MÉCANIQUE CÉLESTE.

EXPOSÉ

DES

MÉTHODES DE WRONSKI

ET

COMPOSANTES DES FORCES PERTURBATRICES

SUIVANT LES AXES MOBILES,

PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

EXTRAIT DU TOME II DES ANNALES DU BUREAU DES LONGITUDES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1881

Opis nr 47495

MÉCANIQUE CÉLESTE.

NOTE

SUR

LES MÉTHODES DE WRONSKI[1],

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Dans la *Réforme des Mathématiques* (t. I, p. 163), Wronski distingue deux systèmes de Mécanique céleste, qu'il appelle *science du désordre* et *science de l'ordre*. Le premier est celui des analystes qui se sont occupés avant lui de la Mécanique céleste; l'autre est celui qu'il propose de substituer à l'*ancien,* c'est-à-dire au système qui continue d'avoir cours dans la science.

Ce géomètre a jugé utile de développer les deux *systèmes,* qu'il caractérise par les équations différentielles auxquelles ils donnent lieu : le nouveau système est représenté par les équations (197), et l'ancien par les équations (198). Il nous informe qu'il a fait l'application de l'un et de l'autre à la théorie de la Lune. Voici comment il s'exprime (p. 166, dernière ligne) :

« Nous avons ainsi employé les deux systèmes pour offrir, d'une part, une immédiate vérification des résultats, par leur *concordance* dans ces deux systèmes, et, de l'autre part, une preuve de l'extrême simplicité de la nou-

(1) Lue au Bureau des Longitudes, dans sa séance du 23 mars 1881. Le Bureau a décidé, dans la même séance, que cette Note et le Mémoire à l'appui seront insérés dans ses *Annales;* ladite Note a été publiée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XCII, séance du 4 avril 1881.

velle et véritable Mécanique céleste, par sa comparaison avec les inextricables complications de la fausse Mécanique céleste que l'on a poursuivie jusqu'à ce jour. »

Un peu plus loin, il ajoute :

« Tout ce que nous pouvons dire ici concernant la fausse théorie de la Science actuelle, c'est que l'orbite de la Lune, qui y résulte des prétendues perturbations causées par le Soleil, n'est nullement identique avec l'orbite variable que découvre la vraie théorie par l'influence téléologique du Soleil. »

Deux faits ressortent de ces citations, l'un établissant l'accord des résultats définitifs des deux systèmes, l'autre faisant ressortir une grande différence dans les moyens d'obtenir ces résultats. Il est clair que l'expression de *concordance,* dont se sert Wronski, s'applique exclusivement aux expressions des coordonnées de la Lune en fonction du temps. L'ancien et le nouveau système seraient donc *également exacts,* et les résultats ne différeraient que par la forme, circonstance qui néanmoins mérite toute l'attention des astronomes; puisque certaine méthode, se rapportant à l'ancien système, exigerait le calcul de deux mille termes, au moins, pour obtenir les trois coordonnées de la Lune à un instant donné. Nous devons exprimer ici le regret que le travail de Wronski, sur la théorie lunaire, soit resté à l'état de manuscrit, et de ne pouvoir opposer, à ce chiffre de deux mille termes, un autre chiffre de beaucoup inférieur et qui conduirait à des résultats bien plus pratiques. Toutefois, Wronski nous informe encore qu'il a fait, en cette circonstance, l'application de ses méthodes d'intégration : or les exemples qu'il a donnés d'autres applications des mêmes méthodes peuvent faire présumer des solutions avantageuses.

Le second point que nous avons à examiner est celui qui concerne la grande différence des orbites dans les deux systèmes, différence qui semblerait tout d'abord inconciliable avec la *concordance* des résultats définitifs. Comme les géomètres de l'ancien système, Wronski fait usage de la méthode de variation des constantes arbitraires ou des éléments de l'orbite, mais il en fait un usage différent. Dans un système de trois équations différentielles du second ordre, on n'a, pour déterminer les variations des six constantes arbitraires, que trois conditions à remplir : celles de satisfaire aux trois équations différentielles du second ordre. Le problème reste donc indéterminé. Les géomètres ont depuis longtemps levé l'indétermination, en s'imposant la condition suivante : ils veulent que, par un choix convenable des constantes arbitraires, non seulement les expressions des coordonnées aient la même forme dans les deux cas de mouvement troublé et de mouvement non troublé, mais qu'il en soit de même à l'égard des dérivées premières des coordonnées ou des composantes des vitesses parallèles aux axes fixes. Ainsi se trouvent déterminées, pour les géomètres, les variations différentielles des six constantes arbitraires. C'est là, assurément, une solution très correcte et très élégante ; mais ne pourrait-on pas satisfaire aux mêmes conditions et d'une manière beaucoup plus simple, en choisissant convenablement les constantes? Tel est le but que s'est proposé Wronski, bien qu'il n'ait pas énoncé lesdites conditions. La préférence devra, ce nous semble, être accordée à celui des systèmes qui se prêtera le mieux aux intégrations à effectuer et qui exigera le moins de travail pour parvenir à un même degré de précision.

Les méthodes de Wronski sont-elles exactes? On pourrait en douter, puisqu'elles n'ont donné lieu à aucune application de la part des astronomes ou des analystes. Il n'est pas nécessaire de rappeler les éloges donnés à ce géomètre par les commissaires de l'Académie des Sciences, lorsqu'ils ont eu à juger la haute valeur de la *loi suprême* des Mathématiques, pour justifier l'intérêt que peuvent présenter les travaux ultérieurs du même auteur.

Nous ne pouvons croire à l'indifférence des astronomes à l'égard des progrès de la Mécanique céleste, et nous nous expliquons fort bien, les ayant éprouvées nous-mêmes, les grandes difficultés qui s'offrent au lecteur le moins défavorablement prévenu contre les idées de Wronski.

Après avoir, à plusieurs reprises, entrepris et abandonné l'étude des méthodes de Wronski, relatives à la Mécanique céleste, nous avons fini, cependant, par nous rendre compte de ce qui peut avoir un véritable intérêt, pour les astronomes-géomètres, dans les travaux publiés par Wronski sur cette matière. L'objet de la présente Note est d'exposer sommairement le résultat de nos recherches.

Les deux méthodes, *ancienne* et *nouvelle*, ont cela de commun : l'auteur, au lieu de considérer les projections des forces perturbatrices sur des axes arbitraires et de directions fixes, s'attache à effectuer les projections sur trois axes mobiles, dont l'un coïncide avec le rayon vecteur, le deuxième situé dans le plan de l'orbite et perpendiculaire au précédent, le troisième perpendiculaire aux deux autres.

L'objet principal du développement de l'*ancienne* méthode est uniquement d'introduire, dans les équations différentielles du mouvement, les trois projections ou composantes des forces perturbatrices que nous venons d'indiquer. Nous n'essayerons pas de faire comprendre comment procède Wronski pour dégager les valeurs des différentielles des éléments de l'orbite : nous avons dû renoncer nous-même à le comprendre. Comme il importait surtout de vérifier l'exactitude des résultats, nous avons appliqué directement la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Voici ce que nous sommes parvenu à élucider à l'égard de l'*ancienne* méthode. Nous avons trouvé, en tenant un compte exact de la différence des notations, que les expressions différentielles du demi-grand axe, de l'excentricité et de la longitude du périhélie (1) déduites par Wronski s'accordent exactement avec les expressions en usage. Il n'est pas question de la longitude moyenne de l'époque, attendu que la longitude vraie, qu'elle sert à déterminer, est exprimée par une intégrale basée sur le principe des aires, que Wronski range avec les autres intégrales à traiter suivant ses méthodes.

Réforme p. CXXXVII

Quant aux éléments qui servent à déterminer la situation du plan variable de l'orbite, nous en trouvons, sous la marque (70) des *Prolégomènes du Messianisme,* des expressions différentielles où figure la moyenne arithmétique des vitesses de l'astre au périhélie et à l'aphélie. Au sujet de ces équations, Wronski fait cependant cette remarque (p. 1~~37~~) : les expressions (70) « sont rigoureusement exactes, pourvu que, lorsqu'il s'agit de cette exactitude rigoureuse, on y substitue la vitesse vraie v à la place de la vitesse moyenne w... ». Or je me suis assuré que les formules de Wronski, même corrigées selon ses indications, sont inexactes. Suivant nous, il faudrait, pour en corriger l'erreur, multiplier les éléments différentiels de Wronski par le facteur

$$\frac{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{1+e\cos\varphi},$$

(1) Les formules de Wronski contiennent la longitude de l'aphélie, au lieu de celle du périhélie.

où φ désigne l'anomalie vraie et e l'excentricité. Ce facteur diffère très peu de l'unité, dans le cas des faibles excentricités, et il affecte la composante des forces perturbatrices suivant la normale au plan de l'orbite, en sorte que l'erreur commise, dans le cas de la théorie lunaire, peut se réduire à fort peu de chose; mais il y a là une erreur théorique dont l'origine nous paraît être dans la trop facile tendance de Wronski à s'appuyer sur des considérations philosophiques quand cela n'est nullement nécessaire. Ces considérations peuvent être fort utiles pour asseoir solidement les bases d'une science qui n'est pas si absolument rationnelle qu'on aime à se le figurer; mais elles ne peuvent offrir ultérieurement d'autres avantages que de guider quelquefois dans la recherche d'une solution difficile, et sous la condition de ne tolérer aucune dérogation aux principes admis. Comment donc Wronski a-t-il pu commettre l'erreur que nous signalons? Voici comment procède notre auteur. On lit (p. 291 des *Prolégomènes du Messianisme*) :

« D'abord, pour établir le *Canon astronomique*, il suffit de considérer l'angle indéfiniment petit $d\rho$ de la rotation qu'éprouve constamment, dans le temps indéfiniment petit dx (au lieu de dt), le plan de l'orbite sur le rayon vecteur r, par suite de l'influence principale de la susdite force perturbatrice, dont l'action est perpendiculaire à ce plan... Or cet angle de rotation est... (suit la valeur de $d\rho$), et c'est là le principe ou la loi qui régit le Canon astronomique dont il s'agit. »

On remarquera que Wronski ne démontre pas sa prétendue loi : il se borne à donner la formule qui la représente. C'est là le point de départ de l'erreur que nous signalons et que l'on corrigerait par l'application du facteur indiqué plus haut. Mais, nous le répétons, cette erreur ne doit avoir qu'une faible influence dans la théorie de la Lune. Ajoutons que les formules qui règlent la situation de l'orbite dans l'ancien et le nouveau système sont identiques.

Passons actuellement à l'examen de la *nouvelle* méthode. Ici, comme dans l'autre, Wronski fait usage des composantes des forces perturbatrices suivant les trois axes mobiles. Pour établir les équations différentielles des trois éléments du mouvement, dans le plan de l'orbite, qu'il suffit de considérer, nous ne pouvons, par le motif déjà énoncé, exposer les démonstrations de Wronski : nous nous bornerons à indiquer les deux points qui nous semblent caractériser la *nouvelle* méthode. Le premier est le résultat d'une simple remarque : l'action solaire, dirigée suivant le rayon vecteur, s'ajoute algébriquement avec la composante des forces perturbatrices suivant ce rayon; au lieu de rejeter cette composante, pour la ranger avec la seconde dans les termes de l'ordre des perturbations, Wronski la maintient jointe à l'action solaire. Le second point est relatif à la considération de la moyenne arithmétique w des vitesses aux deux extrémités du grand axe de l'orbite. Le produit de cette vitesse w et du demi-paramètre p est égal à la constante des aires. Telles sont p et w, les constantes variables que l'auteur de la nouvelle méthode substitue au demi-grand axe et à la constante des aires. Cela est évidemment permis.

Partant donc de ces deux données, nous avons formé l'expression de la dérivée seconde du rayon vecteur par rapport au temps, et nous en avons déduit l'expression rigoureusement exacte de la dérivée première, puis l'équation différentielle également exacte, de l'orbite, en coordonnées polaires. Admettant pour solution l'équation ordinaire de cette orbite, sous la condition d'y considérer les constantes comme variables, nous en avons déduit une équation de condition entre les variations du demi-paramètre p, de l'excentricité e et de la longitude ϖ du périhélie.

Cette condition étant supposée satisfaite, nous vérifions que le rayon vecteur et la longitude, ainsi que leurs dérivées premières, conservent la même forme, en fonction des éléments, que dans le mouvement elliptique.

Une seconde équation entre les constantes est fournie par leur relation avec l'excentricité. Ces deux équations de condition permettent d'exprimer les différentielles de l'excentricité et de la longitude du périhélie, en fonction des différentielles de p et w; celles-ci s'expriment d'ailleurs au moyen des composantes des forces perturbatrices suivant les axes situés dans le plan de l'orbite, en sorte qu'il ne reste plus rien d'arbitraire : les différentielles des trois constantes p, e, ϖ se trouvent ainsi entièrement déterminées.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Wronski, et constaté leur parfaite conformité. Comme dans l'autre méthode, notre géomètre évite d'introduire la variation de la longitude moyenne de l'époque. Enfin, les éléments qui fixent la position du plan de l'orbite se déterminent par les mêmes formules que dans l'*ancienne* méthode.

Il suffit d'un simple coup d'œil pour constater la simplicité remarquable des expressions différentielles que fournit la nouvelle méthode comparée aux anciennes.

Ici se bornent nos investigations. Elles établissent que, sauf une minime erreur facile à corriger, les formules de Wronski sont parfaitement exactes. Nous serions heureux que cette constatation pût déterminer quelque astronome-géomètre à poursuivre l'application des méthodes de Wronski à la théorie de la Lune. On y trouverait sans doute la solution des difficultés qui ont empêché les tentatives de Delaunay et de ses prédécesseurs d'aboutir à un résultat complet, sous le double point de vue théorique et pratique.

A ceux qui voudraient entreprendre un pareil travail, nous donnerions le conseil de consulter, s'il est possible, les manuscrits laissés par Wronski (1). A en juger par les travaux qu'il a publiés, on peut être certain de trouver là une mine précieuse de développements analytiques, très correctement exécutés. On profiterait ainsi de l'expérience acquise par l'auteur de la nouvelle méthode, et l'on se trouverait en présence de calculs faciles à vérifier et à compléter, si l'auteur n'a pas entièrement achevé son travail.

(1) L'insertion de la présente Note aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* a été l'objet d'un article très sympathique de la part du rédacteur du journal *Wedrowiec* (le *Piéton*), qui se publie à Varsovie. L'auteur y fait connaître que la Société polonaise l'*Atheneum* se propose de provoquer la publication des manuscrits laissés par Wronski et qui sont la propriété de l'héritier du comte Dzialynski.

Nous ne pouvons que faire des vœux pour qu'il soit procédé à cette publication dans le plus bref délai possible; nous estimons que les amis de la vérité et du progrès général des Sciences joindront leurs vœux aux nôtres. On saurait enfin, selon l'expression de l'auteur de l'article cité plus haut, « si Wronski n'a été qu'un grand charlatan, ou s'il était réellement un homme de génie ». (Y. V.)

AVERTISSEMENT.

La Note qui précède est la conclusion d'un travail de recherches concernant la substitution des composantes de la force perturbatrice suivant les axes mobiles avec le plan de l'orbite des corps célestes, aux composantes de la même force suivant les axes fixes.

Cette substitution a été mise en pratique par Wronski; mais l'obscurité dont ce géomètre a entouré l'exposé de ses méthodes n'ayant pas permis de le suivre, il fallait s'engager dans une voie conforme aux principes, universellement admis, de la Mécanique céleste.

Tel est l'objet des recherches que nous avons entreprises et que nous soumettons aujourd'hui à l'attention des astronomes. Ne pouvant prévoir, au début, quelles en seraient les conséquences, nous avons poursuivi ces recherches, sans nous astreindre à suivre un plan bien défini, mais avec la pensée d'utiliser les résultats successivement acquis, dans la recherche de résultats nouveaux.

Ces quelques mots d'explication justifieront la forme sous laquelle nous présentons notre travail.

Il est évident que nous aurions pu, après l'avoir terminé, en reprendre la rédaction, en vue des conclusions qui s'en dégagent; mais, outre l'inconvénient de supprimer ainsi la véritable filiation des idées, il y aurait eu celui de retarder une publication dont l'urgence ne manquera pas de frapper les astronomes qui sont aujourd'hui arrêtés par l'insuffisance des anciennes méthodes, lorsqu'ils ont à s'occuper du mouvement des nombreuses comètes et petites planètes dont les excentricités dépassent celle de la planète Mercure.

