BULLETIN INTERNATIONAL

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE CRACOVIE

COMPTES RENDUS

DES

SÉANCES DE L'ANNÉE 1896.

JUIN

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1896.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1872 PAR

S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§. 2). L' Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§. 4). L'Académie est divisée en trois classes:

a) classe de philologie,

b) classe d'histoire et de philosophie,

c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§. 12). La langue officielle de l'Académie est le polonais; c'est dans cette langue que paraissent ses publications.

Le Bulletin international parait tous les mois, à l'exception des mois de vacances (août, septembre), et se compose de deux parties, dont la première contient l'extrait des procès verbaux des séances (en français), la deuxième les résumés des mémoires et communications (en français ou en allemand, au choix des auteurs).

Le prix de l'abonnement est 3 fl. = 8 fr.

Séparément les livraisons se vendent à 40 kr. = 90 centimes.

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcyą Sekretarza generalnego Dr. Stanisława Smolki.

Kraków, 1896. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem A. M. Kosterkiewicza.

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE CRACOVIE.

No 6. Juin. 1896.

Séances

Classe de Philologie

Séance du 8 juin 1896

Présidence de M. C. Morawski

M. C. Morawski m. t., rend compte du travail de M. Stanislas Witkowski: *Prodromus grammaticae papyrorum graecorum aetatis Lagidarum.*

M. J. Baudouin de Courtenay, m. t., présente le mémoire de M. Etienne Ramult, intitulé: *Statistique de la population cachoube.*

Classe d'Histoire et de Philosophie

Séance du 15 juin 1896

Présidence de M. F. Zoll

M. F. Piekosiński, m. t., donne la seconde lecture de son travail: *Sur l'authenticité des inscriptions runiques de Mikorzyn.*

M. C. Potkański donne lecture de son mémoire: *Sur l'inscription sépulcrale de Boleslas-le-Grand.*

Classe des Sciences mathématiques et naturelles

Séance du 1 juin 1896

Présidence de M. F. Kreutz

Le Secrétaire dépose sur le bureau deux récentes publications:

»Materyały archeologiczno-antropologiczne i etnograficzne«. (*Matériaux archéologiques, anthropologiques et ethnographiques*), 1er vol., in 8°, X, 108 et 425 p.[1])

S. Dickstein. »Hoene Wroński. Jego życie i prace". (*Hoene Wroński. Sa vie et ses travaux*), 8°, IV. 368 p.[2]).

M. L. Natanson, m. c., rend compte des travaux de M. P. Rudzki: *Contribution à la théorie des ondes liquides irrotationelles* [3]) et de M. L. Silberstein: *Sur la production du mouvement tourbillonaire dans un fluide dénué de viscosité* [4]).

1) Voir ci-dessous aux Résumés p. 258. — 2) ib. p. 265. — 3) ib. p. 269. — 4) ib. p. 280.

M. N. Cybulski, m. t., présente le mémoire de M. W. Szymonowicz: *Sur la structure et le développement des extrémités des nerfs dans le bec du canard* [1]).

Le Secrétaire donne lecture du rapport de M. F. Mertens, m. t., sur le travail de M. J. Puzyna: *Sur la théorie des séries des puissances* [2]).

1) Voir ci-dessous aux Résumés p. 290. — 2) ib. p. 295.

Résumés

34. — **Materyały archeologiczno-antropologiczne i etnograficzne.** (***Matériaux archéologiques, anthropologiques et ethnographiques***). Tome I. p. X. 108 et 425, avec 10 cartes géogr., un tableau graphique et cinq planches.

Anthropologie. — Archéologie.

A. Zakrzewski. **Ludność miasta Warszawy.** Przyczynek do charakterystyki fizycznej. (***Contribution aux observations sur les caractères physiques de la population de Varsovie***).

L'auteur fait le relevé de la taille de tous les conscrits de Varsovie, de la classe 1888. Ces jeunes gens, au nombre de 1482, sont classés par confessions religieuses. Cette classification a semblé la plus logique, car elle équivaut strictement à une classification par nationalités.

Voici les résultats sommaires de ces études:

Les Polonais de Varsovie, âgés de 21 ans, ont, en moyenne, 165 cm. 5 mm. de taille.

Les Juifs: 162 cm. 3 mm.

Les Polonais sont donc d'une taille supérieure à la moyenne, tandis que les Juifs sont au-dessous de cette moyenne.

L'examen de la taille des jeunes gens de Varsovie par quartiers montre que, dans certains quartiers dont les conditions hygiéniques ou économiques sont défavorables, la taille baisse et le nombre des impropres au service augmente. Parmi les Juifs, ces différences se font moins sentir. A ce travail sont joints des cartes explicatives et des tableaux statistiques.

Julien Talko-Hryncewicz. **Charakterystyka fizyczna ludności Podola.** *(Caractères physiques de la population de la Podolie)*.

L'auteur divise la population de la Podolie russe en deux groupes: l'un, les Podoliens proprement dits, occupe les territoires occidentaux de la province, tandis que l'autre, les Polésiens, sont à l'Orient. 130 individus du premier groupe et 121 du second ont été examinés par l'auteur qui tire de ses observations les conclusions suivantes.

Les Podoliens n'ont aucun caractère prononcé qui leur soit propre; ils accusent au contraire une étroite parenté avec les habitants des contrées voisines, ce qui prouve que les Podoliens sont d'origine mêlée.

Leur taille, peu élevée en général, les rapproche des Ukrainiens et des montagnards ruthènes. Leur teint blanc et la couleur de leurs cheveux les assimile encore aux Ukrainiens et, parfois seulement, aux Blanc-Russiens, aux Polésiens et aux Polonais. La structure de leur crâne rappelle celle du crâne des Polésiens. Par contre les Podoliens russes, et surtout les Polésiens, se distinguent assez vivement de leurs voisins d'Occident, les Ruthènes et les Podoliens de Galicie. Ces derniers sont plus bruns et le type brachycéphale y est plus accusé.

Stanislas Cercha. **Poszukiwanie archeologiczne w gubernii mohilewskiej** w powiatach rohaczewskim, bychowskim i mohilewskim, dokonane w latach 1892–1894. *(Recherches archéologiques dans le gouvernement de Mohilew,* dans les districts de Rohaczew, Bychów et Mohilew, exécutées de 1892 à 1894).

L'auteur à fait des fouilles dans quelques kourhanes (tumulus) situés dans le gouvernement de Mohilew, et rend compte du résultat de ses recherches. Il décrit les objets qu'il a trouvés et les compare avec quelques autres objets archéologiques précédemment découverts dans la même région. Dans presque tous ces kourhanes il a rencontré des squelettes auprès desquels étaient placés des poteries d'argile, de menus ornements en bronze, en os, quelquefois en argent ou en fer. Ces ornements consistaient en anneaux, en pendeloques, en verroteries. La planche I, (fig. 1—13) jointe au compte-rendu, en rèprésente les principaux.

Dans le village d'Anielin, au bord du Dniepr, l'auteur a découvert quantité d'outils en pierre et de poteries d'argile ornementées dont les fig. 14—18 de la planche I reproduisent es types.

Ethnographie.

Severin Udziela. **Cholera w pojęciach ludu Ziemi Sądeckiej.** (***Le choléra d'après les opinions populaires des habitants des environs de Sącz en Galicie).***

Le choléra, disent ces paysans, apparaît sous les traits d'une grande femme maigre, vêtue de haillons sordides et couverte d'un grand voile.

Elle arrive sur l'aile du vent, et personne ne sait d'où elle vient. Elle habite ordinairement les entrailles de la terre où elle expie ses crimes. Quand elle sort de sa retraite, elle est funeste, non seulement aux hommes, mais encore aux plantes. Il n'y a aucune barrière capable de l'arrêter, si ce n'est la prière, les invocations à Dieu, à Sainte Rosalie, à Saint Roch et à Saint Sébastien. Cependant certains remèdes ont une efficacité fréquente; entr'autres l'eau de vie, surtout l'eau-de-vie dans laquelle on a mis de la graisse fondue, l'ail, la plante appelée „biedrzeń" (Pimponella saxifraga) portée dans de petits sacs sur la poitrine et sur le dos, le tabac, surtout l'espèce dite „bakuniec". Quant aux secours et aux remèdes des médecins, ils sont inutiles contre le choléra. Après avoir frappé ses victimes, le fléau quitte le village et va ailleurs; quelquefois il ordonne qu'on le transporte à cet autre endroit.

Ces croyances ont été recueillies de la bouche même des paysans qui en assurent l'authenticité.

Louis Charkowski. **Wzajemny stosunek stanów na Podlasiu.** (***Les rapports mutuels entre les différentes classes de la population en Podlachie).***

Cette intéressante notice nous fournit un tableau des rapports qui existent entre les paysans, les bourgeois, la petite noblesse et les grands seigneurs propriétaires, en Podlachie. L'auteur rapporte tous les sobriquets, toutes les appellations qu'une classe inflige à l'autre et réciproquement. La classe des ouvriers, toute récente dans l'ordre social, occupe par rapport aux autres une situation très curieuse. Les Juifs sont honnis et méprisés. On les considère comme des sangsues, quoique le paysan et le bourgeois en tirent leurs ressources. En terminant l'auteur fait remarquer que les relations de voisinage, entre les Polonais et les Ruthènes de la Podlachie, sont des plus amicales.

Hélène Czechowska. **Wesele w Rudzku.** (***Les noces à Rudzk***).

Après avoir fait la topographie du village de Rudzk (à 35 kilomètres de Pińsk, dans le gouvernement de Mińsk), l'auteur détermine le caractère des démarches que font les jeunes gens pour obtenir une jeune fille en mariage. Puis elle décrit les noces. Cette description est divisée en deux parties sous les titres de: 1° les négociations; 2° les noces elles-mêmes.

Les négociations comprennent les premières et secondes „zapoiny"; ces dernières équivalent à des fiançailles.

La description de la cérémonie des noces elles-mêmes comprend les chapitres suivants: 1° Préparatifs. (Korowaj). 2° Arrivée du fiancé. Mariage, 3° Retour de l'église et départ du jeune marié. 4° „Posag" (Chants d'hyménée). 5° Chez le jeune marié. 6° Le jeune homme va chercher la jeune fille. 7° Chez la jeune fille. 8° La jeune fille est habillée en femme mariée. 9° Arrivée chez le jeune homme. 10° Le partage du Korowaj (gâteau nuptial).

L'auteur, en racontant ces divers épisodes, rapporte 75 chants qui y ont trait. Elle a aussi donné la musique de deux de ces chants.

Lucien Malinowski. **Okaz pisma obrazowego.** (*Un exemplaire d'écriture figurée*).

Ce curieux spécimen est un compte de forgeron ne sachant pas écrire les lettres, mais connaissant les chiffres. Aussi a-t-il écrit le nombre des objets, de même que le prix de ces objets, tandis qu'il a dessiné les objets eux-mêmes, à sa façon. L'auteur donne une reproduction en photogravure de ce document curieux, et y joint des notes explicatives sur les signes adoptés par l'artisan illettré mais ingénieux.

Stanislas Cercha. **Baśnie ludowe, zebrane we wsi Przebieczanach w powiecie wielickim.** (*Contes populaires, recueillis à Przebieczany, dans le district de Wieliczka*).

Ces contes, rapportés dans l'idiome local, sont au nombre de 15. Ils ont presque tous été recueillis de la bouche d'un paysan qui, ayant longtemps servi dans l'armée, avait des prétentions au beau langage, et s'efforçait de mettre dans ses récits une certaine correction, leur donnant une allure presque littéraire. Malgré cela ces historiettes apportent une curieuse contribution aux motifs généraux.

Les puissances supérieures, les dragons, les esprits, les forces impures et sataniques jouent dans tous ces contes un rôle prépondérant.

F. Wereńko. **Przyczynek do lecznictwa ludowego.** (*Contribution à la medecine populaire.*)

Ce recueil de recettes médicales, de conseils et d'opinions sur la santé a été composé en Lithuanie, dans les gouvernements de Mińsk et de Witebsk, et spécialement dans les districts de Lepel et de Borysow. Le village de Puciłkowicze, dans ce dernier district, a fourni la plus abondante moisson. Le peuple de ces contrées est fort ignorant et superstitieux au plus haut degré; aussi ont-ils la plus grande confiance dans les charmes, sortilèges, incantations, sorciers, tandis qu'ils se méfient beaucoup des médecins et de la médecine. A leur avis les médecins sont bons pour les „messieurs“, mais pas pour les „moujicks“. L'auteur nous dépeint les sorciers et les sorcières, les charlatans et rebouteurs, „les connaisseurs de maux“. Il expose les opinions sur les maladies et leurs causes, il indique les spécifiques les plus usités. Puis, en une suite de dix chapitres, il parle des maladies de la femme, de l'enfant, du cerveau, des nerfs, des sens, des voies respiratoires, de l'estomac, des intestins, des voies urinaires, de la peau; enfin des épidémies et des affections chirurgicales. Un chapitre tout entier est consacré aux „charmes“, aux „sortiléges“ et aux notions d'art vétérinaire en faveur chez ces paysans.

Blaise Pawłowicz. **Kilka rysów z życia ludu w Zalasowej w powiecie tarnowskim.** (***Quelques particularités de la vie des paysans de Zalasowa, district de Tarnów, en Galicie***).

