą, m_1 wartością najmniejszą w przedziale (a, x_1), zaś f(a) jest wartością pośrednią między temi wartościami skrajnemi, a więc także:

$$m_1(x_1-a) \leqq (x_1-a)f(a) \leqq M_1(x_1-a);$$

z takiego samego powodu mamy:

$$m_2(x_2-x_1) \leqq (x_2-x_1)f(x_1) \leqq M_2(x_2-x_1),$$
— — — — — — — — — —
$$m_n(b-x_{n-1}) \leqq (b-x_{n-1})f(x_{n-1}) \leqq M_n(b-x_{n-1}).$$

A więc także dla każdego podziału na przedziały częściowe będziemy mieli:

$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(b-x_{n-1}) \leqq$$
$$\leqq (x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1}) \leqq$$
$$\leqq M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(b-x_{n-1}).$$

Gdy ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie przez zagęszczanie, to suma powyższa zawiera się stale między dwiema wskazanemi sumami i granica I sumy uważanej równa się wskutek tego wspólnej granicy S. Z rozumowania tego dochodzimy więc do następującego wniosku. Jeżeli ilość punktów podziału przedziału (a, b) rośnie nieograniczenie przez zagęszczanie ich tak, że przedziały częściowe δ_i dążą do zera, to suma:

$$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

posiada granicę skończoną i ściśle oznaczoną I, równą granicy S.

§. 42. W poprzedzającem rozumowaniu podzieliliśmy przedział (a, b) najpierw na pewną ściśle oznaczoną skończoną ilość n mniejszych przedziałów (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, b)$ równych lub nierównych, co jest rzeczą zupełnie obojętną. Te przedziały częściowe były punktem wyjścia do wytwarzania dalszych przedziałów coraz mniejszych przez zagęszczanie punktów podziału, a gdy ilość punktów podziału wzrastała nieograniczenie w sposób rozważany tak, że przedziały częściowe dążyły do zera, to suma

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

dążyła do granicy stałej ściśle oznaczonej $I = S$. Tośmy ustalili. Nasuwa się jednak pytanie, co się stanie z powyższą sumą, gdy podzielimy przedział (a, b) zupełnie inaczej, najpierw na m przedziałów częściowych równych lub nierównych zapomocą innych zupełnie punktów podziału $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$, t. j. na przedziały (a, y_1), $(y_1, y_2), \ldots (y_{m-1}, b)$ zupełnie niezależnie od poprzedzających przedziałów, i następnie gdy będziemy zagęszczali w sposób dowolny nieograniczenie punkty podziału tak, aby przedziały częściowe dążyły do zera.

Wtedy można udowodnić zupełnie podobnie, jak poprzednio, że każda z sum:

$$M'_1 (y_1 - a) + M'_2 (y_2 - y_1) + \ldots + M'_m (b - y_{m-1}),$$
$$m'_1 (y_1 - a) + m'_2 (y_2 - y_1) + \ldots + m'_m (b - y_{m-1}),$$

posiada granicę S' i s', i że te granice są sobie równe t. j. $S' = s'$, i że suma:

$$(y_1 - a) f(a) + (y_2 - y_1) f(y_1) + \ldots + (b - y_{m-1}) f(y_{m-1})$$

stale zawiera się między powyższemi dwiema sumami, i że jej granica I' równa się ich wspólnej granicy S' t. j. $I' = S'$.

Pytanie, jaki zachodzi związek między granicami I i I'; udowodnimy, że $I = I'$. W tym celu weźmy pod uwagę nowy sposób podziału przedziału (a, b) na przedziały częściowe, skombinowany z obu poprzedzających, przez nałożenie jednego na drugi. Weźmy tedy najpierw pod uwagę pewien podział pierwszego sposobu taki, że przedziały częściowe δ_i są już tak małe, że odpowiadająca mu np. suma S_n czyni już zadość nierówności $|S - S_n| < \varepsilon$, gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie wziętą. Weźmy teraz z drugiego sposobu podziału przedziału (a, b) takie przedziały δ'_i, że największy z tych przedziałów jest mniejszym od najmniejszego z poprzednich przedziałów δ_i i takim, że odpowiadająca mu suma np. S'_n czyni zadość nierówności $|S' - S'_n| < \varepsilon$, gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą.

Nałóżmy teraz na siebie te dwa podziały, to wtedy pomiędzy każdemi dwiema po sobie następującemi wartościami x_i pierwszego podziału na przedziały częściowe δ_i znajdować się będzie przynajmniej jedna wartość y_k drugiego podziału na przedziały δ'_i.