On nous permettra donc de livrer notre travail à la publicité sans en modifier la forme primitive, et de nous attribuer la priorité d'une démonstration intelligible des expressions différentielles sur lesquelles reposent les méthodes de Wronski concernant la Mécanique céleste.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

NOUVELLE FORME

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU

MOUVEMENT DES PLANÈTES ET DES COMÈTES,

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Le présent Mémoire a pour objet de mettre en évidence le mode d'influence des forces perturbatrices, dans la variation des éléments des orbites : la forme que nous donnons aux équations différentielles est appropriée à l'emploi de méthodes d'intégration qu'il sera sans doute utile d'essayer, dans les cas où les méthodes en usage font défaut. Or ces cas sont très nombreux : la plupart des nouvelles petites planètes et *toutes* les comètes ont des orbites dont les excentricités excèdent les limites d'application des méthodes usuelles. Chacun sait d'ailleurs que la théorie de la Lune laisse beaucoup à désirer, et que Le Verrier a rencontré, dans celles de Jupiter et Saturne, des difficultés dont la solution analytique n'a pu acquérir le degré de précision habituel à ce grand astronome.

Les géomètres posent les équations du mouvement, en projetant, sur des axes fixes, les forces données et les accélérations. Par d'ingénieuses transformations analytiques, ils passent, des mouvements projetés sur les axes coordonnés, aux mouvements dans l'orbite elle-même ; et les résultats qu'ils obtiennent sont très simples et faciles à interpréter, lorsque l'astre considéré est soumis à la seule action solaire, les composantes des vitesses et des forces suivant les axes rectangulaires ayant disparu. Mais le problème se complique extraordinairement, dès que l'on introduit les forces perturbatrices : et il importe de remarquer que, si l'on s'affranchit encore de la considération des composantes de la vitesse suivant les axes fixes, en substituant à la considération des composantes des forces perturbatrices suivant ces axes celle des dérivées de la fonction perturbatrice par rapport aux éléments, on ne forme pas les expressions de la variation des éléments en fonction des forces perturbatrices elles-mêmes. Il en est autrement, si l'on substitue aux composantes des forces perturbatrices suivant les axes fixes, les composantes des mêmes forces suivant trois droites rectangulaires, prises : deux dans le plan de l'aire élémentaire décrite dans le temps infiniment petit dt, parallèlement et perpendiculairement au rayon vecteur, et la troisième normalement à ce plan.

Cette méthode a été signalée par Wronski, en 1842, dans les *Prolégomènes du Messianisme* et reproduite avec quelques développements, en 1847, par le même géomètre, dans son Ouvrage intitulé *Messianisme* ou *Réforme absolue du savoir humain*.

L'idée peut n'être pas nouvelle ; mais la forme l'est assurément, en ce que celle adoptée par Wronski ne se rattache pas directement aux principes les mieux établis de la Mécanique, mais à des conceptions philosophiques, sur le rôle des forces, qui sont inintelligibles pour les mécaniciens de notre époque.

Si la forme offre de l'intérêt, le fond doit être établi d'une manière inattaquable : c'est ce que nous nous proposons de faire en ce moment.

Parmi les divers procédés qui permettent d'introduire les composantes des forces suivant les axes mobiles que nous venons de désigner, nous n'en apercevons pas de plus simple, ni de plus direct, que l'emploi du théorème de Coriolis, concernant les forces apparentes dans les mouvements relatifs. Nous regrettons seulement que cet auteur, préoccupé de la signification des forces apparentes, n'ait pas effectué le développement complet des termes auxquels elles donnent lieu.

Cela nous met dans la nécessité de donner une démonstration directe des formules que nous aurons à employer.

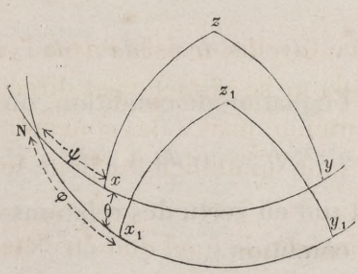
Soient x, y, z les coordonnées d'un point matériel m, rapportées à un système d'axes rectangulaires fixes; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point, rapportées à un système rectangulaire d'axes mobiles, ayant la même origine fixe que l'autre système : nous donnons, dans le Tableau suivant, l'indication des lettres par lesquelles on représente ordinairement les cosinus des angles compris entre les directions des axes de l'un des systèmes et celles des axes de l'autre système.

(1)

Axes	x	y	z
x_1	a	a'	a''
y_1	b	b'	b''
z_1	c	c'	c''

La *fig.* 1 établit la relation de position du plan des x_1y_1 par rapport au

Fig. 1.



plan des xy, et celle des axes x et x_1 par rapport à l'intersection N de ces deux plans. La première est définie par l'angle θ des deux plans, les autres par les distances angulaires ψ et φ de x et de x_1 au nœud N, le sens positif de ces trois angles étant celui qu'indique la figure. En admettant ces notations, nous voulons utiliser les formules connues des mouvements de rotation : pour adapter finalement nos résultats aux usages des astronomes, dans la théorie du mouvement de translation des corps célestes, nous n'aurons besoin que d'y changer les signes des angles θ et ψ, en remplaçant en même temps ces lettres par d'autres, ce qui évitera toute confusion.

Le mouvement angulaire des axes mobiles étant entièrement arbitraire, nous assujettirons l'axe des x_1 à passer constamment par le point m. Nous voulons en outre que le mouvement effectif de ce point m ait lieu, à chaque instant, dans le plan des $x_1 y_1$. Exprimons analytiquement cette condition : l'arc élémentaire ds étant situé dans le plan des $x_1 y_1$, sa direction est perpendiculaire à l'axe z_1 : on a donc la condition

$$\cos(ds, z_1) = 0;$$

si l'on observe que les cosinus de l'angle de ds avec les trois axes fixes sont respectivement $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et que (1) les cosinus des angles de z_1 avec les mêmes axes sont c, c', c'', l'équation précédente donne

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0.$$

Désignant le rayon vecteur par r, on aura suivant (1), attendu que la direction de x_1 est celle de r,

$$(2) \qquad x = ar, \quad y = a'r, \quad z = a''r;$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad dx = a\,dr + r\,da, \quad dy = a'\,dr + r\,da', \quad dz = a''\,dr + r\,da'':$$

mettant ces valeurs dans l'équation de condition, on aura

$$(ac + a'c' + a''c'')\,dr + r(c\,da + c'\,da' + c''\,da'') = 0;$$

or, le coefficient de dr est nul en vertu des relations qui lient les neuf cosinus : nous avons donc la condition

$$(4) \qquad c\,da + c'\,da' + c''\,da'' = 0.$$

On trouvera (*Mécanique* de Poisson, 2e édition, t. II, p. 123) que la valeur du premier membre de cette équation est $-q\,dt$, q désignant la composante de la vitesse de rotation du système d'axes mobiles autour de l'axe des y_1. Notre équation de condition se réduit ainsi à

$$(5) \qquad q = 0.$$

Nous allons actuellement écrire les équations du mouvement d'un corps céleste en y introduisant directement, à la place des composantes des forces suivant les axes fixes, les sommes $\overline{X}_1, Y_1, Z_1$ des projections des composantes suivant les axes mobiles. En convenant que ces composantes se rapportent à l'unité de masse, nous aurons les trois équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\overline{X}_1 + b\,Y_1 + c\,Z_1,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a'\,\overline{X}_1 + b'\,Y_1 + c'\,Z_1,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a''\,\overline{X}_1 + b''\,Y_1 + c''\,Z_1.$$

Multiplions ces équations par a, a', a'' et ajoutons, nous obtiendrons, en vertu des relations entre les cosinus, la première des équations suivantes; opérant de même au moyen des autres cosinus, b, b', b'', c, c', c'', il viendra

$$a\,\frac{d^2x}{dt^2} + a'\,\frac{d^2y}{dt^2} + a''\,\frac{d^2z}{dt^2} = \overline{X}_1,$$

$$b\,\frac{d^2x}{dt^2} + b'\,\frac{d^2y}{dt^2} + b''\,\frac{d^2z}{dt^2} = Y_1,$$

$$c\,\frac{d^2x}{dt^2} + c'\,\frac{d^2y}{dt^2} + c''\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z_1.$$

Or nous déduisons des équations (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\frac{d^2r}{dt^2} + 2\,\frac{da}{dt}\,\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d^2a}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a'\,\frac{d^2r}{dt^2} + 2\,\frac{da'}{dt}\,\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d^2a'}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a''\,\frac{d^2r}{dt^2} + 2\,\frac{da''}{dt}\,\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d^2a''}{dt^2}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et observant que

$$(6)\qquad a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0,$$

on aura

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} + r\left(a\,\frac{d^2a}{dt^2} + a'\,\frac{d^2a'}{dt^2} + a''\,\frac{d^2a''}{dt^2}\right) = \overline{X}_1,\\ 2\,\frac{dr}{dt}\left(b\,\frac{da}{dt} + b'\,\frac{da'}{dt} + b''\,\frac{da''}{dt}\right) &+ r\left(b\,\frac{d^2a}{dt^2} + b'\,\frac{d^2a'}{dt^2} + b''\,\frac{d^2a''}{dt^2}\right) = Y_1,\\ 2\,\frac{dr}{dt}\left(c\,\frac{da}{dt} + c'\,\frac{da'}{dt} + c''\,\frac{da''}{dt}\right) &+ r\left(c\,\frac{d^2a}{dt^2} + c'\,\frac{d^2a'}{dt^2} + c''\,\frac{d^2a''}{dt^2}\right) = Z_1.\end{aligned}\right.$$

Il nous reste à exprimer les ( ) qui figurent ici, en fonction des composantes $\bar{p}$, q, $\bar{r}$ de la vitesse de rotation (nous surmontons les lettres r et p d'un trait, pour éviter toute confusion avec le rayon vecteur r et avec le demi-paramètre p). En premier lieu, l'on déduit de (6)

$$a\,d^2a + a'\,d^2a' + a''\,d^2a'' = -(da^2 + da'^2 + da''^2);$$

or les formules du mouvement de rotation (p. 135 du même Volume de Poisson) donnent aisément

$$da^2 + da'^2 + da''^2 = (\bar{r}^2 + q^2)\,dt^2,$$

résultat qui se réduit ici à $\bar{r}^2\,dt^2$, à cause de (5) : la première de nos équations (7) devient en conséquence

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \bar{r}^2 r = \overline{X}_1. \tag{8}$$

D'un autre côté, les mêmes formules de Poisson donnent, à cause de $q = 0$,

$$\begin{aligned} b\,da + b'\,da' + b''\,da'' &= \bar{r}\,dt,\\ c\,da + c'\,da' + c''\,da'' &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit, par la différentiation,

$$\begin{aligned} b\,d^2a + b'\,d^2a' + b''\,d^2a'' &= -(da\,db + da'\,db' + da''\,db'') + d\bar{r}\,dt,\\ c\,d^2a + c'\,d^2a' + c''\,d^2a'' &= -(da\,dc + da'\,dc' + da''\,dc''); \end{aligned}$$

or les équations (8) de Poisson (même page) donnent

$$\begin{aligned} da\,db + da'\,db' + da''\,db'' &= -\bar{p}q\,dt^2,\\ da\,dc + da'\,dc' + da''\,dc'' &= -\bar{r}\bar{p}\,dt^2. \end{aligned}$$

Au moyen de ces relations, et à cause de $q = 0$, nos deuxième et troisième équations (7) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} 2\bar{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\bar{r}}{dt} &= Y_1,\\ r\bar{r}\bar{p} &= Z_1. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Rappelons actuellement les relations qui lient les composantes de la vitesse de rotation avec les variations des angles θ, φ, ψ : ces relations [équation (7) de Poisson, p. 134] deviennent ici, à cause de $q = 0$,

$$\bar{p} = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$0 = \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$\bar{r} = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

La combinaison des deux premières donne

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\bar{p}\cos\varphi, \\ \sin\theta \frac{d\psi}{dt} &= +\bar{p}\sin\varphi; \end{aligned} \right.$$

quant à la troisième, observant que $\bar{r}$ est la vitesse de rotation autour de l'axe des z_1 perpendiculaire au plan de l'aire élémentaire décrite par le rayon vecteur dans l'instant dt, cette vitesse $\bar{r}$ est la vitesse angulaire du rayon vecteur lui-même. Donc, si nous désignons par $d\Phi$ l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs, nous pourrons écrire

$$\bar{r} = \frac{d\Phi}{dt},$$

et nous aurons

$$(11) \qquad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Nous allons remplacer $\bar{r}$ par $\frac{d\Phi}{dt}$ dans nos équations (8) et (9) et distinguer, dans la composante $\overline{X}_1$, les forces provenant de l'action du Soleil et les forces perturbatrices qui proviennent de l'action des planètes : la première de ces forces, agissant précisément dans la direction opposée au rayon vecteur, sera $-f\frac{\mu}{r^2}$, en désignant par f le coefficient de l'attraction universelle et faisant

$$(12) \qquad \mu = M + m,$$

somme des masses du Soleil et de la planète troublée; quant aux autres forces, nous en désignerons par X_1 la somme des composantes suivant r ou x_1. L'action du Soleil étant perpendiculaire aux axes y_1 et z_1 ne donne pas de composantes suivant ces axes : les trois lettres X_1, Y_1, Z_1 désigneront dès lors uniquement les composantes des forces perturbatrices. En conséquence, nous aurons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\Phi^2}{dt^2} = -\frac{f\mu}{r^2} + X_1,\\ &2\frac{dr}{dt}\frac{d\Phi}{dt} + r\frac{d^2\Phi}{dt^2} = Y_1,\\ &\bar{p}r\frac{d\Phi}{dt} = Z_1.\end{aligned}\right.$$

Si nous multiplions la deuxième de ces équations par r, son premier membre deviendra

$$\frac{d.r^2}{dt}\frac{d\Phi}{dt} + r^2\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d.r^2\dfrac{d\Phi}{dt}}{dt},$$

et l'on aura

$$d.r^2\frac{d\Phi}{dt} = Y_1 r\,dt.$$

Soit

$$(14)\quad k = \int Y_1 r\,dt,$$

nous aurons, en intégrant l'équation précédente,

$$(15)\quad r^2\frac{d\Phi}{dt} = k;$$

c'est l'équation des aires.

Portant dans la première et la troisième des équations (13) la valeur de $\frac{d\Phi}{dt}$ qu'on déduit de la précédente, et transposant, il viendra

$$(16)\quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{f\mu}{r^2} + \frac{k^2}{r^3} + X_1,$$

$$(17)\quad \bar{p} = \frac{Z_1 r}{k}.$$

Au moyen de cette dernière, les équations (10), qui règlent le mouvement

mouvement du plan de l'orbite, seront

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{Z_1 r}{k}\cos\varphi, \\[2ex] \sin\theta\,\dfrac{d\psi}{dt} = +\dfrac{Z_1 r}{k}\sin\varphi. \end{cases}$$

Les équations (14), (15), (16) et (18), jointes à (11), sont celles qu'il reste à résoudre.

L'équation (14) nous montre que les variations de k, ou du double de l'aire décrite par le rayon vecteur par unité de temps, sont entièrement dues à la composante Y_1 des forces perturbatrices. Si l'on observe que la variation de k ne produit, dans les expressions (18), que des variations du second ordre, on reconnaîtra que les changements de l'inclinaison et de la longitude du nœud sont principalement dus à l'action de la composante Z_1 des forces perturbatrices suivant la normale au plan de l'orbite.

L'emploi ultérieur de cette composante nous conduira à faire usage des valeurs des deux cosinus b' et b en fonction des angles φ, θ et ψ. Pour ne point avoir à y revenir, nous reproduirons ici ces valeurs, que l'on trouve dans la *Mécanique* de Poisson (t. II, p. 64) :

$$(19)\qquad b' = \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,$$

$$(20)\qquad b = \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi.$$

Intégration de l'équation (16), *en négligeant les forces perturbatrices, c'est-à-dire en y supposant k constant et négligeant* X_1.

Bien que cette intégrale soit très connue, il ne sera pas sans intérêt de l'effectuer; nous reconnaîtrons plus clairement l'influence des composantes des forces perturbatrices sur les éléments que nous avons à déterminer.

Multiplions par dr l'équation (16), réduite comme il vient d'être dit, et intégrons; nous aurons, en désignant la constante par $-\frac{1}{2}U$,

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{f\mu}{r} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2} - \frac{1}{2}U,$$

ou

$$(21)\qquad \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2f\mu}{r} - \frac{k^2}{r^2} - U.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que l'équation (15) donne

$$(22)\qquad \frac{r^2\,d\Phi^2}{dt^2} = \frac{k^2}{r^2};$$

si donc nous désignons par ds l'élément de l'orbite décrit dans le temps dt, nous aurons, en ajoutant cette équation et la précédente,

$$(23)\qquad \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2f\mu}{r} - \mathrm{U},$$

relation très simple entre le carré de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, le rayon vecteur r et la constante U, relation sur laquelle nous reviendrons.

