

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

1899.

FEBRUAR.



KRAKAU.
UNIVERSITÄTS-BÜCHDRUCKEREI
1899.

DIE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN KRAKAU

wurde von Seiner Kais. u. Kön. Ap. Majestät

FRANZ JOSEF I.

im J. 1872 gestiftet.

Protector der Akademie:

Seine kais. und kön. Hoheit

ERZHERZOG FRANZ FERDINAND VON OESTERREICH-ESTE.

Viceprotector:

SEINE EXCELLENZ JULIAN Ritter v. DUNAJEWSKI.

Präsident: GRAF STANISLAUS TARNOWSKI.

Generalsecretär: Dr. STANISLAUS SMOLKA.

Auszug aus den Statuten der Akademie.

(§. 2). Die Akademie steht unter dem Allerhöchsten Schutze Seiner Majestät des Kaisers, welcher den Protector und den Viceprotector der Akademie ernennt.

(§. 4). Die Akademie zerfällt in drei Classen:

- 1) die philologische Classe,
- 2) die historisch-philosophische Classe,
- 3) die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

(§. 12). Die Publicationen der Akademie erscheinen in polnischer Sprache, welche zugleich die Geschäftssprache der Akademie ist.

Der Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau, welcher für den Verkehr mit den auswärtigen gelehrten Gesellschaften bestimmt ist, erscheint monatlich, mit Ausnahme der Ferienmonate (August, September) und besteht aus zwei Theilen, von denen der eine die Sitzungsberichte, der zweite den Inhalt der in den Sitzungen vorgelegten Arbeiten enthält. Die Sitzungsberichte werden in deutscher Sprache redigiert, bei der Inhaltsangabe hängt die Wahl der Sprache (deutsch oder französisch) von dem Verfasser der betreffenden Arbeit ab.

Subscriptionspreis 3 fl. ö. W. = 6 Mk. jährlich.

Einzelne Hefte werden, so weit der Vorrath reicht, zu 40 Kr. = 80 Pf. abgegeben.

Nakładem Akademii Umiejętności

pod redakcją Sekretarza generalnego Dr. Stanisława Smolki.

Kraków, 1899. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego.

ANZEIGER
DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KRAKAU.

N^o 2.

Februar.

1899.

Inhalt: Sitzungen vom 6, 13 und 20 Februar 1899. — *Résumés:* 4. H. HOYER. Ueber das Verhalten der Kerne bei der Conjugation des Infusors *Colpidium colpoda* St. — 5. S. KEPIŃSKI. Ueber Integrale der Lösungen der sich selbst adjungirten Differentialgleichungen 2-er Ordnung mit drei singulären Punkten. — 6. K. ZORAWSKI. Ueber die Convergenz der Umkehrreihen. — 7. K. ZORAWSKI. Beiträge zur Geometrie der infinitesimalen Transformationen. — 8. T. GARBOWSKI. Zur Histologie und Physiologie der Gastreaden. — 9. J. PUZYNA. Theorie der analytischen Functionen.

Sitzungsberichte.



Philologische Classe.

Sitzung vom 13. Februar 1899.

Vorsitzender: Prof. Dr. K. Morawski.

Der Secretär überreicht die neuerschienene Publication der Classe:

ST. RAMUŁT. »Statystyka ludności kaszubskiej«. (*Die Statistik der kaschubischen Bevölkerung*) in 8-o, 290 S.

Der Secretär legt den letzten Theil der Abhandlung von Prof. Dr. A. BRÜCKNER: »*Der handschriftliche Nachlass des Wacław Potocki*« vor.

Prof. Dr. Baudouin de Courtenay berichtet über die Arbeit des H. Dr. STANISLAUS CISZEWSKI: »*Märchen von Midas-Ohren. Ein Studium aus der Volksliteratur*«.

Der Secretär berichtet über die Sitzung der kunsthistorischen Commission vom 26. Januar 1899.



Historisch-philosophische Classe.

Sitzung vom 20. Februar 1899.

Vorsitzender: Prof. Dr. L. Łuszczkiewicz.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die Akademie durch den Tod ihres am 11 Februar 1899 verstorbenen Mitgliedes, HEINRICH LISICKI, erlitten hat. Indem sich die Anwesenden von ihren Sitzen erheben, geben sie ihrem Beileide Ausdruck.

Prof. Dr. FR. PIĘKOSIŃSKI legt den Plan einer Publication unter d. T.: „*Repertorium des polnischen Rechtes im Mittelalter*“ vor.



Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

Sitzung vom 6. Februar 1899.

Vorsitzender: Prof. Dr. Fr. Karliński.

Der Secretär überreicht über die neuerschienenen Publicationen der Classe:

Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Serya II, tom XIV, ogólnego zbioru tom trzydziesty czwarty (*Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe, B. 34*) in 8-o, 492 S. (mit 10 Tafeln und 20 Holzschtn.).

J. PUZYŃA. »Teorya funkcyj analitycznych« tom I. (*Theorie der analytischen Functionen, I Band*), in 8-o, XVIII und 549 S.¹⁾

1) Siche unten Résumés, S. 98.

W. HEINRICH. »C wahaniach natężenia zaledwie dostrzegalnych wrażeń optycznych i akustycznych«. (*Zur Erklärung der Intensitätsschwankungen eben merklicher optischer und akustischer Eindrücke*), Abhandlungen in 8-o, B. 36, S. 214—258.

Prof. Dr. K. Kostanecki berichtet über die Abhandlung des H. Prof. Dr. H. HOYER: »*Ueber das Verhalten der Kerne bei der Conjugation des Infusors Colpidium colpoda St.*«¹⁾.

Prof. Dr. A. Witkowski überreicht die Abhandlung des H. Prof. Dr. S. KĘPIŃSKI: »*Ueber Integrale der Lösungen des sich selbst adjungierten Differentialgleichungen 2-er Ordnung mit drei singulären Punkten*«²⁾ und die Abhandlungen des H. Prof. K. ŻORAWSKI: »*Ueber die Convergenz der Umkehrungen*«³⁾ und: »*Beitrag zur Geometrie der infinitesimalen Transformationen*«⁴⁾.

Prof. Dr. A. Wierzejski legt die Abhandlung des H. Dr. TH. GARBOWSKI: »*Zur Histologie und Physiologie der Gastreaden*«⁵⁾ vor.

1) Siehe unten Résumés S. 58. — 2) ib. S. 67. — 3) ib. S. 75. — 4) ib. S. 81. — 5) ib. S. 87.



R é s u m é s

4. — H. HOYER: \square zachowaniu się jąder podczas konjugacyi wymoczka Colpidium colpoda St. (*Über das Verhalten der Kerne bei der Conjugation des Infusors Colpidium colpoda St.*) Vorläufige Mitteilung.

Nachdem der Ver. einzelne Phasen der Conjugation bei verschiedenen Arten von Infusorien untersucht hatte, stellte es sich heraus, dass die Species Colpidium colpoda das geeignetste Object zum Studium abgeben würde, weil an diesem die Kerntheilungsvorgänge einen verhältnismässig noch einfachen Verlauf nehmen und weil das Material in grösseren Mengen leicht zu beschaffen ist. Bei Gelegenheit einer Untersuchung der Züchtungsgläser fand sich in einem derselben eine sogenannte Conjugationsepidemie vor. Das gesammte Material wurde daher sogleich in einer Mischung von 1 Volumen einer 5 $\frac{0}{10}$ Sublimatlösung und 2 Volumina einer 3 $\frac{0}{100}$ Kaliumbichromatlösung fixiert und in folgender Weise für die Untersuchung weiterbehandelt. Nachdem sich die Objecte in der Fixierungsflüssigkeit sedimentiert hatten, wurde dieselbe so oft durch Wasser ersetzt, bis sich letzteres nicht mehr gelb färbte. Alsdann wurden die Objecte in bekannter Weise consecutiv durch Alkohol, Chloroform, Chloroform und Paraffin und schliesslich durch rei-

nes Paraffin hindurchgeführt und in letzterem eingeschlossen. Demnächst wurden genaue Serienschnitte von 4 μ Dicke angefertigt, auf Objectträger mittelst Wasser aufgeklebt und nach Beseitigung des Paraffins entweder nach der Eisen-Hämatoxylin-Methode von Heidenhain tingiert, oder, was sich als vortheilhafter erwies, nach einer kurzen Vorfärbung mit Ehrlichschem Hämatoxylin mit Ehrlich-Biondi'schem Gemisch gefärbt.

Die geschilderte Untersuchungsmethode erwies sich nicht allein für das Studium der Kernveränderungen sehr günstig sondern auch für die Erschliessung der Structur von Colpidium.

Die Streifung der Pellicula wird bedingt durch meridional verlaufende dunkle Leisten und helle Furchen. Dieselben haben ihre grösste Breite am grössten Umfange der Thiere und verschmälern sich nach den beiden Euden zu und zwar am vorderen Ende bereits in der Höhe des Mundes, am hinteren erst auf der kuppelartigen Wölbung. Bei differenter Färbung erscheinen die Leisten in dem hinteren, breiteren Abschnitte zwei-, im vorderen einzeilig, und jede Zeile setzt sich aus regellos auf einander folgenden Punkten und Strichen zusammen. Nur im vorderen einzeiligen Abschnitt besteht jede Zeile ausschliesslich aus Punkten. Die Furchen werden durch in regelmässigen Abständen auf einander folgende dunklere Querlinien in eine Reihe von Quadraten getheilt, in deren Mitte ein feines Pünktchen sichtbar wird. Die Cilien stehen auf den Leisten und senken sich an den Punkten der Zeilen in die Tiefe ein. Sie sind ebenso wie die Cilien der Flimmerzellen mit kurzen Basalkörperchen versehen, welche von der Oberfläche betrachtet eben als Punkte erscheinen. Die Bedeutung der Striche der Zeilen konnte nicht eruiert werden.

Nach den Befunden des Verf. hat das Protoplasma eine gerüstartige Structur und enthält beim Beginne der Conjugation wenigstens noch zahlreiche Bakterien und mit Biondi sich roth färbende Körnchen.

Die Membranzellen des Mundes bestehen aus mit einander verklebten Cilien, welche ebenso wie die der Körperoberfläche mittelst Basalkörperchen in das Protoplasma eingelassen

sind. Der Porus der contractilen Vacuole ist stets vorhanden, eine gesonderte Afteröffnung konnte nicht beobachtet werden.

Die Kerne entbehren, nach der Ansicht des Verfassers, einer eigenen Membran. Dieselbe wird von dem verdichteten Netzwerk des Cytoplasma gebildet. Der Inhalt des Makronucleus besteht aus einem sehr feinen Gerüst von Protoplasma, welches mit chromatischen Körnern dicht angefüllt ist. Der sich stets sehr intensiv färbende Mikronucleus lässt eine eben noch sichtbare Granulierung der chromatischen Substanz und bei günstiger Lage einen derselben kalottenartig aufsitzenden achromatischen Abschnitt erkennen.

Die Vereinigung zweier Individuen von *Colpidium colpoda* zum Zwecke der Conjugation erfolgt mit dem als Stirn bezeichneten Körperabschnitt. Doch ist die Vereinigung zunächst noch eine äusserliche, indem an der Berührungsstelle beider Thiere eine vollkommene Scheidewand besteht.

Nach erfolgter Copulation beginnt der Mikronucleus in beiden Thieren gleichzeitig sich zu vergrössern. Alsdann geht derselbe in das Stadium des Knäuels über und weiterhin in das Stadium des in Fig. 1 abgebildeten Muttersterns. Die vorher noch unsichtbare achromatische Substanz hat sich hier zu verhältnismässig dicken Fäden angeordnet und bildet eine ausgesprochene Spindel, deren Pole an die Umhüllungsmembran heranreichen, ohne dass an diesen Stellen gesonderte Polkörperchen sichtbar wären.

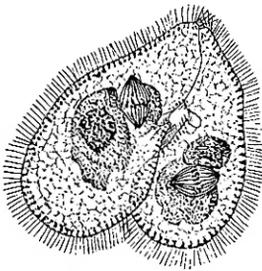


Fig. 1.

Der Aequator der Spindel wird von schleifenartigen, kurzen Chromosomen eingenommen, deren Anzahl nicht bestimmt werden konnte. Hierauf folgt das Stadium des Doppelsterns. Die Chromosomen theilen sich zuvor in ihrer Längsrichtung und wandern nach den Polen auseinander.

Die weiteren Umgestaltungsvorgänge des Kerns hat Verf. nicht direkt zu beobachten vermocht, doch lässt sich aus dem Verlauf der späteren Theilungen schliessen, dass die Spindel

sich streckt, Hantelform annimmt und sich schliesslich durchschnürt.

An diese erste Theilung schliesst ohne Eintritt eines Ruhestadiums die zweite an, welche in der gleichen Weise wie die erste Theilung verläuft, nur verkleinert sich dabei das Volumen der Kerne etwa um die Hälfte. Die entstandenen vier Kerne stimmen anfangs in ihrer Structur, ihrem Volumen und ihrer Form unter einander vollkommen überein. Als bald aber beginnt derjenige Kern, welcher der Scheidewand, die beide Thiere noch trennt, am nächsten liegt, sich zu vergrössern und sich zu einer weiteren Theilung anzuschicken, während die übrigen drei Kerne in das Innere des Zelleibes zurückweichen, sich verkleinern und eine unregelmässige Form annehmen. Es sind dies die Reductionskerne, welche den bei der Befruchtung der Metazoönieier ausgestossenen Richtungskörpern entsprechen. Der am Septum gelegene Kern theilt sich wie die vorigen mitotisch und die beiden Tochterkerne weichen in entgegengesetzten Richtungen auseinander, der eine, der Wanderkern zum Septum, der andere, der stationäre Kern der Autoren, nach dem Makronucleus zu. Während dieses ganzen Processes werden die Kerne von einem feinen Strahlenkranze umgeben, welchen Verf. als Ausdruck einer Protoplasmadiffusion aus der Zelle in die Kerne hinein ansieht, da die Tochterkerne eine bedeutende Volumensvergrösserung erfahren. Die Strahlung nimmt am stationären Kern allmählich ab, am Wanderkern dagegen sowie am ganzen Septum zu. Wie Fig. 2 zeigt, drängen die Wanderkerne von jeder Seite her gegen das Septum an. Unter dem Drucke giebt das bis zu diesem Zeitpunkt unversehrte Septum nach, und es entsteht ein ovaler Spalt (Fig. 3), durch welchen die Kerne an einander vorbei in das Nachbarthier gleiten. In Fig. 2 ist der rechtsseitige Kern noch nicht übergewandert,

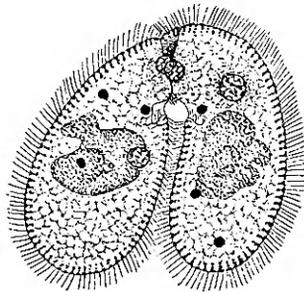


Fig. 2.

sondern hat das Septum nur vorgewölbt und hat dabei eine ovale Form angenommen, der linksseitige dagegen befindet sich gerade im Durchtritt. Während die oben erwähnte Strahlung an den übergewanderten Kernen verschwindet bleibt dieselbe an der Septumsöffnung noch eine längere Zeit bestehen. Verf. vermutet, dass auch hier der Übertritt von Protoplasma aus einem Thier in das andere die Strahlungserscheinung verursacht.