Wypiszmy obok siebie te wartości pierwszego i drugiego podziału razem:

$$\mathbf{a},\ y_1,\ y_2, \ldots\ y_k,\ x_1,\ y_{k+1}, \ldots\ y_l,\ x_2,\ y_{l+1}, \ldots\ \mathbf{b}.$$

Mamy więc trzeci, nowy podział przedziału (a, b) na przedziały częściowe i możemy go uważać albo za następujący po pierwszym ustalonym podziale na przedziały δ_i, albo za następujący po drugim ustalonym podziale na przedziały częściowe δ'_i. Uważajmy go najpierw za następujący po pierwszym ustalonym sposobie i weźmy pod uwagę sumy:

$$M'(y_1 - a) + M''(y_2 - y_1) + \ldots + M^{(k+1)}(x_1 - y_k) +$$
$$+ M^{(k+2)}(y_{k+1} - x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(l+1)}(x_2 - y_l) + \ldots = \Sigma,$$
$$m'(y_1 - a) + m''(y_2 - y_1) + \ldots + m^{(k+1)}(x_1 - y_k) +$$
$$+ m^{(k+2)}(y_{k+1} - x_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + m^{(l+1)}(x_2 - y_l) + \ldots = \sigma,$$

gdzie $M', M'', \ldots M^{(k+1)}, M^{(k+2)}, \ldots M^{(l+1)}, \ldots$ i $m', m'', \ldots m^{(k+1)}, m^{(k+2)}, \ldots m^{(l+1)} \ldots$ oznaczają wartości największe i najmniejsze w przedziałach (a, y_1), $(y_1, y_2), \ldots (y_k, x_1)$, $(x_1, y_{k+1}) \ldots (y_l, x_2)$, $(x_2, y_{l+1}), \ldots$. Biorąc pod uwagę np. sumę Σ spostrzegamy, że według założenia co do przedziałów δ_i, mamy $|\Sigma - S| < \varepsilon$, albowiem to jest podział następujący po podziale na przedziały δ_i, z którego otrzymaliśmy sumę S_n czyniącą zadość nierówności $|S - S_n| < \varepsilon$, a więc tem bardziej $|S - \Sigma| < \varepsilon$. Ponieważ okazaliśmy, że $S = I$, to będzie także zachodziła nierówność $|\Sigma - I| < \varepsilon$.

Uważając nowy sposób podziału za dalszy ciąg drugiego sposobu podziału na przedziały δ'_i otrzymamy analogicznie $|\Sigma - S'| < \varepsilon$, gdyż to jest podział następujący po podziale na przedziały δ'_i, z którego otrzymaliśmy sumę S'_n, czyniącą zadość nierówności $|S' - S'_n| < \varepsilon$, a więc tem bardziej $|S' - \Sigma| < \varepsilon$. Ponieważ okazaliśmy, że $S' = I'$, to będzie także zachodzić nierówność $|\Sigma - I'| < \varepsilon$.

Utwórzmy teraz sumę pośrednią następującą:

$$(y_1 - a) f(a) + (y_2 - y_1) f(y_1) + \dots + (x_1 - y_k) f(y_k) +$$
$$+ (y_{k+1} - x_1) f(x_1) + \dots\dots\dots\dots + (x_2 - y_l) f(y_l) + \dots\dots,$$

to suma ta znajduje się, jak łatwo wykazać, stale między powyższemi dwiema sumami, a jej granica I'' czyni zadość nierówności $|\Sigma - I''| < \varepsilon$.

Mamy więc takie trzy nierówności:

$$|\Sigma - I| < \varepsilon, \quad |\Sigma - I'| < \varepsilon, \quad |\Sigma - I''| < \varepsilon.$$

Biorąc pod uwagę pierwszą i drugą otrzymamy, że $|I - I'| < 2\varepsilon$. Ponieważ zaś liczby I i I' są stałe to może być tylko $I = I'$ (str. 154.), co mieliśmy okazać.

Doszliśmy więc do następującego wniosku. Jeżeli *w jakikolwiek sposób* podzielimy przedział (a, b) i będziemy zwiększali nieograniczenie ilość punktów podziału tak, aby *wszystkie* przedziały częściowe dążyły do zera, to *suma:*

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

będzie posiadała granicę skończoną i ściśle oznaczoną, którą nazwaliśmy *I*.

Granica I, której istnienie wykazaliśmy, *nazywa się* *całką określoną* funkcyi $f(x)$ od $x = a$ do $x = b$ i oznaczamy ją w piśmie zapomocą znaku:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

a czytamy ją: całka od a do b $f(x)\,dx$; dx oznacza przedziały częściowe δ_i, dążące do zera; liczba a nazywa się *niższą granicą* całki, liczba b *wyższą granicą*. Znak $\int$ pochodzi od litery S słowa łacińskiego *summa*. Literę x pod znakiem całki można zastąpić jakąkolwiek inną literą np. y, a znak

$$\int_a^b f(y)\,dy$$

oznacza to samo co poprzednio. Mamy więc:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Założyliśmy, że $a < b$; jeżeli zaś $a > b$ w ten sam sposób, jak poprzednio dowodzi się istnienia całki określonej. Rozważmy jeszcze sumę nieco ogólniejszą od poprzedzającej a mianowicie:

$$(x_1 - a)\,f(a + \theta_1\delta_1) + (x_2 - x_1)\,f(x_1 + \theta_2\delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + (b - x_{n-1})\,f(x_{n-1} + \theta_n\delta_n),$$

gdzie $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ są liczbami dowolnemi zawartemi między 0 i 1[1]. Granica tej sumy równa się granicy S sumy poprzednio rozważanej, gdyż założywszy przedziały mniejsze od δ, suma różni się od poprzedzającej o ilość mniejszą od $\varepsilon(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) = \varepsilon(b - a)$.