Au lieu d'intégrer immédiatement l'équation (21), il sera plus simple d'obtenir d'abord l'équation polaire de l'orbite; ce qui se fera en éliminant dt^2 entre (21) et (22). Divisant donc ces deux équations membre à membre, il viendra

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\Phi^2} = \frac{2f\mu}{k^2}r - 1 - \frac{\mathrm{U}}{k^2}r^2;$$

or, si l'on fait

$$(24)\qquad r = \frac{k}{\rho},$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

notre équation deviendra

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{d\Phi^2} = \frac{2f\mu}{k}\frac{1}{\rho} - 1 - \frac{\mathrm{U}}{\rho^2},$$

ou

$$(25)\qquad \frac{d\rho^2}{d\Phi^2} = \frac{f^2\mu^2}{k^2} - \mathrm{U} - \left(\rho - \frac{f\mu}{k}\right)^2.$$

On intégrera cette équation en faisant

$$(26)\qquad \cos\zeta = \frac{\rho - \frac{f\mu}{k}}{\sqrt{\frac{f^2\mu^2}{k^2} - \mathrm{U}}};\quad \text{d'où}\quad -\sin\zeta\frac{d\zeta}{d\Phi} = \frac{d\rho}{d\Phi}\frac{1}{\sqrt{\frac{f^2\mu^2}{k^2} - \mathrm{U}}}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente donne, suppression faite des facteurs communs,

$$\frac{d\zeta^2}{d\Phi^2} = 1,$$

d'où

$$\zeta = \pm(\Phi - \varpi),$$

en désignant par ϖ la constante d'intégration. Mettant cette valeur dans l'équation (26), on en déduit

$$\rho = \frac{f\mu}{k} + \sqrt{\frac{f^2\mu^2}{k^2} - \mathrm{U}\cos(\Phi - \varpi)}$$

puis, en vertu de (24),

$$r = \frac{\frac{k^2}{f\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{f^2\mu^2}\mathrm{U}\cos(\Phi - \varpi)}},$$

équation qui est celle d'une section conique.

Si l'on désigne par a le demi-grand axe et par e l'excentricité, on aura

$$a(1 - e^2) = \frac{k^2}{f\mu}, \qquad e^2 = 1 - \frac{k^2}{f^2\mu^2}\mathrm{U}; \tag{27}$$

d'où

$$a = \frac{f\mu}{\mathrm{U}}, \tag{28}$$

et l'équation polaire de l'orbite prendra la forme ordinaire

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}. \tag{29}$$

La valeur de e^2 montre que U sera positif dans le cas de l'ellipse, nul dans le cas de la parabole, et négatif dans celui de l'hyperbole.

Si l'on met dans (23) la valeur de U que fournit l'équation (28), on aura l'équation des forces vives

$$\frac{ds^2}{dt^2} = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{30}$$

Revenons à notre objet, l'intégration de l'équation (21); multiplions immédiatement l'équation (21) par $\frac{\mathrm{U}r^2}{f^2\mu^2}$, nous aurons

$$(31)\qquad \frac{\mathrm{U}r^2}{f^2\mu^2}\,\frac{dr^2}{dt^2} = 1 - \frac{\mathrm{U}k^2}{f^2\mu^2} - \left(1 - \frac{\mathrm{U}r}{f\mu}\right)^2$$

ou, en ayant égard aux relations (27) et (28),

$$\frac{r^2}{af\mu}\,\frac{dr^2}{dt^2} = e^2 - \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2.$$

Posons

$$(32)\qquad 1 - \frac{r}{a} = e\cos u,$$

d'où

$$(33)\qquad \frac{r}{a} = 1 - e\cos u, \quad \text{et} \quad \frac{1}{a}\,\frac{dr}{dt} = e\sin u\,\frac{du}{dt};$$

nous aurons, en substituant les valeurs de r et $\frac{dr}{dt}$ que fournissent ces relations dans l'équation précédente, suppression faite des facteurs communs,

$$\frac{a^3}{f\mu}(1 - e\cos u)^2\,\frac{du^2}{dt^2} = 1.$$

Faisons, suivant l'usage,

$$(34)\qquad a^3 n^2 = f\mu$$

et portons cette valeur dans l'équation précédente; on en tirera, après avoir pris la racine carrée des deux membres,

$$(35)\qquad n\,dt = (1 - e\cos u)\,du:$$

si l'on n'a pas mis de double signe, c'est afin que l'auxiliaire u et le temps t croissent simultanément. Intégrant et désignant par τ la constante, il vient

$$(36)\qquad n(t - \tau) = u - e\sin u.$$

Pour éviter de certaines difficultés dans le mouvement troublé, on substitue à cette formule la suivante

$$(37)\qquad \int n\,dt + \varepsilon - \varpi = u - e\sin u,$$

où la somme des deux premiers termes désigne la longitude moyenne à l'époque t. Par la première formule (33), on voit que le minimum de r a lieu quand $\cos u$ est égal à l'unité ou $\sin u = 0$: il s'ensuit que la constante τ désigne l'époque du passage au périhélie, ce qui justifie l'introduction de la longitude ϖ du périhélie dans le premier membre de (37).

De la combinaison des relations (29) et (33) on déduit un grand nombre de formules, dont nous rapporterons ici celles que nous aurons à utiliser, savoir :

$$\cos(\Phi - \varpi) = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}, \qquad \cos u = \frac{e + \cos(\Phi - \varpi)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}, \tag{38}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{r}\sin\frac{1}{2}(\Phi - \varpi) &= \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}u, \\ \sqrt{r}\cos\frac{1}{2}(\Phi - \varpi) &= \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}u, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} r\sin(\Phi - \varpi) &= a\sqrt{1-e^2}\sin u, \\ r\cos(\Phi - \varpi) &= a(\cos u - e), \end{aligned}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{1-e^2}\sin(\Phi - \varpi)\cos u - \cos(\Phi - \varpi)\sin u \qquad\qquad &= e\sin u, \\ \sqrt{1-e^2}\sin(\Phi - \varpi)\sin u + \cos(\Phi - \varpi)(\cos u - e) &= 1 - e\cos u, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{1-e^2}\cos(\Phi - \varpi)\sin u - \sin(\Phi - \varpi)(\cos u - e) &= 0, \\ \sqrt{1-e^2}\cos(\Phi - \varpi)\cos u + \sin(\Phi - \varpi)\sin u \qquad\qquad &= \sqrt{1-e^2}, \end{aligned}\right. \tag{42}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin(\Phi - \varpi)\sin u + \cos(\Phi - \varpi) &= \cos u, \\ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos(\Phi - \varpi)\sin u - \sin(\Phi - \varpi) &= -\frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Nous ne poursuivrons pas davantage le développement de formules qui sont suffisamment connues ; nous allons aborder la formation des expressions différentielles des éléments de l'orbite.

VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE [1].

Nous ferons usage de la théorie de la variation des constantes arbitraires. Rappelons, en quelques mots, en quoi elle consiste. On considère les expres-

---

[1] Les développements suivants se rapportent à ce que Wronski appelle la *science du désordre*.

sions des coordonnées, obtenues dans le cas du mouvement non troublé, comme applicables au cas des perturbations, moyennant l'emploi de valeurs convenables des constantes, qui deviennent dès lors de véritables variables. On assujettit ces nouvelles variables à satisfaire aux équations différentielles du mouvement troublé, et l'on obtient des équations en nombre insuffisant pour déterminer les valeurs de tous les éléments. Cette circonstance permet de poser de nouvelles conditions, qui consistent en ce que les expressions des dérivées des coordonnées, par rapport au temps, restent les mêmes que dans le mouvement non troublé. Ces conditions sont faciles à remplir et suffisent à la détermination des valeurs variables des éléments. Nous n'avons à traiter ainsi que les éléments entrant dans l'expression des coordonnées Φ et r, et qui sont ε, a, e, ϖ, attendu que les équations (11) et (18), en supposant qu'on en élimine la variable φ, permettront d'obtenir directement les valeurs de θ et ψ.

Ceci posé, nous allons former les valeurs des dérivées $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$, en faisant à la fois varier le temps et les constantes.

Différentions les équations (40) : nous aurons

$$\begin{aligned}\sin(\Phi-\varpi)\,dr + r\cos(\Phi-\varpi)\,d(\Phi-\varpi)\\ = a\sqrt{1-e^2}\cos u\,du + \sqrt{1-e^2}\sin u\,da - \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin u\,de,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\Phi-\varpi)\,dr - r\sin(\Phi-\varpi)\,d(\Phi-\varpi)\\ = -a\sin u\,du + (\cos u - e)\,da - a\,de;\end{aligned}$$

on en déduit d'abord

$$\begin{aligned} dr = {} & a\left[\sqrt{1-e^2}\sin(\Phi-\varpi)\cos u - \cos(\Phi-\varpi)\sin u\right]du\\ & + \left[\sqrt{1-e^2}\sin(\Phi-\varpi)\sin u + \cos(\Phi-\varpi)(\cos u - e)\right]da\\ & - a\left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin(\Phi-\varpi)\sin u + \cos(\Phi-\varpi)\right]de,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\,d(\Phi-\varpi) = {} & a\left[\sqrt{1-e^2}\cos(\Phi-\varpi)\cos u + \sin(\Phi-\varpi)\sin u\right]du\\ & + \left[\sqrt{1-e^2}\cos(\Phi-\varpi)\sin u - \sin(\Phi-\varpi)(\cos u - e)\right]da\\ & - a\left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos(\Phi-\varpi)\sin u - \sin(\Phi-\varpi)\right]de.\end{aligned}$$

En ayant égard aux relations (41), (42) et (43), ces expressions deviennent

$$\frac{dr}{dt} = ae\sin u\,\frac{du}{dt} + (1 - e\cos u)\,\frac{da}{dt} - a\cos u\,\frac{de}{dt},$$

$$\frac{r\,d(\Phi - \varpi)}{dt} = a\sqrt{1-e^2}\,\frac{du}{dt} + \frac{a\sin u}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{de}{dt};$$

or, la différentiation complète de l'équation (37) donne

$$n + \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt} = (1 - e\cos u)\,\frac{du}{dt} - \sin u\,\frac{de}{dt};$$

d'où, en remplaçant $1 - e\cos u$ par sa valeur $\frac{r}{a}$ et n par sa valeur $\frac{\sqrt{f\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$, tirée de (34),

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a}}\,\frac{1}{r} + \frac{a}{r}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right) + \frac{a}{r}\,\sin u\,\frac{de}{dt}.$$

Mettant cette valeur dans les équations précédentes, on aura

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{f\mu a}\,\frac{e\sin u}{r} + \frac{a^2 e\sin u}{r}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right) + \left(\frac{a^2 e}{r}\sin^2 u - a\cos u\right)\frac{de}{dt} + (1 - e\cos u)\,\frac{da}{dt},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d\varpi}{dt} = \sqrt{f\mu}\,\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right) + \left(\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\sin u + \frac{a\sin u}{r\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{de}{dt}.$$

Si l'on élimine de ces formules l'anomalie excentrique u, elles deviennent

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,e\sin(\Phi - \varpi) + \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\,\sin(\Phi - \varpi)\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right) \\ &\qquad - a\cos(\Phi - \varpi)\,\frac{de}{dt} + \frac{r}{a}\,\frac{da}{dt}, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \sqrt{f\mu}\,\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\varpi}{dt} \\ &\qquad + \sin(\Phi - \varpi)\left[\frac{a(1-e^2)}{r} + 1\right]\frac{1}{1-e^2}\,\frac{de}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations fourniraient les expressions des dérivées de r et Φ par rapport aux constantes ε, ϖ, e, a; mais tel n'est pas notre objet.

Les parties des valeurs de $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$, qui répondent au mouvement non troublé, sont les premiers termes des deux expressions précédentes; comme ces expressions doivent rester les mêmes dans le mouvement troublé, nous devons égaler à zéro l'ensemble des termes qui viennent à la suite. On a ainsi

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\, e\sin(\Phi-\varpi),\\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\sqrt{f\mu}\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2},\end{aligned}\right.$$

puis, en multipliant les termes restants de la première équation (44) par $\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}$, et ceux de la seconde par $\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}$,

$$e\sin(\Phi-\varpi)\frac{d\varepsilon}{dt} - e\sin(\Phi-\varpi)\frac{d\varpi}{dt} - \sqrt{1-e^2}\cos(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt} + \frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}\,\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = 0,$$

$$(46)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - 1\right)\frac{d\varpi}{dt} + \frac{r^2}{a^2}\frac{\sin(\Phi-\varpi)}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{a(1-e^2)}{r}+1\right]\frac{1}{1-e^2}\frac{de}{dt} = 0.$$

Éliminons $\frac{d\varepsilon}{dt}$ entre ces deux équations, nous aurons

$$\begin{aligned}&\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\sin(\Phi-\varpi)\frac{e\,d\varpi}{dt}\\ &\quad+\left\{\sqrt{1-e^2}\cos(\Phi-\varpi) + \frac{r^2}{a^2}\frac{e\sin^2(\Phi-\varpi)}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{a(1-e^2)}{r}+1\right]\right\}\frac{de}{dt} - \frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}\,\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\frac{r^2\sin(\Phi-\varpi)}{a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{e\,d\varpi}{dt} + \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}[2e+(1+e^2)\cos(\Phi-\varpi)]\frac{1}{1-e^2}\frac{de}{dt} - \frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}\,\frac{1}{a}\frac{da}{dt};$$

d'où

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{r}{a(1-e^2)}\left\{\sin(\Phi-\varpi)\frac{e\,d\varpi}{dt} + [2e+(1+e^2)\cos(\Phi-\varpi)]\frac{1}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right\},$$

équation qui peut s'écrire

$$(47)\quad \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{\sin(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\frac{e\,d\varpi}{dt} + \frac{2e+(1+e^2)\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\frac{1}{1-e^2}\frac{de}{dt}.$$

De l'équation (46) on tire cette valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$

$$(48)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \left[1 - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2}\right]\frac{d\varpi}{dt} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2}\sin(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt}.$$

Nous transformerons cette expression, quand nous aurons formé les valeurs de $e\frac{d\varpi}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$.

Nous allons maintenant effectuer le calcul de la deuxième dérivée de r. Par la première équation (45), nous aurons

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,e\cos(\Phi-\varpi)\left(\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{f\mu}\,e\sin(\Phi-\varpi)}{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[2ae\frac{de}{dt} - (1-e^2)\frac{da}{dt}\right].$$

Le premier terme de cette expression peut s'écrire, en vertu de (29),

$$\left[\frac{\sqrt{f\mu\,a(1-e^2)}}{r} - \frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\right]\left(\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right).$$

Les termes en $\frac{de}{dt}$ réunis se réduisent à

$$\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Phi-\varpi)\,\frac{1}{1-e^2}\,\frac{de}{dt};$$

le terme en $\frac{da}{dt}$ est

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{f\mu}\,e\sin(\Phi-\varpi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,\frac{1}{a}\,\frac{da}{dt},$$

ou, en y mettant la valeur (47),

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,\frac{e\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\,\frac{e\,d\varpi}{dt}$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\,\frac{2e+(1+e^2)\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\,e\sin(\Phi-\varpi)\,\frac{1}{1-e^2}\,\frac{de}{dt}.$$

Au moyen de ces valeurs, la dérivée $\frac{d^2r}{dt^2}$ devient d'abord

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\left[\frac{\sqrt{f\mu\,a(1-e^2)}}{r}-\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\right]\frac{d\Phi}{dt}$$

$$-\left[\frac{\sqrt{f\mu}\cos(\Phi-\varpi)}{\sqrt{a(1-e^2)}}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\frac{e\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right]\frac{e\,d\varpi}{dt}$$

$$+\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left[1-\frac{1}{2}\frac{2e+(1+e^2)\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}e\right]\sin(\Phi-\varpi)\frac{1}{1-e^2}\frac{de}{dt}.$$

Or, si nous introduisons, dans le premier terme, la valeur de $\frac{k}{r^2}$ de $\frac{d\Phi}{dt}$, et si nous remplaçons en outre $\sqrt{f\mu\,a(1-e^2)}$ par sa valeur k, suivant (27), le premier terme de $\frac{d^2r}{dt^2}$ deviendra

$$\frac{k^2}{r^3}-\frac{f\mu}{r^2};$$

les termes en $\frac{e\,d\varpi}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$ sont réductibles à

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left[\frac{e+\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{e\,d\varpi}{dt},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\sin(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt};$$

on a donc finalement

$$(50)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2}&=-\frac{f\mu}{r^2}+\frac{k^2}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left[\frac{e+\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{e\,d\varpi}{dt}\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\sin(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt}.\end{aligned}\right.$$

En comparant cette équation à l'équation différentielle proposée (16), on voit que la condition de leur concordance est

$$(51)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left[\frac{e+\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{e\,d\varpi}{dt}\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f\mu}}{\sqrt{a(1-e^2)}}\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\sin(\Phi-\varpi)\frac{de}{dt}=X_1.\end{aligned}\right.$$

Il reste à satisfaire à la seconde équation (14) : or cette équation revient à

$$\frac{dk}{dt} = Y_1 r;$$

d'un autre côté, par la différentiation, on tire de (27)

$$\frac{2}{k} dk = \frac{da}{a} - \frac{2 e de}{1 - e^2}$$

ou, en mettant pour $\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ sa valeur (47),

$$\frac{2}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\sin(\Phi - \varpi)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}\frac{e d\varpi}{dt} + \frac{\cos(\Phi - \varpi)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}\frac{de}{dt}$$

Au moyen de la valeur de $\frac{dk}{dt}$, on déduit de cette relation

$$(52) \qquad \frac{\sin(\Phi - \varpi)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}\frac{e d\varpi}{dt} + \frac{\cos(\Phi - \varpi)}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}\frac{de}{dt} = \frac{2}{k} Y_1 r.$$

Les équations (51) et (52) vont nous donner les valeurs de $\frac{e d\varpi}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$, qui, étant mises dans (47) et (48), feront connaître $\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ et $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Pour effectuer ces diverses déterminations, nous remplacerons dans (51) la quantité $\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{f\mu}}$ par $\frac{1}{f\mu} k$, suivant la relation (27), et ferons disparaître le dénominateur $2[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]$; nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} &-[e + 2\cos(\Phi - \varpi) + e\cos^2(\Phi - \varpi)]\frac{e d\varpi}{dt} \\ &\quad + [2 + e\cos(\Phi - \varpi)]\sin(\Phi - \varpi)\frac{de}{dt} = 2[(1 + e\cos(\Phi - \varpi)]\, k\frac{X_1}{f\mu}. \end{aligned}$$

En faisant disparaître le dénominateur commun du premier membre de (52), on aura de même

$$\sin(\Phi - \varpi)\frac{e d\varpi}{dt} + \cos(\Phi - \varpi)\frac{de}{dt} = \frac{2}{k}[1 + e\cos(\Phi - \varpi)] Y_1 r = 2k\frac{Y_1}{f\mu},$$

équations où il ne faut pas perdre de vue que k représente l'intégrale (14).