Sobald die Kerne in das Nachbarthier übergewandert sind, nehmen sie, wie Fig. 3 zeigt, unter Zunahme ihres Volumens eine ovoïde Form an.

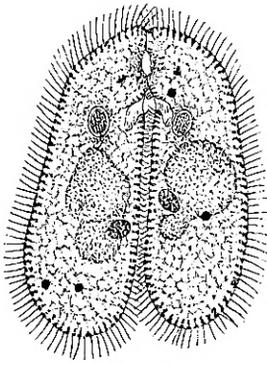


Fig. 3.

In ihrem Innern ordnet sich die chromatische Substanz in längsverlaufenden Fäden an, welche aus verhältnismässig dicken perlschnurartig aufgerichteten Chromatinkörnern zusammengesetzt erscheinen. Der in der Nähe des Makronucleus befindliche stationäre Kern verdichtet sich und nimmt infolge dessen eine intensivere Färbung an. Unter fortschreitender Verdichtung erhält der Kern ein granuliertes

Aussehen ähnlich dem des Makronucleus und verschwindet schliesslich unter den Fragmenten des letzteren.

Wie aus der Beschreibung des Verhaltens der Kerne hervorgeht, hat der Verf. eine Vereinigung des Wanderkerns mit dem stationären Kern nicht beobachtet. Auch die wiederholte nach dieser Richtung unternommene Durchmusterung der Praeparate führte stets zu dem gleichen Resultate, dass nämlich eine Copulation der Kerne nicht stattfindet. Auch Maupas hat, wie er selbst zugiebt, dergleichen nicht beobachtet, nimmt aber auf seine positiven Befunde an andern Infusorienarten gestützt auch für Colpidium eine Vereinigung der Kerne an.

Der Wanderkern, der in dem in Fig. 3 abgebildeten Stadium eine ovoïde Form hatte, beginnt stark in die Länge zu wachsen und die Form einer lang ausgezogenen Spindel anzu-

nehmen. Wie Fig. 4 zeigt, verlaufen äusserst feine chromatische Fäden spiralförmig gewunden von Pol zu Pol und setzen sich daselbst mit einer knopfartigen Verdickung an die Membran an, welche die Spindel umgiebt. Hat die Spindel ungefähr die Länge des ganzen Thieres erreicht, so rückt dieselbe in toto in das Hinterende des Thieres, indem sie sich der Wölbung desselben entsprechend krümmt. Gleichzeitig theilt sich die ganze Kernsubstanz und rückt nach den Spindelenden, welche nunmehr keulenförmige Verdickungen bilden. Aus letzteren gehen alsdann typische Kerne mit gerüstförmiger Structur hervor, die, wie Fig. 5 zeigt, eine Zeit lang durch ein röhrenförmiges Verbindungsstück mit einander in Verbindung bleiben.

Nach einer kurzen Ruhepause theilen sich beide Kerne wiederum, jedoch nach dem Schema der Mitose. Hierbei ist die Lage der karyokinetischen Figuren sehr charakteristisch: dieselben liegen stets dicht am hinteren Leibesumfang und der Längsachse des Thieres parallel. Aus der Theilung resultieren vier Kerne, von denen das eine Paar hart an der Pellicula des Hinterendes sich befindet, das andere in der Nähe des Makronucleus (vergl. Fig. 6). Anfangs haben alle vier Kerne gleiche Grösse und gleiches Aussehen. Bald aber ändert sich dies Verhältnis, indem das hintere Paar Kerne sich

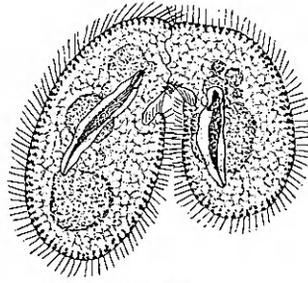


Fig. 4.

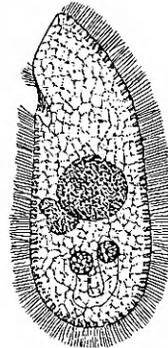


Fig. 5.

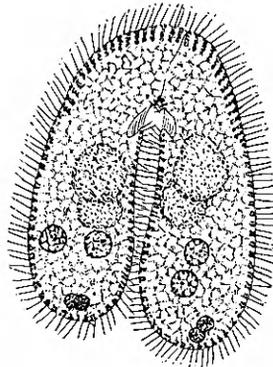


Fig. 6.

verkleinert und daher auch intensiver gefärbt erscheint (vergl. Fig. 6).

Mit diesen Veränderungen der Kerne erreicht die Conjugation der Thiere ihren Abschluss, und die bisher vereinigten Individuen trennen sich von einander. Die Kerne unterliegen allerdings in den isolierten Thieren noch weiteren Umgestaltungen, welche zur Ausbildung des Mikronucleus, besonders aber zur Neubildung des Makronucleus führen. Es ist daher nothwendig, das Verhalten des ursprünglichen Makronucleus hier nachzuholen und dann sein weiteres Schicksal zu verfolgen.

Im Vergleich zu den verschiedenen Umwandlungen, welche der Mikronucleus im Verlaufe der Conjugation durchmacht, verändert sich der Makronucleus nur wenig. Seine Lage bleibt im grossen und ganzen die gleiche wie vor der Conjugation, dagegen ändert sich seine Form recht beträchtlich, durch mannigfache Auswüchse. Hiermit steht auch wohl die locale Anhäufung resp. der locale Schwund der Chromatinkörner im Innern des Kerns in Zusammenhang. Ohne wesentlichere Veränderungen erreicht der Makronucleus das Stadium, in welchem sich die letzten vier Kerne bilden Fig. 6. In diesem Stadium aber schnürt er sich in zwei fast vollkommen gleiche Theile durch, die sich abrunden und meistens ziemlich dicht beisammen bleiben. Jeder der beiden Theile fällt alsdann einer allmählich zunehmenden Degeneration anheim, welche sich durch Schrumpfung der Kernsubstanz und durch die damit verbundene nur scheinbare Abhebung der Kernmembran bekundet (Fig. 7). Gleichzeitig schwindet auch die Tinctionsfähigkeit des Chromatins. Letzteres schrumpft unter fortschreitender Degeneration in jedem Theilkern zu einem kleinen formlosen Klümpchen zusammen, während der Raum, welcher von dem Makronucleus resp. seinen beiden Hälften eingenommen worden war, als solcher weiterhin bestehen bleibt.

Während der Makronucleus sich in der soeben beschriebenen Weise rückbildet, beginnt sich bereits der neue Makronucleus zu entwickeln. Nach der Ansicht des Verf. geht derselbe aus dem hinteren Kernpaar der Fig. 6 hervor, das, wie

bereits erwähnt wurde, einige Zeit nach erfolgter Theilung sich verkleinert und eine intensivere Färbung annimmt. Alsdann scheinen sich die Chromosomen zu verflüssigen, da das granulirte Aussehen der Kernsubstanz vollkommen schwindet und der ganze Kerninhalt homogen wird. Der Vorgang macht den Eindruck einer ausgesprochenen Chromatolyse. Zugleich machen sich anfangs nur geringe, später recht bedeutende Unterschiede in der Grösse der Kerne bemerkbar, indem ein Kern an Volumen zu, der andere abnimmt. Hierbei steigert sich, wie Fig. 7. zeigt, gleichzeitig die Intensität der Färbung, so dass die Kerne gleichmässig dunkel erscheinen. Unter fortschreitendem Wachstum des grösseren der Kerne, verkleinert sich der andere und verschwindet schliesslich vollständig, so dass also in einem einzelnen Thiere dann 2 alte Makronuclei in der Mitte, ein grosser neuer mehr am Hinterende und 2 Mikronuclei in der vorderen Hälfte des Thieres zu finden sind.

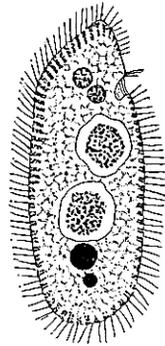


Fig. 7.

Aus dem grossen homogenen Makronucleus geht alsdann der bleibende Makronucleus hervor, indem derselbe in die Mitte des Thieres wandert und feinkörnig wird. Unter Umständen ergiesst er seinen Inhalt in den Raum, welcher nach der Degeneration des alten Makronucleus noch fortbesteht, und nimmt daher genau denselben Platz ein wie der alte. Auch die Mikronuclei scheinen einen chromatolytischen Process durchzumachen und, da auch gleichzeitig das Protoplasma feiner und dichter wird, so glaubt Verf., dass es sich in diesem Stadium um eine völlige Umbildung des ganzen Thieres handelt, wobei die Pellicula, Mundöffnung, das Protoplasma und die Kerne eine neue Structur erhalten (an der Pellicula macht sich die Erneuerung durch eine sehr lebhaftere Färbung geltend).

In dem zuletzt geschilderten Stadium enthält das Thier einen Makro- und 2 Mikronuclei. Es erfolgt nun die Quertheilung des Thieres, welche Verf. wegen Mangel an Material nicht

näher untersuchen konnte. Das Thier streckt sich (samt dem Makronucleus) in die Länge und schnürt sich dann in der Mitte quer durch. Auf diese Weise wird der Makronucleus halbiert und jedes Tochterthier enthält nunmehr einen Makronucleus, womit der Conjugationsprocess abgeschlossen ist.

An den descriptiven Theil der Arbeit knüpft der Verf. noch einige Bemerkungen über den Theilungsvorgang der Kerne der Ciliaten und denjenigen der Metazoën. Er wendet sich zunächst gegen die Behauptung Heidenhains, dass nämlich das Centrosoma der Metazoënzelle sich aus dem achromatischen Theil des Mikronucleus der Infusorien entwickelt haben soll. Nach der Ansicht des Verf. haben sich die Ciliaten bereits so frühzeitig von dem Stamme der Protozoën abgezweigt und in eigener Weise weiter entwickelt, dass die Ableitung des Centrosomas aus dem Mikronucleus nicht zulässig ist. Dagegen glaubt der Verf., den achromatischen Theil des Mikronucleus mit dem Nucleolus von Pflanzen in Parallele setzen zu dürfen, da, wie mehrere Autoren nachgewiesen haben, sich aus letzterem, ebenso wie bei Ciliaten aus dem achromatischen Theil des Mikronucleus bei der Kerntheilung die Spindel entwickelt.

Bei einem Vergleich des Befruchtungsvorganges von Metazoën mit dem Conjugationsprocess von Colpidium findet man eine Ubereinstimmung nur in den beiden Reductionstheilungen, im weiteren Verlauf der Conjugation treten bezüglich des Verhaltens der Kerne so wesentliche Abweichungen vom Befruchtungsvorgang auf, dass ein Vergleich nicht mehr möglich ist, besonders wenn man berücksichtigt, dass keine Copulation der Vorkerne sondern nur ein Austausch der Wanderkerne statt findet. Dass eine derartige „Befruchtung“ wohl möglich ist, dafür sprechen die neueren experimentellen Untersuchungen, wonach kernlose Eifragmente durch das Eindringen des Spermas mit Erfolg befruchtet werden können und entwicklungsfähig sind.

5. — S. КЕРІНСЬКІ: O całkach rozwiązań równań różniczkowych z sobą sprzężonych, rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe. (*Sur les intégrales des solutions des équations du second ordre, équivalentes à leur adjointe, avec trois points singuliers.*)

Dans le présent mémoire l'auteur s'occupe de ces propriétés des intégrales des solutions des équations différentielles qu'il a déjà abordées brièvement dans un travail antérieur: „Sur les intégrales des solutions etc.“¹⁾, suivant la voie de M. Klein dans la théorie des intégrales hypérelliptiques.

§ 1.

Soit:

$$A_2 y'' + A'_2 y' + A_0 y = 0, \quad (1)$$

une équation différentielle équivalente à son adjointe, où

$$\begin{aligned} A_2 &= f_3(z)^3 = (z - e_1)^2 (z - e_2)^2 (z - e_3)^2 \\ &= a_0 + a_1 z \dots + z^6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= l'_1 l''_1 (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + l'_2 l''_2 (e_2 - e_3)(e_3 - e_1) + \\ &+ l'_3 l''_3 (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) + (3.2z + a_5) f_3 = \\ &= c_0 + c_1 z \dots + c_4 z^4 = \frac{1}{5} A''_2(z) + h_2, \end{aligned}$$

$$h_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2, \quad b_0 = c_0 - \frac{2}{5} a_2, \quad b_1 = c_1 - \frac{6}{5} a_3, \quad b_2 = c_2 - \frac{12}{5} a_4$$

$$l'_i + l''_i = -1 \quad (i=1, 2, 3).$$

Si l'on dénote par F'_λ la troisième polaire de A_2 et par F_λ la première de h_2 :

$$F'_\lambda = a_0 + \frac{a_1}{2} (z + \zeta) + \frac{a_2}{5} (z^2 + 3z\zeta + \zeta^2) + \dots$$

$$F_\lambda = b_0 + \frac{b_1}{2} (z + \zeta) + b_2 z \zeta,$$

¹⁾ Voir ce Bulletin, 1892. Comp. aussi la théorie de M. Klein des intégrales hypérelliptiques. — Burkhardt: „Beiträge zur Theorie etc“. *Matem. Ann.* t. 32. p. 381.

et par $y(z)$, $v_k(\zeta)$ deux solutions quelconques de l'équation (1), l'intégrale double

$$(2) \quad Q_{ik} = \int_{\gamma} \int_{\eta}^{\zeta} \frac{y_i v_k}{(z-\zeta)^2} \left[F_{\lambda}^i + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_k^i \right] dz d\zeta$$

sera ce que, dans le travail cité, l'auteur a dénommé l'intégrale de troisième espèce.