L'auteur décrit d'abord le caractère, le tempérament de la population de ce village; puis il cite les noms et surnoms qui y sont les plus usités. Ensuite il rapporte les traditions et opinions sur la société les plus en faveur. Ces paysans placent avant tout le clergé; eux-mêmes occupent le second rang. Au-dessous viennent les ouvriers et artisans; enfin tous les employés et habitants des villes sont enveloppés du même mépris.

L'auteur parle ensuite de l'idée qu'ils se font du droit et de la loi, de l'administration de la paroisse, du calendrier. On rencontre çà et là les conceptions les plus bizarres et les plus étranges; mais ce qui est surtout intéressant ce sont les croyances religieuses, la superstition et les pratiques magiques.

L'auteur nous décrit enfin une noce; il rapporte une très caractéristique conversation, six contes, cinq anecdotes et quelques chansons dans le dialecte de l'endroit, avec tous les tours de phrase et toutes les expressions propres à ces villageois.

Jean Świętek. **Zwyczaje i pojęcia prawne ludu nadrabskiego.** (*Coutumes et usages légaux des populations riveraines de la Raba*).

Ce travail n'est qu'une partie d'un grand ouvrage sur l'ethnographie de cette contrée qui a déjà d'ailleurs fourni à l'auteur la matière d'une très intéressante monographie, intitulée „Lud nadrabski“ (Les populations riveraines de la Raba[1]).

Dans le présent opuscule l'auteur a pris pour guide le „questionnaire de B. Grabowski“, établissant des catégories plus ou moins importantes d'après le sujet traité. La partie publiée aujourd'hui concerne les usages légaux usités dans la famille. On y voit exposées les conceptions populaires sur la famille, sa hiérarchie, les degrés de parenté, l'adoption, les „frères de lait“, le compérage; puis les rapports quotidiens dans la famille, avec les proches et avec tous les autres parents, même les plus éloignés; les rapports entre les parents et leurs enfants légitimes ou illégitimes, du beau-père et de la marâtre avec les beaux-fils, des conjoints légitimes ou non. L'auteur parle ensuite des biens, des testaments et dernières volontés, des coutumes observées dans les successions, de la tutelle des mineurs. Des exemples pris dans la vie de ces populations, des documents authentiques, joints aux explications de l'auteur, y jettent la plus vive lumière.

Natalie Zimmer. **Dumki i pieśni ludu ruskiego z Zadnieprza.** (*Doumkas et chants ruthènes des populations de la rive gauche du Dniepr*).

L'auteur ayant passé de longues années à Połtawa et dans le gouvernement de ce nom, a recueilli les doumkas et chansons que chantaient ses domestiques et nous les rapporte avec leur musique. Le présent travail ne contient que des morceaux absolument

[1]) Voir Bulletin, 1894. p. 11.

inédits; il est formé de cinq doumkas (élégies), neuf chansons d'amour, cinq chansonnettes comiques, quatre chants militaires, quatre berceuses. En outre l'auteur cite des variantes aux airs de 5 mélodies ruthènes déjà connues et publiées.

ROMAN ZAWILIŃSKI. **Przyczynek II do etnografii górali polskich na Węgrzech.** (***Deuxième contribution à l'ethnographie des montagnards polonais de la Hongrie***).

L'auteur essaye d'abord de bien déterminer le caractère des populations frontières qui parlent encore polonais et l'influence qu'ont eu sur elles les éléments étrangers. Il était fort difficile de délimiter exactement le territoire occupé par ces populations, car de proche en proche, les particularités tranchées s'effacent et finissent par disparaître dans l'uniformité de la population voisine.

Après avoir visité la vallée de la Kisuca supérieure, l'auteur a cotoyé la vallée de la Bystrzyca, où il n'a plus rencontré trace d'éléments polonais. Nous trouvons ensuite dans ce rapport les matériaux fournis par le territoire appelé „Skalite". Ces matériaux comprennent: la description des ustensiles domestiques, la cuisine, l'alimentation, l'industrie domestique, les coutumes aux principales dates de l'année, la description exacte d'une noce paysanne, faite dans le dialecte même de la contrée; des photogravures sont jointes à cette dernière partie du travail. Viennent ensuite: les danses et jeux, plusieurs contes et chansons dont le caractère est profondément slave, polonais. La musique de quelques-unes des plus originales de ces chansons a été aussi notée par l'auteur.

---

35. — S. DICKSTEIN. **Hoene Wroński. Jego życie i prace.** (***Hoëné Wronski. Sa vie et ses travaux***), 8°, IV, 368 S.

Faire revivre la mémoire d'un penseur et savant illustre, ignoré jusqu'à ce jour, même dans son pays, raconter la vie de Wroński d'après les documents les plus certains, montrer l'homme même en reproduisant fidèlement les traits principaux de son oeuvre, donner un exposé sommaire de tous les grands problèmes scientifiques et philosophiques qu'il a abordés, dresser enfin un inventaire de la multitude de ses ouvrages — voilà le but que s'est proposé l'auteur.

Porter à présent un jugement absolu sur l'immense oeuvre de Wroński, serait une tâche prématurée. L'auteur s'est borné seulement à présenter les idées principales et les points de vue de Wroński dans plusieurs branches du savoir humain, à éclaircir ses idées mathématiques, les plus connues parmi ses productions scientifiques, en s'abstenant de toute critique de ses autres productions — travail qui est encore à faire et devra être entrepris par des savants qui voudront connaître et apprécier l'oeuvre de Wroński. Ce livre ne sera donc qu'un guide qui facilitera peut être les recherches postérieures.

L'ouvrage présent se compose de deux parties. La première, consacrée à la vie de Wroński, contient un aperçu historique de ses actions, travaux et découvertes; le lecteur y trouvera des détails qui pourront l'intéresser sur les circonstances dans lesquelles les idées de Wroński ont pris naissance. La seconde partie forme un catalogue raisonné de tous ses ouvrages imprimés et manuscrits.

Table des matières de la première partie.

Chapitre III. 1804—1810. Wroński à Marseille, membre de l'académie et secrétaire général de la société médicale. Il se dévoue entièrement à la philosophie et à la réforme des sciences. Ses idées en mathématiques. Travaux sur la géodésie, l'optique, l'économie politique, la statistique et la mécanique céleste. „Sept manuscrits".

Chapitre IV. 1810—1812. Wroński se rend à Paris. Il présente son mémoire à l'Académie des sciences. Entretien avec Lagrange et Lacroix. Rapport de l'Institut. Polémique dans le „Moniteur". L'„Introduction à la philosophie des mathématiques". Analyse de cet ouvrage, critique contemporaine. Manuscrit sur la philosophie de la géométrie. L'opuscule sur la résolution des équations et ses critiques. Mémoire sur la „Théorie des fonctions analytiques de Lagrange". Rapport de l'Institut sur ce mémoire. Controverse de Wroński avec l'Académie. Programme d'un cours de philosophie. Wroński et ses compatriotes.

Chapitre V. 1812—1819. Wroński et Arson. „Philosophie de l'infini", „Philosophie de la Technie algorithmique", „Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace". Idées historiosophiques de Wroński exposées dans le Nr. 1 du „Sphinx". Situation de Wroński.

Chapitre VI. 1819—1823. Départ pour l'Angleterre. Incident à la douane. Théorie des réfractions et controverse avec Th. Young. Appel au parlement britannique. Mémoires présentés à la Société royale de Londres. Lettres à Sir Humphry Davy. „Introduction à un cours de mathématiques". Travaux de Wroński à Londres.

Chapitre VII. 1823—1829. Travaux sur les instruments mathématiques. Séjour en Belgique. Calculateur universel. Arithmoscope. Canons de logarithmes. Anneau arithmétique. Ecrits messianiques. Epître au pape Léon XII. Travaux sur le calcul des probabilités.

Chapitre VIII. 1829—1836. Application du messianisme à la politique. „Problème de la politique moderne". L'antinomie sociale d'après Wroński. „Prodrome du messianisme". „Bulletins messianiques". Travaux pour la théorie des machines à vapeur et pour la locomotion. Philosophie de la physique: nouvelles idées théoriques en physique.

Chapitre IX. 1836—1843. Relations de Wroński avec Ed. Thayer. Idée napoléonienne. Philosophie de la politique napoléonienne. Travaux de Wroński sur ce sujet. La „Métapolitique". Historiosophie de Wroński. Sept périodes de l'histoire de l'humanité. Tables historiosophiques. L'opinion de Wroński sur les mystiques. Travaux techniques. Brevets d'invention. Rails mobiles. Locomotion nouvelle. Malheureux insuccès.

Chapitre X. 1843—1848. „Prolégomènes du messianisme". Analyse de cet ouvrage. Tables génétiques des sciences. Idées de Wroński sur la mécanique céleste et terrestre, sur la physique et la chimie. Ses constructions politiques. Continuation des travaux sur la locomotion. Wroński devant le Comité général des ponts et chaussées à Paris.

Chapitre XI. 1848—1853. Wroński septuagénaire. Travaux des cinq dernières années de sa vie. Vastes projets de ses nouveaux écrits. „Adresse aux nations slaves". Trois grands volumes sur la „Réforme du savoir humain". La „loi de création" et „l'Absolu". Théorie des nombres. „Adresse aux nations civilisées". Formules mathématiques de l'économie sociale. „Adresses aux hommes supérieurs et au gouvernement français. Epître au prince Czartoryski. Wroński fait la connaissance du comte Durutte. Départ pour l'Allemagne. Conférences européennes". Adresses et épîtres aux monarques. „Epître secrète à Napoléon". „Destinées des nations slaves". Retour de Wroński en France. Travaux de la dernière année de sa vie. „Historiosophie". „Théorie des marées". Derniers jours de Wroński. Sa mort.

Chapitre XII. Après la mort de Wroński. Démarches et travaux de ses admirateurs. Efforts pour la publication de ses ouvrages. Le prix de la Société des sciences exactes à Paris. L'état actuel de l'action pour la publication de l'oeuvre de Wroński. Caractères de l'intellectualité de Wroński. Résumé des problèmes qu'il s'efforça de résoudre. Conclusion.

Table des matières de la deuxième partie.

---

36. — M. P. Rudzki. **Przyczynek do teoryi fal wodnych niewirowych.** (***Zur Theorie irrotationaler Flüssigkeitswellen***).

Vor einem Jahre hat d. Vf. in den Abhandlungen der Akad. d. Wiss. in Krakau eine kurze Notiz über die Theorie der stationären Meereswellen veröffentlicht. Indem die Art und Weise, wie er damals dieses Problem behandelte, ihn nicht vollkommen befriedigte, beschloss er zu demselben Gegenstande zurückzukehren, wurde aber bisher durch verschiedene Nebenumstände daran verhindert.

Das Problem der stationären irrotationalen Flüssigkeitswellen wurde vor etlichen Jahren von Helmholtz[1]) in zwei

[1]) Sitzb. Akad. d. Wiss. Berlin 1889. pag. 761—780.
Sitzb. Akad. d. Wiss. Berlin 1890. pag. 853—872.

Aufsätzen behandelt. Im Laufe des vergangenen Jahres erschien eine Abhandlung von Herrn Dr. Wien[1]), welche gewissermassen als eine Entwicklung und Fortsetzung der Helmholtzschen Abhandlungen gelten kann. Herr Wien giebt eine Reihe von approximativen analytischen Darstellungen der stationären Meereswellen von verschiedener Form und Grösse, er knüpft daran gewisse Schlüsse über die Verhältnisse zwischen der Geschwindigkeit der Wellen und des Windes u. s. w.

Die vorliegende kurze Schrift verfolgt ein anderes Ziel.

Wir betrachten mit Helmholtz irrotationale Flüssigkeitswellen von endlichen Dimensionen. Wir nehmen an, dass die wogenden Flüssigkeiten incompressibel sind und einen in der Richtung der Fortpflanzung der Wellen unendlichen Raum einnehmen, so dass die Wogen sich in's Unendliche fortsetzen. Wir nehmen ferner mit Helmholtz an, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen constant ist und die Flüssigkeitsbewegung in einer Schaar von parallelen verticalen Ebenen überall dieselbe ist. Endlich nehmen wir an, dass die Wellen stationär sind. Diese letzte Annahme soll bedeuten, dass, wenn man zur horizontalen Geschwindigkeit eine constante, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Grösse nach gleiche der Richtung nach entgegengesetzte Geschwindigkeit hinzufügt, so verwandelt sich die ganze Bewegung in eine stationäre.

Wir bemerken noch, dass Helmholtz und Herr Wien zwei zugleich wogende Flüssigkeiten betrachten: eine leichtere oben und eine schwerere unten.

Wir denken uns nun die constante, horizontale, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gleiche und entgegen-

[1]) Wied. Ann. 1895. Band 56. pag. 100—130. Etwas früher hat Dr. Wien seine Untersuchungen in den Berliner Sitzb. veröffentlicht. Die Abhandlung des Herrn Dr. Wien corrigiert auch gewisse Fehler, mit welchen die Helmholtzschen Abhandlungen behaftet waren.

gesetzte Geschwindigkeit addiert und bezeichnen dieselbe mit: c. Bekannterweise wird dadurch nichts an der Bedingung der Irrotationalität verändert.