§. 43. Bezpośrednio z definicyi całki określonej wynika, że mamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

---

[1]) przeto $(a + \theta_1\delta_1)$ leży w przedziale (a, x_1), i t. d.; $f(a + \theta_1\delta_1)$ jest więc wartością funkcyi w pewnym punkcie przedziału (a, x_1), i t. d.

gdyż wszystkie odpowiednie elementy obu sum są sobie równe a różnią się tylko znakiem. Możemy więc tę równość napisać także:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ogólniej możemy okazać, że mamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Załóżmy, że liczba c znajduje się między liczbami a i b, t. j. że mamy $a < c < b$, to w takim razie można podzielić przedział (a, b) na przedziały (a, c) i (c, b) i następnie każdy z tych przedziałów dzielić tak, aby liczba c była zawsze punktem podziału. A więc suma będzie się składać z dwóch części mających odpowiednio granice:

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_c^b f(x)\,dx.$$

W tym przypadku jest więc wzór prawdziwy. Przypuśćmy teraz, że liczba c nie zawiera się między liczbami a i b, lecz że jest np. większą od liczby b t. j. $a < b < c$ i że funkcya $f(x)$ jest ciągłą od $x = a$ do $x = c$, wtedy będziemy mieć na mocy poprzedniego rozważania:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

lub:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Ponieważ okazaliśmy, że:

$$-\int_b^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx,$$

przeto otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Załóżmy teraz, że w przedziale (a, b) funkcya ciągła f(x) przyjmuje wartość największą M i wartość najmniejszą m, to wartość całki:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

zawiera się między M(b — a) i m(b — a), gdyż $\int_a^b dx = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = b - a$, tak, że możemy napisać:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b - a),$$

gdzie A jest wartością pośrednią funkcyi f(x) między M i m, którą przyjmuje (§. 32.) dla pewnej wartości ξ zmiennej niezależnej x, zawartej między liczbami a i b, tak, że możemy także napisać:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a).$$

Weźmy teraz jeszcze pod uwagę funkcyę f(x) ciągłą w przedziale (a, b) i niechaj x będzie liczbą zawartą w tym przedziale, to całka określona

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

jest wielkością zupełnie określoną i wartość jej zależy tylko od granicy wyższej x. Całka ta jest więc funkcyą F(x) zmiennej x. Nie wiemy dotąd, czemu się równa F(a) i dla tego określamy: $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$, co wolno przyjąć, jak dalej zobaczymy. O funkcyi tej F(x) udowodnimy zasadnicze twierdzenie, że ona jest funkcyą ciągłą w przedziale (a, b) i posiada pochodną równą funkcyi danej f(x).

W istocie mamy:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,\quad F(x+h) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx,$$

a więc:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^{x+h} f(x)\,dx + \int_x^a f(x)\,dx =$$

$$= \int_x^a f(x)\,dx + \int_a^{x+h} f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

A więc mamy:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(\xi)\Big[(x+h) - x\Big] = f(\xi)\,.\,h,$$

gdzie ξ zawiera się między x i x+h. Widzimy więc z tej równości, że funkcya F(x) jest funkcyą ciągłą, gdyż, zmniejszając h do zera, różnicę $|F(x+h) - F(x)|$ można uczynić dowolnie małą (str. 31.). Następnie możemy napisać:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Gdy h dąży do zera, granicą lewej strony, jak wiemy, jest pochodna F′(x). Prawa strona dąży do f(x) z powodu jej ciągłości, a więc otrzymujemy równość:

$$F'(x) = f(x),$$

czyli innemi słowy wykazaliśmy *istnienie takiej funkcyi ciągłej F(x), której pochodną jest dana funkcya ciągła f(x).* Każda inna funkcya ciągła, posiadająca tę samą pochodną f(x), różni się od funkcyi F(x), jak wiemy, o stałą dowolną C (§. 37.). Każdą taką funkcyę, której pochodna równa się danej funkcyi f(x), nazywamy *całką nieokreśloną* funkcyi f(x) i oznaczamy ją znakiem:

$$\int f(x)\,dx,$$

gdzie *opuszczamy* granice całkowania. Mamy więc:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Naodwrót, gdy znajdziemy w jakikolwiek sposób pewną funkcyę $\Phi(x)$, której pochodną jest funkcya dana $f(x)$, to możemy napisać:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

Aby obliczyć w tym przypadku wartość stałej C należy zauważyć, że mamy (str. 161.):

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\ ^{1)}.$$

A więc otrzymamy, biorąc obustronnie granicę dla $x = a$:

$$\int_a^a f(x)\,dx = \Phi(a) + C = 0,$$

t. j.:

$$C = -\Phi(a).$$

Podstawiając tę wartość za C otrzymujemy:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) - \Phi(a);$$

twierdzenie zasadnicze, dozwalające nam obliczyć wartość całki określonej od a do x, gdy znamy przynajmniej jedną funkcyę ciągłą $\Phi(x)$, czyli całkę nieokreśloną

$$\int f(x)\,dx,$$

której pochodną jest dana funkcya ciągła $f(x)$, stojąca pod znakiem całki.