Or on a:

$$(3) \quad \begin{aligned} F_{\lambda}^i + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_k^i &= A_2(z) + \frac{1}{2} A_2'(z) (\zeta-z) + \frac{1}{2} A_0(z) (\zeta-z)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} M(z) (\zeta-z)^2 \\ &= A_2(\zeta) + \frac{1}{2} A_2'(\zeta) (z-\zeta) + \frac{1}{2} A_0(\zeta) (z-\zeta)^2 - \frac{1}{2} M(\zeta) (z-\zeta)^2 \end{aligned}$$

ou

$$M(z) = \frac{1}{3A} A_2'''(z) - \frac{1}{2} A_0'(z)$$

Ayant égard à ces équations (3), on obtient aisément les deux formules suivantes:

$$(4) \quad \begin{aligned} Q_{ik} &= -\frac{A_2}{2} \int \frac{y_i + y_i'(z-\zeta)}{(z-\zeta)^2} v_k d\zeta + \frac{1}{2} \iint M y_i v_k dz d\zeta \\ &= \frac{A_2}{2} \int \frac{v_k + v_k'(z-\zeta)}{(z-\zeta)^2} y_i dz - \frac{1}{2} \iint M v_k y_i d\zeta dz \end{aligned}$$

Comme intégrales de première espèce on introduit

$$(5) \quad w_1 = \int y_i dz, \quad w_2 = \int y_0 dz.$$

Les intégrales w_i ont cette propriété en commun avec les intégrales abéliennes de première espèce, qu'elles sont partout finies, bien entendu, quand on suppose

$$l_i' = -\frac{\mu_i}{v_i}, \quad l_i'' = -\frac{\mu_i''}{v_i}, \quad 0 < \mu_i < v_i$$

Dans ce cas seulement on pourra dire: les intégrales w_i , de première espèce sont partout finies.

On obtiendra enfin les intégrales de seconde espèce par dérivation des intégrales de troisième espèce Q_k par rapport aux intégrales de première espèce; on aura donc:

$$\begin{aligned} Z_i(t) &= \left[\frac{d Q_{ik}}{d w_k} \right] \zeta = t = \\ &= \int \frac{y_i}{(z-t)^2} \left[F_A^2 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^1 \right] dz, \quad i=1, 2 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés des intégrales de seconde espèce dans les divers points du plan. Dans ce but on coupe, comme à l'ordinaire, le chemin d'intégration de y à x en parties suffisamment courtes et l'on considère l'intégrale prise le long d'une telle partie. Les limites de l'intégrale que nous désignerons aussi par x et y se trouveront alors dans le voisinage d'un même point a du plan z .

Il y a lieu de distinguer les cas suivants:

(1) $a \geq t$; alors l'intégrale $Z_i^{vi}(t)$ est finie et régulière dans ce point.

(2) $a = t \geq e_i$; dans ce cas on développe les fonctions $y_i(z)$ et $F_A^2 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^1$ en séries des puissances de $z-t$, et l'on obtient:

$$\begin{aligned} y_i \left[F_A^2 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^1 \right] &= \left[A_z y_i \right]_t + (z-t) \left[\frac{1}{2} A_z' y_i + A_z y_i' \right]_t + \\ &+ \frac{(z-t)^2}{1.2} \left[A_z y_i'' + A_z' y_i' + A_z y_i \right]_t \\ &+ \frac{(z-t)^3}{1.2.3} \left[A_z y_i''' + \frac{3}{2} A_z' y_i'' + 3 A_z y_i' - \right. \\ &\left. - 3 M y_i \right]_t + \dots \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de l'équation (1)

$$\left[A_z y_i'' + A_z' y_i' + A_z y_i \right]_t = 0$$

on aura

$$Z_i^{xy}(t) = -\frac{1}{2} [A_2 y_i]_t \left[\frac{1}{(x-t)^2} - \frac{1}{(y-t)^2} \right] - \\ - \left[\frac{1}{2} A_2' y_i + A_2 y_i' \right]_t \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{y-t} \right] + \mathfrak{B}(x-t, y-t),$$

où $\mathfrak{B}(x-t, y-t)$ est une série ordonnée suivant les puissances entières et positives des arguments $x-t, y-t$.

On pourra donc dire: dans ce cas l'intégrale $Z_i(t)$ est infinie du second ordre.

(3) Supposons $a=t=l$ et désignons par Y_+, Y_- les solutions fondamentales appartenant à e ; nous aurons:

$$\int \frac{Y_i}{(z-t)^2} \left[F_\lambda^s + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^t \right] dz = s_0 \left[(x-e)_i^t - (y-e)_i^t \right] + \\ + s_1 \left[(x-e)_i^{t+s} - (y-e)_i^{t+s} \right] + \dots$$

Dans ce cas l'intégrale de seconde espèce se comporte de la même manière que la solution correspondante de l'équation différentielle (1).

(4) Enfin si $a=t=\infty$, on trouve, regardant l'équation (3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{F_\lambda^s + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h^t}{(z-t)^2} \right]_{t=\infty} = \frac{1}{2} M$$

Dans ce cas les intégrales de seconde espèce ont alors la forme suivante:

$$\frac{1}{2} \int M y_1 dz, \quad \frac{1}{2} \int M y_2 dz$$

(comp. 4).

Les intégrales de seconde espèce ont en outre la très importante propriété suivante:

La différence de deux intégrales de seconde espèce, qui ne diffèrent que par leur pôles t et t' est une fonction linéaire et homogène de y et y' .

En effet on a, d'après l'équation (3)

$$Z_i^{xy}(t) = -\frac{A_2 y_i + y_i'(z-t)}{2(z-t)^2} + \frac{1}{2} \int M y_1 dz$$

d'où il suit

$$Z_i(t) - Z_i(t') = -\frac{A_s}{2} \left[\frac{y_i + y_i(z-t)}{(z-t)^2} - \frac{y_i + y_i'(z-t')}{(z-t')^2} \right]$$

q. e. d.

Du théorème précédent il vient évidemment que les modules de périodicité des intégrales de seconde espèce $Z_i(t)$ sont indépendants du paramètre t .

La méthode employée à la recherche des propriétés des intégrales de seconde espèce nous servira de même à la discussion des intégrales de troisième espèce.

En choisissant les limites de l'intégration x et y dans le voisinage du point a , et ζ , η dans celle du point b , on aura:

(1) Si $a \geq b$, la fonction Q_{ik} pourra être développée en une série, ordonnée suivant les puissances entières de $x-a$, $y-a$, $\zeta-b$, $\eta-b$.

(2) Dans le cas $a=b \geq e$ on considère la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \zeta) = & \left[F'_\lambda + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F'_h \right] y_i v_k - A_s v_i v_k - \\ & - \left[A_s v_i' v_k + \frac{1}{2} A_s' v_i v_k \right] (z-\zeta) \end{aligned}$$

Il est aisé de démontrer que

$$\begin{aligned} [\Phi]_{z=\zeta} &= 0, \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta} = 0, \\ \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{z=\zeta} &= \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \zeta} \right]_{z=\zeta} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{z=\zeta} = 0, \end{aligned}$$

d'où il suit:

$$\begin{aligned} \left[F'_\lambda + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F'_h \right] y_i v_k = & A_s v_i v_k + \left[A_s v_i' v_k + \frac{1}{2} A_s' v_i v_k \right] (z-\zeta) + \\ & + P_i(z, \zeta) (z-\zeta)^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$= A_s y_i y_k' + \left[A_s y_i y_k' + \frac{1}{2} A_s' y_i y_k \right] (\zeta-z) + P_s(z, \zeta) (\zeta-z)^2$$

Si les solutions y_i, y_k sont choisies de sorte que l'on a

$$A_s (y_i y_k' - y_k y_i') = +1,$$

on dérive des équations précédentes, en multipliant par $\frac{dz d\zeta}{(z-\zeta)^2}$ et intégrant:

$$Q_{ii} = -\frac{1}{4} \frac{A_2 y_i^2 + A_2 v_i^2}{z-\zeta} + \iint P dz d\zeta$$

$$Q_{ik} = -\frac{1}{4} \frac{A_2 y_i y_k + A_2 v_i v_k}{z-\zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log(z-\zeta) + \iint P dz d\zeta.$$

L'introduction des limites $x, y; \xi, \eta$ conduit alors au théorème suivant:

L'intégrale Q_{ii} est développable en une série qui ne contient que des puissances entières des arguments $(x-a, y-a, \xi-a, \eta-a)$; mais l'intégrale Q_{ik} $i \geq k$ contiendra en outre l'expression:

$$\frac{(-1)^i}{2} \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)}.$$

Le théorème concernant la différence des intégrales de seconde espèce conduit aux formules suivantes: en considérant

$$Q_{ik} = - \int_{\eta}^{\xi} Z_i^{\nu}(\zeta) v_k d\zeta,$$

ou bien

$$Q_{ik} = - \int_y^x Z_k^{\xi \eta}(z) y_i dz,$$

on a, en introduisant deux paramètres arbitraires t et τ :

$$(7^a) \quad Q_{ik} = \int_{\eta}^{\xi} [Z_i^{\nu}(\zeta) - Z_i^{\nu}(\tau)] v_k d\zeta + Z_i^{\nu}(\tau) \int_{\eta}^{\xi} v_k d\zeta$$

ou

$$(7^b) \quad Q_{ik} = - \int_y^x [Z_k^{\xi \eta}(z) - Z_k^{\xi \eta}(t)] dz - Z_k^{\xi \eta}(t) \int_y^x y_i dz$$

D'après (6) nous aurons

$$Z_i(\zeta) - Z_i(\tau) = -\frac{A_2}{2} \left[\frac{y_i + y_i'(z-\zeta)}{(z-\zeta)} - \frac{y_i + y_i'(z-\tau)}{(z-\tau)} \right]$$

$$(8) \quad Z_k(z) - Z_k(t) = -\frac{A_2}{2} \left[\frac{v_k + v_k'(\zeta-z)}{(\zeta-z)} - \frac{v_k + v_k'(\zeta-t)}{(\zeta-t)} \right]$$

(Pour $t=\tau=\infty$ on obtient de (7) les formules (4)).

§ 2.

Les formules (7) et les théorèmes qui se rapportent au développement de Q_k dans le voisinage d'un point nous serviront à obtenir les relations bilinéaires entre les périodes des intégrales de première et seconde espèce. On définit ces périodes justement comme dans le cas des intégrales abéliennes. On construit une surface de Riemann relative aux fonctions y et y_2 et l'on considère des chemins d'intégration fermés, mais qui ne se laissent pas ramener à un seul point. L'intégrale prise le long d'un tel chemin est précisément la période.

Soient donc L et Λ deux chemins différents; on a d'après (8)

$$[Z_i(t) - Z_i(t')]_L = 0,$$

Pour un point a d'intersection des chemins L et Λ on a évidemment $z = \zeta$; Q_{ik} contient au voisinage d'un tel point un membre logarithmique

$$\frac{1}{2} c_a \log \frac{(x - \zeta)(y - \eta)}{(x - \eta)(y - \zeta)},$$

dont la valeur change de $c_a \pi$, dans le cas d'un changement de l'ordre d'intégration.

En général on aura donc

$$\begin{aligned} Q_{ik}^{L \Lambda} &= Z_i^L w_k^\Lambda + \pi i \Sigma c_a, \\ Q_{ik}^{\Lambda L} &= Z_k^\Lambda w_i^L - \pi i \Sigma c_a, \\ Q_{ik}^{L \Lambda} - Q_{ik}^{\Lambda L} &= \pi i \Sigma c_a, \end{aligned}$$

d'où il suit la relation bilinéaire:

$$Z_i^L w_k^\Lambda + Z_k^\Lambda w_i^L = -\pi i \Sigma c_a.$$

Pour trouver toutes les relations bilinéaires indépendantes, c'est-à-dire pour résoudre le problème complètement on serait obligé d'introduire les chemins „canoniques“ ainsi que dans la théorie des intégrales abéliennes. Mais le problème ainsi posé paraît présenter de grandes difficultés.

Il est possible de les éviter en introduisant certaines périodes partielles au lieu des périodes complètes.

Ces périodes partielles correspondent aux lacets qui partent et reviennent à un même point singulier, par exemple e_{h-1} , en entourant un autre point singulier e_h .

D'après (8) la différence:

$$[Z_i(t) - Z_i(t')]$$

pour un tel chemin est évidemment égale à zéro.

Pour deux chemins suivants (fig. 1, 2)

$$L_h = e_{h-1} e_h e_{h-1}, \quad \Lambda_h = e_{h+1} e_h e_{h+1}$$

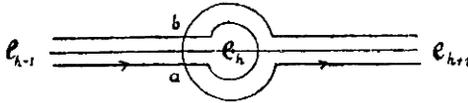


Fig. 1.

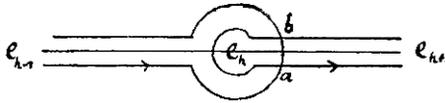


Fig. 2.

on obtient

$$Q_{ik}^{L \Lambda h} = Z_i^L w_k^{\Lambda h} + \pi i \Sigma c$$

$$Q_{ik}^{\Lambda L h} = Z_k^{\Lambda} w_i^L - \pi i \Sigma c.$$

Soient donc, comme auparavant, Y_1, Y_2 les solutions fondamentales, appartenant au point singulier e_h , $\bar{Q}_{ik}, \bar{w}_i, \bar{Z}_i$ les fonctions Q_{ik}, w_i, Z_i formées pour ces solutions \bar{Y}_i ; on aura pour $i=k$

$$\bar{Q}_{ii}^{L \Lambda h} - \bar{Q}_{ii}^{\Lambda L h} = 0,$$

les Q_{ii} ne contenant pas de membres logarithmiques.