Die Bewegung, die wir nun zu betrachten haben, ist ein irrotationales Fliessen in wellenförmigen unveränderlichen Stromlinien. Die Formen der Wogen ruhen, während die Flüssigkeit an ihnen vorbeiströmt. Dank den gemachten Annahmen ist die Bewegung nur von zwei Coordinaten abhängig.

Bezeichne man das Geschwindigkeitspotential mit φ, die Stromfunction mit ψ. Beide Functionen befriedigen die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = o \qquad \mathrm{I}$$

Wir nehmen die x Axe horizontal, die y Axe vertical. Die horizontale Geschwindigkeit ist nun

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

die verticale:

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Das Gebiet, wo die Gleichung I für φ und ψ giltig ist, wird einerseits von einer wellenförmigen Stromlinie, sagen wir von der Stromlinie:

$$\psi = o$$

andererseits von einer horizontalen geradlinigen Stromlinie, sagen wir von der Stromlinie:

$$\psi = h,$$

welche auch im Unendlichen liegen kann, begrenzt.

Nun wissen wir, dass, wenn die Functionen φ und ψ harmonische Functionen von x und y sind, so sind ebenfalls x und y harmonische Functionen von φ und ψ. Auch müssen wir bemerken, dass im vorliegenden Falle nicht nur φ und ψ eindeutige Functionen von x und y, sondern umgekehrt x und y eindeutige Functionen von φ und ψ sind. Dies erhellt unmittelbar aus den Bedingungen des Problems. — Es wird bequem sein φ und ψ als unabhängige, x und y als abhängige Variabeln zu wählen, indem das in der φ, ψ Ebene zu betrachtende Gebiet eine einfache Gestalt besitzt; es ist nämlich ein indefiniter zwischen zwei Parallelgeraden:

$$\psi = o \quad \text{und} \quad \psi = h$$

liegender Streifen.

Die Bewegung in der x, y Ebene ist ein Strömen längs wellenförmiger ruhender Stromlinien, die Function φ muss die Gestalt haben:

$$\varphi = cx + F(x, y)$$

wo F eine nach x periodische Function bedeutet. Ziehen wir nun in der x, y Ebene die Linien:

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.},$$

denken wir uns diese Ebene conform deformiert und zwar so, dass die Curven:

$$\psi = \text{const.}$$

zu horizontalen, und die Curven:

$$\varphi = \text{const.}$$

zu verticalen Geraden werden, so werden jetzt die Geraden:

$$y = \text{const.}$$

zu wellenförmigen Curven und die Geraden:

$$x = \text{const.}$$

zu einer Schaar von Linien umgeformt, welche die ersten orthogonal schneiden. — Gewisse unter den Curven:

$$y = \text{const.}$$

werden von der Geraden:

$$\psi = o$$

und den nächstliegenden Geraden:

$$\psi = \text{const.}$$

geschnitten. — Es ist leicht sich eine Flüssigkeitsbewegung zu den Stromlinien:

$$y = \text{const.}$$

und den Aequipotentiallinien:

$$x = \text{const.}$$

hinzudenken; es ist auch ein Strömen in wellenförmigen Stromlinien, wobei die Flüssigkeit über die Grenzlinie:

$$\psi = o$$

aus und einströmt.

Es muss nun jetzt:

$$x = \frac{\varphi}{c} + F_1(\varphi, \psi)$$

sein, wo $F_1(\varphi, \psi)$ eine nach φ periodische Function bedeutet. Eine harmonische nach φ periodische Function lässt sich immer im ganzen Streifen zwischen den Parallelgeraden:

$$\psi = o \quad \text{und} \quad \psi = h$$

als eine nach ganzen Potenzen von

$$e^{k(\psi + i\varphi)}$$

fortschreitende Reihe darstellen. Somit ist die allgemeinste Form der Function x die folgende:

$$x = \frac{\varphi}{c} + \sum_{1}^{\infty} A_n (e^{n\psi} \pm e^{-n\psi}) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix} \qquad \text{II}$$

Der Einfachheit halber haben wir die Periode der Function F_1 gleich 2π gesetzt. Diese Annahme ist immer erlaubt; man braucht nur die Längeneinheit in der x, y Ebene so zu wählen, dass die jeweilige Wellenlänge $\frac{2\pi}{c}$ betragen möge.

Lassen wir jetzt φ um 2π wachsen, wir bekommen:

$$x_{\varphi + 2\pi} - x_{\varphi} = \frac{2\pi}{c}$$

Diese Differenz ist also im ganzen Streifen, von $\psi = o$ bis $\psi = h$ constant.

Fassen wir jetzt $\frac{d\varphi}{dt}$ in's Auge. Indem φ von der Zeit explicite nicht abhängt, so haben wir:

$$\frac{d\varphi}{dt}=u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

oder da:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

III
$$\frac{d\varphi}{dt}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

Nach bekannten Eigenschaften harmonischer Functionen hat man aber:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2}$$

was die Gleichung III in der folgenden Form zu schreiben erlaubt:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2\right]\frac{d\varphi}{dt}=1$$

Wenn wir jetzt $\frac{\partial x}{\partial\varphi}$ und $\frac{\partial x}{\partial\psi}$ mit Hilfe von II bilden, so werden wir ein Resultat bekommen von der Form:

IIIbis
$$\left[\frac{1}{c^2}+\frac{2}{c}\cdot f_1+f_1^2+f_2^2\right]\frac{d\varphi}{dt}=1$$

wo f_1 und f_2 Reihen [1]) von der Gestalt:

$$\sum B_n\,(e^{n\psi}\pm e^{-n\psi})\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}$$

sind. — Bilde man jetzt die Summe der Quadrate:

$$f_1^2+f_2^2$$

man wird immer ein Resultat bekommen von der Form:

$$S_1+S_2$$

wo S_1 eine nur von ψ nicht aber von φ abhängige Function, und S_2 eine von φ und ψ abhängige nach φ periodische Function bedeuten.

[1]) Natürlich setzen wir voraus, dass diese Reihen unbedingt convergent sind.

Trenne man jetzt die Variabeln in III bis und integriere:

$$\left[\frac{1}{c^2} + S_1 + \frac{2}{c} f_1 + S_2\right] d\varphi = dt$$

$$\left(\frac{1}{c^2}+S_1\right)\varphi + \int\left(\frac{2}{c} f_1 + S_2\right) d\varphi = t - M$$

Die Grösse M ist eine willkürliche Function von ψ. Das Integral:

$$\int\left(\frac{2}{c} f_1 + f_2\right) d\varphi$$

ist eine nach φ periodische Function von φ und ψ, deren Periode auch 2π beträgt. Bilde man jetzt die Differenz:

$$t_{\varphi+2\pi} - t_\varphi = \left(\frac{1}{c^2} + S_1\right) 2\pi$$

man sieht, dass sie nicht constant, sondern von ψ abhängig ist.

Die Bedeutung dieses Resultates ist einleuchtend. Die Wellenlänge [in der relativen Bewegung mit ruhenden Wogen] ist in allen Tiefen dieselbe und zwar gleich $\frac{2\pi}{c}$, aber es wird die Strecke, welche einer Welle entspricht, in verschiedenen Tiefen oder richtiger auf verschiedenen Stromlinien in verschiedenen Zeiträumen zurückgelegt.

Die Grösse S_1 ist eine Summe von Quadraten, somit immer positiv. Sie nimmt stetig von der Oberfläche ($\psi = o$) bis zum Boden ($\psi = h$) ab. — Bei unendlicher Tiefe enthält die Reihe II nur negative Potenzen, es verschwindet dann S_1 am Boden; d. h. für $\psi = \infty$, $S_1 = o$.

Bilde man nun den Quotienten:

$$\frac{x_{\varphi+2\pi} - x_\varphi}{t_{\varphi+2\pi} - t_\varphi} = \frac{c}{1 + c^2 S_1}$$

dieser Quotient gibt diejenige mittlere horizontale[1]) Geschwin-

[1]) Diese horizontale mittlere Geschwindigkeit hat denselben Werth für alle Flüssigkeitstheilchen, welche zu derselben Stromlinie gehören; verschiedene Werthe für Flüssigkeitstheilchen, welche zu verschiedenen Stromlinien gehören.

digkeit, mit welcher ein Flüssigkeitstheilchen in der relativen stationären Bewegung eine einer Wellenlänge entsprechende Strecke auf seiner Stromlinie zurücklegt. Die besagte Geschwindigkeit wächst von der Oberfläche zum Boden. Bei unendlicher Tiefe wird sie am Boden gleich c, wie es auch zu erwarten war.

Gehen wir jetzt von der relativen zur absoluten Bewegung über. Die relative stationäre Bewegung ist aus der absoluten durch die Addition einer constanten Geschwindigkeit c entstanden. Infolgedessen ist:

$$\frac{c}{1+c^2 S_1} - c = -\frac{cm}{1+m}$$

wo

$$m = c^2 S_1$$

diejenige mittlere horizontale Geschwindigkeit, mit welcher ein Flüssigkeitstheilchen in der absoluten Bewegung fortströmt. Diese Geschwindigkeit hat das entgegengesetzte Vorzeichen, wie c; da aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei unseren Annahmen — c ist, so erfolgt diese Strömung in derselben Richtung, in welcher die Wellen fortschreiten.

Sonst sieht man ein, dass diese Geschwindigkeit von der Oberfläche bis zum Boden[1]) abnimmt. Somit ist dies im Gegensatz zu den rotationalen Wellen von Gerstner keine reine Wellenbewegung. Wenn wir eine reine Wellenbewegung bekommen wollen, so müssen wir im ganzen Raume:

$$S_1 = o$$

setzen, — S_1 aber ist eine Summe von Quadraten — jedes Quadrat muss also separat gleich Null gesetzt werden. Diese Quadrate sind aber von der Form:

$$(A_n e^{n\psi})^2$$

wo A_n die Coefficienten der Reihenentwicklung II sind. Auf diese Weise bekommen wir aus der Bedingung:

[1]) Bei unendlicher Tiefe wird sie am Boden gleich Null.

$$S_1 = o$$

$$A_1 = o \quad A_2 = o \;\ldots\; A_n = o \;\ldots\; \text{in inf.}$$

$$x = \frac{\varphi}{c}$$

d. h. die relative Bewegung reduziert sich auf ein rectilineales Strömen mit constanter Geschwindigkeit und die absolute auf einen Ruhezustand. Mit anderen Worten: eine irrotationale Wellenbewegung, bei welcher die Flüssigkeitstheilchen nach einer Wellenperiode zu ihren früheren Lagen zurückkehren ist unmöglich [1]), sie wird immer von einer gleichzeitigen Strömung in der Richtung der Fortpflanzung der Wellen begleitet. Diese Eigenschaft irrotationaler Wellen hat nämlich ein Analogon in der Natur. Es werden ja die vom Winde erregten Wellen in der Regel von einer Strömung begleitet und zwar eilen der Wind, die Wogen und die Strömung in derselben Richtung. Bemerke man aber, dass die so eben bewiesene Eigenschaft irrotationaler Wellen mit den Grenzbedingungen nichts zu thun hat [2]).

Zusatz.

Wir wollen noch etliche Formeln mit Hilfe von sogenannten Lagrangeschen Gleichungen ableiten. Diese Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{d\xi} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial\xi} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial\eta} \end{aligned} \qquad \text{IV}$$

[1]) Bemerke man, dass eine geschlossene Bahn eines Flüssigkeitstheilchens das Vorhandensein von Wirbeln im von der Bahn eingeschlossenen Raume erfordert.

[2]) Die vorliegende Notiz war schon im Druck, als d. Vf. bemerkte, dass Lord Rayleigh vor etwa zwanzig Jahren (Phil. Magazine 1876 Aprilheft) dasselbe Theorem gefunden hatte. — Indem aber seine Beweisart auf anderen Betrachtungen beruht, so entschloss sich d. Vf. diese Schrift nicht zurückzuziehen. Diese Bemerkung bezieht sich natürlich auf den nachfolgenden Zusatz nicht.

x, y sind die Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens
ξ, η zwei ein jedes Theilchen eindeutig bestimmende Parameter
V das Potential der Kräfte

$P = \frac{p}{\rho}$, wo p den Druck, ρ (eine Constante) die Dichtigkeit bedeuten.

Ausser den Gleichungen IV hat man noch die Continuitätsbedingung (für incompressible Flüssigkeiten):

$$\text{V} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}\right] = o$$

Indem man die erste der Gl. IV nach η, die zweite nach ξ mit Rücksicht darauf, dass ξ und η von t unabhängig sind, differenziert, von einander abzieht, so bekommt man nach leichten Umformungen:

$$\text{VI} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial (x, u)}{\partial (\xi, \eta)} + \frac{\partial (y, v)}{\partial (\xi, \eta)}\right] = o$$

wo:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Bezeichnet man aber die moleculare Rotation mit ω, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\partial (x, u)}{\partial (\xi, \eta)} + \frac{\partial (y, v)}{\partial (\xi, \eta)} + 2\omega \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} = o$$

Da $\frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)}$ weder Null noch unendlich werden kann, so muss man bekanntlich bei irrotationaler Bewegung:

$$\text{VII} \qquad \frac{\partial (x, u)}{\partial (\xi, \eta)} + \frac{\partial (y, v)}{\partial (\xi, \eta)} = o$$

haben, wodurch natürlich die Gl. VI gleichzeitig befriedigt wird.