[1] Usprawiedliwić to określenie można w ten sposób:

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{x=a}\left[(x-a)\,f(\xi)\right] = 0,$$

ponieważ $f(\xi)$ ma wartość skończoną (§. 5, $(x-a=h)$; §. 29.).

ROZDZIAŁ VIII.

O całkowaniu.

§. 44. Pierwszą metodą całkowania jest ta, która wynika bezpośrednio z definicyi całki określonej, rozważanej w poprzedzającym rozdziale. Najprostszą jest rzeczą zastosować tę definicyę, przyjąwszy, że podzieliliśmy przedział dany (a, b) na n równych części, jak to zrobiliśmy w przykładzie 1, 2 i 3 poprzedniego rozdziału, tak, że $b - a = n.h$, i dla każdego przedziału obrać wartość funkcyi w jego punkcie krańcowym. Wtedy otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0} h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)\right].$$

Można jednak założyć także inny sposób podziału przedziału (a, b) na przedziały częściowe, nieraz bardziej dogodne i dające prostsze rachunki, niż w poprzednim przypadku, a więc np. można zamiast $b - a = nh$, jak poprzednio, położyć $b = aq^n$, gdzie zakładamy, że $q > 1$ i gdy n rośnie nieograniczenie, to q dąży do 1. Otrzymamy wtedy, że $b - a = aq^n - a = a(q^n - 1) = a(q-1)\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Podzieliwszy $(q^n - 1)$ przez $q - 1$, otrzymamy $b - a =$ $= a(q-1)\left\{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right\} = a(q-1) + a(q-1).q +$

$+ a(q-1)q^2 + \ldots + a(q-1)q^{n-1}$. A więc długości odpowiednich przedziałów równają się $\delta_1 = a(q-1)$, $\delta_2 = a(q-1)q$, $\delta_3 = a(q-1)q^2, \ldots \delta_n = a(q-1)q^{n-1}$.

Obliczmy wartość funkcyi w każdym przedziale dla punktu początkowego przedziału, t. j. $f(a)$, $f(a+\delta_1) = f(a + aq - a) = f(aq)$, $f(aq + \delta_2) = f(aq + aq^2 - aq) = f(aq^2), \ldots f(aq^{n-1})$, to otrzymamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta_1 f(a) + \delta_2 f(aq) + \delta_3 f(aq^2) + \ldots + \delta_n f(aq^{n-1}) =$$

$$= a(q-1)f(a) + a(q-1)q\,f(aq) + a(q-1)q^2 f(aq^2) + \ldots$$

$$\ldots + a(q-1)q^{n-1} f(aq^{n-1}) =$$

$$= a(q-1)\{f(a) + q\,f(aq) + q^2 f(aq^2) + \ldots + q^{n-1} f(aq^{n-1})\}.$$

Metoda jednak powyższa w wielu bardzo przypadkach jest praktycznie niewykonalna, albowiem natrafiamy nieraz przy tych rachunkach na takie trudności, mianowicie przy oznaczaniu wartości pewnych sum, że do pokonania ich potrzeba właśnie znajomości całki nieokreślonej $\Phi(x)$ funkcyi danej $f(x)$. Zalety, jakie daje dowolność w obiorze sposobu podziału przedziału (a, b) na przedziały częściowe malejące nieograniczenie i w wyborze wartości funkcyi, są pozorne. Metoda ta z powodu swej ogromnej ogólności nie daje nam prostego i pewnego środka do pokonania trudności, polegającej na nieznajomości funkcyi pierwotnej $\Phi(x)$. Dlatego lepiej jest oprzeć się na znanych nam już wynikach z rachunku różniczkowego i przypomnieć sobie to, cośmy tam otrzymali (Rozdz. IV.). Powtórzymy więc tutaj te wyniki, gdyż one pozwolą nam poznać całki wyrażające się zapomocą najprostszych funkcyj. A więc otrzymaliśmy np.:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{3 \cdot x^2}{3} = x^2, \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ze związków tych otrzymujemy bezpośrednio na mocy rozważań poprzedniego rozdziału, oznaczając przez C stałą dowolną:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C.$$

W rozdziale poprzedzającym otrzymaliśmy wzór:

$$\int_a^x f(x)\, dx = \Phi(x) - \Phi(a),$$

gdzie $\Phi(x)$ jest funkcyą pierwotną czyli całką nieokreśloną $\int f(x)\, dx$, *funkcyi podcałkowej* $f(x)$. Przypuśćmy, że mamy obliczyć całkę określoną od $x = a$ do $x = b$ funkcyi $y = x^2$, t. j.:

$$\int_a^b x^2 dx.$$

Aby więc obliczyć tę całkę, to według powyższego twierdzenia trzeba najpierw znać jej funkcyę pierwotną czyli całkę nieokreśloną $\Phi(x)$, a tę daje nam bezpośrednio rachunek różniczkowy, a mianowicie znajdujemy w powyższej tabeli, że:

$$\Phi(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

A więc, aby obliczyć wartość danej całki określonej, to trzeba najpierw utworzyć według wzoru $\Phi(b)$ t. j. $\int x^2 dx$ dla $x = b$ czyli $\frac{b^3}{3} + C$, następnie utworzyć $\Phi(a)$ t. j. $\int x^2 dx$

dla $x = a$ czyli $\frac{a^3}{3} + C$, następnie utworzyć różnicę $\Phi(b) -$
$- \Phi(a)$ t. j. $\frac{b^3}{3} + C - \left(\frac{a^3}{3} + C\right) = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