Dans le cas $i \geq k$, soient Y_1, Y_2 (ou bien Y_1, Y_2) les solutions de l'équation différentielle (1), correspondantes au point a (fig. 1, 2), alors les valeurs des produits $Y_1 Y_2, Y_2 Y_1$ au point b seront:

$$e^{2\pi i t' h} Y_1 Y_2, \quad e^{2\pi i t'' h} Y_2 Y_1.$$

Si donc on prend Y_1, Y_2 tels que

$$A_2(Y_1, Y_2' - Y_2, Y_1') = +1,$$

on aura :

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{12}^{L, \Lambda, h} - \overline{Q}_{12}^{\Lambda, L, h} &= -(1 - e^{2\pi i h'}) \pi i \\ \overline{Q}_{21}^{L, \Lambda, h} - \overline{Q}_{21}^{\Lambda, L, h} &= (1 - e^{2\pi i h''}) \pi i. \end{aligned}$$

Ainsi on est conduit aux relations bilinéaires :

$$\begin{aligned} \overline{Z}_i^{L, h} \overline{w}_i^{-\Lambda, h} + \overline{Z}_i^{\Lambda, h} \overline{w}_i^{L, h} &= 0 \quad i = 1, 2 \\ \overline{Z}_i^{L, h} \overline{w}_2^{-\Lambda, h} + \overline{Z}_2^{\Lambda, h} \overline{w}_i^{-L, h} &= (1 - e^{2\pi i h'}) \pi i \\ \overline{Z}_2^{L, h} \overline{w}_2^{-\Lambda, h} + \overline{Z}_1^{\Lambda, h} \overline{w}_2^{-L, h} &= -(1 - e^{2\pi i h''}) \pi i \end{aligned}$$

A l'aide de ces relations on arrivera aux relations pour les périodes des intégrales w_i, Z_i en considérant que

$$y_i = \alpha_{i1}^{(h)} Y_1 + \alpha_{i2}^{(h)} Y_2 \quad i = 1, 2$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(h)} & \alpha_{12}^{(h)} \\ \alpha_{21}^{(h)} & \alpha_{22}^{(h)} \end{vmatrix} = 1.$$

On remarquera aisément que ces relations peuvent servir pour obtenir celles de M. Fuchs ¹⁾. Dans ce but il suffit de remplacer les chemins d'intégration L_h, Λ_h par les suivantes : e_{h-}, e_h, e_h, e_{h+} .

6. — K. ŻORAWSKI. **O zbieżności szeregów odwracających.** (*Sur la convergence des séries reversantes*).

Les séries de Lagrange, de Bürmann et de Hoene-Wroński ne sont que des variantes de la série de Taylor. En les considérant ainsi on peut examiner la convergence de ces séries par la méthode de la représentation conforme. C'est justement le but de l'article présent.

¹⁾ L. Fuchs: „Über relationen etc.“ Crelle's J. t. 76.

Envisageons la fonction z de la variable ζ définie par l'équation:

$$(1) \quad f(z) = \zeta,$$

où $f(z)$ est une fonction uniforme dans tout le plan de la variable z . La fonction z est alors en général une fonction multiforme et l'on doit considérer le plan ζ comme une surface de Riemann. Si la branche de la fonction multiforme, qui correspond à la racine c_μ de l'équation:

$$(2) \quad f(z) = \gamma$$

est holomorphe au point γ , on pourra développer cette branche en la série suivante:

$$(3) \quad z_\mu(\zeta) = c_\mu + \sum_n \frac{(\zeta - \gamma)^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n} \right)_{z=c_\mu}$$

Dans cette série c_μ est une constante et ζ est une variable. D'autre part on peut développer une racine de l'équation:

$$(4) \quad f(z) = \zeta$$

en série:

$$(5) \quad z(c) = c + \sum_n \frac{(\zeta_0 - f(c))^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n} \right)_{z=c}$$

Dans cette série ζ_0 est une constante et c est une variable.

Le domaine de convergence de la série (3) est le cercle sur la μ -ième feuille de la surface de Riemann, dont le centre est au point γ et dont la circonférence passe par le point singulier de la branche μ -ième, le plus proche au point γ .

Pour former les domaines de convergence de la série (5) écrivons-la sous la forme suivante:

$$(6) \quad z(c) = z_{\zeta=\gamma} + \sum_n \frac{(\zeta_0 - \gamma)^n}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\zeta^n} \right)_{\zeta=\gamma},$$

où alors le paramètre variable c est remplacé par le paramètre variable γ . Désignons par:

$$\tau_{\mu 1}, \tau_{\mu 2}, \dots, \tau_{\mu \nu} \quad (7)$$

tous les points singuliers placés sur la μ -ième feuille de la surface de Riemann, joignons ces points avec le point γ par des lignes droites et menons au milieu de chacune d'elles des droites perpendiculaires. Ces droites perpendiculaires limitent un polygone (fig. 1), dont tous les points sont sujets aux inégalités:

$$|\zeta - \gamma| < |\tau_{\mu \lambda} - \gamma| \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu) \quad (8)$$

Dans tous les points intérieurs de ce polygone la série (6) est convergente et dans tous les points extérieurs elle est divergente. Sur toutes les feuilles de la surface de Riemann on a de tels polygones qui forment alors des domaines de convergence correspondants aux différentes séries (6). Si nous remplaçons maintenant le paramètre γ par le paramètre c , nous obtiendrons d'une part la série (5) et d'autre part, à l'aide de la représentation conforme, les domaines de convergence de la série (5) sur le plan z .

En ce qui concerne ces domaines on peut énoncer les théorèmes suivants:

1) Sur le plan z on a autant de domaines (à deux dimensions) de la convergence uniforme de la série (5), qu'il y a de feuilles de la surface ζ sur lesquelles le point ζ_c n'est pas un point singulier.

2) Deux ou un plus grand nombre de ces domaines peuvent avoir des points infiniment voisins, seulement dans ces points du plan z , qui correspondent au point infiniment éloigné du plan ζ .

3) A l'intérieur de chaque domaine il y a une racine simple de l'équation (4).

4) Pour chaque valeur du paramètre c d'un domaine donné, la valeur de la série (5) est la même, et représente la racine de l'équation (4) placée à l'intérieur de ce domaine.

5) Les limites des domaines sont des représentations conformes des lignes droites; ces courbes se rencontrent sous les mêmes angles que les droites correspondantes du plan ζ .

6) Les racines de l'équation dérivée $f'(z) = 0$ et les points du plan z , qui correspondent aux points singuliers de la surface de Riemann, sont placés à l'extérieur des domaines de la convergence.

Jusqu'à présent nous avons supposé que la situation des divers points singuliers sur les différentes feuilles de la surface de Riemann est complètement connue. C'est une question que nous nous proposons de résoudre pour notre but de la manière suivante. D'après Lucas, on peut appeler les représentations conformes des lignes droites des stelloïdes¹⁾. Nous nommerons les limites de nos domaines, des stelloïdes limitantes, et les représentations conformes des droites qui joignent les points $\tau_{\mu\lambda}$ au point γ , des stelloïdes auxiliaires. Nous pouvons alors énoncer les deux théorèmes suivants:

1) Le cercle de la convergence de la série (3) passe par celui des points singuliers τ , parmi les plus proches au point γ , dont la stelloïde auxiliaire ne contient sur l'arc ct aucun point correspondant à un point de ramification; l'arc ct étant la représentation conforme de la droite $\gamma\tau$.

2) Le domaine de convergence de la série (5) correspondante à la racine simple $z_{\mu}(\frac{\zeta}{\tau})$ est limité seulement par celles des stelloïdes limitantes qui correspondent aux points singuliers de la surface de Riemann, tels que parmi la racine et les représentations de ces points singuliers il n'y a sur des stelloïdes auxiliaires aucun point correspondant à un point singulier.

Posons par exemple :

$$(9) \quad e^z = \zeta$$

et nous pourrons tout de suite calculer les séries (3) et (5). Il suit :

$$(10) \quad z_{\mu}(\zeta) = c_{\mu} + \sum_r^n (-1)^{n-r} \frac{1}{e^{rc_{\mu}}} \frac{(\zeta - \gamma)^n}{n!},$$

¹⁾ Géométrie des polynomes. Journal de l'Ecole Polyt. Cahier 46. 1879.

$$z(c) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{e^{nc}} \frac{(\zeta_0 - e^c)^n}{n!}, \quad (11)$$

où alors $z_\mu(\zeta)$ représente une branche de $\lg \zeta$, et $z(c)$ est le développement d'une racine de l'équation $e^z = \zeta_0$. Dans ce cas extrêmement simple (fig. 2), les domaines de convergence résultent immédiatement de la forme des séries (10) et (11) de même que de la théorie précédente.

La considération des polynômes entiers nous fournira un autre exemple. Dans ce cas tous les points singuliers de la fonction z de la variable ζ sont des points de ramification; les points infiniment éloignés sont des points correspondants, et toutes les branches des stelloïdes ont des asymptotes réelles, qui toutes se rencontrent dans un seul point du plan. Si on considère par exemple la relation:

$$z^3 - 4z - \frac{3}{2} = \zeta \quad (12)$$

on peut développer chaque branche de z suivant les puissances de ζ :

$$z_\mu(\zeta) = c_\mu + \frac{1}{4(c_\mu^3 - 1)} \zeta - \frac{3c_\mu^2}{32(c_\mu^3 - 1)^2} \zeta^2 + \\ + \frac{7c_\mu^4 + 2c_\mu}{256(c_\mu^3 - 1)^3} \zeta^3 - \dots \quad (13)$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 4)$$

où c_μ sont des racines de l'équation:

$$z^3 - 4z - \frac{3}{2} = 0. \quad (14)$$

D'autre part on peut former la série:

$$(15) \quad z(c) = c - \frac{c^2 - 4c - \frac{3}{2}}{4(c^2 - 1)} - \frac{3c^2 \left(c^2 - 4c - \frac{3}{2} \right)^2}{32(c^2 - 1)^2} - \frac{(7c^2 + 2c) \left(c^2 - 4c - \frac{3}{2} \right)^3}{256(c^2 - 1)^3} - \dots,$$

qui représente les racines de l'équation (14). Dans la fig. 3 t_1, t_2, t_3 sont des points correspondants aux points de ramification; les stelloïdes limitantes sont marquées par des lignes continues et les stelloïdes auxiliaires par des lignes discontinues. Au point t_1 correspondent les lignes noires, au point t_2 les lignes bleues et au point t_3 , les lignes rouges. Si nous calculons les points de ramification τ_1, τ_2, τ_3 correspondants aux t_1, t_2, t_3 et si nous envisageons le dessin, nous verrons, que les cercles de la convergence des séries (13) correspondantes aux racines:

$$c_1; c_2; c_3; c_4$$

passent par les points:

$$\tau_1 \text{ et } \tau_3; \tau_1; \tau_2; \tau_3.$$

De même, en considérant la fig. 3. on voit que les domaines de convergence de la série (15) sont justement ceux qui dans le dessin sont nuancés.

On obtient les domaines les plus simples pour les équations binômes. Les domaines d'une équation du second degré sont limités par une hyperbole équilatère. Aux équations binômes d'un degré supérieur correspondent les domaines limités par des branches hyperboliques congruentes.



7. — K. ŻORAŃSKI. *Przyczynek do geometrii nieskończenie małych przekształceń. (Contribution à la géométrie des transformations infinitésimales).*

Dans ce travail l'auteur a pour but d'examiner les rapports qui se présentent parmi des transformations infinitésimales et des expressions différentielles, qui ne possèdent pas la simple propriété de rester invariantes en face des transformations nommées. L'auteur limite dans le travail présent cette question (tres étendue) aux transformations infinitésimales du plan et aux expressions différentielles qui ne contiennent pas des dérivées d'un ordre supérieur au premier.

Considérons alors d'une part un mouvement stationnaire du fluide dans le plan, c'est-à-dire un groupe à un paramètre t :

$$x_t = \varphi(x, y, t), \quad y_t = \psi(x, y, t) \quad (1)$$

avec une transformation infinitésimale:

$$Uf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

et d'autre part la fonction:

$$H = H(x, y, y'). \quad (3)$$

En effectuant la transformation (1) sur la fonction (3), on peut trouver une telle fonction $K(x, y, y', t)$, qu'on a:

$$H_t = H(x_t, y_t, y'_t) = H(x, y, y') + K(x, y, y', t). \quad (4)$$

Si pour une famille de courbes:

$$F(x, y, t, C) = 0 \quad (5)$$

on a:

$$K(x, y, y', t) = \Omega(x, y, t), \quad (6)$$

on aura la proposition suivante:

Chaque courbe (5) possède une telle propriété que les particules du fluide dont elle se compose, au moment $t = 0$, forment après le temps t une courbe, jouissant d'une telle pro-

priété que pour les mêmes particules de ces deux courbes la différence des valeurs de la fonction H s'exprime à l'aide de l'équation:

$$(7) \quad H_1 - H = \Omega(x, y, t).$$

Nous envisagerons deux cas particulièrement simples. Il est aisé de démontrer les propositions suivantes.

1) La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une telle famille de courbes que pour chaque valeur de t la différence $H_1 - H$ s'exprime par

$$(7) \quad H_1 - H = \Omega(x, y, t)$$

où Ω est une fonction donnée, consiste en ce que l'équation différentielle:

$$(6) \quad K(x, y, y', t) = \Omega(x, y, t)$$

définisse une famille de courbes indépendantes de t .

2) La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une famille de courbes telles que toutes les courbes qui en résultent, par suite du mouvement après le temps donné t , aient pour différence $H_1 - H$:

$$(7) \quad H_1 - H = \Omega(x, y, t),$$

où Ω est une fonction donnée, consiste en cela que l'équation différentielle:

$$(6) \quad K(x, y, y', t) = \Omega(x, y, t)$$

définisse une famille de courbes invariante en face des transformations du groupe (1).