Auf diese Weise haben wir die Differentialgleichungen VII und V. Die letzte kann auch so geschrieben werden:

$$\text{V bis} \qquad \frac{\partial (x, v)}{\partial (\xi, \eta)} - \frac{\partial (y, u)}{\partial (\xi, \eta)} = o$$

Man kann die Gleichungen VII und V bis mit Hilfe des Symbols:

$$i=\sqrt{-1}$$

zu einer einzigen vereinigen und zwar zu:

$$\frac{\partial\,(x+iy, u-iv)}{\partial\,(\xi, \eta)}=o$$

Nach Multiplication mit:

$$\frac{\partial\,(x-iy)}{\partial\eta}$$

bekommt man:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-i\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)(F-iH)=G\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-i\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) \qquad \text{VIII}$$

wo

$$F=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

$$H=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2$$

Man hat ferner:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2$$

mit der identischen Relation:

$$EG=H^2+F^2$$

Die Gl. VIII zerfällt wieder in zwei Gleichungen:

$$H\frac{\partial u}{\partial\eta}=G\frac{\partial v}{\partial\xi}-F\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$H\frac{\partial v}{\partial\eta}=-G\frac{\partial u}{\partial\xi}+F\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

Ebenso leicht bekommt mann die Gleichungen:

$$H\frac{\partial u}{\partial\xi}=F\frac{\partial v}{\partial\xi}-E\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$H\frac{\partial v}{\partial\xi}=-F\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

welche sonst nur eine Folge der vorhergehenden sind. Aus den vier soeben geschriebenen Gleichungen folgt für u:

$$\mathrm{IX} \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{G\frac{\partial u}{\partial \xi}-F\frac{\partial u}{\partial \eta}}{H}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{-F\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}}{H}\right]=o.$$

Die nämliche Gleichung wird auch von v erfüllt. Es ist dies die bekannte Beltramische Gleichung, welche zeigt, dass die Linien:

$$u=\text{const.} \quad \text{und} \quad v=\text{const.}$$

in der Ebene der Variablen ξ und η ein orthogonales und isothermes Netz bilden. Mit IX identische Gleichungen bekommt man auch für x und y, wenn man die Gleichung:

$$\frac{\partial\,(x+iy,\, u-iv)}{\partial\,(\xi,\, \eta)}=o$$

statt mit $\frac{\partial\,(x-iy)}{\partial \eta}$, mit $\frac{\partial\,(u+iv)}{\partial \eta}$ multipliziert. Mit anderen Worten: es führt uns diese Transformation auf dieselbe analytische Aufgabe, welche sich aus den Eulerschen Gleichungen direct ergiebt.

---

37. — L. Silberstein. **O tworzeniu się wirów w płynie doskonałym**. (***Ueber die Entstehung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit***).

Im 56. Bande der Wiedemann'schen Annalen (1895, p. 144—147) hatte Hr. Schütz darauf hingewiesen, dass das berühmte Theorem von v. Helmholtz über die Unmöglichkeit der Herstellung oder Zerstörung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit durch conservative Kräfte nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen gültig ist.

In der vorliegenden Abhandlung wird nun, im Anschluss an die eben erwähnte Arbeit von Schütz, folgendes Problem behandelt: Wie müssen in einer reibungslosen Flüssigkeit, — welche der ausschliesslichen Wirkung conservativer Kräfte ausgesetzt ist, Druck und Dichtigkeit verteilt sein, damit in derselben in einem gegebenen Zeitmoment Wirbelbewegungen entstehen könnten, — ferner: mit welchen Geschwindigkeiten und in welchen Richtungen die entstehenden Wirbelbewegungen sich in Gestalt von Wirbelfäden auszubilden anfangen?

Dabei handelt es sich nicht im mindesten um einen Beweis, dass die Bedingungen der Herstellung oder Zerstörung von Wirbeln in einer reibungslosen Flüssigkeit mittels conservativer Kräfte auch wirklich physikalisch vorstellbar und möglich seien, — sondern einzig und allein um eine genaue analytische Untersuchung dieser Bedingungen und um die Ableitung der entsprechenden Lehrsätze, die in Folge ihrer Durchsichtigkeit eventuell eben zum Beweis der physikalischen Unmöglichkeit der Verwirklichung dieser Bedingungen dienen könnten.

Unter der Voraussetzung conservativer Kräfte erhält man, nach Schütz (l. c.), aus den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen, für ein Flüssigkeitsteilchen, welches in dem gegebenen Augenblicke noch keine Wirbelbewegung besitzt, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right),\\
\eta' &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right),\\
\zeta' &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

wo ξ, η, ζ die nach den Koordinatenaxen x, y, z genommenen Komponenten der (eben entstehenden) Wirbelgeschwindigkeit im Punkte x, y, z, t die Zeit, p den Druck und ρ die Dichte bedeuten. Von diesen Gleichungen geht der Verfasser aus, um eine Lösung der gestellten Fragen, und zwar in anschaulicher, geometrischer Form, zu gewinnen.

Führt man die in (1) angedeuteten Operationen aus, so folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
\xi' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\rho}{y,z}\right),\\
\eta' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\rho}{z,x}\right),\\
\zeta' &= \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{p,\rho}{x,y}\right),
\end{aligned}\right| \tag{2}
$$

wo $\left(\frac{p,\rho}{y,z}\right)$, u. s. w. zur Bezeichnung der entsprechenden Determinanten der Kürze wegen eingeführt sind. — Man betrachte nun die Flächen: 1⁰) constanten Druckes:

$$p\,(x, y, z) = \text{const.} \tag{3}$$

und 2⁰) constanter Dichte:

$$\rho\,(x, y, z) = \text{const.}, \tag{4}$$

welche in dem gegebenen Augenblicke durch den gegebenen Punkt gehen. Schneiden sich die beiden Flächen und liegt also der gegebene Punkt auf ihrer Schnittlinie, so müssen die Projektionen dx, dy, dz des von diesem Punkte (x, y, z) an, gezählten Bogenelements ds der Schnittlinie den beiden folgenden Gleichungen genügen:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dz} &= -\frac{\partial p}{\partial z},\\
\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dz} &= -\frac{\partial \rho}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

Löst man diese Gleichungen in Bezug auf dx/dz und dy/dz auf, so ergibt sich:

$$dx : dy : dz = \left(\frac{p,\rho}{y,z}\right) : \left(\frac{p,\rho}{z,x}\right) : \left(\frac{p,\rho}{x,y}\right), \tag{6}$$

d. h. nach (2):

$$dx : dy : dz = \xi' : \eta' : \zeta'. \tag{7}$$

Man erhält also folgendes

T h e o r e m I: E n t s t e h t i n e i n e m g e g e b e n e n T e i l c h e n e i n e r r e i b u n g s l o s e n, a u s s c h l i e s s l i c h n u r c o n s e r v a t i v e n K r ä f t e n a u s g e s e t z t e n, F l ü s s i g k e i t e i n e W i r b e l b e w e g u n g, s o f ä l l t d i e a n f ä n g l i c h e W i r b e l a x e d e s T e i l c h e n s m i t d e m E l e m e n t d e r S c h n i t t k u r v e d e r F l ä c h e n c o n s t a n t e n D r u c k e s u n d c o n s t a n t e r D i c h t e, z u w e l c h e n d a s T e i l c h e n a u g e n b l i c k l i c h g e h ö r t, z u s a m m e n; d i e s i c h b i l d e n d e W i r b e l l i n i e f ä l l t a l s o m i t d i e s e r S c h n i t t k u r v e g a n z z u s a m m e n.

Daraus folgt aber offenbar noch nicht, dass eine Wirbelbewegung wirklich immer entstehen muss, sobald nur die fraglichen Flächen sich schneiden. Wir wollen jedoch beweisen, dass dies in der That der Fall ist.

Die resultierende Wirbelb e s c h l e n i g u n g ω' des entstehenden Wirbel's ist, nach (2):

$$\omega'=(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{1/2}=\frac{1}{2\rho^2}\left\{\left(\frac{p,\rho}{y,z}\right)^2+\left(\frac{p,\rho}{z,x}\right)^2+\left(\frac{p,\rho}{x,y}\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{8}$$

Die Richtungscosinus der Normalen n, ν der Flächen $p=$const., $\rho=$const. im Punkte x, y, z sind:

$$a=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial x},\quad b=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial y},\quad c=\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{9}$$

beziehungsweise:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \rho}{\partial x},\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \rho}{\partial y},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{\partial \rho}{\partial z}, \tag{10}$$

wo, zur Abkürzung,

$$P=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2,\ R=\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 \tag{11}$$

gesetzt ist. Nimmt man als p o s i t i v diejenigen Richtungen von n, ν an, nach welchen hin der Druck, resp. die Dichte w ä c h s t, so hat man die Quadratwurzeln in (9) und (10) mit dem Pluszeichen zu nehmen. Der Winkel θ, den die beiden Normalen n, ν mit einander bilden, ist bestimmt durch

$$(12) \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{PR}}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right].$$

Anderseits ist aber die eingeklammerte Summe auf der rechten Seite der Gleichung (8) gleich

$$(13)\left\{\begin{aligned} &\omega'^2 \cdot 4\rho^4 = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \ldots + \ldots \\ &\qquad -2\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \ldots - \ldots \\ &= \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right] - \\ &\qquad - \left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right]^2; \end{aligned}\right.$$

verbindet man diese Relation mit (12), so erhält man:

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{4\rho^4\omega'^2}{PR}; \; 4\rho^4\omega'^2 = PR\sin^2\theta,$$

also

$$(14) \qquad \omega' = \frac{1}{2\rho^2}\sqrt{P}\sqrt{R}\sin\theta,$$

oder, weil n, ν eben die Richtungen sind, in welchen der Druck, resp. die Dichte am schnellsten zunimmt:

$$(15) \qquad \omega' = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta.$$

Hiemit ist der Beweis erbracht für folgendes

Theorem II: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Entstehung einer Wirbelbewegung in einem Teilchen einer reibungslosen, ausschlieschlich nur conservativen Kräften ausgesetzten Flüssigkeit ist, dass eine Fläche constanten Druckes und eine Fläche constanter Dichte, die bis dahin das gegebene Teilchen überhaupt nicht zugleich aufnahmen, oder aber in demselben einander berührten ($\theta = o$ oder $\theta = \pi$), sich gegenseitig zu schneiden anfangen, so dass das betrachtete Teilchen in dem gegebenen Zeitmoment auf ihre Schnittlinie geräth. Die Axe der entstehenden Wirbelbewegung fällt mit dem entsprechenden Bogenelement der Schnittlinie zusammen, und zwar fängt das Teilchen an um dieses Element herum in dem Sinne von v nach n (auf dem kürzeren Wege) mit der Wirbelschleunigung

$$\omega' = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \sin(\nu, n) \quad \frac{1}{2\rho^2} V \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \frac{\partial p}{\partial n} \qquad (15)$$

zu wirbeln.

Wir können das eben gewonnene Resultat auch so ausdrücken: es entsteht in einem wirbellosen Teilchen dann und nur dann keine Wirbelbewegung, wenn p eine Funktion von ρ allein ist, so dass die entsprechenden p— und ρ— Flächen sich decken, oder aber wenn ρ oder p oder beide Grössen vom Orte unabhängig sind.

Schneiden sich aber die Flächen von einem gewissen Augenblicke an, so bildet sich gleichzeitig längs der Schnittkurve eine Wirbellinie aus und zwar so, dass nach Verlauf eines Zeitelementes dt die einzelnen Teilchen der Wirbellinie die entsprechenden Wirbelgeschwindigkeiten

$$d\omega = \frac{1}{2\rho^2} \sin\theta \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \nu} dt \qquad (16)$$

erlangen.

Schneidet sich eine Schaar von p— Flächen mit einer Schar von ρ— Flächen, so bildet sich zugleicher Zeit ein ganzer Wirbelfaden, dessen Moment nach Verlauf der Zeit dt sich nach (16) sofort angeben lässt. Man betrachte einen unendlich dünnen Wirbelfaden, welcher den kanalförmigen Raum zwischen zwei benachbarten Flächen konstanten Druckes: p und $p + \frac{\partial p}{\partial n} dn$ und zwei benachbarten Flächen konstanter Dichte: ρ und $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\nu$ ausfüllt, die sich von einem gewissen Augenblicke an gegenseitig zu schneiden anfangen. Ohne auf die ursprünglichen Ausdrücke der Wirbelgeschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ zurückzukommen kann man direkt aus (16) ersehen, dass das Moment des entstehenden Wirbelfadens für die ganze Länge desselben einen und denselben Wert hat. Der Querschnitt q des betrachteten Wirbelfadens ist nämlich überall ein Parallelogramm mit den Seiten

$$a = dn : \sin\theta, \quad b = d\nu : \sin\theta, \tag{17}$$

die den Winkel $\theta = (\nu, n)$ einschliessen; es ist also

$$q = ab \sin\theta = \frac{dn \, . \, d\nu}{\sin\theta}, \tag{18}$$

also das Moment, nach Verlauf der Zeit dt:

$$q d\omega = \frac{dt}{2\rho^2} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} dn \, d\nu = -\frac{dt}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} dn . \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{\rho}\right) d\nu; \tag{19}$$

da aber die Druckdifferenz zwischen den beiden p— Flächen und ebenso die Dichtedifferenz, also auch die Differenz der Werte von $\frac{1}{\rho}$, zwischen den beiden ρ— Flächen längs des ganzen Kanals constant bleiben, so hat auch das Moment längs des ganzen Wirbelfadens einen und denselben Wert. Daraus folgt unmittelbar, in bekannter Weise, dass die Wirbelfäden schon im Augenblicke ihrer Entstehung sich zwischen je zwei Stellen der Begrenzungsfläche der Flüssigkeit erstrecken oder aber geschlossene Ringe bilden.