A więc w ten sposób otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Obliczmy następnie wartość całki określonej funkcyi $y = \sin x$ od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{2}$ t. j.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$$

Trzeba najpierw znać funkcyę pierwotną $\Phi(x)$ funkcyi podcałkowej czyli jej całkę nieokreśloną. Rachunek różniczkowy daje nam, jak to uwidoczniliśmy w powyższej tabeli, że:

$$\Phi(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Aby więc obliczyć wartość danej całki określonej, trzeba najpierw obliczyć wartość całki nieokreślonej dla $x = \frac{\pi}{2}$ t. j. $\int \sin x\,dx$ dla $x = \frac{\pi}{2}$, skąd otrzymamy $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $= -\cos\frac{\pi}{2} + C = C$, następnie obliczyć jej wartość dla $x = 0$, t. j. $\Phi(0)$, dla którego otrzymamy $(-\cos 0) + C =$ $= -1 + C$. A więc będzie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Phi(0) = C - (-1 + C) = 1.$$

Weźmy jeszcze pod uwagę funkcyę $y = \cos x$ i obliczmy całkę określoną tej funkcyi od $x = -\frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{\pi}{2}$, t. j.:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$$

Wiemy na podstawie poprzedzającego rozdziału (str. 160.), że:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \, dx + \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx.$$

Obliczmy więc najpierw pierwszą całkę t. j.:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \, dx.$$

Funkcya pierwotna $\Phi(x)$ funkcyi podcałkowej $\cos x$ równa się $\sin x$, a więc będziemy mieć:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \, dx = \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0 - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Tak samo obliczymy, że całka określona:

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Phi(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

A więc otrzymujemy:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \, dx + \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1 + 1 = 2$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcyę $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ i obliczmy jej całkę określoną od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{4}$ t. j.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} d\,x.$$

Znaleźliśmy w rachunku różniczkowym, że $\frac{d\,tg\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, to jest, że funkcyą pierwotną $\Phi(x)$ funkcyi danej $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ jest $tg\,x + C$, to znaczy że $\Phi(x) = tg\,x + C$. Mamy więc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} d\,x = \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \Phi(0) = tg\frac{\pi}{4} - tg\,0 = tg\,45^0 - 0 =$$
$$= tg\,45^0 = 1.$$

Weźmy teraz pod uwagę funkcyę $y = f(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 + 1$ i obliczmy jej pochodną y'. Trzeba w tym celu utworzyć różnicę $f(x+h) - f(x)$, t. j. $2(x+h)^3 + 3(x+h)^2 + 1 - (2x^3 + 3x^2 + 1)$. Wykonawszy naznaczone potęgowania otrzymamy $f(x+h) - f(x) = 2(x^3 + 3\,x^2 h + 3\,x\,h^2 + h^3) + 3(x^2 + 2\,h\,x + h^2) + 1 - (2\,x^3 + 3\,x^2 + 1) = 2\,x^3 + 6\,x^2 h + 6\,x\,h^2 + 2\,h^3 + 3\,x^2 + 6\,h\,x + 3\,h^2 + 1 - 2\,x^3 - 3\,x^2 - 1 = (6\,x^2 + 6\,x)\,h + (6\,x + 3)\,h^2 + 2\,h^3$. Otrzymujemy więc, że $f(x+h) - f(x) = (6x^2 + 6x)\,h + (6x + 3)\,h^2 + 2\,h^3$. Utwórzmy następnie iloraz $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(6x^2 + 6x)\,h}{h} + \frac{(6x + 3)\,h^2}{h} + \frac{2\,h^3}{h} = (6\,x^2 + 6\,x) + (6\,x + 3)\,.\,h + 2\,h^2$. Gdy h zdąża do zera, to lewa strona tej równości dąży do granicy y', zwanej pochodną, prawa zaś strona dąży do granicy $(6\,x^2 + 6\,x)$.

A więc pochodną danej funkcyi $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ jest $y' = 6x^2 + 6x$.

Dajmy sobie teraz funkcyę $f(x) = 6x^2 + 6x$ i obliczmy jej całkę określoną od $x = 1$ do $x = 2$, t. j.:

$$\int_1^2 (6x^2 + 6x)\,dx.$$

Jedną z funkcyj pierwotnych $\Phi(x)$ tej funkcyi jest, jak wykazaliśmy: $2x^3 + 3x^2 + 1$, a więc otrzymamy:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \Phi(2) - \Phi(1) = 2.2^3 + 3.2^2 + 1 - (2.1^3 + 3.1^2 + 1) =$$
$$= 2.8 + 3.4 - 2.1 - 3.1 = 16 + 12 - 2 - 3 = 23.$$

ROZDZIAŁ IX.

Wskazówki do dalszego kształcenia się.