En rapprochant ces deux cas nous en tirons ce qui suit:

3) Si l'équation différentielle:

$$(6) \quad K(x, y, y', t) = \Omega(x, y, t)$$

ne contient pas t et reste invariante en face du groupe (1), ou si elle se divise en deux équations, dont une ne contient pas t et reste invariante en face du groupe (1), alors la famille invariante des courbes, définie par cette équation invariante, jouit d'une telle propriété que pour les points corres-

pondants de chaque paire de courbes de cette famille il existe la relation suivante:

$$H_t - H = \Omega(x, y, t). \quad (7)$$

On peut aussi énoncer la proposition réciproque.

On voit aisément que dans ce cas on peut toujours remplacer la transformation finie par la transformation infinitésimale, c'est-à-dire au lieu de l'équation (6) on pourra considérer l'équation suivante:

$$\xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right] \frac{\partial H}{\partial y'} = \omega, \quad (8)$$

ω ayant la signification :

$$\omega = \left[\frac{\partial \Omega(x, y, t)}{\partial t} \right]_{t=0} \quad (9)$$

Dans les conditions de la proposition dernière nous dirons que la fonction H varie „régulièrement“ le long de la famille invariante avec „la vitesse“ α et si toutes les familles définies par l'équation (9) sont des familles invariantes, nous appellerons cette régularité „parfaite“.

Nous examinerons les cas de la régularité parfaite de la fonction:

$$H = \frac{\xi y' - \eta}{\xi + \eta y'} \quad (10)$$

c'est-à-dire de la tangente de l'angle formé par une courbe quelconque avec la ligne de courant du groupe (1). Un simple calcul montre que

$$\frac{\delta H}{\delta t} = \frac{\alpha + \beta y' + \gamma y'^2}{(\xi + \eta y')^2}, \quad (11)$$

où

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \eta^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \eta \xi \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \\ \beta &= (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \\ \gamma &= -\xi^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \xi \eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

H est un invariant différentiel dans le cas:

$$(13) \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Ces conditions sont remplies si l'on a:

1) $\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$ c'est-à-dire, si la transformation est conforme

$$2) \quad \eta = \pm i \xi.$$

Nous laissons alors ces cas de coté et considérons la condition:

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \omega(x, y),$$

qui peut être écrite sous la forme suivante:

$$(15) \quad \alpha - \xi^2 \omega + (\beta - 2\xi \eta \omega) y' + (\gamma - \eta^2 \omega) y'^2 = 0.$$

Si l'on introduit les notations:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\xi) + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = M, \quad U(\eta) + \eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \xi \frac{\partial \xi}{\partial y} = N \\ U(\alpha) + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} = A, \\ U(\beta) + 2\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + 2\alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} = B, \\ U(\gamma) + 2\gamma \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} = C \end{array} \right.$$

on pourra écrire les conditions de la régularité parfaite sous la forme:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^2 [U(\omega) - \rho \omega] + 2\xi M \omega + \alpha \rho = A, \\ 2\xi \eta [U(\omega) - \rho \omega] + 2(\xi N + \eta M) \omega + \beta \rho = B, \\ \eta^2 [U(\omega) - \rho \omega] + 2\eta N \omega + \gamma \rho = C \end{array} \right.$$

où ρ doit être une fonction de x et y . Dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où

$$(18) \quad D = \begin{vmatrix} \xi^2, & \xi M, & \alpha \\ 2\xi \eta, & \xi N + \eta M, & \beta \\ \eta^2, & \eta N, & \gamma \end{vmatrix}$$

est différent de 0, on peut résoudre les équations (17) par rapport à $U(\omega) - \rho\omega$, 2α et ρ . On obtient alors la vitesse ω et une condition différentielle qui doit être remplie par la transformation infinitésimale, pour que la régularité parfaite soit justement possible dans le cas D différent de 0.

Le déterminant D peut être réduit à la forme :

$$D = -(\xi^2 + \eta^2) \left[(\xi^2 - \eta^2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + 2\xi\eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]^2 \quad (19)$$

donc, si $D = 0$, on a :

$$(\xi^2 - \eta^2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + 2\xi\eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0. \quad (20)$$

Il est nécessaire de considérer séparément les cas α différent de 0 et $\alpha = 0$. Dans le premier on obtient :

$$U(\omega) - \rho\omega = \frac{A + C - 2(\xi M + \eta N)\omega}{\xi^2 + \eta^2} \\ \rho = \frac{A\eta^2 - C\xi^2}{\alpha(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad (21)$$

il y a alors une infinité des vitesses ω qui satisfont toutes à une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Dans le cas $\alpha = 0$ il y a lieu à distinguer encore le cas $\xi = 0$ et le cas $\eta = 0$. Dans le premier, on obtient pour ω la valeur :

$$\omega = \chi(x) \frac{\partial \lg \eta}{\partial y} \quad (22)$$

où χ est une fonction arbitraire et la famille de courbes :

$$\int \frac{dx}{\chi(x)} - \int \frac{dy}{\eta} = \text{const.} \quad (23)$$

Si $\eta = 0$ on a semblablement :

$$\omega = \chi(y) \frac{\partial \lg \xi}{\partial x} \quad (24)$$

où χ est également une fonction arbitraire et on obtient la famille de courbes :

$$\int \frac{dy}{\chi(y)} + \int \frac{dx}{\xi} = \text{const.} \quad (25)$$

Il est évident que dans tous les cas on obtient les familles, le long desquelles H varie avec une régularité parfaite, à l'aide des quadratures.

Il faut encore remarquer que dans le cas $D=0$ l'équation (15) est satisfaite par des trajectoires orthogonales des lignes de courant. Pour ces trajectoires, H a une valeur infinie qui ne change pas pendant le mouvement. Les valeurs de ω sont alors des vitesses du changement régulier, le long de l'autre famille satisfaisant à l'équation (15).

Nous finissons par considérer un mouvement parallèle à l'axe des x . Nous avons alors $r_i = 0$ et nous pouvons supposer D différent de 0, car le cas $D=0$ est déjà résolu pour ce mouvement par les formules (24) et (25). On arrive à une équation aux dérivées partielles du 3-me ordre :

$$(26) \quad \xi \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) = \\ = \left(3\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right).$$

Si l'on se propose de trouver toutes les fonctions ξ de la forme :

$$\xi = \varphi(x) \cdot y + \psi(x),$$

on vient aux trois types différents :

$$(I) \quad \xi = \frac{(b e^{ax} + 1)^2}{b e^{ax}} (cy + d),$$

$$(II) \quad \xi = (x + b)^c (cy + d),$$

$$(III) \quad \xi = e^{ax} (cy + d) + b,$$

où a, b, c, d sont des constantes arbitraires. Dans ces trois cas on obtient pour la vitesse ω les valeurs suivantes :

$$\omega = - \frac{a^2 (cy + d)^2}{c} \quad (I), \quad \omega = \frac{(cy + d)^2}{c} \quad (II), \quad \omega = 0 \quad (III),$$

auquelles appartiennent les familles des courbes :

$$cy + d = C \frac{be^{ax}}{be^{ax} + 1}, \quad cy + d = C \frac{1}{be^{ax} + 1} \quad (\text{I.})$$

$$(x + b)(cy + d) = C \quad (\text{II.})$$

$$y = C, \quad (cy + d)e^{ax} = C \quad (\text{III.})$$

où C est le paramètre arbitraire de chaque famille.

8. — T. GARBOWSKI. *Z histologii i fizyologii Gastread. (Zur Histologie und Physiologie der Gastraeaden).*

Unter Gastremarien, der ersten Classe seines bunt zusammengewürfelten Gastraeadenphylons, hat Haeckel, neben hypothetischen Formen, zwei lebende, marine Organismen untergebracht, den *Trichoplax adhaerens* E. F. Schulze und *Treptoplax reptans* Monticelli, deren allgemeine Körperarchitektur von ihren Entdeckern bereits beschrieben wurde. Diese ursprünglichsten, sowohl rein morphologisch als entwicklungs-geschichtlich überaus interessanten Metazoën wurden vom Verfasser möglichst eingehenden technischen, beziehungsweise theoretischen Untersuchungen unterzogen, um einerseits tiefere Einsicht in ihre histologischen und physiologischen Verhältnisse zu erlangen, andererseits um ihre wirkliche systematische und genetische Stellung in der Metazoëngruppe zu ermitteln.

Bis jetzt wurde der *Trichoplax* (*Treptoplax* ist eine ganz neue Entdeckung) in sehr verschiedener Weise beurtheilt. — Während die einen ihn für ein Mesozoon erklären, zählen ihn andere Autoren, wie z. B. von Graff, zu acoelen Turbellarien, oder aber sehen in ihm ein paranomales Entwicklungsstadium eines höheren Organismus, möglicherweise eine Poriferenlarve. Grosse Seltenheit und die bedeutenden Schwierigkeiten mikro-technischer Behandlung erklären allein den Umstand, dass sich mit dieser berühmt gewordenen Form bis jetzt nur ein einziger Forscher, E. F. Schulze, des näheren befasst hat.

Der Körper lässt sich bei beiden Formen auf eine flache Scheibe zurückführen, die aussen mit einem grösstentheils be-

wimperten, oben pflasterförmigen, unten cylindrischen Epithel bekleidet ist und innen aus einem sehr lockeren Parenchym aus mehr oder minder unregelmässigen Zellen besteht.

An günstigen Präparaten, besonders an lebenden, mit Anilinfarbstoffen tingierten Objecten fand der Verfasser an der Aussenseite des Epithels eine deutliche mehrschichtige Cuticula. Zu äusserst befindet sich ein hyaliner Saum, es folgt eine breitere, durch eine dunklere Schicht von ihm getrennte hyaline Schichte, an die sich wieder dunklere, körnige Elemente anschliessen. Diese Struktur erinnert lebhaft an Cuticularbildungen bei niedrigsten Turbellarien, nur sind bei den letzteren die den einzelnen Wimpern entsprechenden Theile viel deutlicher zu erkennen. Dass aber auch hier die Wimpern die Cuticula durchsetzen, das zeigt sich bei manchen Epithelzellen, die sich durch Maceration und Quetschung isolieren liessen. Die Wimpern bleiben an solchen Zellen in der Regel haften.

Als den hauptsächlichsten Bewegungsorganen und als muthmasslichen, peripheren Adnexen des Empfindungssystems wurde den Wimpern besondere Aufmerksamkeit geschenkt, zumal K. C. Schneider in einer cytologischen Arbeit das Epithel des Trichoplax abbildet und die einzelnen Cilien als Endstücke eines die ganze Zelle erfüllenden Fibrillenknäuels darstellt. Diese Auffassung ist jedoch durchaus unrichtig. Am deutlichsten kann man sich an imprägnierten Epithelien überzeugen, dass die Wimper ein äusserer Fortsatz der Zelle ist und dass ihre Basis sich nicht tiefer in das Cytoplasma erstreckt. Mit Aurum chloratum flavum behandelt, werden die Wimpern ganz schwarz und zeigen knötchenartige Verdickungen, so dass sie sich wie vergoldete, mit Varicositäten bedeckte Nervenfasern ausnehmen. Dem gegenüber werden im Zellkörper bloss winzige, punkartige Theilchen gefärbt, die sich, nach Art der Neurosomen Held's¹⁾, im Spongionplasma des fein vacuolisierten

¹⁾ Z. B. in den grossen Ganglienzellen des Deiter'schen Kernes beim Kaninchen.

Plasmas, namentlich an der Peripherie der einzelnen Bläschen oder Waben ansammeln. Es ist schwer zu entscheiden, ob diese Struktur auch dem lebensfähigen Plasma eigentümlich ist oder ob sie nur in fixierten, abgestorbenen Zellen auftritt. In gequetschten Zellen, die intra vitam mit Bleu de Paris gefärbt wurden, ist diese Vacuolisierung bereits zu sehen, sie kann aber auch nur in der zu gleicher Zeit sich einstellenden vitalen Entmischung des Plasmas ihre Ursache haben. Die ziemlich gleichmässige Lagerung der feinsten spongioplastischen Fibrillen lässt die Vermuthung zu, dass das Nervensystem bei diesen Organismen noch nicht topisch ausgebildet ist, dass vielmehr die nervöse Accidenz sämmtlichen Elementen des empfindenden Körperepithels zukommt und das Uebertragen der Reize mittelst besonderer Fortsätze auf die enchymatischen, ähnlich struierten Zellen ermöglicht.

Bei *Trichoplax* sind die meisten Zellen des unteren Cylinderepithels in unregelmässige Fortsätze ausgezogen, die sich mit inneren Zellen verbinden; bei *Treptoplax* sind die cylindrischen Zellen an der Basis abgerundet. Es kommen aber auch bei *Trichoplax* einzelne Zellen vor, deren proximales Ende sicher keinen Anhang besitzt und rund zuläuft. Die Zellgrenzen treten nicht nur bei Behandlung mit Silbernitrat, sondern auch bei Vitalfärbungen mitunter recht deutlich hervor. Die Zellgrenzen des dorsalen Pflasterepithels werden (nach selten gelingender und immer ausserordentlich vergänglicher Fixierung der mit Anilinblau gefärbten Objecte durch Ammoniumpikrat) als dichtere Anhäufungen dunkler Körnchen markiert; Zellen, die in situ erhalten bleiben, erhalten auch ihre polygonale, manchmal sehr regelmässig sechseckige Gestalt; isolierte Zellen runden sich dann meistens ab.

Im Sinne der Keimblätterlehre, die auf sämmtliche Metazoen ausgedehnt zu werden pflegt, müsste man das innere, zwischen beiderlei Epithelarten liegende Parenchym als Entomesoderm auffassen. Eine solche Homologisierung wäre insoweit richtig, als dieses Gewebe das Geschäft des Stoffwechsels zu besorgen scheint und die Körperbewegungen ausführt.

Mehrere Umstände sprechen für die Richtigkeit der ersteren Vermuthung, in erster Linie die auffallend grossen Kugeln einer fettartigen Substanz, welche Oeltropfen ähneln und in regelmässiger Vertheilung dorsal und ventral im Parenchym auftreten.