Mit der Zeit ist jedoch der Wert des Wirbelmomentes für einen und denselben Wirbelfaden veränderlich, und zwar fortwährend, so lange nur die p— und ρ— Flächen fortfahren sich gegenseitig zu schneiden, wenn auch ihr Neigungswinkel θ unveränderlich bleibt. Wird aber dieser Winkel gleich o oder π, d. h. fallen die p— mit den ρ— Flächen von einem gewissen Augenblicke an zusammen, so behält der entstandene Wirbelfaden den bis zu dieser Zeit bereits erlangten Wert des Moments im weiteren Verlauf der Zeit ungeändert bei, so lange nur die Flächen nicht wieder anfangen, mit einander Schnittlinien zu bilden. Man kann diese Sätze, der Einfachheit wegen, an einer zweidimensionalen Bewegung der Flüssigkeit mathematisch verfolgen. Die allgemeinen Gleichungen, welche die Komponenten der Wirbelgeschwindigkeit mit den Zeitänderungen derselben verknüpfen (Schütz, l. c.), gehen in diesem Falle, wenn wir die yz— Ebene, z. B., in die „Ebene der Bewegung" verlegen, über in:

$$\eta = o,\ \zeta = o,\ \eta' = o,\ \zeta' = o,$$

$$\omega' = \xi' = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) - \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{20}$$

wo v, w die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der y—, resp. der z-- Axe bedeuten; die p— und die ρ— Flächen sind in diesem Falle lauter Cylinderflächen, welche auf der yz— Ebene senkrecht stehen und deren Normalen n, ν also der yz— Ebene überall parallel sind; durch Einführung der Normalen n, ν und des Winkels θ geht die Gleichung (20) über in:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta - \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{21}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet in unserem Falle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w), \tag{22}$$

wo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ die zeitliche Aenderung der Dichte in einem fixen Elemente des Raumes bedeutet; daraus folgt

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{23}$$

wo $\frac{d\rho}{dt}$ sich auf ein individuelles, bewegtes Flüssigkeitsteilchen bezieht. Setzt man diesen Wert von $\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ in (21), ein so erhält man:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta + \xi\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{24}$$

oder

(25) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{1}{2\rho^3}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\sin\theta,$$

eine Gleichung, die für jeden Wert von t gültig ist.

Da nun die Dichte ρ dem Volumen, also in unserem Falle der zweidimensionalen Bewegung dem Querschnitt des Wirbelfadens umgekehrt proportional ist, folglich ξ/ρ von dem Wirbelmoment sich nur um eine Multiplikationskonstante unterscheidet, so ergibt sich aus (25) in der Tat, dass das Moment eines Wirbelfadens dann und nur dann von der Zeit unabhängig ist, wenn die p— und ρ— Flächen überhaupt mit einander zusammenfallen oder wenigstens weder im Innern noch an der Oberfläche des Wirbelfadens sich gegenseitig schneiden. Sonst ist aber das Gesetz der zeitlichen Aenderung des Wirbelmoments (im Falle zweidimensionaler Bewegung) durch die allgemeine Formel (25) gegeben.

Zuletzt soll noch gezeigt werden, wie eine Wirbelbewegung unter den im Theorem II genannten Bedingungen der Formel (15) gemäss mechanisch entsteht. Zu diesem Behufe denke man sich im Innern der Flüssigkeit ein unendlich kleines Parallelopipedon, welches durch die Kanten dn, $d\nu$ und eine zu denselben senkrechte Kante ds bestimmt ist; letztere ist zugleich ein Element der Schnittlinie einer p — und einer ρ — Fläche: der Einfachheit wegen sei der Winkel $\theta = (n, \nu)$ ein rechter, sodass das Parallelopipedon ein rechtwinkliges ist. Teilt man das Volumen des Parallelopipeds durch eine der Wand ds, dn parallele Ebene in zwei gleiche Teile ein, und bedeutet ρ die mittlere Dichte im Innern des ganzen Volumens, so kann man annehmen, dass die beiden Teile resp. die homogenen Dichten $\rho - \frac{\partial \rho}{\partial \nu}\frac{d\nu}{4}$ und $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \nu}\frac{d\nu}{4}$ haben —, welche nämlich genau ihren Mittelpunkten: 1, resp. 2 zukommen, also die Massen

$$m_1 = \left(\rho - \tfrac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right) ds dn \frac{d\nu}{2}, \tag{26}$$

$$m_2 = \left(\rho + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right) ds dn \frac{d\nu}{2}, \tag{27}$$

besitzen. (Die Richtung $\overline{12}$ fällt mit der positiven Richtung von ν zusammen). Ein jeder der beiden Teile wird nun in der Richtung $-n$ von der Kraft

$$N = \frac{\partial p}{\partial n}\, dn \,.\, ds \frac{d\nu}{2} \tag{28}$$

angegriffen. Denkt man sich einen jeden der beiden Flüssigkeitsteile erstarrt und ihre Massen m_1, m_2 in den Mittelpunkten 1, 2 koncentriert, so erteilt diese Kraft den Punkten 1, 2 in der Richtung $-n$ die Beschleunigungen

$$w_1 = N : m_1 = \frac{\partial p}{\partial n} : \left(\rho - \tfrac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right), \tag{29}$$

$$w_2 = N : m_2 = \frac{\partial p}{\partial n} : \left(\rho + \tfrac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu\right), \tag{30}$$

so dass $| w_1 | > w_2$ ist. Setzt man:

$$w_1 = w_0 + \tfrac{1}{2}(w_1 - w_2), \tag{31}$$

$$w_2 = w_0 - \tfrac{1}{2}(w_1 - w_2), \tag{32}$$

so bedeutet $w_0 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ die T r a n s l a t i o n sbeschleunigung des Mittelpunktes O des ganzen Parallelopipeds (in der Richtung $-n$), welcher die Strecke $\overline{12} = \frac{1}{2} d\nu$ halbiert, und

$$\tfrac{1}{2}(w_1 - w_2) : \tfrac{1}{4} dv = 2(w_1 - w_2) : dv, \tag{33}$$

d. h. nach (20) und (30)

$$2(w_1 - w_2) : dv = 2\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \left(\frac{1}{\rho - \frac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu} - \frac{1}{\rho + \frac{1}{4}\frac{\partial \rho}{\partial \nu}\, d\nu}\right) : dv = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \tag{34}$$

ist die W i n k e l b e s c h l e u n i g u n g des Punktsystems 1,2 in dem Sinne $\nu - n$ um die durch den Mittelpunkt O gehende, zu ds parallele Axe herum, oder in der Tat die doppelte Wirbelbeschleunigung ω' in O, was zu beweisen war. Ganz ebenso erhält man im allgemeinen Falle, in welchem die p—

Fläche mit der ρ— Fläche einen beliebigen Winkel θ bildet, den mit $\sin\theta$ multiplicierten Ausdruck (34), in Uebereinstimmung mit dem Theorem II.

Die obigen Lehrsätze hat der Verfasser lediglich als mathematische Konsequenzen der mechanischen Bedingungen einer reibungslosen, der Wirkung conservativer Kräfte ausgesetzten Flüssigkeit hingestellt. Eine ganz andere Frage, die hier nicht berührt werden soll, ist freilich die Frage nach den physikalischen Bedingungen der Existenz wirklicher Schnittlinien der p— und der ρ— Flächen. Nur so viel scheint von vornherein klar zu sein, dass, wenn man auf irgend welche Weise in einer Flüssigkeitsmasse von der erwähnten Beschaffenheit solche Druck — und Dichteverteilungen herstellt, bei welchen die p— mit den ρ— Flächen sich schneiden und zur Entstehung neuer Wirbel Anlass geben, und wenn man dann die Flüssigkeit sich selbst überlässt, — die erzwungenen Verteilungen in sehr kurzer Zeit sich dahin abändern werden, dass sich sämmtliche p— Flächen mit den entsprechenden ρ— Flächen gegenseitig decken. Alsdann werden aber die Momente der in dieser kurzen Zeit erzeugten Wirbelfäden sich nicht mehr mit der Zeit ändern und es werden weiter keine neuen Wirbel enstehen.

---

38. — W. Szymonowicz. **O budowie i rozwoju zakończeń nerwowych w dzióbie kaczki.** (***Ueber Bau und Entwicklung der Nervenendigungen im Entenschnabel***).

Die Ansichten über den Bau der Nervenendigungen im Schnabel der Ente, über die Art ihrer Entwicklung und die Herkunft der accessorischen Elemente gehen in vielen und wichtigen Punkten weit auseinander. Dieser Umstand veranlasste den Verfasser die vorliegende Arbeit in Angriff zu nehmen, in der Hoffnung, dass es ihm gelingen werde, unter Anwendung der neuesten Untersuchungsmethoden das Unklare aufzuklären und die Mängel der früheren Untersuchungen zu beseitigen.

Als Untersuchungsobject wurde ausschliesslich die Hausente verwendet, und die aus deren Eiern gezüchteten Embryonen; um sämmtliche Übergangsstadien in der Entwicklung zu gewinnen, wurden die Embryonen der Reihe nach vom 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 u. 28 Entwicklungstage untersucht. Der Verfasser bediente sich der verschiedenartigsten Methoden und zwar: um die Nervenendigungen ausgewachsener Thiere zu untersuchen wurde die Schnabelhaut in 1% Osmiumsäure, in Flemming'scher Flüssigkeit, in Zenker'scher Flüssigkeit, in heissgesättigter Sublimatlösung nach Heidenhain eventuell unter Zugabe von 1 Procent Essigsäure oder Osmiumsäure und in absolutem Alkohol fixiert, sodann nach gewöhnlichem Verfahren in Celloidin oder Parafin eingebettet. Zur Färbung diente neben den gewöhnlichen Methoden (Carmin, Hämatoxylin, Vesuvin, Thionin) auch die Eisenalaunhämatoxylinmethode M. Heidenhain's. Überdies wurden selbstverständlich spezielle, zur Färbung der Nerven dienende Methoden und namentlich die Ranvier'sche Goldmethode [8 Theile 1% Goldchlorid und 2 Theile Ameisensäure] und die Methylenblaufärbung nach Ehrlich mit nachfolgender Bethe'scher Fixation in Anwendung gezogen. Das embryonale Material wurde vor allem in 1% Osmiumsäure und in Sublimat fixiert. Die Goldmethode liess sich hier wegen der ungewöhnlichen Zartheit des Materials nicht anwenden.

An Präparaten von ausgewachsenen Thieren bemerkte der Verfasser nachstehende Einzelnheiten:

A) Grandry'schen Körperchen.

Die Färbung mittelst Methylenblau, (welcher Farbstoff eine spezielle Verwandschaft zur Nervensubstanz zeigt), liefert den unwiderlegbaren Beweis, dass die Tastzellen in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den Nervenfasern (per continuitatem) stehen, wie dies einige ältere Autoren behaupteten, sondern, dass das äusserste Ende der Nervenfaser die Endscheibe bildet, welche zwischen den Deckzellen liegend, sich denselben eng anschmiegt und also mit denselben nur „per contiguitatem“ im Zusammenhange steht. Mit Methylenblau wird nämlich in gut gelungenen Präparaten nur der Achsencylinder und die Endscheibe gefärbt. Die Zellen selbst bleiben ganz ungefärbt und lassen nirgends einen direkten Zusammenhang mit der Endscheibe erkennen. Diese Scheibe hat im Querschnitt die Form einer Spindel, was darauf hinweist, dass ihr mittlerer Theil dicker ist, als die Ränder. Im Flachschnitt erscheint sie als mehr oder weniger rundliche Scheibe und zeigt eine fibrilläre Struktur. Dies ist vor allem an der Stelle sichtbar, wo der Achsencylinder sich ausbreitet und in die Endscheibe eintritt. Dieser fibrilläre Bau kommt dadurch zustande, dass die Fibrillen des Achsencylinders in sie eintreten und sich in ihr fächerförmig ausbreiten. Der Rand der Endscheibe ist sehr oft viel intensiver gefärbt als ihr mittlerer Theil. Derselbe ist nicht ganz glatt, sondern zeigt ringsum sehr zarte, haarartige Vorsprünge. Der Verfasser bemerkte nie, dass diese Ausläufer zusammenfliessen und den Anfang der Nervenfaser bilden, welche, wie dies Geberg beschreibt, aus dem Nervenkörperchen austreten soll. Bei mehr zusammengesetzten Körperchen, in welchen 3 und 4 Zellen zur Bildung eines Körperchens zusammentreten, dringt gewöhnlich in jede Endscheibe ein Zweig des getheilten Achsencylinders ein, welche das ganze Nervenkörperchen versorgt. Manchmal bemerkt man jedoch, wie dies Ranvier beschreibt, dass die aus einer Endscheibe austretende Faser umbiegt, ihre Richtung gegen die nächste Scheibe desselben Körperchens nimmt und in dieselbe eintretend, sie so indirect mit der ursprünglichen Nervenfaser verbindet.