§. 45. Rozdział ten zawiera wskazówki i wykaz dzieł naukowych dla czytelnika, pragnącego kształcić się dalej samodzielnie w matematyce.

Najprzód podajemy dzieła matematyczne w języku polskim, następnie w języku niemieckim, a na końcu dzieła w języku francuskim.

Wymieniamy dzieła poświęcone arytmetyce, algebrze, geometryi elementarnej i geometryi analitycznej i analizie matematycznej, której częścią jest rachunek różniczkowy i całkowy. Nasza naukowa literatura matematyczna jest bardzo ubogą w porównaniu z innymi językami. Wskazanem jednak jest zapoznać się z następującemi dziełami [1]).

* S. Zaremba, prof. Uniw. Jagiell. »Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych«. W Krakowie, nakładem Akademii Umiejętności, 1907, cena 4 korony. Skład główny w księgarni Spółki wydawniczej polskiej. Dziełko to, jak wskazuje tytuł, jest poświęcone arytmetyce liczb całkowitych. Czytelnikowi nieobeznanemu z zasadami arytme-

[1]) Dzieła opatrzone gwiazdkami nie nadają się do pierwszego czytania, lecz do dalszych studyów, natomiast dzieła nie opatrzone gwiazdkami należy najpierw przestudyować.

tyki teoretycznej należy gorąco polecić przestudyowanie tego dziełka.

M. A. Baraniecki. »Arytmetyka«, wykład szczegółowy, wydanie drugie. Warszawa 1894. Wydane przez A. Czajewicza i S. Dicksteina z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego.

E. Pascal. »Rachunek nieskończonościowy«, przełożył S. Dickstein, 3 części. Część I. Rachunek różniczkowy, część II. Rachunek całkowy, część III. Rachunek waryacyjny i Rachunek różnic skończonych. Warszawa, wydawnictwo redakcyi »Prac matematyczno-fizycznych«. 1896.

* E. Pascal. »Repertoryum matematyki wyższej«, przełożył S. Dickstein. Tom I. Analiza, tom II. Geometrya. Warszawa, wydawnictwo »Wiadomości matematycznych« 1900—1901. Dzieło to obejmuje zarys prawie wszystkich głównych teoryj matematyki współczesnej. Jest to dzieło informacyjne, rodzaj encyklopedyi, które zawiera definicye i pojęcia zasadnicze, twierdzenia bez dowodów, wzory i obszerne wskazówki bibliograficzne.

T. Łopuszański. »Z podstaw teoryi funkcyj«. W Krakowie, główny skład w księgarni Spółki wydawniczej polskiej, 1903, cena 2 korony. Dziełko poświęcone zasadniczym pojęciom teoryi funkcyj, godne polecenia, zwłaszcza, jeżeli czytelnik nie posiada znajomości obcych języków.

* Dr. Wł. Zajączkowski. »Zasady algebry wyższej«. We Lwowie, nakładem księgarni Gubrynowicza i Schmidta, 1884. Jest to jedyne prawie z nowszych dzieł w języku polskim o algebrze wyższej.

J. Sochocki. »Rozwiązywanie równań liczebnych«. Warszawa 1884, cena 60 kop. Wydane przez A. Czajewicza i S. Dicksteina z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego.

* S. Dickstein. »Pojęcia i metody matematyki«. Warszawa, wydawnictwo redakcyi »Prac matematyczno-fizycznych. 1891. Dzieło godne przestudyowania.

Dr. P. Dziwiński. »Wykłady matematyki«. Wydawnictwo Biblioteki politechnicznej we Lwowie, 2 tomy, 1902—1908, cena tomu I. 30 koron. Dzieło obszerne, poświęcone dla słuchaczy Politechniki, obejmuje oprócz innych działów matematyki, geometryę analityczną, zasady algebry wyższej, rachunek różniczkowy i całkowy, liczne bardzo ćwiczenia i wiadomości bibliograficzne.

Wł. Folkierski. »Zasady rachunku różniczkowego i całkowego«. Wydanie drugie, tom I. Warszawa 1904, cena 2 rb. 40 kop. Wydane przez A. Czajewicza i S. Dicksteina z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego.

Czytelnik pragnący zapoznać się z zasadami geometryi elementarnej, może przestudyować:

G. H. Niewęgłowski. »Geometrya«. Wydanie drugie. Paryż — Lwów, 1869. Dzieło obszerne, poświęcone geometryi elementarnej.

Z geometryi analitycznej można polecić do przestudyowania:

Dr. F. Schur. »Podręcznik geometryi analitycznej«. Przekład z niemieckiego przez T. Łopuszańskiego, Warszawa 1901, wydane przez A. Czajewicza i S. Dicksteina z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego.

J. Szczepański. »Kurs uzupełniający matematyki elementarnej i początki analizy wyższej«. Warszawa 1906, cena 1 rb. 60 kop. Wydane z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego.

Obszerniejszem dziełem, poświęconem geometryi analitycznej, jest:

Dr. Wł. Zajączkowski. »Geometrya analityczna«. Warszawa 1884. Biblioteka matem.-fizyczna, wydawana pod redakcyą M. A. Baranieckiego z zapomogi Kasy im. J. Mianowskiego. Dzieło to godne jest przestudyowania, zawiera geometryę analityczną płaską i przestrzenną i liczne ćwiczenia i wskazówki do nich.