Durch mikrochemische Reactionen lässt es sich feststellen, dass dieselben keine eigentliche Fettsubstanz repräsentieren. Es wurden Zellen gefunden, welche bloss eine ganz geringe Menge dieser Substanz in Form eines Glanzkörpers enthalten und andere mit allmählig anwachsenden Tropfen. Sehr oft kann man beobachten, wie ein Tropfen maximaler Grösse plötzlich verschwindet, oder wie bei absterbenden Individuen einzelne Tropfen mit ihren Zellen heraustreten und sich im Momente, da die Zelle zerfällt, entleeren. Bei gesunden Exemplaren bewirkt der angeschwollene Tropfen offenbar ein Platzen der Zellwände und der Inhalt ergiesst sich in die Leibeshöhlenflüssigkeit, welche die Lacunen zwischen den lockeren Parenchymzellen erfüllt.

Frappante Aehnlichkeit mit diesen Excretionstropfen besitzen excretorische Vacuolen grosser Amoeben, wie der *Pelomyxa*; namentlich wird die Entleerung von ganz ähnlichen Erscheinungen begleitet.

Für die verdauende und ausscheidende Thätigkeit des Parenchyms spricht ausserdem noch der Umstand, dass bei geschwächten, in ungünstigem Milieu lebenden Exemplaren, z. B. nach längerem Verweilen im hängenden Tropfen des Objectträgeraquariums, gerade in der mittleren Körperschichte verschiedenartige Krystalle zusammenschossen, was sich am leichtesten durch die gestörte physiologische Thätigkeit der Zellen erklären lässt.

In anderen Parenchymzellen, insbesondere in langen, spindelförmigen, dorsoventral gerichteten Zellen, kommt in der Körnchengruppierung die Tendenz zum Ausdruck, spongio-plasmatische Längsfasern zu bilden, so dass diese Zellen nicht selten das Aussehen von ganz jugendlichen Muskelzellen gewinnen. Die Angaben einiger Forscher, es seien beim Tricho-

plax Muskelzüge vorhanden, die sich gegenseitig kreuzen und der Muskulatur der Würmer entsprechen, beruhen jedoch auf irrthümlicher Ausdeutung gewisser Bilder, welche durch chemische Reagentien sehr leicht hervorgerufen werden können.

Die ungleichmässige färberische Abtönung einzelner Parenchymzellen entspricht nicht etwa ihrer thatsächlichen Verschiedenheit, sondern hängt von dem Contractionsgrade der Zelle im Momente der Fixierung ab. Durch Contraction kann sehr leicht der Zusammenhang der Zellen gelockert werden, und die merkwürdige Gestalt der enchymatischen Zellen in den Präparaten Monticelli's von Treptoplax dürfte in diesem Umstande eine ungezwungene Erklärung finden.

Neben den Excretionstropfen liegen im Parenchym des Trichoplax gelbbraune Knollen, welche ebenfalls auf sehr verschiedene Weise gedeutet wurden, — wurden doch die „Oeltropfen“ von einem Botaniker für Otolithen erklärt, — zuletzt durch Haeckel, der in ihnen rückgebildete Spermatoblasten erkannt hat. Genauer Vergleich mit symbiotischen Algen bei anderen Thierformen, namentlich an der Hand der Angaben Haberlandt's, lässt keinen Zweifel über die Natur dieser symbiotischen Wesen aufkommen. In vielen Präparaten, z. B. bei Tinction mit Bleu de Paris und nachfolgender Fixierung mittelst Salpetersäure oder Platinchlorid-Sublimat, nimmt es den Anschein, als ob diese Knollen von Zooxanthellen zwischen den Zellen liegen würden. Der Verfasser konnte jedoch das Wachsthum dieser Knollen im Cytoplasma verfolgen und feststellen, dass auch die grössten Anhäufungen stets vom Körper einer einzigen Zelle umhüllt werden.

Monticelli hat für Treptoplax das Vorkommen von Zooxanthellen nicht angegeben. Die Klümpchen jedoch, die auch bei dieser Form gefunden werden, wenn auch viel kleiner als bei Trichoplax, sehen so ähnlich aus, dass auch sie in Anbetracht der sonstigen tektologischen Uebereinstimmung beider Formen mit einander, kaum anders gedeutet werden könnten.

Was die Biologie anbelangt, so erinnern beide Formen in ihrer äusseren Erscheinung und in ihren Bewegungen am

meisten an Amöben und Turbellarien. Die im Innern liegenden contractilen Zellen veranlassen, besonders bei dem lebhafteren *Treptoplax*, die Formveränderungen des Körpers, die Wimpern, welche gleichmässig und in fortschreitenden Wellen schlagen, die Fortbewegung. Es giebt übrigens Amöben, wie *Amoeba guttula* oder *Pelomyxa palustris*, die sich auch ohne eigentliche Pseudopodien bewegen können. Das ruhende Thier ist entweder flach ausgebreitet, oder in der Mitte zusammengezogen und die Scheibe dort am dicksten, so dass ein dorso-ventraler Schnitt spindelförmig sein würde. Beim Kriechen entstehen häufig Falten, vornehmlich am Rande der Körperscheibe, wie bei Turbellarien. Auch weiss sich ein von der Unterlage weggespültes und auf die Dorsalfäche fallendes Thier in der nämlichen Weise umzudrehen, wie dies z. B. eine Süßwasserplanarie bewerkstelligt.

Trichoplax verbleibt auf derselben Stelle wahrscheinlich so lange, bis er alle vorhandenen Nährstoffe aufgenommen hat. Manchmal bilden sich dann auf der Körperscheibe bruchsackartige Ausstülpungen, welche äusserlich ähnlichen, von Greeff bei *Pelomyxa* beschriebenen Aussackungen gleichen, mit ihrer Oeffnung stets gegen die Unterlage, auf der sich das Thier aufhält, gerichtet sind und wahrscheinlich das mit direct resorbierbaren Stoffen besonders reich durchsetzte Wasser aufspeichern, also eine Rolle bei der Ernährung spielen. Diese Eigenthümlichkeit hat jedenfalls lediglich eine physiologische Bedeutung und — indem die Aussackung in allen Gegenden der Körperscheibe und in verschiedenem Grade erfolgen kann — steht sie gewiss in keinem Zusammenhang mit der endogastralen Ernährung einer *Gastrula*, wie sie vielleicht die Anhänger der *Gastraeatheorie* ausdeuten würden.

Niemals wurden in den Geweben fremde Nahrungskörper vorgefunden. Die Art, wie die dem Seewasser beigemischten Farbstoffe, z. B. das *Bleu de Paris*, in das Innere aufgenommen werden, spricht ebenfalls dafür, dass es sich bei diesen Thieren lediglich um flüssige Nahrung, augenscheinlich um organische Zersetzungsproducte handelt, weil lebende Substanz, z. B. Algen-

fädchen, nach der Berührung mit *Trichoplax* unverändert bleiben und weil sich die Thiere niemals freiwillig an lebenden Pflanzen aufhalten, sondern in grösster Verdichtung am Bodensatz oder auf schleimigen Aquarienwänden vorkommen. Die von Schulze erwähnte Verdauung zwischen zusammengelegten Körperfalten kann sich der Verfasser nicht recht vorstellen.

In gewissen Perioden nehmen die meisten Exemplare die Gestalt von langen, geschlängelten Bändern an. Es wurden Formen beobachtet, bei denen die eine Körperhälfte sich bandartig verlängert, die andere hingegen unverändert, also scheibenförmig bleibt. Diese Formveränderung macht Schulze von der Jahreszeit und von der Temperatur abhängig; der Verfasser glaubt jedoch, dass hier ein gewisser Rhythmus in der Lebensart der Thiere besteht, so dass nach Ablauf etlicher Monate dieselben Erscheinungen bei den in einem Aquarium gemeinsam lebenden Thieren wiederkehren.

Die bandartige Verlängerung des Körpers ist gewissermassen ein Vorbereitungsact zur Fortpflanzung durch Theilung, und zwar in gewöhnlicher, mechanischer Weise, ohne Regeneration, also durch Architomie im Sinne F. Wagner's.

Neben diesem Fortpflanzungsmodus, der schon von Schulze beschrieben wurde, war der Verfasser mehrmals in der Lage zu constatieren, dass einzelne Individuen mit einander Verbindungen eingehen, indem sie sich einander annähern und nach und nach seitlich verwachsen, worauf das vergrösserte Individuum sich ganz normal nach allen Richtungen hin zu bewegen beginnt und keine Spur einer Verwachsungsnaht u. dgl. erkennen lässt.

Mit Hilfe einer besonderen Vorrichtung an den Glaswänden der Behälter konnten einzelne Individuen längere Zeit verfolgt, sogar einige Tage in ihren Bewegungen kontrolliert werden. Es zeigte sich, dass ein derartiges, aus zwei kleineren entstandenes Exemplar sich nach einiger Zeit bandförmig verlängerte und theilte. Es bleibt unbekannt, ob die geschilderte vollständige Conjugation die Vermehrung stets einleitet oder nur unter besonderen Umständen auftritt.

Dass diese, sonst bei Metazoën nicht bekannte ökonomisch-reproductive Autotomie thatsächlich nichts anderes als ein mechanischer Theilungsvorgang ist, ergibt sich aus den Versuchen des Verfassers, die Scheiben und Bänder künstlich zu zertheilen. Ist der Schnitt geschickt geführt worden, dann heilen die Wunden sehr bald, indem sich die oberen und unteren Epithelränder an einander legen und gänzlich verwachsen. Aehnliche Experimente mit vielkernigen Protozoen (M. Nussbaum's Versuche an Opalinen) wollten bekanntlich nicht gelingen.

Auch in dieser Thatsache erblickt der Verfasser einen Beweis der Ursprünglichkeit dieser Organismen. Die Beziehungen zwischen der Conjugation und der Vermehrung sind z. B. bei Rhizopoden noch nicht genügend aufgeklärt. Hier erfolgt die Individuation seit jeher durch Theilung, welche — was die Grösse, den Zeitpunkt u. dgl. betrifft — durch eine angestammte Selbstregulation geleitet wird. Es leuchtet aber ein, dass dieser Vorgang an sich, physiologisch zur geschichtlichen Erhaltung des Organismus nicht ausreichen würde. Daher die Conjugation, wodurch zu der reinen Immortalität im Sinne Weismann's das belebende Moment der Panmixie einzutritt.

Die überaus zarte und lockere Struktur der Körpergewebe findet in dem häufigen Vorkommen des körnigen Zerfalls ihren Ausdruck. Deswegen ist auch die histotechnische Behandlung des Trichoplax ausserordentlich erschwert, weil das Thier auf die meisten chemischen Reize sofort mit einem vollständigen Zerfliessen antwortet. Der Zerfall ist offenbar Folge einer starken Contractilität des Plasmas und einer noch nicht zum Austrag gekommenen Localisation der Empfindungsaccidenz in den Geweben. Beides wird in der specifischen Beschaffenheit des Cytoplasmas sowohl in den Epithelien als im Parenchym ausgedrückt.

Der Tod des Thieres erfolgt ebenfalls stets durch vollständigen Zerfall der Gewebelemente. Die symbiotischen Zooxanthellen überleben den Organismus nur sehr kurze Zeit,

denn bald fallen auch sie auseinander und werden allmählig unkenntlich.

Die wichtigsten histologischen und physiologischen Befunde lassen sich demnach folgenderweise zusammenfassen:

1. Die bewimperten Körperepithelien sind mit einer mehrschichtigen Cuticula¹⁾ versehen. Diese wird von Wimpern durchsetzt, deren Ansatz sich nicht in das Cytoplasma der Epithelzellen erstreckt.

2. Das Epithel der Ventralseite, mit der sich das Thier an Seepflanzen und andere Gegenstände anschmiegt, besitzt nicht den Charakter eines verdauenden Epithels, kann somit nicht als Entoderm angesprochen werden.

3. Als Verdauungs- und Bewegungsorgane fungieren einzelne Zellen des lockeren Körperparenchyms. Als Muskeln fungieren insbesondere zarte spongioplasmatische Fasern, welche in enchymatischen, spindelförmigen, namentlich dorsoventral orientierten Zellen differenziert werden. Die von Graffi erwähnten Muskeln entstehen als Artefacta unter Einwirkung gewisser chemischer Reagentien.

4. Das Thier kann ohne Zweifel bloss flüssige Nahrung aufnehmen, z. B. verschiedene, beim Zerfall organischer Körper entstehende Verwesungsstoffe.

5. Die ölartige Substanz, die im Körperparenchym in Tropfen auftritt, kommt bei beiden Formen ausschliesslich intracellulär vor und besteht nicht aus Fettelementen, sondern aus Excretionsstoffen des Organismus.

6. Gelbbraune Knollen verschiedener Grösse, die ihren Sitz ebenfalls im Parenchym aufschlagen, sind bei beiden Formen vorhanden, liegen stets im Cytoplasma einzelner Zellen und sind ohne Zweifel als symbiotische Zooxanthellen aufzufassen.

7. Es wurde ausserdem beim *Trichoplax* ein äusserst interessanter Conjugationsprocess beobachtet, welcher der me-

¹⁾ Cuticula im Sinne E. F. Schulze's.

chanischen Theilung, der Architomie, vorauszugehen scheint. Ein anderweitiger Fortpflanzungsmodus, wie mittelst Sporen, Knospen u. s. w., dürfte bei diesen Organismen nicht vorkommen.

Auf Grund obiger Ergebnisse muss man die Ueberzeugung gewinnen, dass die in Rede stehenden Metazoën unmöglich für Urdarmthiere gehalten werden können und überhaupt mit dem Begriffe der Gastrulation nichts gemeinsames haben.

Es wurde der Gedanke ausgesprochen (Schulze, Bütschli), dass *Trichoplax* eine flach ausgebreitete *Gastrula* sein könnte, so dass seine untere Fläche die Innenwände eines Archenterons, die Peripherie des Körpers einen Blastoporus (Prostoma) und das innere Parenchym die Mesodermschichte darstellen würden. Obschon ein solcher Umwandlungsprocess an sich nicht unmöglich wäre, so fehlt es doch an allen positiven Daten, um eine solche Transmutation anzunehmen; es fehlt vor allem jene *Gastraea*, von welcher der *Trichoplax* abstammen sollte. Argumente, derer sich zu diesem Behuf Haeckel bedient, wie der Vergleich mit einer *Discogastrula* der Saurospiden, sind nicht wissenschaftlich discutierbar.