Nous allons tirer de ces équations les valeurs de $\frac{e d\varpi}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$.

Soient, pour abréger,

$$(53)\quad M = [2 + e\cos(\Phi - \varpi)]\sin(\Phi - \varpi), \qquad N = e + 2\cos(\Phi - \varpi) + e\cos^2(\Phi - \varpi),$$

$$(54)\quad A = k\,\frac{X_1}{f\mu}, \qquad B = \frac{1}{k}\,Y_1 r;$$

ces équations deviendront

$$M\,\frac{de}{dt} - N\,\frac{e\,d\varpi}{dt} = 2A[1 + e\cos(\Phi - \varpi)],$$

$$\cos(\Phi - \varpi)\,\frac{de}{dt} + \sin(\Phi - \varpi)\,\frac{e\,d\varpi}{dt} = 2B[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]:$$

on tire de là

$$[M\sin(\Phi - \varpi) + N\cos(\Phi - \varpi)]\,\frac{e\,d\varpi}{dt} = 2[MB - A\cos(\Phi - \varpi)][1 + e\cos(\Phi - \varpi)],$$

$$[M\sin(\Phi - \varpi) + N\cos(\Phi - \varpi)]\,\frac{de}{dt} = 2[NB + A\sin(\Phi - \varpi)][1 + e\cos(\Phi - \varpi)];$$

or, le facteur commun de nos deux inconnues est égal à $2[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]$; il vient donc simplement

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{e\,d\varpi}{dt} &= MB - A\cos(\Phi - \varpi),\\ \frac{de}{dt} &= NB + A\sin(\Phi - \varpi). \end{aligned}\right.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression (47) multipliée par $[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]$; nous aurons d'abord

$$[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]\,\frac{1}{a}\,\frac{da}{dt} = B\left[M\sin(\Phi - \varpi) + N\,\frac{2e + (1 + e^2)\cos(\Phi - \varpi)}{1 - e^2}\right]$$
$$+ A\left[\frac{2e + (1 + e^2)\cos(\Phi - \varpi)}{1 - e^2} - \cos(\Phi - \varpi)\right]\sin(\Phi - \varpi).$$

Si l'on réduit au même dénominateur les deux termes du facteur de B, on trouve, pour le coefficient de B,

$$\frac{2 + 6e\cos(\Phi - \varpi) + 6e^2\cos^2(\Phi - \varpi) + 2e^3\cos^3(\Phi - \varpi)}{1 - e^2} = \frac{2}{1 - e^2}\,[1 + e\cos(\Phi - \varpi)]^3.$$

Quant au coefficient de A, il se réduit immédiatement à

$$\frac{2e}{1-e^2}[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\sin(\Phi-\varpi);$$

on a donc

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=\frac{2}{1-e^2}[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2\,\mathrm{B}+\frac{2e}{1-e^2}\sin(\Phi-\varpi)\,\mathrm{A}.$$

Si l'on remplace l'un des facteurs $[1+e\cos(\Phi-\varpi)]$ de B par sa valeur $\frac{k^2}{f\mu}\frac{1}{r}$ et que l'on mette les valeurs (54) de B et de A, on aura

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=\frac{2k}{1-e^2}[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\frac{\mathrm{Y}_1}{f\mu}+\frac{2ke}{1-e^2}\sin(\Phi-\varpi)\frac{\mathrm{X}_1}{f\mu}. \tag{56}$$

Transportons encore les valeurs (55) dans l'expression (48), multipliée par $[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2\frac{d\varepsilon}{dt}\\
&=\quad \mathrm{B}\left\{\mathrm{M}\frac{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e}-\mathrm{N}\sqrt{1-e^2}[2+e\cos(\Phi-\varpi)]\sin(\Phi-\varpi)\right\}\\
&\quad-\mathrm{A}\left\{\frac{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e}\cos(\Phi-\varpi)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sqrt{1-e^2}[2+e\cos(\Phi-\varpi)]\sin^2(\Phi-\varpi)\right\}.
\end{aligned}$$

Il se présente ici des réductions. En vertu de (53), le premier terme est égal à

$$\begin{aligned}
&\mathrm{BM}\left\{\frac{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e}-\mathrm{N}\sqrt{1-e^2}\right\}\\
&\quad=\frac{\mathrm{BM}}{e}\left\{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-\sqrt{1-e^2}(\mathrm{N}e+1-e^2)\right\}.
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{N}e+1-e^2$ est égal à $[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2$; le premier terme est donc

$$\frac{\mathrm{BM}}{e}[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)=\frac{\mathrm{BM}e}{1+\sqrt{1-e^2}}[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2;$$

le second terme se transforme en

$$-\frac{A}{e}\Big(\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]^2\cos(\Phi-\varpi)$$
$$+\sqrt{1-e^2}\left\{\left[2e+e^2\cos(\Phi-\varpi)\right]\left[1-\cos^2(\Phi-\varpi)\right]-(1-e^2)\cos(\Phi-\varpi)\right\}\Big):$$

or le facteur de $\sqrt{1-e^2}$ est égal à

$$2e\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]-\cos(\Phi-\varpi)\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]^2$$
$$=\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\left\{2e-\cos(\Phi-\varpi)\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\right\}.$$

En vertu de cette valeur, le second terme devient

$$-\frac{A}{e}\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\left\{\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\cos(\Phi-\varpi)\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)+2e\sqrt{1-e^2}\right\}$$
$$=-A\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\left\{\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\cos(\Phi-\varpi)\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}+2\sqrt{1-e^2}\right\}.$$

On a donc

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{\text{BM}e}{1+\sqrt{1-e^2}}-A\left[\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos(\Phi-\varpi)+\frac{2\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right];$$

d'où, en mettant les valeurs (53) et (54),

$$(57)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt}=&\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+\sqrt{1-e^2}}e\sin(\Phi-\varpi)\frac{Y_1 r}{k}\\&-\left[\frac{e\cos(\Phi-\varpi)}{1+\sqrt{1-e^2}}+\frac{2\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right]\frac{kX_1}{f\mu}.\end{aligned}\right.$$

Les quatre formules (55), (56) et (57) étant supposées intégrées, on obtiendra les valeurs variables des éléments ϖ, e, a et ε. Nous ferons remarquer que, dans une orbite peu excentrique, la première équation (55) donnerait $d\varpi$ exprimé par une fonction ayant e en diviseur, et qui se prêterait mal à l'intégration. On aura de l'avantage à substituer à e et ϖ d'autres variables exemptes de ces inconvénients.

Soient, en effet,

$$(58)\quad\left\{\begin{aligned}\xi&=e\cos\varpi,\\ \upsilon&=e\sin\varpi,\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(58\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \cos\varpi\,\frac{de}{dt} - \sin\varpi\,\frac{e\,d\varpi}{dt},\\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \sin\varpi\,\frac{de}{dt} + \cos\varpi\,\frac{e\,d\varpi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Substituant ici les valeurs (55), il viendra

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{B}\,(\mathrm{N}\cos\varpi - \mathrm{M}\sin\varpi) + \mathrm{A}\sin\Phi,$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \mathrm{B}\,(\mathrm{N}\sin\varpi + \mathrm{M}\cos\varpi) - \mathrm{A}\cos\Phi.$$

Pour effectuer plus facilement la transformation des coefficients de B, nous écrirons les valeurs de M et de N comme il suit :

$$\mathrm{M} = 2\sin(\Phi - \varpi) + \frac{1}{2}\,e\sin(2\Phi - 2\varpi),$$

$$\mathrm{N} = 2\cos(\Phi - \varpi) + \frac{1}{2}\,e\cos(2\Phi - 2\varpi) + \frac{3}{2}\,e;$$

on en déduit immédiatement

$$\mathrm{N}\cos\varpi - \mathrm{M}\sin\varpi = 2\cos\Phi + \frac{1}{2}\,e\cos(2\Phi - \varpi) + \frac{3}{2}\,e\cos\varpi,$$

$$\mathrm{N}\sin\varpi + \mathrm{M}\cos\varpi = 2\sin\Phi + \frac{1}{2}\,e\sin(2\Phi - \varpi) + \frac{3}{2}\,e\sin\varpi.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de A et B, on obtient

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left[2\cos\Phi + \frac{1}{2}\,e\cos(2\Phi - \varpi) + \frac{3}{2}\,e\cos\varpi\right]\frac{1}{k}\,\mathrm{Y}_1 r + k\sin\Phi\,\frac{\mathrm{X}_1}{f\mu},\\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \left[2\sin\Phi + \frac{1}{2}\,e\sin(2\Phi - \varpi) + \frac{3}{2}\,e\sin\varpi\right]\frac{1}{k}\,\mathrm{Y}_1 r - k\cos\Phi\,\frac{\mathrm{X}_1}{f\mu}.\end{aligned}\right.$$

Comme on le voit, ces expressions sont affranchies de diviseurs qui pourraient s'annuler. En les supposant intégrées, on obtiendra les valeurs de ϖ et e par les formules

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} e\sin\varpi &= \upsilon,\\ e\cos\varpi &= \xi,\end{aligned}\right.$$

d'où ϖ, sous la condition $e > 0$.

Il n'y aura, dans l'emploi de ces formules, d'autre indétermination que celle de ϖ quand e sera très petit; mais cela est dans la nature des choses et n'entraîne aucun inconvénient.

Détermination du plan de l'orbite.

L'équation (11) donne, par voie d'intégration,

$$\varphi = \Phi + \int \cos\theta\, d\psi, \tag{61}$$

et les équations (18) sont

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Z_1 r}{k}\cos\varphi, \tag{62}$$

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = +\frac{Z_1 r}{k}\sin\varphi. \tag{63}$$

Voici l'usage de ces formules :

L'équation (61) fournirait une valeur approchée de φ, en négligeant l'intégrale qui s'y trouve; alors l'équation (62) donnerait la valeur de θ, au moyen de quoi l'intégration de (63) ferait connaître ψ. On recommencerait les calculs en tenant compte de l'intégrale négligée la première fois, dans la valeur de φ.

L'emploi de la formule (63) présente, dans le cas des faibles inclinaisons, le même inconvénient que celui de la première formule (55) dans le cas des faibles excentricités : il convient donc de recourir à de nouvelles variables auxiliaires. Posons, à cet effet,

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= \sin\theta\cos\psi, \\ \upsilon' &= \sin\theta\sin\psi; \end{aligned}\right. \tag{64}$$

nous aurons

$$\frac{d\xi'}{dt} = \cos\psi\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - \sin\psi\sin\theta\, d\psi,$$

$$\frac{d\upsilon'}{dt} = \sin\psi\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \cos\psi\sin\theta\, d\psi;$$

d'où l'on tire, en mettant les valeurs (62) et (63), et ayant recours aux relations (19) et (20),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)\frac{Z_1 r}{k} = -b'\frac{Z_1 r}{k}, \\ \frac{d\upsilon'}{dt} &= -(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi)\frac{Z_1 r}{k} = -b\frac{Z_1 r}{k}, \end{aligned}\right. \tag{65}$$

où b' et b sont les cosinus des angles que l'axe mobile des y_1 fait respectivement avec les axes fixes des y et des x. Ces équations étant censées intégrées, on calculera θ et ψ au moyen des formules (64).

Il nous reste à changer, dans les formules (61) à (65), les signes de ψ et θ, de manière que ces quantités se rapportent aux usages des astronomes. Soient donc Ω la longitude du nœud ascendant comptée, de l'axe fixe des x, vers les y, I l'inclinaison comprise entre $0°$ et $180°$: on aura ces autres formules

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \Phi - \int \cos \mathrm{I}\, d\Omega, \\ \frac{d\mathrm{I}}{dt} &= + \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k} \cos\varphi, \\ \sin \mathrm{I}\, \frac{d\Omega}{dt} &= + \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k} \sin\varphi, \end{aligned}\right.$$

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -(\cos \mathrm{I} \cos\Omega \cos\varphi - \sin\Omega \sin\varphi)\, \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k} = -\, b' \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k}, \\ \frac{d\upsilon'}{dt} &= +(\cos \mathrm{I} \sin\Omega \cos\varphi + \cos\Omega \sin\varphi)\, \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k} = -\, b\, \frac{\mathrm{Z}_1 r}{k}, \end{aligned}\right.$$

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin \mathrm{I} \sin\Omega &= + \upsilon', \\ \sin \mathrm{I} \cos\Omega &= - \xi', \end{aligned}\right.$$

d'où Ω et I; condition : $\sin \mathrm{I} > 0$.

Les dernières de ces formules donneraient un résultat mal déterminé pour l'inclinaison I, si celle-ci était voisine de $90°$; mais alors on peut déterminer directement I par la deuxième équation (66) et tirer Ω de la troisième de ces équations. Dans ce même cas, l'emploi des formules (68) offrirait une vérification quant à la valeur de Ω.

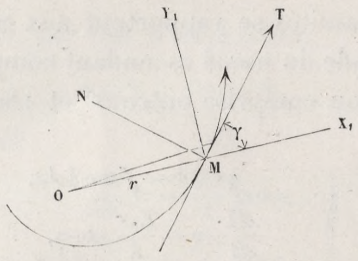
Autres formes des expressions différentielles des éléments a, e, ϖ.

Cette recherche n'a pas été faite par Wronski; elle a été suggérée par la simple inspection des résultats de la présente méthode. Suivant l'équation (14), la variation de la constante des aires k est uniquement due à la $k = \int Y_1 r\, dt$
composante Y_1 des forces perturbatrices. Nous nous proposons de faire voir que la variation du demi-grand axe a est due principalement à la composante tangentielle des mêmes forces, et que dans les expressions de e et ϖ,

la considération de cette composante, jointe à la composante normale dans le plan de l'orbite, permet de donner aux résultats une forme plus simple.

Par le point M (*fig.* 2) de l'orbite, menons la tangente MT dans le sens

Fig. 2.



du mouvement de l'astre, et la normale MN dans le plan de l'orbite et dirigée dans le sens de sa concavité; l'axe des x_1 étant toujours dans le prolongement du rayon vecteur r, et l'axe des y_1 perpendiculaire à OM et faisant avec MT un angle aigu; nous désignerons par γ l'angle X_1MT.