Czytelnikowi, pragnącemu studyować teoryę funkcyj analitycznych, należy gorąco polecić dzieło następujące:

* Dr. J. kniaź Puzyna, profesor Uniwersytetu lwowskiego. »Teorya funkcyj analitycznych«. 2 tomy, we Lwowie, nakładem autora z zasiłkiem Akademii Umiejętności w Krakowie, główny skład w księgarni H. Altenberga. 1898—1900. Dzieło nadzwyczaj obszerne i gruntowne, zawiera także nieco z arytmetyki i algebry wyższej w tomie I. Cena 2 tomów 30 koron.

§. 46. Z literatury niemieckiej gorąco polecić należy do przestudyowania dziełka:

* Dr. O. Stolz und Dr. J. A. Gmeiner. »Theoretische Arithmetik«. Leipzig, B. G. Teubner, 1900, cena oprawionego egzemplarza 10·60 M.

H. Weber i J. Wellstein. »Encyklopädie der Elementhar-Mathematik«. 2. Auflage, Leipzig, B. G. Teubner. I. Bd. Elementare Algebra und Analysis, bearb. von H. Weber, 1906, cena opr. 9·60 M. II. Bd. Elemente der Geometrie, 1907, bearb. von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal, 1907, cena 12 M. III. Bd. Angewandte Elementar-Mathematik, 1907, bearb. von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber, cena 14 M. Tom I. obejmuje zasady arytmetyki, algebry i analizy, tom II. zasady geometryi, trygonometrye płaską i sferyczną, geometryę analityczną i stereometryę, tom III. obejmuje zastosowania matematyki elementarnej do mechaniki, elektryczności, naukę o maximach i minimach funkcyj, rachunek prawdopodobieństwa i grafikę.

Następnie polecić należy czytelnikowi do przestudyowania dzieła poniżej wykazane:

* Dr. O. Stolz und Dr. J. A. Gmeiner. »Einleitung in die Funktionentheorie«. Leipzig, B. G. Teubner, 1905, cena opr. 15 M. Również:

* Dr. O. Stolz. »Grundzüge der Differential- und Integralrechnung«. 3. Theile, Leipzig, B. G. Teubner. I. Theil. Reele Veränderliche und Funktionen, 1893, cena opr. 9 M. II. Theil. Complexe Veränderliche und Funktionen, 1896,

cena opr. 9 M. III. Theil. Die Lehre von den Doppelintegralen, 1899, cena opr. 9 M. Dzieło to traktuje z całą ścisłością naukową swój przedmiot, dlatego godne przestudyowania.

* U. Dini. »Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse«, deutsch bearb. von Dr. J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner, 1892, cena broszury 12 M.

E. Cesàro. »Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung«, deutsche Ausgabe von G. Kowalewski, 1904, cena opr. 15 M.

Godne polecenia są także dziełka:

A. Harnack. »Die Elemente der Differential- und Integralrechnung«. Leipzig, B. G. Teubner, 1881, cena brosz. 7·60 M.

A. Genocchi. »Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung«. Herausgegeben von G. Peano Deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp, Leipzig, B. G. Teubner, 1899, cena opr. 12 M.

J. A. Serret und G. Scheffers. »Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung«. 3. Auflage, Leipzig, B. G. Teubner, neubearbeitet von Dr. G. Scheffers. 3. Bände. I. Bd. Differentialrechnung, 1906, cena opr. 13 M. II. Bd. Integralrechnung, 1907, cena opr. 13 M. III. Bd. Differentialgleichungen und Variationsrechnung.

Z geometryi należy polecić:

* D. Hilbert. »Grundlagen der Geometrie«. Leipzig, B. G. Teubner, 2. Auflage, 1903, cena brosz. 5·20 M.

Z geometryi analitycznej:

H. Ganter i E. Rudio. »Die elemente der analytischen Geometrie«. 2. Theile, 3. Auflage, cena opr. 6 M.

Dr. O. Dziobek. »Lehrbuch der analytischen Geometrie«. 2. Bände, 1900—1902, Braunschweig, Verlag von A. Graffs Buchhandlung, cena opr. 12 M.

Z algebry wyższej godne polecenia są dzieła:

* Dr. J. Petersen. »Theorie der algebraischen Gleichungen«. Kopenhagen, A. T. Hörst und Sohn, 1878, cena 10 M.

* J. A. Serret. »Handbuch der höheren Algebra«. Deutsch bearb. von G. Wertheim, 2. Auflage, Leipzig, B. G. Teubner, 1878—79, cena brosz. 19 M.

* Dr. E. Netto. »Vorlesungen über Algebra«. 2 Bände, Leipzig, B G. Teubner, 1896—1900, brosz. 28 M.

* H. Weber. »Lehrbuch der Algebra«. 2. Auflage, 2 Bände, Braunschweig, Verlag von Fr. Vieweg und Sohn, 1898—99, brosz. 22 M.