Ausser den Gastremarien unterscheidet Haeckel im Phylon der *Gastraeaden* auch andere Classen, zunächst die *Cyemarien* (*Dieyemiden* und *Orthonectiden*). Mehrere Besonderheiten der Tektonik lassen aber weder einen Vergleich mit *Rhombozoën* van Beneden's, noch mit den, zwei feuillets épitheliaux führenden *Mesozoën* Julin's zu. Die dritte Classe der *Gastraeaden*, die *Physemarien*, kommen gar nicht in Betracht.

Nachdem Graff den *Trichoplax* für einen Vertreter niedrigst organisierter Plathelminthen erklärt hat, hält Böhmig die Acoelie des *Trichoplax* für ebenso secundär, wie den Mangel eines differenzierten Darmkanals bei acoelen Turbellarien. Es steht uns aber nichts im Wege, diesen Transmutationsmodus als umkehrbar aufzufassen, und mehrere Gründe, namentlich theoretischer Natur, weisen darauf hin, dass die Acoelie des *Trichoplax* und *Treptoplax* ursprünglich ist, jedenfalls einen völlig

anderen Charakter besitzt als bei den augenfällig degenerierten, darmlosen Turbellarien.

Aus vielfachen Gründen, die an dieser Stelle nicht eingehend erörtert werden können, hat sich nun der Verfasser gezwungen gesehen, für diese Organismen eine besondere Gruppe, *Placulæadae*, zu statuieren und dieselbe als den einfachst organisierten Typus der Vielzelligen, als *Protacoelier* auf die unterste Stufe des Metazoënstammes zu setzen.

Die blosse Thatsache, dass die *Protacoelier* nicht hypothetisch — wie die *Gastræa* — sondern in der Wirklichkeit existieren, hält der Verfasser für einen neuen und schwerwiegenden Einwurf gegen die Richtigkeit der gastræalen Phylogenie Haeckel's und gleichzeitig für einen überaus wichtigen Anhaltspunkt, der uns neben anderen, entwicklungsmechanischen und rein morphogenetischen Thatsachen bei Erforschung der Metazoënentwicklung behilflich sein kann.

Inbetreffs dieser Ideen muss auf die vorbereitete, ausführliche morphogenetische Schrift des Verfassers verwiesen werden ¹⁾. Hier möge nur erwähnt werden, dass er die Wesenheit des Treibenden und Gestaltenden in der organischen Natur nicht im Archenteron, sondern in der Physiologie der Ernährung suchen zu müssen glaubt. Und da die letztere, je nach dem Charakter der angestammten, gewohnten Umgebung, eine sehr verschiedene sein muss, so werden auch die Ausgangspunkte des Transmutationsprocesses und die einzelnen Umwandlungsprocesse an sich verschieden sein. Mit anderen Worten: es dürften die Metazoëen mehrfachen Ursprung haben.

Alles das, was uns hierbei — nach des Verfassers Ueberzeugung — den Ausschlag giebt, wird im Schema der *Gastræatheorie* gar nicht berücksichtigt. Die Abstammungslehre geht nothwendigerweise stets über die Erfahrung hinaus und deshalb wird ihr sogar mehrfach jede Wissenschaftlichkeit ab-

¹⁾ Thad. Garbowski, *Morphogenetische Studien*. Jena, G. Fischer. 1899.

gesprochen. Aber in der heute fast allgemein verbreiteten Gastraealehre haben die Forscher, von der Hauptidee getragen, die ursprünglichste Mannigfaltigkeit in der Entwicklung gänzlich aus den Augen verloren. Während sie z. B. einerseits bemüht sind, den Begriff der primären und secundären Leibeshöhle stets aufrecht zu erhalten, wissen sie gar nicht den weit fundamentaleren Unterschied zwischen der enterocoelen und schizocoelen Darmentstehung zu würdigen.

Es leuchtet ein, dass in der Phylogenie auch andere physiologische Faktoren, so z. B. gleich nach der Ernährungsfrage die Form des Wachstums über das Individuelle hinaus, die Fortpflanzung, eine gewichtige Rolle spielen, und dass das Zusammen- und Gegenspiel dieser Faktoren desto complizierter wird, eine je höhere Entwicklungsstufe die gegebene Organismengruppe erreicht hat.

Somit wird auch in der Ontogenie das Meiste secundär verändert sein. Das Meiste, was man auf das sogenannte biogenetische Grundgesetz zurückführt, beruht auf Täuschung, insofern alles Unentwickelte, Unvollkommene einander mehr oder minder gleichen muss.

Die Placulæaden, als Protacoelien, zeigen uns besser, wie so manche andere Thiergruppe, die gestaltende Natur an der Arbeit und lieferten auch dem Verfasser den ersten Ansatz zur Vorstellung seiner *physiologischen Morphogenie*.

9. — J. PUZYNA. *Teorya funkcyj analitycznych. (Théorie des fonctions analytiques)*, I vol. p. XVIII — 549, 54 gravures. Léopol 1898.

L'auteur, en se proposant de développer la théorie des fonctions analytiques dans deux volumes, commence par des considérations sur l'Arithmétique. Il traite par conséquent dans la Partie I, (chapitres: 1—3), des nombres irrationnels, des fractions continues, des nombres imaginaires, des séries et des produits infinis dont les éléments sont des nombres con-

stants, et termine ces considérations par la théorie des ensembles infinis. Les découvertes et les définitions de Cauchy, Abel, Dirichlet, Weierstrass, Pringsheim, Strauss relatives à la convergence des formes infinies, et celles de MM. Cantor, Mittag-Leffler, Bendixson, dans le domaine des ensembles font le fondement de ces recherches dont la fécondité sera évidente dans les chapitres suivants.

La Partie II, (chapitres: 4—6), est destinée à exposer systématiquement les propriétés des fonctions rationnelles, soit d'une variable, soit de plusieurs variables. Après avoir démontré le théorème fondamental d'Algèbre sur les points zéro, (racines), d'une fonction entière, il détermine les fonctions d'espèce considérée, par leurs valeurs données et déduit de ces conditions les formules d'interpolation de Lagrange et de Gauss, et la formule de Cauchy pour les fonctions fractionnaires. On trouve la première de ces formules généralisée en supposant que les points x_i , dans lesquels la fonction reçoit les valeurs données, sont simples ou multiples sans différence. Outre la formule d'interpolation analogue à celle de Lagrange, une autre méthode est encore ici exposée pour déterminer une fonction de plusieurs variables. Elle est applicable dans les cas où les coordonnées des points donnés n'annulent pas un certain déterminant contenant ces coordonnées.

La théorie du diviseur commun des fonctions entières fait une grande partie des recherches de ces chapitres; elle est ici développée par divers procédés. Aussi l'irréductibilité d'une équation algébrique, ou d'une fonction qui contient plusieurs variables est ici traitée d'une manière approfondie.

Enfin l'auteur étudie la fonction

$$f(x, m) = a_0 + a_m x_m + a_{2m} x^2 + \dots$$

qui se déduit de la fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

en retenant les termes, dont les exposants sont $\equiv 0 \pmod{m}$. L'expression $f(x, m)$ est dite moyenne arithmétique — mod. m . — de la fonction $f(x)$. En effet nous avons:

$$f(x, m) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} f \left[x \left(\cos \frac{2\pi\mu}{m} + i \sin \frac{2\pi\mu}{m} \right) \right]$$

Ces moyennes — (voir: Rouché, Osgane, ...) jouent un rôle important dans les recherches de Weierstrass, comme M. Pringsheim l'a bien démontré.

La III partie (chapitres 7—8), comprend les fonctions symétriques, les fonctions de plusieurs valeurs et les groupes de substitutions qui appartiennent à ces fonctions. Comme application géométrique de ces recherches l'auteur a traité les révolutions des polyèdres réguliers en finissant par l'exposition des fonctions fondamentales Z , qui sont invariantes dans les groupes des révolutions considérées. La définition de ces fonctions a été faite sans avoir entraîné la théorie systématique des invariants, car les considérations géométriques se sont montrées suffisantes pour approfondir la nature de ces fonctions.

Dans ces chapitres, l'auteur a suivi la voie de MM. Netto et Klein. Mais aussi les découvertes de Kronecker, Borchardt et Rosenheim sur les fonctions symétriques ont été rappelées.

Le problème d'élimination entre deux ou plusieurs équations — (Sylvester, Bézout, Poisson) est traité dans la Partie III, (chapitres: 9—11), ainsi que les questions géométriques qui se rattachent aux points d'intersection de deux courbes algébriques planes, (Euler, Jacobi, Plücker). Le problème général de Bézout est aussi donné ici sous la forme qui découle de l'équivalence des fonctions, cette idée de Kronecker, exposée plus tard aussi par MM Molk et Laurent. Ce mode de représentation des résultants est important, car on en peut déduire la détermination d'une fonction de plusieurs variables, prenant des valeurs données dans les points communs zéro de quelques équations algébriques données.

C'est la formule d'interpolation de Laurent qui appartient sans doute à la théorie des fonctions.

Le cas d'une racine simple commune à deux, ou à plusieurs fonctions, ce cas si important dans les applications diverses, est chaque fois précisément rappelé.

Dans le dernier chapitre de cette partie, l'auteur s'occupe des formes homogènes, et — en particulier — des formes binaires et de leurs invariants et covariants, en terminant par la détermination des invariants irréductibles d'une forme cubique et biquadratique.

Les questions que l'auteur a exposées dans les chapitres précédents ont pour but, soit de préparer le lecteur moins versé dans les problèmes des mathématiques à la lecture classique des écrivains contemporains, soit d'énoncer dès le commencement divers théorèmes plus ou moins élémentaires suivant la façon employée dans les recherches plus avancées.

La Partie V, (chapitres: 12—14) contient les considérations des séries $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{B}(x, y, z, \dots)$, des séries $P(x)$, $P(x, y, z, \dots)$ et de leurs opérations arithmétiques. On trouve ici la définition du cercle et de la circonférence de la convergence absolue. On démontre que la série est uniformément convergente dans son cercle de convergence et qu'elle est régulière à l'intérieur de ce domaine, c'est-à-dire qu'elle possède toutes les propriétés d'une fonction entière rationnelle.

Dans le chapitre qui traite de la sommation des séries, l'auteur fait usage de l'idée des expressions infinies uniformément convergentes et reproduit en premier lieu les théorèmes classiques de Weierstrass, (voir: Functionenlehre). En second lieu, après avoir défini la multiplication et division de deux séries d'une variable, il s'occupe de la série de Newton pour l'appliquer à des recherches de Raabe et Gauss relatives à la convergence des séries $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)$ dans le cas où la limite: $\lim (a_{n+1}/a_n) = 1$.

Enfin par la division l'auteur a été conduit à la considération des séries recourrantes aux recherches de M. Study et à celles de Hoenewronski, relatives à la fonction Aleph.

La Partie VI, (chapitres: 15—17), est consacrée à exposer le prolongement analytique d'une série entière d'une varia-

ble, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du cercle de convergence. La même question est traitée, quant aux séries de plusieurs variables. La circonférence (r) du cercle de convergence fait ici l'objet d'une étude approfondie. On démontre l'existence au moins d'un point singulier sur cette circonférence, et puis, en se servant des résultats obtenus par Weierstrass (Th. d. Fakultäten), on observe de quelle manière la série donnée est convergente dans les points de (r). L'auteur n'oublie pas de donner plusieurs exemples de séries qui possèdent un ensemble condensé de points singuliers sur leurs circonférences de convergence (Weierstrass, Lerch, Fredholm).

Par des prolongements de séries entières sont définies les fonctions analytiques uniformes et multiformes avec leur monogénéité et leur propriété d'être régulières partout, à l'exception des points singuliers. Ces points peuvent former aussi des segments de lignes ou des lignes fermées, et, dans ce dernier cas, on peut obtenir une fonction avec l'espace lacunaire.

Mais, pour former cette dernière espèce de fonctions analytiques, l'auteur a dû considérer la série des fonctions analytiques, uniformément convergente dans plusieurs domaines (A), (B), (C), empiétant ou non l'un sur l'autre. Par cela il est conduit à des expressions analytiques qui peuvent définir dans ces domaines différents des fonctions différentes. (Weierstrass, Poincaré, Tannery J.).

D'autre part, l'auteur envisage les séries recourrantes généralisées formées par M. Andrée, les séries qui peuvent être appliquées à plusieurs fonctions de Weierstrass.

En arrivant à la question des points singuliers essentiels et non essentiels d'une fonction analytique, l'auteur déduit le théorème de Laurent et le démontre par la voie de M. Pringsheim, qui s'appuie sur la moyenne arithmétique d'une fonction régulière dans une couronne circulaire donnée. Cette méthode, la plus simple et la plus naturelle de toutes les méthodes élémentaires qui ont existé jusqu'à ce jour, adoptée par l'auteur, le conduit au développement suivant :

$$G \left(\frac{1}{x-c} \right) + \mathfrak{P}(x-c); \quad (a)$$

G étant une série toujours convergente, (l'argument est $\frac{1}{x-c}$),
ou une fonction entière rationnelle.

De cette remarque découle la notion du point essentiel et non essentiel, (pôle). Lorsqu' une fonction en voisinage du point c ne peut se mettre sous la forme (a), mais lorsqu'elle peut être représentée par une infinité de développements

$$\mathfrak{P}_\alpha \left(\frac{1}{x-c} \right) + \mathfrak{P}'_\alpha(x-c), \alpha=1, 2, 3, \dots \quad (b)$$

(où \mathfrak{P}_α se rapproche asymptotiquement d'une série toujours convergente et \mathfrak{P}'_α cesse d'être convergente), le point c est essentiel et se présente comme un point limite d'un ensemble infini de points singuliers. L'existence de deux espèces de points singuliers permet de diviser toutes les fonctions uniformes en fonctions rationnelles et transcendantes. Les fonctions rationnelles sont celles qui possèdent exclusivement des pôles sur le plan de leur argument, dans les points où elles cessent d'être régulières.

Les considérations analogues dans le domaine de plusieurs variables sont empruntées aux recherches de M. Dautheville.