Désignant par $d\Phi$ et ds l'angle décrit par le rayon vecteur et l'arc élémentaire de l'orbite parcouru pendant le temps dt, on aura entre ces différentielles, jointes à celle du rayon vecteur r, et l'angle γ, les relations

$$\cos\gamma\, ds = dr,$$
$$\sin\gamma\, ds = r\, d\Phi,$$

ou

$$(69) \qquad \begin{cases} v\cos\gamma = \dfrac{dr}{dt}, \\ v\sin\gamma = \dfrac{r\,d\Phi}{dt}. \end{cases}$$

Projetons les trois composantes X_1, Y_1 et Z_1 sur les directions MT, MN : Z_1 étant perpendiculaire à la fois à ces deux directions, si nous désignons respectivement par T et N les composantes suivant MT et MN, nous aurons

$$(70) \qquad \begin{cases} T = +X_1\cos\gamma + Y_1\sin\gamma, \\ N = -X_1\sin\gamma + Y_1\cos\gamma; \end{cases}$$

d'où, inversement,

$$(71) \qquad \begin{cases} X_1 = T\cos\gamma - N\sin\gamma, \\ Y_1 = T\sin\gamma + N\cos\gamma. \end{cases}$$

Or on a, en vertu de (27) et (45),

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{f\mu}{k}\, e\sin(\Phi-\varpi),\\ \frac{r\,d\Phi}{dt} &= \frac{k}{r}; \end{aligned}\right.$$

mettant ces valeurs dans les équations (69), nous en déduirons, suivant (71),

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{v}\left[\frac{f\mu}{k}\, e\sin(\Phi-\varpi)\,T - \frac{k}{r}\,N\right],\\ Y_1 &= \frac{1}{v}\left[\frac{k}{r}\,T + \frac{f\mu}{k}\, e\sin(\Phi-\varpi)\,N\right]. \end{aligned}\right.$$

La valeur de v sera d'ailleurs fournie par l'équation des forces vives (30), ou

$$v^2 = f\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

relation qui, en y mettant la valeur de r en $(\Phi-\varpi)$, devient

$r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\Phi-\omega)}$

$$v^2 = \frac{f\mu\left[1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2\right]}{a(1-e^2)};$$

d'où, en vertu de la première équation (27),

$$(74)\qquad v = \frac{f\mu}{k}\sqrt{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}.$$

La substitution des valeurs (73) dans les expressions différentielles des éléments a, e et ϖ étant effectuée, il nous restera à réduire les résultats à leur forme la plus simple.

1° *Demi-grand axe a.* — Au moyen des valeurs (73), l'expression (56) devient d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{2k}{v(1-e^2)}\Big\{&\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\left[\frac{k}{f\mu r}\,T + \frac{e}{k}\sin(\Phi-\varpi)\,N\right]\\ &+ e\sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{e}{k}\sin(\Phi-\varpi)\,T - \frac{k}{f\mu r}\,N\right]\Big\}: \end{aligned}$$

or le coefficient de T dans les $\{\ \}$ est, en y mettant la valeur de r en $(\Phi-\varpi)$,

$$\frac{\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]^2}{k} + \frac{e^2\sin^2(\Phi-\varpi)}{k} = \frac{1}{k}\left[1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2\right] = \frac{k\,v^2}{f^2\mu^2} = \frac{a(1-e^2)}{kf\mu}\,v^2.$$

Le coefficient de N devient, en opérant de même,

$$e\sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{1+e\cos(\Phi-\varpi)}{k}-\frac{1+e\cos(\Phi-\varpi)}{k}\right]=0;$$

on a donc cette expression très simple

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=2av\frac{T}{f\mu}. \tag{75}$$

On voit ainsi que la variation du demi-grand axe est due à la composante tangentielle T des forces perturbatrices.

2° *Variations de l'excentricité e et de la longitude ϖ du périhélie.* — Mettons dans les équations (55) les valeurs (54), nous aurons plus explicitement

$$\frac{e\,d\varpi}{dt}=[2+e\cos(\Phi-\varpi)]\sin(\Phi-\varpi)\frac{Y_1 r}{k}-\cos(\Phi-\varpi)\,k\frac{X_1}{f\mu},$$

$$\frac{de}{dt}=[e+2\cos(\Phi-\varpi)+e\cos^2(\Phi-\varpi)]\frac{Y_1 r}{k}+\sin(\Phi-\varpi)\,k\frac{X_1}{f\mu},$$

relations qui deviennent, en vertu de (73),

$$\begin{aligned}\frac{e\,d\varpi}{dt}=\frac{1}{v}\Big\{&[2+e\cos(\Phi-\varpi)]\sin(\Phi-\varpi)\left[T+\frac{f\mu r}{k^2}e\sin(\Phi-\varpi)N\right]\\&-\cos(\Phi-\varpi)\left[e\sin(\Phi-\varpi)T-\frac{k^2}{f\mu r}N\right]\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}=\frac{1}{v}\Big\{&[e+2\cos(\Phi-\varpi)+e\cos^2(\Phi-\varpi)]\left[T+\frac{f\mu r}{k^2}e\sin(\Phi-\varpi)N\right]\\&+\sin(\Phi-\varpi)\left[e\sin(\Phi-\varpi)T-\frac{k^2}{f\mu r}N\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Considérons la première de ces formules : le coefficient de T dans les $\{\ \}$ se réduit visiblement à

$$2\sin(\Phi-\varpi);$$

le coefficient de N devient successivement

$$\frac{f\mu r}{k^2}e\sin^2(\Phi-\varpi)[2+e\cos(\Phi-\varpi)]+\frac{k^2}{f\mu r}\cos(\Phi-\varpi),$$

$$=e\sin^2(\Phi-\varpi)\frac{[2+e\cos(\Phi-\varpi)]}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\cos(\Phi-\varpi)$$

$$=\frac{2e\sin^2(\Phi-\varpi)+e^2\cos(\Phi-\varpi)\sin^2(\Phi-\varpi)+\cos(\Phi-\varpi)+2e\cos^2(\Phi-\varpi)+e^2\cos^3(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}$$

$$=\frac{2e+\cos(\Phi-\varpi)+e^2\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}$$

$$=\frac{2e[1+e\cos(\Phi-\varpi)]+(1-e^2)\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}=2e+\frac{r}{a}\cos(\Phi-\varpi);$$

on a donc

$$(76)\qquad \frac{e\,d\varpi}{dt}=\frac{1}{\nu}\left\{2\sin(\Phi-\varpi)\,\mathrm{T}+\left[2e+\frac{r}{a}\cos(\Phi-\varpi)\right]\mathrm{N}\right\}.$$

Considérons actuellement l'expression de $\frac{de}{dt}$; nous aurons, pour le coefficient de T dans les $\{\ \ \}$,

$$2[e+\cos(\Phi-\varpi)],$$

et le coefficient de N deviendra

$$\sin(\Phi-\varpi)\left\{e\frac{e+2\cos(\Phi-\varpi)+e\cos^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}-[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\right\}$$

$$=\frac{\sin(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}[e^2+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2\cos^2(\Phi-\varpi)-1-2e\cos(\Phi-\varpi)-e^2\cos^2(\Phi-\varpi)]$$

$$=-(1-e^2)\frac{\sin(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}$$

ou, simplement,

$$-\frac{r}{a}\sin(\Phi-\varpi);$$

il s'ensuit

$$(77)\qquad \frac{de}{dt}=\frac{1}{\nu}\left\{2[e+\cos(\Phi-\varpi)]\,\mathrm{T}-\frac{r}{a}\sin(\Phi-\varpi)\,\mathrm{N}\right\}.$$

Les résultats (75), (76) et (77) s'accordent avec les formules (122) de Wronski, quand on a égard à la différence des notations.

Passons à la variation de la longitude moyenne de l'époque ε. En vertu des valeurs (73), la formule (57) nous donnera

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{v}\Bigg\{ & \frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+\sqrt{1-e^2}}\, e\sin(\Phi-\varpi)\left[\mathrm{T}+\frac{f\mu r}{k^2}\, e\sin(\Phi-\varpi)\mathrm{N}\right] \\ & -\left[\frac{e\cos(\Phi-\varpi)}{1+\sqrt{1-e^2}}+\frac{2\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right]\left[e\sin(\Phi-\varpi)\mathrm{T}-\frac{k^2}{f\mu r}\mathrm{N}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Le coefficient de T dans les $\{\quad\}$ se transforme comme il suit

$$e\sin(\Phi-\varpi)\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-e^2}}-2\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\right)=-2e\sin(\Phi-\varpi)\left(\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\right).$$

Le coefficient de N est

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{2+e\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}e^2\sin^2(\Phi-\varpi)+e\cos(\Phi-\varpi)\left[1+e\cos(\Phi-\varpi)\right]\right\}+2\sqrt{1-e^2}\\ &=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\left[\begin{array}{l}2e\sin^2(\Phi-\varpi)+e^2\cos(\Phi-\varpi)\sin^2(\Phi-\varpi)\\ \quad+\cos(\Phi-\varpi)+2e\cos^2(\Phi-\varpi)+e^2\cos^3(\Phi-\varpi)\end{array}\right]}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+2\sqrt{1-e^2}\\ &=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2e+\cos(\Phi-\varpi)+e^2\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+2\sqrt{1-e^2}\\ &=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{e+\cos(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}+e\right]+2\sqrt{1-e^2};\end{aligned}$$

on a donc finalement

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{v}\Bigg\{&-2e\sin(\Phi-\varpi)\left(\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\mathrm{T}\\ &+\left[2\sqrt{1-e^2}+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(e+\frac{\cos(\Phi-\varpi)+e}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right)\right]\mathrm{N}\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Il resterait à transformer les expressions (59); mais il sera bien plus simple d'appliquer les formules (58 *bis*) aux valeurs transformées de $e\,\frac{d\varpi}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$, que nous écrirons d'abord comme il suit :

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}&=\frac{1}{v}\left(2e\mathrm{T}+2\cos(\Phi-\varpi)\mathrm{T}-\frac{r}{a}\sin(\Phi-\varpi)\mathrm{N}\right),\\ \frac{e\,d\varpi}{dt}&=\frac{1}{v}\left(2\sin(\Phi-\varpi)\mathrm{T}+\frac{r}{a}\cos(\Phi-\varpi)\mathrm{N}+2e\mathrm{N}\right).\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement, suivant les formules (58 *bis*),

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\varphi}\left(2e\cos\varpi\,\mathrm{T} + 2\cos\Phi\,\mathrm{T} - \frac{r}{a}\sin\Phi\,\mathrm{N} - 2e\sin\varpi\,\mathrm{N}\right),$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{\varphi}\left(2e\sin\varpi\,\mathrm{T} + 2\sin\Phi\,\mathrm{T} + \frac{r}{a}\cos\Phi\,\mathrm{N} + 2e\cos\varpi\,\mathrm{N}\right),$$

ou

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{\varphi}\left[2(\cos\Phi + e\cos\varpi)\,\mathrm{T} - \left(\frac{r}{a}\sin\Phi + 2e\sin\varpi\right)\mathrm{N}\right], \\ \frac{d\upsilon}{dt} &= \frac{1}{\varphi}\left[2(\sin\Phi + e\sin\varpi)\,\mathrm{T} + \left(\frac{r}{a}\cos\Phi + 2e\cos\varpi\right)\mathrm{N}\right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont plus simples que les formules (59).

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE WRONSKI [1].

L'auteur de la *Réforme absolue du savoir humain* ne s'est pas borné à substituer, dans les problèmes de Mécanique céleste, les composantes des forces perturbatrices suivant les axes mobiles, aux composantes suivant les axes fixes; il en dispose autrement que ne l'ont fait les géomètres de son époque.

Les conditions qu'il s'impose produisent une simplification notable des expressions différentielles des éléments variables. Nous n'essayerons pas d'exposer les considérations toutes philosophiques sur lesquelles Wronski s'appuie pour établir ses équations; nous nous proposons d'arriver au même résultat, en nous appuyant sur les principes universellement acceptés.

L'idée qui a guidé Wronski est tout entière dans cette considération que l'attraction solaire et la composante X_1, qui s'ajoutent algébriquement, doivent rester associées dans tous les calculs, comme elles le sont dans notre équation différentielle (16), sous la forme $-\frac{1}{r^2}(f\mu - X_1 r^2)$; nous avons trouvé, par exemple, $\frac{k^2}{f\mu}$ pour expression du demi-paramètre (éq. 27). En nous plaçant au point de vue de notre auteur, nous serons conduits à ajou-

(1) Cette méthode constitue ce que Wronski appelle la *Science de l'ordre*.

k^2
$f\mu$
$p = \dfrac{k^2}{f\mu - X_1 r^2}$
$w = \dfrac{f\mu - X_1 r^2}{k}$
$pw = k.$

ter à $f\mu$ la quantité $-X_1 r^2$, ou à poser

$$p = \frac{k^2}{f\mu - X_1 r^2}. \tag{80}$$

Wronski considère en outre une quantité w ainsi définie

$$w = \frac{f\mu - X_1 r^2}{k}. \tag{81}$$

La première p est une ligne, la seconde, w, une vitesse, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Ces deux quantités p et w, qui sont fort peu variables, remplaceront le demi-grand axe et la constante des aires. Laissant de côté, pour l'instant, la nature de ces quantités et les motifs de leur introduction dans les calculs, nous pourrons nous en servir, comme de constantes quelconques devenues variables, pour arriver à l'intégration de l'équation (16).

La combinaison des équations (80) et (81) nous donne

$$\left\{ \begin{aligned} pw &= k, \\ f\mu - X_1 r^2 &= \frac{k^2}{p} = pw^2. \end{aligned} \right. \tag{82}$$

La constante des aires k se trouve ainsi être égale au produit des constantes p et w.

Si nous mettons les valeurs précédentes dans l'équation (16), nous aurons

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k^2}{pr^2} + \frac{k^2}{r^3}.$$

En multipliant tout par dr et intégrant ou indiquant l'intégration, il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} = -\int \frac{k^2}{pr^2}\,dr + \int \frac{k^2}{r^3}\,dr = +\int pw^2\,d\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\int p^2 w^2\,d.\frac{1}{r^2}.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{pw^2}{r} - \frac{1}{2}\frac{p^2 w^2}{r^2} - \int \frac{1}{r}\,d.pw^2 + \frac{1}{2}\int \frac{1}{r^2}\,d.p^2 w^2;$$

soit actuellement

$$U = 2\int \frac{1}{r}\,d.pw^2 - \int \frac{1}{r^2}\,d.p^2 w^2, \tag{83}$$

notre équation deviendra

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2p\varpi^2}{r} - \frac{p^2\varpi^2}{r^2} - \mathrm{U},$$

expression où l'intégrale U est une quantité très peu variable.

Pour former l'équation différentielle de l'orbite, nous déduirons des relations (15) et (82)

$$r^2\frac{d\Phi^2}{dt^2} = \frac{p^2\varpi^2}{r^2}.$$

En divisant membre à membre l'équation précédente par celle-ci, il viendra

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\Phi^2} = \frac{2r}{p} - 1 - \frac{\mathrm{U}}{p^2\varpi^2}r^2:$$

soit, pour l'instant,

$$\rho = \frac{p}{r}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dr}{r}, \tag{83 bis}$$

nous aurons, en substituant la valeur de $\frac{dr}{r}$ et celle de $\frac{p}{r}$, dans l'équation précédente,

$$\frac{1}{d\Phi^2}\left(\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{p}\right)^2 = \frac{2}{\rho} - 1 - \frac{\mathrm{U}}{\varpi^2}\frac{1}{\rho^2},$$

ou, en multipliant tout par $\rho^2 d\Phi^2$,

$$\left(d\rho - \rho\frac{dp}{p}\right)^2 = \left(2\rho - \rho^2 - \frac{\mathrm{U}}{\varpi^2}\right)d\Phi^2 = \left[1 - \frac{\mathrm{U}}{\varpi^2} - (\rho-1)^2\right]d\Phi^2. \tag{84}$$

Or, si l'on fait abstraction de la variation des quantités p, U et ϖ, et que l'on pose

$$e^2 = 1 - \frac{\mathrm{U}}{\varpi^2}, \tag{85}$$

on trouve facilement que l'intégrale de l'équation (84) est

$$\rho = 1 + e\cos(\Phi - \varpi), \tag{86}$$

ϖ désignant d'ailleurs la constante d'intégration.