In Goldpräparaten erscheint die Endscheibe braun-violett gefärbt und zeigt eine ähnliche, wenn auch nicht so deutlich ausgesprochene faserige Structur, wie man dies in Methylenblaupräparaten bemerkt. Ein wichtiger Umstand muss hier hervorgehoben werden: die in ihrem mittleren Theile dunkel gefärbte Endscheibe zeigt an der Stelle, welche in der Nähe der Kerne der Deckzellen liegt eine bedeutend blässere Färbung, als in ihrer Peripherie. Da die Endscheibe an dieser Stelle nicht dünner ist, wie sich ja an Querschnitten mit Evidenz nachweisen lässt, so liegt die Vermuthung nahe, dass dieser Theil der Scheibe andere Eigenschaften besitzt, als die Peripherie.

Nähere Einzelheiten, welche sich auf den Bau der Deckzellen nnd das Verhalten der Nervenscheiden beziehen, wird der Verfasser in einer ausführlicheren Abhandlung, welche demnächst erscheinen wird, besprechen.

B.) Herbst'sche (Key-Retzius'sche) Körpechen.

In diesen Endgebilden muss man einen mittleren und einen äusseren Theil unterscheiden. Der erstere besteht aus dem Achsencylinder, aus der denselben umgebenden plasmatischen Substanz (Innenkolben) und aus 2 Reihen von Zellen, welche an der Oberfläche dieser Substanz, längst des Achsencylinders gelagert sind. Dieser mittlere Theil ist ringsum mit einer Reihe concentrisch angeordnater, sehr dünner, bindegewebiger Hüllen umgeben, denen wenig zahlreiche Bindegewebszellen angelagert sind. Diese Hüllen liegen im inneren Theile sehr dicht nebeneinander und sind aus Bindegewebsfasern derart eng zusammengeflochten, dass sie in dünnen Schnitten als feine Pünktchen sich darstellen. Der Achsencylinder endet in einer Verdickung, die sich als mehr oder weniger regelmässige Kugel präsentirt. Die Markscheide zusammen mit der Schwann'schen Scheide dringt in das Innere des Körperchens ein und findet vor dem Eintritt des Achsencylinders in die plasmatische Hülle (Innenkolben) ihr Ende.

C.) Intraepitheliale Nervenendigungen.

In die Epidermis tritt eine bedeutende Anzahl von Nervenfasern, welche, bevor sie die Cutis verlassen, ihre Scheiden verlieren, als nackte Achsencylinder einer wiederholten Theilung unterliegen und zwischen den Zellen des Stratum Malpighii bis zum Stratum granulosum vordringen. Auf diesem

Wege präsentieren sie sich als zickzackförmige Linien mit zahlreichen Varicositäten, welche namentlieh auf Goldpräparaten deutlich zu sehen sind. Dieselben kommen in ziemlich regelmässigen Abständen vor.

D.) Die Entwicklung der Grandry'schen und Herbst' schen Körperchen.

Die ersten Anfänge dieser Nervenkörperchen beobachtete der Verfasser bei 20tägigen Embryonen. Hier sieht man in Osmiumsäure-Präparaten innerhalb des Bindegewebes dicht unter der Epidermis dunkler gefärbte Zellinseln mit etwas grösseren und dichter gelagerten Kernen. In den entsprechenden Methylenblau-Präparaten bemerkt man auf diese Zellinseln zu verlaufende Nervenfasern, welche kurz vor ihrer Endigung in mehrere kleine Zweige zerfallen.

In früheren Stadien sieht man die Nervenfasern nicht so weit gegen die Oberfläche der Haut vordringen. Hier jedoch konnte der Verfasser niemals Inseln von differenzierten Zellen vorfinden. Niemals gelang es diese Zellinseln in irgend welchem Zusammenhange mit den Zellen der Epidermis anzutreffen und der Verfasser musste desshalb zur Überzeugung gelangen, dass diese eben differenzierte Bindegewebszellen darstellen, welche unter dem Einfluss des peripheren Endes der Nervenfaser gewissen Veränderungen unterlagen. Der Verfasser kann somit die Ansicht Izquierdo's und Asp's, dass diese Inseln epidermoidaler Herkunft sind, nicht theilen. Die Nervenfaser, resp. ihr peripheres Ende, bewirkt, sobald sie mit den Zellen in Berührung kommt, in denselben progressive Veränderungen, so dass in den um 2 Tage späteren Stadien in einigen kleineren Inseln Grandry'sche und in grösseren Herbst'sche Körperchen wahrgenommen werden können. Die Grandry'schen Körperchen bestehen in diesem Stadium (23 und 24 Tage) fast immer aus 4—6 Deckzellen und die in 2 oder 3 Äste sich theilenden Nervenfasern liefern die Endscheiben für 2 oder 3 nahe an einander gelegenen Körperchen. Die Herbst'schen Körperchen bestehen in diesem Stadium aus dem Achsencylinder, welcher noch keinen Endknopf und auch keine plasmatische Hülle besitzt, und blos von 2 bis 3 Schichten cubischer Bindegewebszellen umgeben ist.

In den weiteren Stadien durchwächst das Bindegewebe die zusammengesetzten Grandry'schen Körperchen und zertheilt sie in mehrere einfache, gewöhnlich aus 2—3 Zellen bestehende Gebilde. Gleichzeitig umgibt sich jedes Körperchen mit einer bindegewebigen Hülle. In den Herbst'schen Körperchen zeigen die Zellen der innersten Schicht Veränderungen, welche in der Aufquellung ihres Plasmas und Anlagerung längs des Achsencylinders bestehen.

Die weiteren Veränderungen, durch welche sie eine vollkommene Ähnlichkeit mit den Körperchen eines ausgewachsenen Thieres erlangen, spielen sich im postembryonalen Leben ab. Die Details der Entwicklung behält der Verfasser seiner ausführlichen Abhandlung vor.

---

39. — J. Puzyna. **Do teoryi szeregów potęgowych.** *(Zur Theorie der Potenzreihen).*

In dem Aufsatze wird das Verhalten der Potenzreihe einer veränderlichen Grösse auf dem Convergenzkreise (r) näherer Analyse unterzogen.

Ausser der Divergenz, bedingter und unbedingter Convergenz werden noch zwei, bis jetzt nicht genug präcisirten Fälle, und zwar: die *Oscillation* und *Unbrauchbarkeit* der Potenzreihe unterschieden.

Der erste Eall wird dadurch charakterisiert, dass — wenn a' ein Punkt auf dem Convergenzumfange ist, und $P(a') = P + Qi$ gesetzt wird — die Addenden in P (oder Q), oder gleichzeitig in P und Q sich einer Unbestimmtheitsgrenze a, b ($a \gtrless b$) nähern. Ist diese Unbestimmheitsgrenze $\pm\infty$, so wird die Reihe *$P(a')$ unbrauchbar* genannt.

Nach Ausscheiden der Unbrauchbarkeit oder Oscillation der Reihe wird weiter bewiesen, dass ein Punkt a' in welchem

$|P(a)| = \infty$, also bestimmt divergent ist, ein singulärer der gegebenen Potenzreihe ist.

Schliesslich werden Potenzreihen construiert, welche auf ihrem Convergenz-Kreise (r) in einer *überalldichten* Punctmenge dasselbe Vorhalten aufweisen.

Indem sich — nach den in der Einleitung des Aufsatzes gegebenen Betrachtungen — eine Potenzreihe in einem Puncte a' ihres Convergenzkreises auf 5-fache Weise verhalten kann, denn sie kann einerseits *unbedingt*, *bedingt*, oder *oscillierend* convergieren, andererseits aber *divergieren* oder schliesslich *unbrauchbar* werden, so ist für den Verfasser die von den Mathematikern bestrebte Aufgabe:

> eine Potenzreihe von solcher Beschaffenheit zu construieren, dass sie *in jedem beliebigen Puncte* ihres Convergenzkreises dasselbe Verhalten zeige

bis jetzt nur in zwei Fällen vollständig gelöst.

Der erste bezieht sich auf die unbedingte, der zweite, der von *Pringsheim* (Math. Annalen Bd. 25) erledigte Fall auf die bedingte Convergenz der Potenzreihe.

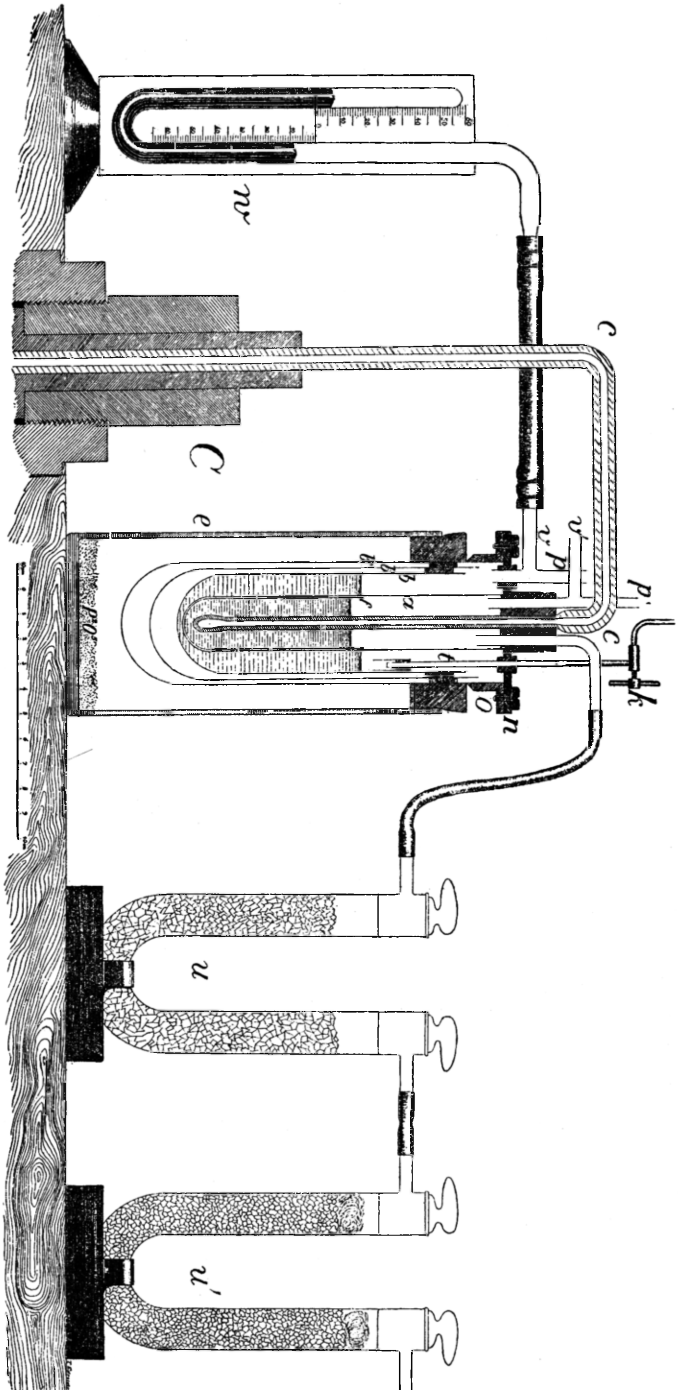
Was die übrigen drei Arten betrifft, so wird bemerkt, dass das Beispiel $(1 - x)^{\mu}$, $\mu \leq -1$, (vergl. z. B. *Biermann*. Elemente der höheren Mathematik S. 373), welches zum Nachweise der Existenz einer Potenzreihe mit der durchgängigen Divergenz auf *(r)* dienen soll, für ein *nicht befriedigendes* gehalten werden muss. Denn die Entwickelung von $(1 - x)^{\mu}$ ist divergent und unbrauchbar, wenn $\mu < -1$, ist aber divergent und oscillierend, wenn $\mu = -1$.

Auf die Aufgabe aber: eine Potenzreihe, die auf ihrem Convergenzkreise durchgängig divergieren, oscillieren oder unbrauchbar sein soll, zu bilden, wird in dem Aufsatze noch nicht eingegangen.

40. — ***Ein Versuch, das Helium zu verflüssigen.*** Vorgelegt in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe vom 13. April 1896 von Prof. Dr. Karl Olszewski.