Dans tous les chapitres de ce volume on trouve beaucoup d'exemples et de remarques qui sont donnés par l'auteur même, ou sont extraits des mémoires et des oeuvres des écrivains cités.

Le second volume qui est sous presse, contiendra : la théorie des fonctions uniformes et des fonctions algébriques, les fonctions rationnelles $R(x, y)$, dont (x, y) est un point de l'équation algébrique $f(x, y)=0$, l'exposition du genre d'une courbe algébrique, les théorèmes de Cauchy, Poincaré et Picard, sur la connexion des surfaces, les recherches de Riemann et d'Abel, le principe de Dirichlet et une courte exposition des fonctions elliptiques et des fonctions automorphes.

Nakładem Akademii Umiejętności
pod redakcją Sekretarza generalnego Stanisława Smolki.

Kraków, 1899. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządkiem J. Filipowskiego.

13 Marca 1899.

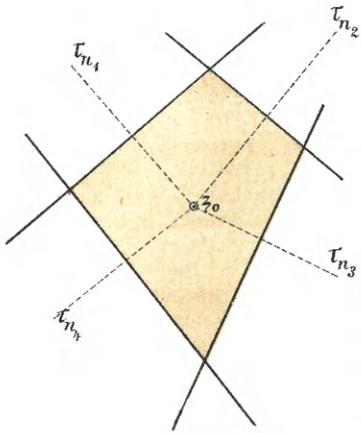


Fig. 1.

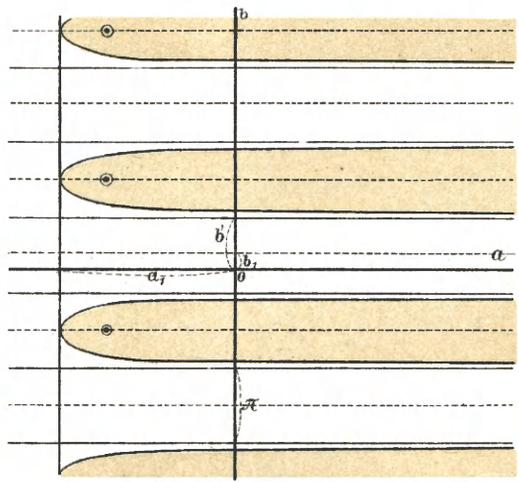


Fig. 2.

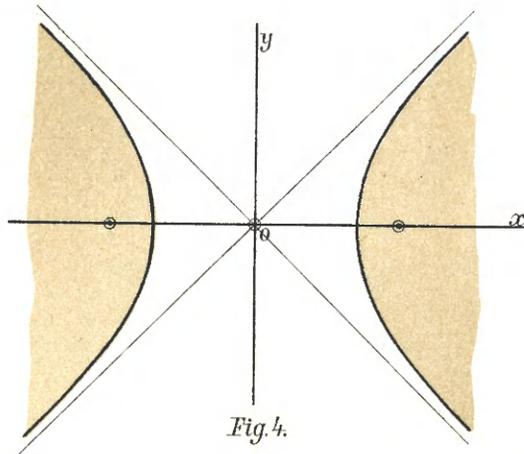


Fig. 4.

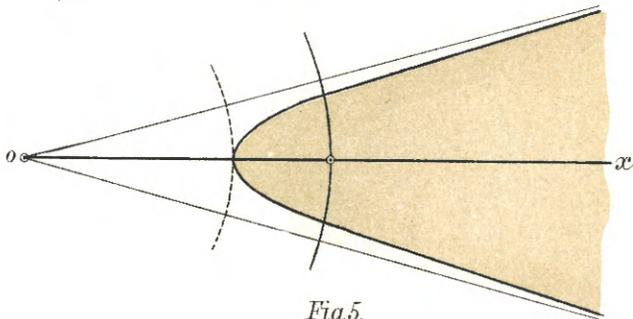


Fig. 5.

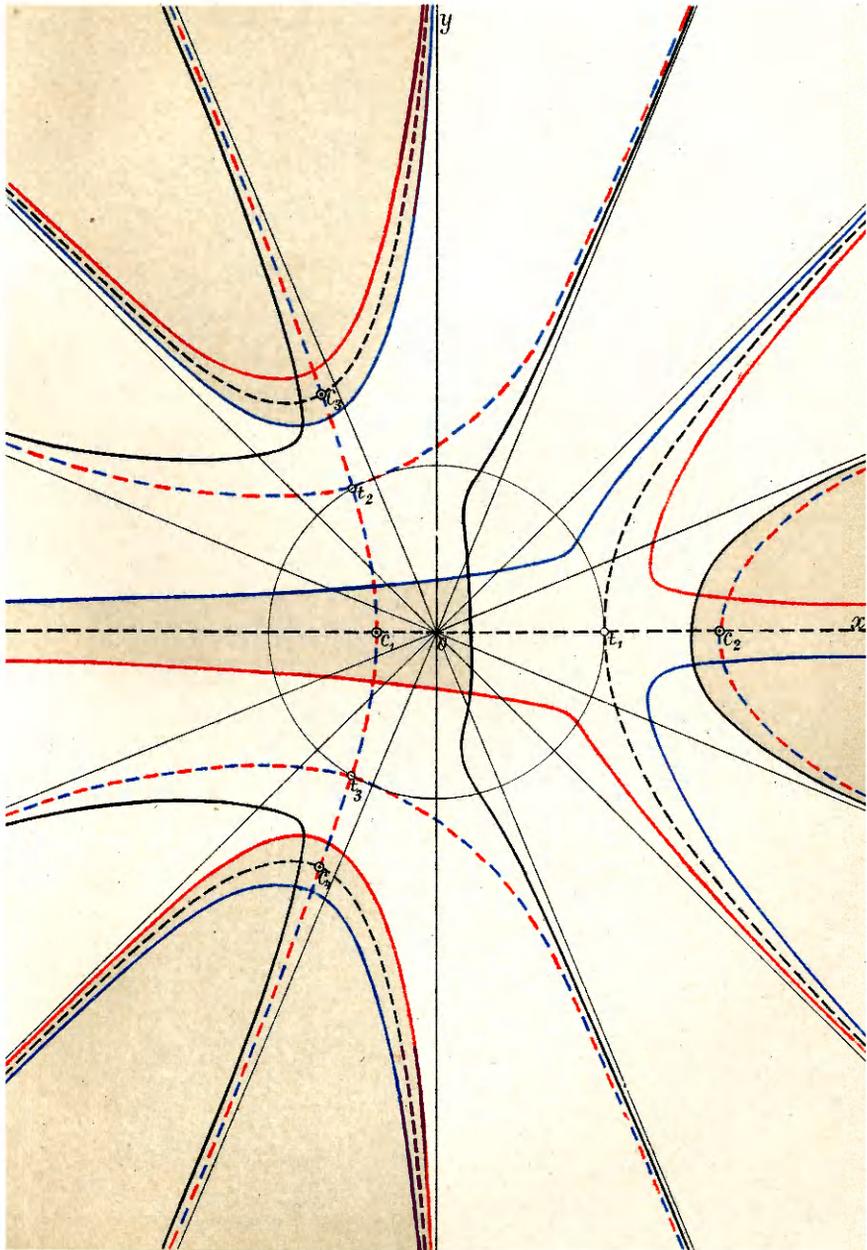


Fig. 3.

PUBLICATIONEN DER AKADEMIE

1873—1898.

Buchhandlung der polnischen Verlagsgesellschaft

in Krakau.

Philologische und historisch-philosophische Classe.

»Pamiętnik Wydziału filolog. i hist.-filozof.« (*Denkschriften der philologischen und historisch-philosophischen Classe*), 4-to, Bd. II—VIII (38 Taf. Bd. I. vergriffen) — 30 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydziału filolog.« (*Sitzungsberichte und Abhandlungen der philologischen Classe*), 8-vo, Bd. II—XXVII (7 T. Bd. I. vergriffen) — 89 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydziału historyczno-filozoficznego.« (*Sitzungsberichte und Abhandlungen der historisch-philosophischen Classe*), 8-vo, Bd. III—XIII, XV—XXXVI (61 Tafeln, Bd. I. II. XIV. vergriffen). — 98 fl.

»Sprawozdania komisji do badania historii sztuki w Polsce.« (*Berichte der kunsthistorischen Commission*), 4-to, 5 Bde u. 1—3 Hefte des VI Bd. (114 Tfl., 713 Holzschn.) — 35 fl. 50 kr.

»Sprawozdania komisji językowej.« (*Berichte der sprachwissenschaftlichen Commission*), 8-vo, 5 Bände. — 13 fl. 50 kr.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« (*Archiv für polnische Literaturgeschichte*), 8-vo, 9 Bände. — 25 fl. 50 kr.

Corpus antiquissimorum poetarum Poloniae latinorum usque ad Ioannem Cochanovium, 8-vo, 3 Bände.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 2 fl. — Vol. III, Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 3 fl. — Vol. IV, Nicolai Hussoviani Carmina, ed. J. Pelczar. 1 fl. 50 kr.

»Biblioteka pisarzy polskich.« (*Bibliothek der polnischen Schriftsteller XVI u. XVII Jh.*) 8-o, 35 Lieferungen. — 21 fl. 40 kr.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, gr. 8-vo, 15 Bände. — 81 fl.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. II, XII et XIV. Cod. epistol. saec. XV ed. A. Sokolowski et J. Szujski; A. Lewicki 16 fl. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 15 fl. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 5 fl. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 10 fl. — Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. 5 fl. — Vol. XIII, Acta capitulorum (1408—1530) ed. B. Ulanowski, 5 fl. — Vol. XV, Rationes curiae Vladislai Jagellonis et Hedvigis, ed. Piekosiński, 5 fl.

Scriptores rerum Polonicarum, 8-vo, 11 Bände. (I—IV, VI—VIII, X, XI, XV, XVI) — 37 fl.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 3 fl. — Vol. II, Chronicon Bernardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 3 fl. — Vol. III, Stephani Medeksa commentarii 1654—1668 ed. Sereżyński: 3 fl. — Vol. VII, X, XIV, Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 7 fl. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokolowski. 2 fl. — Vol. XV, Analecta Romana, ed. J. Korzeniowski 7 fl. — Vol. XVI, Stanislai Temberski Annales 1647—1656, ed. V. Czermak. 3 fl.

Collectanea ex archivo Collegii historici, 8-vo, 8 Bde. — 24 fl.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, gr. 8-vo, 15 Bände. — 78 fl.

Vol. I, Andr. Zebrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wiślicki 1546—1553. 5 fl. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 10 fl. — Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum

exterarum Gallicii) 1674—1683 ed. Waliszewski. 15 fl. — Vol. IV, IX, (pars 1. et 2.) Card. Stanisłai Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 15 fl. — Vol. VI, Acta Regis Ioannis III ad res expeditionis Vindobonensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1. et 2.), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 20 fl. — Vol. X, Lauda conventum particularium terrae Dobriniensis ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 3 fl.

Monumenta Poloniae historica, gr. 8-vo, Bd. III—VI. — 51 fl.

Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno MCCCCLXIX, ed. W. Wisłocki. T. I. 8-vo. — 7 fl. 50 kr.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« (*Alte Rechtsdenkmäler Polens*), 4-to, Bd. II—X. — 36 fl.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 6 fl. — Vol. III, Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 3 fl. — Vol. V, Monumenta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VI, Decreta in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VII Acta expedition. bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clenodiales ed. Ulanowski. 6 fl. — Vol. VIII, Antiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 8 fl. — Vol. IX, Acta iudicii feudalis superioris in castro Golezsz 1405—1546. Acta iudicii criminalis Muszynensis 1647—1765. 3 fl. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ulanowski. 1 fl.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 4 fl.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

»Pamiętnik.« (*Denkschriften*), 4-to. 17 Bände (II—XVIII) 178 Tafeln, Band I vergriffen). — 85 fl.

»Rozprawy i Sprawozdania z posiedzeń.« (*Sitzungsberichte und Abhandlungen*), 8-vo, 33 Bände (241 Tafeln). — 136 fl. 50 kr.

»Sprawozdania komisji fizyograficznej.« (*Berichte der physiographischen Commission*), 8-vo, 29 Bände: III. VI. — XXXIII. Band I. II. IV. V vergriffen. (59 Tafeln). — 117 fl. 25 kr.

»Atlas geologiczny Galicyi.« (*Geologischer Atlas von Galizien*) fol. bisher 7 Hefte, 35 Tafeln. — 29 fl.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« (*Berichte der anthropologischen Commission*), 8-vo, 18 Bände (II—XVIII), Band I vergriffen, 100 Tafeln). — 62 fl. 50 kr.

»Materiały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne.« (*Anthropologisch-archeologische und ethnographische Materialien*), in 8-vo, Bände I—III (25 Tafeln, 10 Karten und 60 Holzschn.). — 10 fl.

Świętek J., »Lud nadrabski, od Gdowa po Bochnią.« (*Ueber die Bevölkerung der an der Raba gelegenen Gegenden*), 8-vo, 1894. — 4 fl. Górski K., »Historia piechoty polskiej« (*Geschichte der polnischen Infanterie*), 8-vo, 1893. — 2 fl. 60 kr. — »Historia jazdy polskiej« (*Geschichte der polnischen Cavallerie*) 8-vo, 1894. — 3 fl. 50 kr. Balzer O., »Genealogia Piastów.« (*Genealogie der Piasten*), in 4-to, 1896. — 10 fl. Finkel L., »Bibliografia historii polskiej.« (*Bibliographie zur Geschichte Polens*), in 8-vo, B. I u. II Hef 1—2, 1891—6. — 7 fl. 80 kr. Dickstein S., »Hoëne Wroński, jego życie i dzieła.« (*Hoëne Wroński, sein Leben und seine Werke*), lex. 8-vo, 1896. — 4 fl. Federowski M., »Lud białoruski.« (*Die Weissruthenen*), in 8-vo, 1897. — 3 fl. 50 kr.

»Rocznik Akademii.« (*Almanach der Akademie*), 1874—1898, 25 Bde (1873 vergriffen) — 15 fl.

»Pamiętnik piętnastoletniej działalności Akademii.« (*Gedenkbuch der Thätigkeit der Akademie 1873—1888*), 8-vo, 1889. — 2 fl.