En ayant égard à la valeur (83 *bis*) de $\frac{p}{r}$, on obtient, pour équation de l'orbite,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\Phi - \varpi)}. \tag{87}$$

Il s'agit actuellement de disposer de la variation des constantes, de manière à satisfaire à l'équation différentielle (84), qui est du premier ordre seulement. Nous aurons, en différentiant (86) et y faisant tout varier,

$$d\rho = \cos(\Phi - \varpi)\, de - e\sin(\Phi - \varpi)\, d(\Phi - \varpi): \tag{87 bis}$$

mettons cette valeur dans (84) et observons que son second membre se réduit, en vertu de (85) et (86), à $e^2\sin^2(\Phi - \varpi)d\Phi^2$; cela nous permettra d'extraire les racines des deux membres et nous donnera

$$\cos(\Phi - \varpi)\, de - \rho\frac{dp}{p} - e\sin(\Phi - \varpi)(d\Phi - d\varpi) = -e\sin(\Phi - \varpi)\, d\Phi.$$

Nous n'écrivons pas le double signe, attendu que, notre équation devant encore être satisfaite dans le cas où les forces perturbatrices seraient nulles, le signe $-$ remplit seul cette condition.

Mettant à la place de ρ sa valeur $\frac{p}{r}$, et supprimant les termes en $d\Phi$ qui se détruisent, il restera

$$\cos(\Phi - \varpi)\, de - \frac{p}{r}\frac{dp}{p} + \sin(\Phi - \varpi)\, e\, d\varpi = 0. \tag{88}$$

A cette équation de condition va se joindre celle que nous déduirons de (85), en l'écrivant ainsi

$$1 - e^2 = \frac{U}{w^2};$$

d'où, en différentiant,

$$-\frac{2e\,de}{1 - e^2} = \frac{dU}{U} - \frac{2\,dw}{w} = \frac{dU}{(1 - e^2)w^2} - \frac{2\,dw}{w},$$

ou

$$e\,de = (1 - e^2)\frac{dw}{w} - \frac{1}{2}\frac{dU}{w^2}.$$

Or, nous tirons de (83),

$$dU = \frac{2}{r}(p\,d.w^2 + w^2\,dp) - \frac{2}{r^2}wp\,d.wp,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dU}{w^2} = -\frac{1}{r}\left(2p\frac{dw}{w} + dp\right) + \frac{p}{r^2}\left(p\frac{dw}{w} + dp\right);$$

Mettant cette valeur dans celle de ede, on aura

$$e\,de = \frac{p}{r}\left(\frac{p}{r} - 1\right)\frac{dp}{p} + \left(1 - e^2 - \frac{2p}{r} + \frac{p^2}{r^2}\right)\frac{dw}{w}.$$

Or on a, en vertu de l'équation de l'orbite,

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos(\Phi - \varpi);$$

d'un autre côté, le coefficient du second terme peut s'écrire

$$\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 - e^2 = -e^2\sin^2(\Phi - \varpi);$$

substituant ces valeurs et divisant tout par e, il vient finalement

$$de = \frac{p}{r}\cos(\Phi - \varpi)\frac{dp}{p} - e\sin^2(\Phi - \varpi)\frac{dw}{w}. \tag{89}$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (88) va nous fournir celle de $ed\varpi$: elle devient

$$\frac{p}{r}\cos^2(\Phi - \varpi)\frac{dp}{p} - e\sin^2(\Phi - \varpi)\cos(\Phi - \varpi)\frac{dw}{w} - \frac{p}{r}\frac{dp}{p} + \sin(\Phi - \varpi)\,e\,d\varpi = 0;$$

d'où, en réduisant et divisant ensuite par $\sin(\Phi - \varpi)$,

$$e\,d\varpi = \sin(\Phi - \varpi)\left[\frac{p}{r}\frac{dp}{p} + e\cos(\Phi - \varpi)\frac{dw}{w}\right]. \tag{90}$$

Cette expression peut être mise sous une forme plus simple : on a, en effet,

$$\frac{dw}{w} = \frac{d.pw}{pw} - \frac{dp}{p}; \tag{91}$$

la substitution de cette valeur conduit à la formule

$$e\,d\varpi = \sin(\Phi - \varpi)\left[\frac{dp}{p} + e\cos(\Phi - \varpi)\frac{d.pw}{pw}\right]. \tag{92}$$

On aurait pareillement

$$de = [\cos(\Phi - \varpi) + e]\frac{dp}{p} - e\sin^2(\Phi - \varpi)\frac{d.pw}{pw}. \tag{92 bis}$$

Nous obtenons ainsi (89) et (90) ou (92), les variations différentielles de l'excentricité e et de la longitude ϖ du périhélie, en fonction des variations des constantes p et w, dont les valeurs explicites deviennent, en substituant l'expression (14) de k, dans (80) et (81),

$$(93)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{(\int Y_1 r\,dt)^2}{f\mu - X_1 r^2}, \\[2ex] w = \dfrac{f\mu - X_1 r^2}{\int Y_1 r\,dt}. \end{cases}$$

La première de ces expressions fait connaître le demi-paramètre. Nous avons donc trois des quatre expressions différentielles qui sont nécessaires à la détermination du mouvement dans le plan de l'orbite. Quant à la quatrième, Wronski n'a pas à s'en préoccuper, attendu qu'il détermine la longitude Φ par l'intégration directe de l'équation (15), qui devient actuellement, en vertu de (82),

$$(94)\qquad d\Phi = \frac{pw}{r^2}\,dt.$$

On fait ainsi disparaître les difficultés auxquelles donne lieu la variation de la longitude moyenne de l'époque.

Nous avons obtenu la valeur de r (87); il nous reste à obtenir sa dérivée en fonction des nouvelles constantes et à calculer la vitesse v dans ce système.

Nous tirerons la valeur de $\dfrac{dr}{dt}$ des équations (83 *bis*) et (87 *bis*), ce qui nous donnera

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - \frac{r}{p}[\cos(\Phi-\varpi)\,de - e\sin(\Phi-\varpi)\,d\Phi + e\sin(\Phi-\varpi)\,d\varpi]$$

ou

$$\frac{dr}{r} = \frac{r}{p}e\sin(\Phi-\varpi)\,d\Phi - \frac{r}{p}\left[\cos(\Phi-\varpi)\,de - \frac{p}{r}\frac{dp}{p} + \sin(\Phi-\varpi)\,e\,d\varpi\right],$$

expression dont le deuxième terme est nul en vertu de (88); on a donc simplement

$$dr = \frac{r^2}{p}e\sin(\Phi-\varpi)\,d\Phi,$$

expression identique avec celle que fournirait l'équation (87), différentiée seulement par rapport à Φ; en d'autres termes, la dérivée $\frac{dr}{d\Phi}$ conserve la même forme, dans le mouvement troublé, que dans le mouvement elliptique.

Mettons pour $r^2 d\Phi$ sa valeur kdt, et remplaçons $\frac{k}{p}$ par w, suivant (82), nous aurons

$$\frac{dr}{dt} = we \sin(\Phi - \varpi), \tag{95}$$

et l'équation (94) nous donnera

$$\frac{r\,d\Phi}{dt} = w\frac{p}{r}. \tag{96}$$

La forme des expressions de $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ est ainsi la même que dans le mouvement elliptique : ces valeurs ne diffèrent de celles de l'ancien système qu'en ce que, dans les expressions (80) et (81) de p et de w, la constante de $f\mu$ se trouve accompagnée de la quantité $-X_1 r^2$, qui n'existe pas dans les formules de l'ancien système.

En élevant au carré les expressions précédentes et ajoutant, on a

$$v^2 = w^2\left(\frac{p^2}{r^2} + e^2 \sin^2\Phi\right),$$

expression qui se transforme en

$$v^2 = w^2[1 + 2e\cos(\Phi - \varpi) + e^2]. \tag{97}$$

Considérons les deux valeurs v_1 et v_2 de v, qui répondent au périhélie et à l'aphélie : $\cos(\Phi - \varpi)$ étant, dans le premier cas, égal à $+1$ et dans le second égal à -1, l'équation précédente donne $v_1 = w(1+e)$, $v_2 = w(1-e)$; on en déduit

$$w = \frac{1}{2}(v_1 + v_2),$$

relation qui précise la signification de la constante w.

Appliquons actuellement les équations (58 *bis*) au calcul des dérivées des auxiliaires ξ et υ, dont les différentielles peuvent être utilement substituées à celles de e et ϖ : nous aurons, en faisant usage des expressions (89) et (90).

$$(98)\quad \begin{cases} d\xi = \dfrac{p}{r}\cos\Phi\,\dfrac{dp}{p} - e\sin\Phi\sin(\Phi-\varpi)\,\dfrac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}, \\ d\upsilon = \dfrac{p}{r}\sin\Phi\,\dfrac{dp}{p} + e\cos\Phi\sin(\Phi-\varpi)\,\dfrac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}, \end{cases}$$

expressions beaucoup plus simples que celles auxquelles donne lieu l'emploi de l'ancienne méthode. Leur intégration étant effectuée, on aura, pour déterminer e, ϖ, les relations (60),

$$(99)\quad \begin{cases} e\sin\varpi = \upsilon, \\ e\cos\varpi = \xi. \end{cases} \qquad \text{condition : } e > 0$$

Comme on le voit, la détermination des éléments variables, par l'emploi des constantes p et $\mathfrak{w}$, est d'une simplicité très remarquable et semble devoir motiver la préférence en faveur de la nouvelle méthode.

La détermination des constantes qui fixent la position du plan de l'orbite se fera suivant les formules (66) à (68).

Pour compléter le système des équations de Wronski, nous devons ajouter une nouvelle détermination dont voici l'origine. La relation $\bar{r} = \dfrac{d\Phi}{dt}$ (p. 15) suppose nécessairement l'angle Φ et, par suite, ϖ, comptés d'une même ligne fixe dans le plan de l'orbite : si donc on désigne par χ la longitude de cette ligne fixe, comptée suivant les usages des astronomes, en sorte que l'on ait, pour la distance au nœud, cette expression

$$\varphi = \chi + \Phi - \Omega,$$

on en déduira, suivant (66),

$$\chi - \Omega = \varphi - \Phi = -\int \cos I\, d\Omega$$

ou

$$d(\chi - \Omega) = -\cos I\, d\Omega,$$

puis

$$(100)\quad \sin I\,\frac{d(\chi-\Omega)}{dt} = -\frac{Z_1 r}{k}\sin\varphi\cos I.$$

Cette expression coïncide avec la formule (125) de Wronski, moyennant une correction à appliquer à cette dernière, comme aux équations (70) de ses Prolégomènes : cette correction consiste à multiplier les éléments différentiels par le facteur

$$\frac{\sqrt{1 + 2e\cos\varphi + e^2}}{1 + e\cos\varphi},$$

facteur qui diffère peu de l'unité, quand l'excentricité est très petite.

La valeur précédente de $\frac{d(\chi - \Omega)}{dt}$ devient infinie dans le cas d'une inclinaison nulle et ne se prête pas à l'intégration dans cette circonstance; il en est autrement de la dérivée $\frac{d\chi}{dt}$: en effet, si l'on ajoute la troisième équation (66) avec (100), on a

$$\sin I \frac{d\chi}{dt} = (1 - \cos I)\frac{Z_1 r}{k} \sin\varphi;$$

d'où

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{Z_1 r}{k} \operatorname{tang}\frac{1}{2} I \sin\varphi. \tag{101}$$

On a dû remarquer que le demi-grand axe ne figure pas dans les équations différentielles, propres à la nouvelle méthode; il n'est pas sans intérêt d'en effectuer la détermination, ne fût-ce que pour montrer la grande différence de son expression avec la formule (56).

Les constantes du mouvement elliptique sont liées par la relation

$$a = \frac{p}{1 - e^2};$$

d'où

$$\frac{da}{a} = \frac{dp}{p} + \frac{2e}{1 - e^2} de,$$

et, en vertu de (89),

$$\frac{da}{a} = \left[1 + \frac{2e}{1 - e^2} \frac{p}{r} \cos(\Phi - \varpi)\right] \frac{dp}{p} - \frac{2e^2}{1 - e^2} \sin^2(\Phi - \varpi) \frac{dw}{w}. \tag{102}$$

Au moyen de l'expression (92 *bis*) de *de*, on aurait cette autre valeur

$$\frac{da}{a} = \left\{ \frac{2e[\cos(\Phi - \varpi) + e]}{1 - e^2} + 1 \right\} \frac{dp}{p} - \frac{2e^2}{1 - e^2} \sin^2(\Phi - \varpi) \frac{d.pw}{pw},$$

ou

$$\frac{da}{a} = \frac{1 + 2e\cos(\Phi - \varpi) + e^2}{1 - e^2} \frac{dp}{p} - \frac{2e^2}{1 - e^2} \sin^2(\Phi - \varpi) \frac{d.pw}{pw}, \tag{103}$$

expression qui, en vertu de la relation (97), peut encore s'écrire

$$(104)\qquad \frac{1}{a}\,da = \frac{v^2}{w^2(1-e^2)}\,\frac{dp}{p} - \frac{2e^2}{1-e^2}\sin^2(\Phi-\varpi)\,\frac{d.pw}{pw}.$$

Si l'on utilise cette formule pour le calcul de a, on pourra lui laisser la forme (104), qui est composée, comme celle (92) de $ed\varpi$, au moyen des différentielles de p et de pw. Mais, pour effectuer la comparaison que nous avons en vue, il importe d'exprimer explicitement la valeur de da, au moyen des composantes des forces perturbatrices.

La première équation (93) nous donne, en vertu de (14),

$$\frac{dp}{p} = 2\,\frac{dk}{k} + \frac{d(X_1 r^2)}{f\mu - X_1 r^2};$$

on a d'ailleurs, suivant (82),

$$\frac{d.pw}{pw} = \frac{dk}{k}:$$

la substitution de ces valeurs dans (104) nous donne, en ayant égard à (97),

$$\frac{1}{a}\,da = \frac{2}{1-e^2}\,[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2\,\frac{dk}{k} + \frac{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}{1-e^2}\,\frac{d(X_1 r^2)}{f\mu - X_1 r^2},$$

ou, en mettant pour dk sa valeur $Y_1 r dt$, et transformant le premier terme,

$$\frac{1}{a}\,da = \frac{2p}{1-e^2}\,[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\,\frac{Y_1}{k}\,dt + \frac{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}{1-e^2}\,\frac{d(X_1 r^2)}{f\mu - X_1 r^2},$$

puis, en vertu de (82),

$$(105)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{a}\,da &= \frac{2k}{1-e^2}\,[1+e\cos(\Phi-\varpi)]\,\frac{Y_1\,dt}{f\mu - X_1 r^2} \\ &\quad + \frac{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}{1-e^2}\,\frac{d(X_1 r^2)}{f\mu - X_1 r^2}. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, on voit que le premier terme de cette expression diffère, du premier terme de l'équation (56), par des quantités du second ordre relativement aux forces perturbatrices; quant au deuxième terme, si l'on développe la différentielle, on aura (95)

$$d(X_1 r^2) = 2X_1 r\,dr + r^2 dX_1 = 2X_1 r\,we\sin(\Phi-\varpi)\,dt + r^2 dX_1;$$

en mettant ici pour w sa valeur $\frac{k}{p}$, le deuxième terme de (105) deviendra

$$\frac{2ke}{1-e^2}\sin(\Phi-\varpi)\frac{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\frac{X_1\,dt}{f\mu-X_1r^2}$$
$$+\frac{1+2e\cos(\Phi-\varpi)+e^2}{1-e^2}\frac{r^2\,dX_1}{f\mu-X_1r^2}.$$

Le premier de ces termes diffère du terme en X_1, dans (56), de quantités qui sont du second ordre par rapport à l'excentricité et aux forces perturbatrices. Quant au terme en dX_1, il n'en existe pas de cette nature dans (56).

Telles sont les différences que présente la quantité $\frac{1}{a}\,da$ dans les deux méthodes.

Bien que Wronski n'emploie pas la variation de ε, il est cependant intéressant d'en former l'expression dans le système actuel.

Pour cela, nous déterminerons d'abord le moyen mouvement. L'équation (95) nous donne

$$\frac{dr^2}{dt^2}=w^2e^2\sin^2(\Phi-\varpi)=w^2[e^2-e^2\cos^2(\Phi-\varpi)]=w^2\left[e^2-\left(1-\frac{p}{r}\right)^2\right];$$

d'où, en multipliant par r^2,

$$r^2\,\frac{dr^2}{dt^2}=w^2(e^2r^2-r^2+2pr-p^2)=w^2(1-e^2)[a^2e^2-(r-a)^2]$$

ou

$$r^2\,\frac{dr^2}{dt^2}=w^2a^2(1-e^2)\left[e^2-\left(\frac{a}{r}-1\right)^2\right].$$

Nous intégrerons cette équation en négligeant la variation des constantes et posant

$$(106)\qquad \frac{r}{a}-1=e\cos u,$$

d'où

$$\frac{1}{a}\,\frac{dr}{dt}=-e\sin u\,\frac{du}{dt};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente et supprimant les facteurs communs, on aura

$$(1 - e\cos u)^2 \frac{du^2}{dt^2} = \frac{w^2(1-e^2)}{a^2};$$

d'où, en extrayant les racines et posant

$$(106\ bis) \qquad n = \frac{w\sqrt{1-e^2}}{a},$$

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt:$$

nous avons choisi le signe qui donne à du le signe de dt.