Z teoryi funkcyj godne polecenia są dzieła:

H. Burckhardt. »Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen«. 3. Auflage, 1908. Leipzig, Verlag von Veit et Comp., brosz. 6 M.

§. 47. Z literatury francuskiej godne polecenia są następujące dzieła, odnoszące się do matematyki elementarnej:

J. Tannery. »Leçons d'Arithmétique théorique et pratique«. 3. Edition, 1904. Paris, Armand Colin, brosz. 5 fr.

C. Bourlet. »Leçons d'Algèbre élémentaire«. 4. Edition, 1906, ta sama księgarnia co poprzednio, cena brosz. 7·50 fr.

J. Hadamard. »Leçons de Géométrie élémentaire«. 2. Edition, ta sama księgarnia, cena brosz. 16 fr. 2 tomy.

B. Niewenglowski et L. Gérard. »Cours de Géométrie élémentaire«. Paris, Gauthier-Villars, 1900, 2 tomy.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. »Traité de Géométrie«. 7. Edition, Paris, Gauthier-Villars, 1900. Jest to obszerne dzieło traktujące o geometryi elementarnej, 2 tomy, godne przestudyowania.

C. Bourlet. »Leçons de Trigonométrie rectiligne«. Paris, Armand Colin, 2. Edition, 1905, brosz. 6 fr.

B. Niewenglowski. »Cours d'Algèbre«. 5. Edition, 1902. Paris, Armand Colin, 2 tomy brosz. 16 fr. Dzieło to zawiera algebrę wyższą, a także rachunek różniczkowy i całkowy w zarysie.

E. Pruvost et D. Piéron. »Leçons d'Algèbre«. Paris, Felix Juven Éditeur. 2. Edition, 1898, 2 tomy. Co do treści dzieło poprzednie i to są do siebie zbliżone, oba godne przestudyowania.

Z geometryi analitycznej należy polecić dzieła następujące:

* B. Niewengłowski. »Cours de Géométrie analytique«. 3 tomy. Tom I. Sections coniques, 1894; tom II. Constructions de curbes planes, compléments relatifs aux coniques, 1895; tom III. Géométrie dans l'espace, 1896. Paris, Gauthier-Villars.

C. Briot et J. C. Bouquet. »Leçons de Géométrie analytique«. 19. Edition revue par Appel, Paris, Ch. Delagrave, 1907, brosz. 8·73 fr.

Z analizy matematycznej, której częścią jest rachunek różniczkowy i całkowy, należy polecić czytelnikowi do przestudyowania następujące obszerne i gruntowne dzieła, odznaczające się ścisłością naukową, jakoteż zaletami dydaktycznemi:

G. Humbert. »Cours d'Analyse«. Paris, Gauthier-Villars, 1902—1904, 2 tomy brosz. 32 fr.

J. de la Vallée-Poussin. »Cours d'Analyse infinitésimal«. Paris, Gauthier-Villars, 1903, 1 tom str. 372, brosz. 12 fr.

J. Tannery. »Leçons d'Algèbre et d'Analyse«. Paris, Gauthier-Villars, 1906. 2 tomy. 24 fr. Tom I. zawiera algebrę (teoryę liczb niewymiernych), tom II. zawiera szeregi, różniczkowanie, całkowania i równania algebraiczne z licznem zastosowaniem teoryi i ćwiczeniami.

J. Tannery. »Introduction a la théorie des fonctions d'une variable«. 2. Edition, Paris, librairie scientifique A. Hermann, 1904. Dotychczas wyszedł tom I. Dzieło to zawiera teoryę liczb niewymiernych, mnogości, granice, szeregi, iloczyny nieskończone, funkcye elementarne, pochodne.

Znajomość tego dzieła jest niezbędną, jeżeli się chce pracować naukowo.

E. Goursat. »Cours d'Analyse mathématique«. Paris, Gauthier-Villars, 1902—1905. (Cours de la Faculté de Sciences de Paris). 2 tomy brosz. 40 fr.

* C. Jordan. »Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique«. 2. Edition, 1893—1896. Paris, Gauthier-Villars, 3 tomy brosz. 49 fr.

* Ch. Méray. »Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques«. Paris, Gauthier-Villars, 1894—1898. 4 tomy brosz. 40 fr.

* E. Picard. »Traité d'Analyse«. Paris, Gauthier-Villars, 1901—1905. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris). Dotychczas wyszły 3 tomy, czwarty tom jest w przygotowaniu.

Z teoryi funkcyj analitycznych można polecić dzieło:

* E. A. Fouët. »Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques«. Paris, Gauthier-Villars, 2. Édition, 1907. 2 tomy.

Jeżeli czytelnik pragnie nieco gruntowniej pracować w matematyce, to należy mu radzić, aby koniecznie poznał język niemiecki i francuski, gdyż najważniejsze dzieła są wydawane przeważnie w tych językach. Zaznajomienie się z tymi językami takie, aby módz czytać ze zrozumieniem dzieła matematyczne, nie nastręcza nieprzezwyciężonych trudności. Przy dobrej woli i ochocie można stosunkowo dość prędko dojść do pewnej biegłości w używaniu tych języków.

REJESTR RZECZY.

(Uw. Liczby oznaczają stronnice).

KONIEC.