Das zu meinen Versuchen benutzte Helium verdanke ich der Zuvorkommenheit seines Entdeckers, Prof. Ramsay, welcher mir gegen 140 ccm dieses Gases aus London in einer sorgfältig zugeschmolzenen Glasröhre zuschickte. Aus dem Briefe des Prof. Ramsay, sowie aus einer Inschrift auf der Glasröhre entnehme ich dass das mir geschickte Helium aus Cleveit erhalten worden ist, und weder Stickstoff noch irgend ein anderes Gas enthielt, welches vermittels Mg, CuO, P_2O_5 und NaOH entfernt werden konnte. Die Dichte des Gases betrug 2·133 (für H = 1) und das Verhältnis der specifischen Wärmen war $\frac{C_p}{C_v} = 1{\cdot}652$. Dieses Verhältnis zeigt, dass Helium, eben so wie Argon, ein einatomiges Element ist. Prof. Ramsay theilte mir ferner mit, dass die Löslichkeit des Helium im Wasser eine sehr geringe ist, da 100 ccm Wasser bloss 0·7 ccm Helium absorbieren. Obige Zahlen liessen vermuthen, dass die Verflüssigung von Helium nur in den allertiefsten gegenwärtig erreichbaren Temperaturen gelingen könnte, da die geringe Dichte dieses Gases als auch seine Einatomigkeit und seine sehr unbedeutende Wasserlöslichkeit für seine grosse Permanenz zu sprechen schienen. Mit Rücksicht darauf unterliess ich die Verflüssigungsversuche mit Benützung des Aethylens als Kältemittel und schritt sogleich zu den allertiefsten Temperaturen, welche vermittels flüssigen Sauerstoffs und flüssiger Luft erhalten werden können. Der bei diesen Versuchen benutzte Apparat ist in beiliegender Figur dargestellt.

Das Helium befand sich in der Glasröhre *cc* des Cailletet'schen Apparates *C;* ihr unteres Ende reichte bis an den Boden der unten geschlossenen Röhre *a*, welche zur Aufnahme der flüssigen Luft bestimmt war. Diese Röhre war von drei Glasgefässen *b, b', b''* umgeben, deren letztes oben die messin-


w
c
C
e
k
n
o
u
u′

gene Einfassung *o* trug, vermittels deren der Deckel *n* befestigt werden konnte. Alle diese Gefässe waren in dem dickwandigen äusserem Glasgefässe *e* unterbracht, auf dessen Boden sich eine Schichte P_2O_5 befand. Der Deckel *n* hatte drei Offnungen; die mittlere war für das Gefäss *a* bestimmt, durch die zweite wurde vermittels der Röhre *t* der flüssige Sauerstoff aus dem Verflüssigungsapparate zugeführt. Die dritte Deckelöffnung diente zur Verbindung des Inneren der Gefässe erstens mit einer grossen Luftpumpe vermittels der Röhre *p* und zweitens mit dem Quecksilbervacuummeter *w* vermittels der Röhre *v*. Wenn nach dem Öffnen des Hahnes *k* flüssiger Sauerstoff in das Gefäss *b* bereits eingefürt worden ist, wurde dasselbe mit der Pumpe in Verbindung gebracht und der Dampfdruck des Sauerstoffs bis auf 10 mm Quecksilberdruck vermindert, wodurch die Temperatur bis —210° fiel. Infolge dessen verflüssigte sich die im Gefässe *a* befindliche Luft, und an ihre Stelle kam wieder frische, welche in der, mit Natronkalk gefüllten Röhre *u'* ihr Kohlendioxyd zurückliess, und in der Röhre *u* mittels Schwefelsäure getrocknet wurde. Als das Quantum der verflüssigten Luft nicht mehr zunahm, wurde der Hahn der Röhre *u* abgesperrt und das Gefäss *a* vermittels des Armes *p'* einer T-Röhre mit der Luftpumpe verbunden; den Dampfdruck der flüssigen Luft zeigte ein Vacuummeter an, welches dem Vacuummeter *w* glich und mittelst des Röhrenarmes *v'* mit dem Apparate verbunden war. Um die flüssige Luft während des Evacuierens nach Möglichkeit von der wärmeren Umgebung zu isolieren, war im Innern des Gefässes *a* noch eine dünnwandige Röhre *f* angebracht. Wenn man bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen flüssigen Sauerstoff als Kältemittel anwenden will, entfernt man aus obigem Apparate diejenigen Theile, welche zur Verflüssigung der Luft dienen und taucht die Cailletet'sche Röhre unmittelbar in flüssigen Sauerstoff ein.

Mittels des beschriebenen Apparates führte ich zwei Reihen von Versuchen aus, die eine bei Anwendung flüssigen Sauerstoffs, die andere bei Anwendung flüssiger Luft als Kältemittel. Die Röhre des Cailletet'schen Apparates, welche zur Aufnahme des Heliums bestimmt war, hatte gegen 70 ccm Inhalt und wurde vermittels einer Quecksilberpumpe mit trockenem Gase sorgfältig gefüllt. Die erste Reihe meiner Versuche führte ich in der Art aus, dass ich das Helium bis zur Siedetemperatur des Sauerstoffs unter Atmosphärendruck (—182·5°) und ferner unter 10 mm Quecksilberdruck (—210°) abkühlte und vermittels der Cailletet'schen Pumpe einem Drucke von 125 Atmosphären unterwarf. Da aber das Helium unter diesen Umständen nicht verflüssigt werden konnte, unterwarf ich es bei weiteren Versuchen einer raschen Expansion bis 20, bei anderen bis zu einer Atmosphäre Druck. Aber auch während der Expansion konnte man nicht einmal eine Spur von Verflüssigung beobachten. Als ich das erste Mal das abgekühlte Helium stark comprimierte, sah ich einen weissen Körper in sehr kleiner Menge sich ausscheiden, welcher am Boden der Heliumröhre sogar nach Verminderung des Druckes zurückblieb. Möglicherweise war daran eine Verunreinigung des Heliums schuld, die aber nicht mehr als 1% der benützten Heliummenge betragen dürfte.

In der zweiten Versuchsreihe, in welcher ich flüssige Luft (unter 10 mm Quecksilberdruck siedend) anwendete, setzte ich das Helium einem 140 Atmosphären erreichenden Drucke aus, welchen ich nachher rasch auf 20 Atmosphären oder auf gewöhnlichen Atmosphärendruck fallen liess. Das Resultat dieser Versuche war ebenfalls negativ, da während der Expansion keine Trübung bemerkbar war, die auf eine Spur von Verflüssigung schliesen liesse. Die Temperatur der flüssigen Luft beträgt unter 10 mm Quecksilberdruck nach meinen früheren Messungen [1]) —220°; diese Zahl kann jedoch nicht als constant betrachtet werden, da flüssige Luft bei Verminderung des Druckes unaufhörlich ihre Zusammensetzung ändert, indem sie immer ärmer an Stickstoff wird. Je

[1]) Comptes rendus t. CI, p. 238, 1885.

nach der Weise der Verflüssigung und nach der Schnelligkeit des Evacuierens kann die flüssige Luft verhältnismässig mehr oder weniger Stickstoff verlieren.

Wird die Luft unter hohem Drucke bei Anwendung des Aethylens als Kältemittel, also bei einer Temperatur von etwa — 150°, verflüssigt und nachher der Druck langsam vermindert, um siedende Luft unter atmosphärischem Drucke zu erhalten, so verflüchtigt sich dabei ein beträchtlicher Theil der unter Druck verflüssigten Luft, und das Verhältnis der Stickstoffmenge zum Sauerstoff wird in der zurückgebliebenen flüssigen Luft bedeutend kleiner sein, als es unter höherem Drucke der Fall war. Wird ferner der Dampfdruck der so zurückgebliebenen flüssigen Luft noch weiter bis zu 10 mm Quecksilberdruck vermindert, so wechselt das Mengenverhältnis noch mehr zu Ungunsten der Stickstoffmenge derart, dass das hintergebliebene Gemisch von Stickstoff und Sauerstoff wegen des hohen Gehaltes an letzterem während der Druckverminderung nicht erstarrt, obwohl die Temperatur dieses Gemisches etwa um sechs Grade tiefer ist, als der Erstarrungspunkt des Stickstoffs (—214°). Wenn aber, — wie es in obigen Versuchen der Fall war, — die Luft unter atmosphärischem Drucke verflüssigt wird und zwar bei Anwendung des im Vacuum siedenden Sauerstoffes (—210°) als Kältemittel, so bleibt das Mengenverhältnis des Stickstoffs und Sauerstoffs dasselbe, wie dasjenige der gasförmigen Luft. Beim Vermindern der Dampfspannung der auf diese Weise verflüssigten und bereits sehr stark abgekühlten Luft, kann sich das Verhältnis des Stickstoffs zum Sauerstoff nicht mehr um ein Bedeutendes ändern, und es bleibt demnach ein beträchtliches Übermass an Stickstoff übrig. Aus solcher Luft scheidet sich der Stickstoff theilweise krystallinisch ab, wenn der Dampfdruck derselben bis zu 10 mm Quecksilberdruck erniedrigt wird, was in den beschriebenen Versuchen thatsächlich stattfand. Ich muss aber ganz bestimmt im Gegensatze zu Dewar [1]) behaupten, dass dabei nicht die Luft als solche erstarrt, sondern blos ein kleines Procent des Stickstoffs, dessen Erstarrungspunkt nach meinen früheren Messungen bei —214° liegt [2]). Flüssiger Sauerstoff erstarrt auch dann nicht,

[1]) Nature, February 6, 1896, page 329.

[2]) Im vorigen Jahre veröffentlichte ich in Phil. Mag. [5] 39, 188 ein kurzes Resumé meiner Arbeiten über die Verflüssigung der Gase, in welchem ich hervorgehoben habe, dass Dewar bei Wiederholung meiner Experimente dieselben nicht citierte. Dies hatte zur Folge, dass Dewar jetzt meine Arbeiten zwar citiert, jedoch nur dann, wenn er glaubt, in ihnen Fehler nachweisen zu können. So behauptet er, in seiner in Nature, 6 Februar 1896, Seite 329, veröffentlichten Arbeit, dass die flüssige Luft im Vacuum erstarre, dass somit meine früheren diesbezüglichen Versuche mit den seinigen nicht übereinstimmen. Dass die Resultate unserer Versuche nicht übereinstimmen, darin hat er wohl recht, ich glaube aber oben genügend aufgeklärt zu haben, unter welchen Verhältnissen die Luft im Vacuum gar nicht erstarrt, und unter welchen blos ein Bestandtheil derselben theilweise erstarrt. An derselben Stelle sagt Dewar, flüssiges Stickstoffoxyd sei blau und nicht farblos, wie es nach meinen Versuchen mit diesem Gase zu sein scheint. In meiner in Comptes rendus, Bd. C, 940, 1885, veröffentlichten Arbeit sagte ich ausdrücklich, dass das von mir erhaltene Stickstoffoxyd gewöhnlich grünlich gefärbt war, (es lässt sich die Grenze zwischen Blau und Grünlich nicht streng bestimmen), da jedoch diese Färbung eimal deutlicher, ein anderes Mal schwächer hervortrat und bei der Verflüssigung des Stickstoffoxyds im Cailletet'schen Apparate — wobei ich für möglichst genaue Entfernung der Luft Sorge trug, — vollkommen verschwand, vermuthete ich, dass diese veränderliche Färbung des flüssigen Stickstoffoxyds von einer Verunreinigung mit Salpetrigsäureanhydrid, welches sich infolge unvollkommener Entfernung des Sauerstoffes der atmosphärischen Luft bildet, herrühre. Beachten wir, wie schwierig es überhaupt ist, die an den Glaswänden der Gefässe occludierte Luft zu entfernen, so z. B. beim Evacuieren der Plücker'schen oder Crookes'schen Röhren, so müssen wir wohl eine derartige Verunreinigung als sehr wahrscheinlich annehmen. Übrigens gebrauchte Dewar zu seinen Versuchen nicht immer reine Gase; so enthielt z. B. der von ihm benützte und als rein betrachtete Sauerstoff bedeutende Menge von CO_2, woher auch die irrthümliche Behauptung Dewar's: Sauerstoff erstarre im Vacuum*) herrührt. In Anbetracht dessen muss ich den mir gemachten Vorwurf betreffs schlechter Beobachtung der Farbe des flüssigen Stickstoffoxydes als ungerechtfertigt zurückweisen.

*) Cf. Phil. Mag. [5] 39, page 302, 1895.

wenn man seine Dampfspannung bis zu 2 mm Quecksilberdruck erniedrigt.

Nach obigen erfolglosen Versuchen trachtete ich experimentell festzustellen, ob durch Erniedrigung des Dampfdruckes des flüssigen Sauerstoffs bis zum praktisch erreichbaren Minimum, eine Temperaturerniedrigung sich nicht erzielen liesse, welche zur Vornahme erneuerter Verflüssigungsversuche des Heliums aneifern würde. Zu diesem Zwecke ersetzte ich in dem oben beschriebenen Apparate die Glasröhre f durch eine andere mit doppelten Wänden, welche von einander durch ein genaues Vacuum isoliert waren. In das Gefäss b goss ich Sauerstoff ein, von dem ein kleiner Theil vermittels eines Heberchens in das doppelwandige Röhrchen überführt wurde. Indem ich nun die Röhre p' mit den Pumpen verband, war es mir möglich, die Dampfspannung des Sauerstoffes bis zu 2 mm Quecksilberdruck zu erniedrigen. Der flüssige Sauerstoff blieb auch in diesem Vacuum flüssig und durchsichtig. Um die Temperatur des flüssigen Sauerstoffes bei so kleinem Drucke vermittelst des Wasserstoffthermometers zu messen, führte ich einen speziellen Versuch aus, und da ich mich dabei überzeugte, dass dieselbe —220° nicht erreichte, (eine Temperatur, welche vermittels flüssiger Luft leicht zu erhalten ist), so hielt ich es für überflüssig, noch einen Verflüssigungsversuch mit dem Helium zu unternehmen.