On a, en intégrant et en désignant la constante par $\varepsilon - \varpi$,

$$(107) \qquad \int n\,dt + \varepsilon - \varpi = u - e\sin u.$$

Il était nécessaire d'effectuer l'intégration pour obtenir la valeur de n dans le nouveau système ou, du moins, sa relation avec le demi-grand axe a. De la relation (106 *bis*), nous déduisons

$$a^2 n^2 = w^2(1-e^2) = \frac{w^2 p}{a},$$

ou, en vertu de la seconde équation (82),

$$(108) \qquad a^3 n^2 = f\mu - X_1 r^2,$$

relation à laquelle on pouvait s'attendre.

Pour avoir égard actuellement à la variation des constantes, différentions complètement l'équation (107), nous aurons

$$(109) \qquad n + \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt} = (1 - e\cos u)\frac{du}{dt} - \sin u\frac{de}{dt};$$

d'un autre côté, l'équation (106), mise sous la forme

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u,$$

nous donnera

$$\frac{dr}{r} - \frac{da}{a} = \frac{e\sin u\,du - \cos u\,de}{1 - e\cos u},$$

ou

$$\frac{r}{a}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) = e\sin u\frac{du}{dt} - \cos u\frac{de}{dt}.$$

Éliminons $\frac{du}{dt}$ entre cette équation et (109), nous aurons

$$\left(n + \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right) e \sin u - \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)\frac{r^2}{a^2} = (\cos u - e)\frac{de}{dt}.$$

Considérons le terme en $\frac{dr}{dt}$; ce terme, en y mettant la valeur (95), est

$$-\frac{r}{a^2}\,\text{w}e \sin(\Phi - \varpi) = -\frac{\text{w}e}{a}\sqrt{1-e^2}\sin u = -ne\sin u;$$

ce qui détruit le terme en n, comme cela doit être : il reste

$$\left(e\frac{d\varepsilon}{dt} - e\frac{d\varpi}{dt}\right)\sin u = -\frac{r^2}{a^3}\frac{da}{dt} + (\cos u - e)\frac{de}{dt};$$

d'où, en vertu des relations (40),

$$(e\,d\varepsilon - e\,d\varpi)\sin(\Phi - \varpi) = -\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{a}\frac{da}{a} + \sqrt{1-e^2}\cos(\Phi - \varpi)\,de.$$

Au moyen des valeurs (90), (102) et (89), on en déduit

$$\begin{aligned} e\,d\varepsilon\sin(\Phi-\varpi) = {} & \sin^2(\Phi-\varpi)\left[\frac{p}{r}\frac{dp}{p} + e\cos(\Phi-\varpi)\frac{d\text{w}}{\text{w}}\right] \\ & - \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{a}\left\{\left[1 + \frac{2e}{1-e^2}\frac{p}{r}\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{dp}{p} - \frac{2e^2}{1-e^2}\sin^2(\Phi-\varpi)\frac{d\text{w}}{\text{w}}\right\} \\ & + \sqrt{1-e^2}\cos(\Phi-\varpi)\left[\frac{p}{r}\cos(\Phi-\varpi)\frac{dp}{p} - e\sin^2(\Phi-\varpi)\frac{d\text{w}}{\text{w}}\right]. \end{aligned}$$

Occupons-nous d'abord des termes en $\sqrt{1-e^2}$; nous aurons, pour ceux en dp,

$$\sqrt{1-e^2}\left[\frac{p}{r}\cos^2(\Phi-\varpi) - \frac{r}{a} - 2e\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{dp}{p}.$$

Les deux termes négatifs renfermés entre crochets étant réduits au même dénominateur sont

$$-\frac{1 - e^2 + 2e\cos(\Phi-\varpi) + 2e^2\cos^2(\Phi-\varpi)}{1 + e\cos(\Phi-\varpi)} = \frac{e^2\sin^2(\Phi-\varpi) - [1 + e\cos(\Phi-\varpi)]^2}{1 + e\cos(\Phi-\varpi)};$$

le terme dont il s'agit peut donc s'écrire, en mettant pour $\frac{p}{r}$ sa valeur

$$\sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos^2(\Phi-\varpi)[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2+e^2\sin^2(\Phi-\varpi)-[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\,\frac{dp}{p}$$

$$=\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\left\{e^2\sin^2(\Phi-\varpi)-[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2\sin^2(\Phi-\varpi)\right\}\frac{dp}{p}$$

$$=-\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\sin^2(\Phi-\varpi)\left\{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-e^2\right\}\frac{dp}{p}.$$

Quant aux termes en $\sqrt{1-e^2}\,\frac{dw}{w}$, ils sont réductibles à

$$\sqrt{1-e^2}\sin^2(\Phi-\varpi)\,e\left[2e\frac{r}{p}-\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{dw}{w}.$$

On a donc, en supprimant le facteur commun $\sin(\Phi-\varpi)$,

$$\begin{aligned}e\,d\varepsilon = {} & \sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{p}{r}\frac{dp}{p}+e\cos(\Phi-\varpi)\frac{dw}{w}\right]\\ & -\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\sin(\Phi-\varpi)\left\{[1+e\cos(\Phi-\varpi)]^2-e^2\right\}\frac{dp}{p}\\ & +\sqrt{1-e^2}\;e\;\sin(\Phi-\varpi)\left[2e\frac{r}{p}-\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{dw}{w};\end{aligned}$$

or les termes en $\frac{dp}{p}$ se combinent de la manière suivante :

$$\sin(\Phi-\varpi)\left(\frac{p}{r}-\sqrt{1-e^2}\,\frac{p}{r}+e^2\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\right)\frac{dp}{p}$$

$$=\sin(\Phi-\varpi)\left(\frac{p}{r}\,\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}+e^2\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\right)\frac{dp}{p}.$$

Les termes en $\frac{dw}{w}$ se réduisent à

$$e\sin(\Phi-\varpi)\left[\cos(\Phi-\varpi)-\cos(\Phi-\varpi)\sqrt{1-e^2}+2e\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\right]\frac{dw}{w}$$

$$=e\sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{\cos(\Phi-\varpi)e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}+2e\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\right]\frac{dw}{w}.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation précédente et supprimant le facteur commun e, il viendra

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned} d\varepsilon = {} & e\sin(\Phi-\varpi)\left[\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}+\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{p}{r}\right]\frac{dp}{p} \\ & + e\sin(\Phi-\varpi)\left[2\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}. \end{aligned}\right.$$

En introduisant $p\mathfrak{w}$ à la place de $\mathfrak{w}$, on aurait cette autre expression

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} d\varepsilon = {} & e\sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}-\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\right]\frac{dp}{p} \\ & + e\sin(\Phi-\varpi)\left[2\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos(\Phi-\varpi)\right]\frac{d.p\mathfrak{w}}{p\mathfrak{w}}. \end{aligned}\right.$$

Nous ferons remarquer que les valeurs des différentielles de, $ed\varpi$ et $d\varepsilon$, exprimées au moyen de $\frac{d.p\mathfrak{w}}{p\mathfrak{w}}$, sont au moins aussi simples que celles exprimées au moyen de $\frac{d\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}}\cdot$ Or, comme $\frac{d.p\mathfrak{w}}{p\mathfrak{w}}=\frac{dk}{k}=\frac{Y_1\,r\,dt}{k}$, on ne voit pas l'avantage que Wronski a pu trouver à substituer la constante $\mathfrak{w}$ à la constante k. Notons, toutefois, que, dans le Tableau final de ses formules, il n'emploie la constante $\mathfrak{w}$ isolée, que pour le calcul de e.

Nous terminerons cet exposé de la méthode de Wronski en rapportant ici, sans les démontrer, les deux formules suivantes :

$$(112)\qquad r=\frac{p_0\,\mathrm{e}^{\Xi}}{1+e\cos(\Phi-\varpi_0)},$$

$$(113)\qquad \Xi=\int\left(1-\frac{\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right)\frac{dp}{p}-\int\frac{e\cos(\Phi-\varpi)\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\,\frac{d.p\mathfrak{w}}{p\mathfrak{w}},$$

où la lettre e désigne la base des logarithmes népériens, tandis que p_0 et ϖ_0 sont des constantes égales aux valeurs que prennent les éléments variables p et ϖ à une époque arbitraire et donnée :

La constante de l'intégrale Ξ est censée déterminée de manière que Ξ s'annule à l'époque donnée.

Wronski profite de ce que les éléments du calcul des intégrales qui figurent dans l'expression de Ξ se trouvent tout préparés, en vue d'autres déterminations, pour obtenir une expression relativement simple du rayon vecteur r, en substituant l'intégrale Ξ dans la formule (112).

Il est facile, étant donnée la forme (112) du rayon vecteur, de rechercher la valeur de l'exposant Ξ, qui est nécessaire pour tenir compte de la variation des éléments e, ϖ et p. Nous avons fait ce calcul, et nous avons trouvé une valeur de Ξ dont l'expression (113) contient seulement les termes principaux. On nous dispensera de reproduire ici ce calcul, si l'on observe que la valeur complète de Ξ sera nécessairement plus compliquée que l'expression (113), et, par suite, dépourvue des avantages que l'on pourrait songer à utiliser dans le cas d'une forme plus simple.

Au reste, Wronski paraît avoir reconnu lui-même les inconvénients de l'emploi des formules précédentes; car, après avoir reproduit, sous la marque (197), la désignation des intégrales qui constituent, suivant lui, la *science de l'ordre*, il s'exprime ainsi :

« Mais il est inutile, pour la détermination de la quantité de Ξ, d'opérer la dernière (178) de ces intégrations, parce que, comme nous l'avons déjà dit, la solution du problème-universel, dans laquelle entre cette quantité Ξ, ne doit servir que pour des cas spéciaux, où, d'après ce que nous avons indiqué sous les marques (74) et (75), cette intégration peut suffisamment être opérée par les nombres constants μ et ν. Pour l'exacte solution du problème-universel, il faut toujours employer la formule (181) (expression ordinaire du rayon vecteur), qui ne contient plus aucune intégration immédiate. Il ne reste donc qu'à opérer les sept premières de ces intégrations (197) (*voir* ci-dessous), pour achever complètement la théorie lunaire, et généralement toutes les questions pratiques de la Mécanique céleste. »

Résumé de la méthode de Wronski.

Le principe fondamental de cette méthode consiste à combiner, avec l'attraction exercée par le Soleil sur la masse m, la composante X_1 des forces perturbatrices suivant le rayon vecteur r.

k désignant la constante des aires, p le demi-paramètre et ϖ la demisomme des vitesses au périhélie et à l'aphélie, on a, entre ces quantités, les relations

$$p = \frac{k^2}{f\mu - X_1 r^2}, \qquad w = \frac{f\mu - X_1 r^2}{k}, \qquad pw = k,$$

et l'on peut prendre arbitrairement l'une de ces trois quantités comme élément distinct de l'orbite.

L'excentricité e, le demi-grand axe a et le demi-paramètre p conservent la relation

$$p = a(1 - e^2),$$

tandis que le demi-grand axe et le moyen mouvement n sont liés par cette nouvelle relation

$$a^3 n^2 = f\mu - X_1 r^2.$$

Wronski conserve l'excentricité et il substitue à la longitude du périhélie celle de l'aphélie; nous ferons usage de la longitude ϖ du périhélie. Quant au quatrième élément nécessaire à la détermination du mouvement dans le plan de l'orbite, notre auteur substitue à la longitude moyenne ε de l'époque la longitude vraie à cette époque.

Enfin, la situation du plan de l'orbite reste fixée par la longitude du nœud ascendant Ω et l'inclinaison I. A ces éléments s'ajoute la longitude χ de la ligne fixe dans le plan de l'orbite, d'où se comptent les angles Φ et ϖ, de telle sorte que la longitude du rayon vecteur et celle du périhélie, comptées suivant les usages des astronomes, sont respectivement

$$\chi + \Phi \quad \text{et} \quad \chi + \varpi \ (^1).$$

Ceci posé, voici les expressions des diverses constantes variables dont il est fait usage dans la nouvelle méthode : les formules sont classées sous la marque (197), p. clxviii de la *Réforme absolue du savoir humain*.

---

(1) Entraîné par l'habitude, il a pu nous arriver d'appliquer aux angles Φ et ϖ la dénomination ordinaire de *longitudes;* mais le lecteur aura sans doute suppléé à ce que ces dénominations peuvent avoir d'incorrect.

Tableau des formules de Wronski.

Numéros du présent Mémoire.	Numéros de Wronski.	
(14) et (82)...	(58)........	$p\varpi = k = \int Y_1 r\,dt,$
(89).........	(163).......	$e = \int \frac{p}{r}\cos(\Phi-\varpi)\frac{dp}{p} - \int e\sin^2(\Phi-\varpi)\frac{d\varpi}{\varpi},$
(66) et (99 *bis*).	1re éq. (70)...	$I = \int \frac{Z_1 r}{k}\cos(\chi-\Omega+\Phi)\,dt,$
(101).........	3e éq. (70)...	$\chi = \int \frac{Z_1 r}{k}\sin(\chi-\Omega+\Phi)\tang\frac{1}{2}I\,dt,$
(15).........	(65)........	$\Phi = \int \frac{k}{r^2}dt,\quad \text{ou}\quad \Phi = \int \frac{p\varpi}{r^2}dt,$
(92).........	(171)........	$\varpi = \int \sin(\Phi-\varpi)\left[\frac{1}{e}\frac{dp}{p} + \cos(\Phi-\varpi)\frac{d.p\varpi}{p\varpi}\right],$
(66) et (99 *bis*).	2e éq. (70)...	$\Omega = \int \frac{Z_1 r}{k}\sin(\chi-\Omega+\Phi)\frac{dt}{\sin I},$
(113)........	(179).......	$\left\{\begin{aligned} \Xi = &\int\left[1 - \frac{\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\right]\frac{dp}{p} \\ &-\int\frac{e\cos(\Phi-\varpi)\sin^2(\Phi-\varpi)}{1+e\cos(\Phi-\varpi)}\frac{d.p\varpi}{p\varpi}\ (^1). \end{aligned}\right.$

Cette dernière intégrale sert à calculer le rayon vecteur suivant la formule

(112)........ (180)....... $r = \frac{p_0 e^{\Xi}}{1+e\cos(\Phi-\varpi_0)},$

où p_0 et ϖ_0 désignent respectivement les valeurs de p et ϖ correspondantes à $\Xi = 0$.

Nous ajouterons à ces formules quelques-unes de celles que nous avons démontrées, et dont Wronski ne paraît pas devoir se servir :

---

(1) Se reporter à la citation du texte de Wronski, reproduit page 54.

Numéros du présent Mémoire.

(92 *bis*)..... $$e = \int [\cos(\Phi - \varpi) + e] \frac{dp}{p} - \int e \sin^2(\Phi - \varpi) \frac{d.p\varpi}{p\varpi},$$

(98)......... $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \int \frac{p}{r} \cos\Phi \frac{dp}{p} - \int e \sin\Phi \sin(\Phi - \varpi) \frac{d\varpi}{\varpi}, \\ \upsilon &= \int \frac{p}{r} \sin\Phi \frac{dp}{p} + \int e \cos\Phi \sin(\Phi - \varpi) \frac{d\varpi}{\varpi}, \end{aligned}\right.$$

ou les deux suivantes qui se déduisent aisément de (98),

(114)........ $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \int (\cos\Phi + e\cos\varpi) \frac{dp}{p} - \int e \sin\Phi \sin(\Phi - \varpi) \frac{d.p\varpi}{p\varpi}, \\ \upsilon &= \int (\sin\Phi + e\sin\varpi) \frac{dp}{p} + \int e \cos\Phi \sin(\Phi - \varpi) \frac{d.p\varpi}{p\varpi}, \end{aligned}\right.$$

(99)......... $$\left\{\begin{aligned} e\sin\varpi &= \upsilon, \\ e\cos\varpi &= \xi; \end{aligned}\right.$$

d'où ϖ et e.