Es blieben also die Resultate meiner Experimente negativ, Helium bewährte sich bei meinen Versuchen als ein permanentes Gas, jedenfalls permanenter als Wasserstoff. Die kleine Menge Heliums, die mir zur Verfügung stand, wie auch die Seltenheit der Mineralien, aus denen man Helium gewinnen kann, erlaubten mir nicht, diese Versuche in grösserem Masstabe auszuführen; ich konnte weder einen bedeutend höheren Druck, noch grössere Gefässe anwenden, um die Expansion erfolgreicher zu machen. Ebensowenig konnte ich auch die Temperatur des Heliums im Expansionsaugenblicke vermittels des Platinthermometers messen, wie ich dies mit dem Wasserstoffe gethan habe, da ich hiezu etliche zehn, wenn nicht hunderte Liter Gas benöthigen würde.

Da es mir nicht möglich war, die Temperatur des Heliums im Expansionsaugenblicke zu messen, erlaube ich mir für einen Augenblick den rein experimentellen Weg zu verlassen, und die wahrscheinlichen Temperaturen nach der bekannten Gleichung von Laplace und Poisson:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

zu berechnen; es bedeuten hier:

$T =$ die Anfangstemperatur, vom absoluten Nullpunkte an gerechnet;

$T_1 =$ die durch die Expansion erreichte Temperatur;

$p =$ den Anfangsdruck;

$p_1 =$ den Druck, bis zu welchem expandiert wurde;

$k =$ das Verhältnis der specifischen Wärmen $\frac{C_p}{C_v}$, welches für das einatomige Helium $1{\cdot}66 = \frac{5}{3}$ zu setzen ist.

Ich möchte bei diesen Berechnungen nicht der Übertreibung geziehen werden, und gebrauche deshalb die Drucke und Anfangstemperaturen der ersten Versuchsreihe, bei welcher der Anfangsdruck blos 125 Atmosphären und die Anfangstemperatur nur — 210° betrug.

Anfangsdruck des Heliums	Anfangstemperatur des Heliums	Expansion des Heliums bis zu	Entsprechende Temperaturerniedrigung	
			unter Null	an absolut. Scala
125 Atm.	— 210°	50 Atm.	— 229·3°	43·7°
„ „	„	20 „	— 242·7°	30·3°
„ „	„	10 „	— 250·1°	22·9°
„ „	„	5 „	— 255·6°	17·4°
„ „	„	1 „	— 263·9°	9·1°

Aus obiger Berechnung ersehen wir, dass die Siedetemperatur des Heliums unterhalb — 264° liegt, dass sie demnach wenigstens um 20 Grade niedrieger ist, als diejenige des Wasserstoffs, welche ich experimentell bestimmt habe [1]). Nach der Dichte des Heliums zu urtheilen, welche nach der Bestimmung des Prof. Ramsay 2·133, somit mehr als doppelt so viel wie die Dichte des Wasserstoffs beträgt, sollte wohl das Helium leichter als jener zu verflüssigen sein. Die ganz entgegengesetzten Resultate, welche obige Experimente ergeben haben, können wir nur durch die einfache Molecularconstitution erklären, d. h. durch die Einatomigkeit des Heliums, welche Prof. Ramsay experimentell festgestellt hat.

Bereits beim Argon zeigte sich die Abhängigkeit zwischen der Einatomigkeit und der Schwierigkeit der Verflüssigung; beim Helium tritt nach obigen Versuchen diese Abhängigkeit noch viel deutlicher hervor.

Infolge dieser Permanenz seines Gaszustandes kann künftig das Helium wichtige Anwendung als Thermometersubstanz beim Messen der dem absoluten Nullpunkte naheliegenden Temperaturen finden, namentlich solcher, welche die kritische und die Siedetemperatur des Wasserstoffs überschreiten.

Da seinerzeit der Vorwurf erhoben worden ist, dass das Wasserstoffthermometer beim Messen von Temperaturen unterhalb —194° nicht mehr zuverlässig ist, führte ich eine Reihe vergleichender Versuche aus, wobei ich die Temperatur des flüssigen Sauerstoffes bei vermindertem Dampfdrucke mittels eines Heliumthermometers bestimmte. Zu diesem Zwecke füllte ich mit Helium dasselbe Thermometer, welches T. Estreicher [2]) als Wasserstoffthermometer zur Bestimmung der Temperaturen des flüssigen Sauerstoffes benützte. Die mittels

[1]) Cf. die letzte Fussnote, S. 306.

[2]) Anzeiger der k. Akademie d. Wiss. in Krakau, Juni 1895, s. 203. Phil. Mag. [5] 40, 454. 1895.

des Heliumthermometers erhaltenen Zahlen stelle ich mit den entsprechenden Daten, welche T. Estreicher vermittels des Wasserstoffthermometers bestimmt hat, zusammen:

Dampfspannung des flüssigen Sauerstoffes	Die Temperatur des Sauerstoffes: Heliumthermometer	Wasserstoffthermometer
741 mm	— 182·6°	— 182·6°
240 „	— 191·8°	— 191·85°
90·4 „	— 198·7°	— 198·75°
12 „	— 209·3°	— 209·2°
9 „	— 210·57°	— 210·6°

Die beinahe vollkommene Übereinstimmung der mit beiden Thermometern gemessenen Temperaturen beweist, dass der Wasserstoff innerhalb dieser Grenzen seinen Ausdehnungscoëfficient noch nich ändert, und dass das Wasserstoffthermometer zum Messen so tiefer Temperaturen ganz gut anwendbar ist. Diese vergleichenden Temperaturbestimmungen führen übrigens zu demselben Schluss, zu welchem man auf Grund der tiefen kritischen Temperatur des Wasserstoffes gelangen kann. Ich habe nämlich bereits an einem anderen Orte gezeigt [1]), dass Gasthermometer auch dann zur genauen Bestimmung von Temperaturen benützt werden können, wenn dieselben die kritische Temperatur des zur Füllung des Thermometers benützten Gases erreichen. Da die kritische Temperatur des Wasserstoffes nach meinen Bestimmungen [2]) bei — 234·5° liegt, kann man bis zu dieser Temperatur das Wasserstoffthermometer anstandslos anwenden. Das Heliumthermometer könnte erst dann treffliche Dienste leisten, wenn es

[1]) Rozpr. Ak. U. w Krakowie, W. M-P. Bd. XIV. Seite 283. 1886 Wied. Ann. Bd. XXXI, S. 69. 1887.

[2]) Anz. d. k. Akad: d. Wiss. in Krakau, Juni 1895, S. 192. Wied. Ann. 56, 133. Phil. Mag. [5] 40, 202, 1895.

sich um eine genaue Ermittelung noch tieferer Temperaturen handeln würde, z. B. um eine genauere Ermittellung der Siedetemperatur des Wasserstoffes, als es mittels eines Platinthermometers möglich ist.

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcyą Sekretarza generalnego Stanisława Smolki.

Kraków, 1896. — Drukarnia Uniw. Jagiellońskiego, pod zarządem A. M. Kosterkiewicza.

10. Lipca 1896.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE
1873—1895

Librairie de la Société anonyme polonaise
(Spółka wydawnicza polska)
à Cracovie.

Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« *(Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires)*, in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 59 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« *(Classe de philologie. Séances et travaux)*, in 8-vo, volumes II—XXIV (7 planches. vol. I épuisé). — 74 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« *(Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux)*, in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XXXII (vol. I. II. XIV épuisés, 61 pl.) — 78 fl.

»Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce.« *(Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne)*, in 4-to, 4 volumes (81 planches, 115 gravures dans le texte). — 20 fl.

»Sprawozdania komisyi językowej.« *(Comptes rendus de la Commission de linguistique)*, in 8-vo, 5 volumes. — 13·50 fl.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« *(Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne)*, in 8-vo, 7 vol. — 23 fl.

Corpus antiquissimorum poëtarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 3 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 2 fl. — Vol. III. Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 3 fl. — Vol. IV. Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 1 fl. 50 kr.

»Biblioteka pisarzów polskich.« *(Bibliothèque des auteurs polonais du XVI siècle)*, in 8-vo, 30 livr. — 18 fl. 80 kr.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 14 volumes. — 76 fl.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed A. Sokołowski et J. Szujski; A. Lewicki. 16 fl. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 15 fl. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 5 fl. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 10 fl. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 5 fl. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski. 5 fl.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 10 (I—IV, VI—VIII, X, XI, XV.) volumes. — 34 fl.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 3 fl. — Vol. II, Chronicorum Barnardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 3 fl. — Vol. III. Stephani Medeksza commentarii 1654 — 1668 ed. Seredyński: 3 fl. — Vol VII, X, XIV Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 7 fl. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokołowski 2 fl. — Vol. XV. Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski. 7 fl.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 7 vol.—21 fl.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 15 volumes. — 78 fl.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wisłocki 1546—1553. 5 fl. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674. ed. Kluczycki. 10 fl. — Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Gallici) 1674—1683 ed. Waliszewski. 15 fl. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanislai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 15 fl. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 20 fl. — Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrinensis ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 3 fl.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 51 fl.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. Tomi I. fasciculus I. II. III. in 8-vo. — 4 fl. 50 kr.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« *(Anciens monuments du droit polonais)* in 4-to, vol. II—X. — 36 fl.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 6 fl. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 3 fl. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VII, Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 6 fl. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 8 fl. — Vol. IX, Acta iudicii feodalis superioris in castro Golesz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 3 fl. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 1 fl.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 4 fl.

Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« *(Mémoires)*, in 4-to, 17 volumes (II—XVIII, 178 planches, vol. I épuisé). — 85 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń.« *(Séances et travaux)*, in 8-vo, 29 volumes (203 planches). — 113 fl. 50 kr.

»Sprawozdania komisyi fizyograficznej.« *(Comptes rendus de la Commission de physiographie)*, in 8-vo, 25 volumes (III. VI — XXX, 53 planches, vol. I. II. IV. V épuisés). — 108 fl.

»Atlas geologiczny Galicyi.« *(Atlas géologique de la Galicie)*, in fol., 5 livraisons (23 planches) (à suivre). — 19 fl.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« *(Comptes rendus de la Commission d'anthropologie)*, in 8-vo, 18 vol. II—XVIII (100 pl., vol. I épuisé). — 62 fl. 50 kr.

Kowalczyk J., »O sposobach wyznaczania biegu ciał niebieskich.« *(Methodes pour déterminer le cours des corps célestes)*, in 8-vo, 1889. — 5 fl. **Mars A.**, »Przekrój zamrożonego ciała osoby zmarłej podczas porodu skutkiem pęknięcia macicy«. *(Coupe du cadavre gelé d'une personne morte pendant l'accouchement par suite de la rupture de la matrice)*, 4 planches in folio avec texte, 1890. — 6 fl. **Kotula B.**, »Rozmieszczenie roślin naczyniowych w Tatrach.« *(Distributio plantarum vasculosarum in montibus Tatricis)*, 8-vo, 1891. — 5 fl. **Morawski C.**, »Andrzej Patrycy Nidecki, jego życie i dzieła.« *(André Patricius Nidecki, humaniste polonais, sa vie et ses oeuvres)*, 8-vo, 1892. — 3 fl. **Finkel L.**, »Bibliografia historyi polskiej.« *(Bibliographie de l'histoire de Pologne)*, 8-vo, 1891. — 6 fl. **Matlakowski V.**, »Budownictwo ludowe na Podhalu.« *(Construction des maisons rurales dans la contrée de Podhale)*, 23 planches in 4-to, texte explicatif in 8-vo imp. 1892. 7 fl. 50 kr. **Teichmann L.**, »Naczynia limfatyczne w słoniowacinie.« *(Elephantiasis arabum)*, 5 planches in folio avec texte. 1892. — 3 fl. **Hryncewicz J.**, »Zarys lecznictwa ludowego na Rusi południowej.« *(La médecine populaire dans la Ruthénie méridionale)*, in 8-vo 1893. — 3 fl. **Piekosiński F.**, »Średniowieczne znaki wodne. Wiek XIV.« *(Les marques en filigrane des manuscrits conservés dans les Archives et bibliothèques polonaises, principalement celles de Cracovie, XIV^e siècle)*, in 4-to, 1893. — 4 fl. **Swiętek J.**, »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« *(Les populations riveraines de la Raba en Galicie)*, in 8-vo, 1894. — 4 fl. **Górski K.**, »Historya piechoty polskiej« *(Histoire de l'infanterie polonaise)*, in 8-vo, 1893. — 2 fl. 60 ct. »Historya jazdy polskiej« *(Histoire de la cavallerie polonaise)*, in 8-vo, 1894. — 3 fl. 50 ct.

»Rocznik Akademii.« *(Annuaire de l'Académie)*, in 16-o, 1874—1893 20 vol. (1873 épuisé) — 12 fl.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« *(Mémoire sur les travaux de l'Académie 1873—1888)*, 8-vo, 1889. — 2 fl.