(99 *bis*)...... $$\varphi = \chi - \Omega + \Phi,$$

(67)......... $$\left\{\begin{aligned} \xi' &= -\int (\cos I \cos\Omega \cos\varphi - \sin\Omega \sin\varphi) \frac{Z_1 r}{k} dt, \\ \upsilon' &= +\int (\cos I \sin\Omega \cos\varphi + \cos\Omega \sin\varphi) \frac{Z_1 r}{k} dt; \end{aligned}\right.$$

ou

(115)........ $$\left\{\begin{aligned} \xi' &= -\int \left[\cos(\chi + \Phi) - 2\cos\varphi \cos\Omega \sin^2 \tfrac{1}{2} I\right] \frac{Z_1 r}{k} dt, \\ \upsilon' &= +\int \left[\sin(\chi + \Phi) - 2\cos\varphi \sin\Omega \sin^2 \tfrac{1}{2} I\right] \frac{Z_1 r}{k} dt; \end{aligned}\right.$$

(68)......... $$\left\{\begin{aligned} \sin I \sin\Omega &= +\upsilon', \\ \sin I \cos\Omega &= -\xi'; \end{aligned}\right.$$

d'où Ω et I.

Dans la Note suivante, nous donnerons les expressions des composantes X_1, Y_1, Z_1 des forces perturbatrices.

8

CALCUL DES COMPOSANTES X_1, Y_1, Z_1 DES FORCES PERTURBATRICES, SUIVANT LES AXES MOBILES;

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Désignant par m' la masse de l'une quelconque des planètes troublantes, x', y', z' ses coordonnées rapportées aux axes fixes, r' son rayon vecteur et s' sa distance à la planète troublée m, on a d'abord

$$s'^2 = r^2 - 2rr'\cos(r, r') + r'^2. \tag{116}$$

En ne considérant que la seule planète perturbatrice m', on a pour expressions des composantes, suivant les axes fixes,

$$X = fm'\left(\frac{x'-x}{s'^3} - \frac{x'}{r'^3}\right),$$

$$Y = fm'\left(\frac{y'-y}{s'^3} - \frac{y'}{r'^3}\right),$$

$$Z = fm'\left(\frac{z'-z}{s'^3} - \frac{z'}{r'^3}\right).$$

Or, si l'on fait usage des notations (1), on aura, pour expressions des composantes suivant les axes mobiles,

$$X_1 = aX + a'Y + a''Z,$$

$$Y_1 = bX + b'Y + b''Z,$$

$$Z_1 = cX + c'Y + c''Z;$$

mettant ici les valeurs précédentes de X, Y, Z, il vient

$$X_1 = \frac{fm'}{s'^3}[a(x'-x) + a'(y'-y) + a''(z'-z)] - \frac{fm'}{r'^3}(ax' + a'y' + a''z'),$$

$$Y_1 = \frac{fm'}{s'^3}[b(x'-x) + b'(y'-y) + b''(z'-z)] - \frac{fm'}{r'^3}(bx' + b'y' + b''z'),$$

$$Z_1 = \frac{fm'}{s'^3}[c(x'-x) + c'(y'-y) + c''(z'-z)] - \frac{fm'}{r'^3}(cx' + c'y' + c''z'),$$

expressions qui peuvent encore s'écrire

$$(117)\quad \begin{cases} X_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(ax' + a'y' + a''z') - \frac{fm'}{s'^3}(ax + a'y + a''z), \\ Y_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(bx' + b'y' + b''z') - \frac{fm'}{s'^3}(bx + b'y + b''z), \\ Z_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(cx' + c'y' + c''z') - \frac{fm'}{s'^3}(cx + c'y + c''z). \end{cases}$$

Or, on a

$$x' = r'\cos(r', x), \qquad y' = r'\cos(r', y), \qquad z' = r'\cos(r', z);$$

il s'ensuit, en ayant égard à (1),

$$(118)\quad \begin{cases} ax' + a'y' + a''z' = r'\cos(r', x_1), \\ bx' + b'y' + b''z' = r'\cos(r', y_1), \\ cx' + c'y' + c''z' = r'\cos(r', z_1). \end{cases}$$

On aurait de même

$$ax + a'y + a''z = r\cos(r, x_1),$$
$$bx + b'y + b''z = r\cos(r, y_1),$$
$$cx + c'y + c''z = r\cos(r, z_1).$$

Le premier des derniers cosinus est égal à l'unité, et les deux autres sont nuls. En vertu de ces relations, les formules (117) prennent cette autre forme

$$(119)\quad \begin{cases} X_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\cos(r', x_1) - \frac{fm'}{s'^3}\, r, \\ Y_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\cos(r', y_1), \\ Z_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\cos(r', z_1). \end{cases}$$

Le calcul des cosinus qui restent ici peut se faire de deux manières différentes : 1° au moyen de la seule trigonométrie sphérique ; 2° en faisant usage des expressions (118). Nous nous bornerons à l'emploi des formules (118).

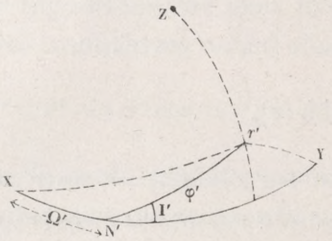
Avant tout, nous ferons remarquer que, l'axe des x_1 coïncidant avec le rayon vecteur r, le cosinus qui figure dans l'équation (116) a pour expression

$$\cos(r, r') = \cos(r', x_1). \tag{120}$$

Calculons d'abord les coordonnées x', y', z' en fonctions des éléments de l'orbite de m'.

Soient Ω' et I' la longitude du nœud et l'inclinaison de l'orbite de m',

Fig. 3.



φ' la distance de r' au nœud N'; on aura (*fig.* 3)

$$x' = r'\cos(r', X), \qquad y' = r'\cos(r', Y), \qquad z' = r'\cos(r', Z)$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} x' &= r'(\cos\Omega'\cos\varphi' - \sin\Omega'\sin\varphi'\cos I'), \\ y' &= r'(\sin\Omega'\cos\varphi' + \cos\Omega'\sin\varphi'\cos I'), \\ z' &= r'\sin\varphi'\sin I'. \end{aligned}\right. \tag{121}$$

Changeons maintenant, dans les formules (5) de la page (64) du 2^e Volume de la *Mécanique* de Poisson, ψ en $-\Omega$ et θ en $-I$, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} a &= -\cos I\sin\Omega\sin\varphi + \cos\Omega\cos\varphi, \\ a' &= +\cos I\cos\Omega\sin\varphi + \sin\Omega\cos\varphi, \\ a'' &= +\sin I\sin\varphi, \\ b &= -\cos I\sin\Omega\cos\varphi - \cos\Omega\sin\varphi, \\ b' &= +\cos I\cos\Omega\cos\varphi - \sin\Omega\sin\varphi, \\ b'' &= +\sin I\cos\varphi, \\ c &= +\sin I\sin\Omega, \\ c' &= -\sin I\cos\Omega, \\ c'' &= +\cos I. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

Au moyen de ces valeurs, on obtient

$$a\,x' = r'(-\cos I \sin\Omega \sin\varphi + \cos\Omega\cos\varphi)(\cos\Omega'\cos\varphi' - \sin\Omega'\sin\varphi'\cos I'),$$
$$a'\,y' = r'(+\cos I\cos\Omega\sin\varphi + \sin\Omega\cos\varphi)(\sin\Omega'\cos\varphi' + \cos\Omega'\sin\varphi'\cos I').$$

Effectuant les produits et ajoutant, il vient

$$ax' + a'y' = r'\left\{\begin{array}{l} +\cos I\ \sin\varphi\ \cos\varphi'\sin(\Omega'-\Omega) + \cos\varphi'\cos\varphi\ \cos(\Omega'-\Omega) \\ -\cos I'\sin\varphi'\cos\varphi\ \sin(\Omega'-\Omega) + \sin\varphi\ \sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega)\cos I\cos I' \end{array}\right\}.$$

Or, nous avons

$$\cos I = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}I,$$
$$\cos I' = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}I',$$
$$\cos I\cos I' = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}I - 2\sin^2\frac{1}{2}I' + 4\sin^2\frac{1}{2}I\sin^2\frac{1}{2}I'.$$

Substituant ces valeurs, on trouve aisément

$$ax' + a'y' = r'\left\{\begin{array}{l} +\sin\varphi\ \cos\varphi'\sin(\Omega'-\Omega) - 2\sin\varphi\ \cos\varphi'\sin(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I \\ -\sin\varphi'\cos\varphi\ \sin(\Omega'-\Omega) - 2\sin\varphi\ \sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I \\ +\cos\varphi\ \cos\varphi'\cos(\Omega'-\Omega) + 2\sin\varphi'\cos\varphi\ \sin(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I' \\ +\sin\varphi\ \sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega) - 2\sin\varphi'\sin\varphi\ \cos(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I' \\ \qquad\qquad + 4\sin\varphi\ \sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I\sin^2\frac{1}{2}I' \end{array}\right\}$$

ou

$$ax' + a'y' = r'\left\{\begin{array}{l} -\sin(\varphi'-\varphi)\sin(\Omega'-\Omega) - 2\sin\varphi\ \sin(\varphi' + \Omega' - \Omega)\sin^2\frac{1}{2}I \\ +\cos(\varphi'-\varphi)\cos(\Omega'-\Omega) - 2\sin\varphi'\sin(\varphi + \Omega - \Omega')\sin^2\frac{1}{2}I' \\ \qquad\qquad + 4\sin\varphi\ \sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega)\sin^2\frac{1}{2}I\sin^2\frac{1}{2}I' \end{array}\right\}.$$

Les termes de la $\{\ \}$ qui sont indépendants des inclinaisons se réduisent à

$$\cos[\varphi' + \Omega' - (\varphi + \Omega)].$$

On a d'ailleurs

$$a'' z' = r' \sin\varphi \sin\varphi' \sin\mathrm{I} \sin\mathrm{I}'.$$

En ajoutant ces termes, pour former la valeur de $\cos(r', x_1)$, suivant la première équation (118), nous en transformerons les éléments, d'après la relation (99 *bis*),

$$(123) \qquad \varphi = \chi + \Phi - \Omega \quad \text{ou} \quad \varphi + \Omega = \chi + \Phi,$$

et nous poserons

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4}\alpha = & - \sin(\chi + \Phi - \Omega)\sin(\chi' + \Phi' - \Omega)\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ & - \sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\sin(\chi + \Phi - \Omega')\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}' \\ & + 2\sin(\chi + \Phi - \Omega)\sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\cos(\Omega' - \Omega)\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}' \\ & + \frac{1}{2}\sin(\chi + \Phi - \Omega)\sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\sin\mathrm{I}\sin\mathrm{I}'. \end{aligned} \right.$$

De cette manière, nous aurons (118), (119) et (120),

$$(125) \qquad r'\cos(r, r') = r'\cos(r', x_1) = r'\left[\cos(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi) + \frac{1}{2}\alpha\right].$$

Il est facile de déduire de ces formules celles qui expriment la valeur de $r'\cos(r', y_1)$; en effet, pour substituer l'axe mobile des y_1 à l'axe des x_1, il suffit d'augmenter la distance φ au nœud, ou l'angle Φ, de 90°. En conséquence, si nous désignons par β ce que devient α, quand on augmente Φ de 90°, nous aurons

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4}\beta = & - \cos(\chi + \Phi - \Omega)\ \sin(\chi' + \Phi' - \Omega)\ \sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ & - \sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\cos(\chi + \Phi - \Omega')\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}' \\ & + 2\cos(\chi + \Phi - \Omega)\sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\cos(\Omega' - \Omega)\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}' \\ & + \frac{1}{2}\cos(\chi + \Phi - \Omega)\sin(\chi' + \Phi' - \Omega')\sin\mathrm{I}\sin\mathrm{I}', \end{aligned} \right.$$

$$(127) \qquad r'\cos(r', y_1) = r'\left[\sin(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi) + \frac{1}{2}\beta\right].$$

Passons au calcul de la troisième équation (118). Des formules (121) et (122), nous déduirons

$$cx' + c'y' + c''z' = r'[+\sin I \sin\Omega\,(\cos\Omega'\cos\varphi' - \sin\Omega'\sin\varphi'\cos I') \\ - \sin I\cos\Omega\,(\sin\Omega'\cos\varphi' + \cos\Omega'\sin\varphi'\cos I') + \sin I'\cos I\sin\varphi'],$$

ou, suivant la troisième équation (118),

$$r'\cos(r', z_1) = r'[-\sin I\cos\varphi'\sin(\Omega'-\Omega) \\ - \sin I\cos I'\sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega) + \sin I'\cos I\sin\varphi'].$$

En transformant, comme plus haut, $\cos I$ et $\cos I'$, il vient

$$r'\cos(r', z_1) = r'\Big[-\sin I\sin(\varphi'+\Omega'-\Omega) + \sin I'\sin\varphi' \\ + 2\sin I\sin\varphi'\cos(\Omega'-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}I' - 2\sin I'\sin\varphi'\sin^2\tfrac{1}{2}I\Big].$$

Substituant les valeurs (123), et posant

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4}\gamma = &-\frac{1}{2}\sin(\chi'+\Phi'-\Omega)\sin I + \frac{1}{2}\sin(\chi'+\Phi'-\Omega')\sin I' \\ &+ \sin(\chi'+\Phi'-\Omega')\cos(\Omega'-\Omega)\sin I\sin^2\tfrac{1}{2}I' - \sin(\chi'+\Phi'-\Omega')\sin I'\sin^2\tfrac{1}{2}I, \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(129)\qquad r'\cos(r', z_1) = r'\,\frac{1}{2}\,\gamma.$$

Au moyen de ces valeurs, les équations (119) deviennent

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\left[\cos(\chi'+\Phi'-\chi-\Phi) + \frac{1}{2}\alpha\right] - \frac{fm'}{s'^3}\,r, \\ Y_1 &= fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\left[\sin(\chi'+\Phi'-\chi-\Phi) + \frac{1}{2}\beta\right], \\ Z_1 &= fm'\left(\frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\,\frac{1}{2}\,\gamma, \end{aligned}\right.$$

et l'on a, pour calculer s', suivant (116),

$$(131)\qquad s'^2 = r^2 - 2rr'\left[\cos(\chi'+\Phi'-\chi-\Phi) + \frac{1}{2}\alpha\right] + r'^2.$$

Nous allons actuellement procéder au développement de X_1, Y_1, Z_1, suivant les puissances et produits de α, β, γ.

A cet effet, soit s'_0 la valeur de s' correspondante à $\alpha = 0$, nous aurons

$$s'^2_0 = r^2 - 2rr'\cos(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi) + r'^2; \tag{132}$$

d'où, en soustrayant de (131),

$$s'^2 - s'^2_0 = -\alpha r r',$$

puis

$$s'^2 = s'^2_0\left(1 - \frac{\alpha r r'}{s'^2_0}\right).$$

Élevant les deux membres de cette équation à la puissance $-\frac{3}{2}$, on aura

$$\frac{1}{s'^3} = \frac{1}{s'^3_0}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\alpha r r'}{s'^2_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^2 r^2 r'^2}{s'^4_0} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\alpha^3 r^3 r'^3}{s'^6_0} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\frac{\alpha^4 r^4 r'^4}{s'^8_0} + \ldots\right); \tag{133}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{s'^3} - \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{s'^3_0} - \frac{1}{r'^3} &+ \frac{3}{2}\frac{\alpha r r'}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^2 r^2 r'^2}{s'^7_0} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\alpha^3 r^3 r'^3}{s'^9_0} \\ &+ \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\frac{\alpha^4 r^4 r'^4}{s'^{11}_0} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{134}$$

En mettant ces valeurs dans (130), il viendra

$$\left\{\begin{aligned} X_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3_0} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\cos(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi) &- \frac{fm'}{s'^3_0} r + \frac{1}{2} fm'\left(\frac{1}{s'^3_0} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\alpha \\ &+ fm'\cos(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi)\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha r r'^2}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^2 r^2 r'^3}{s'^7_0} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\alpha^3 r^3 r'^4}{s'^9_0} + \ldots\right) \\ &+ \frac{1}{2} fm'\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha^2 r r'^2}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^3 r^2 r'^3}{s'^7_0} + \ldots\right) \\ &- fm'\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha r^2 r'}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^2 r^3 r'^2}{s'^7_0} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\alpha^3 r^4 r'^3}{s'^9_0} + \ldots\right), \end{aligned}\right. \tag{135}$$

$$\left\{\begin{aligned} Y_1 = fm'\left(\frac{1}{s'^3_0} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\sin(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi) &+ \frac{1}{2} fm'\left(\frac{1}{s'^3_0} - \frac{1}{r'^3}\right) r'\beta \\ &+ fm'\sin(\chi' + \Phi' - \chi - \Phi)\left(\frac{3}{2}\frac{\alpha r r'^2}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\frac{\alpha^2 r^2 r'^3}{s'^7_0} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{\alpha^3 r^3 r'^4}{s'^9_0} + \ldots\right) \\ &+ \frac{1}{2} fm'\left(\frac{3}{2}\alpha\beta\frac{r r'^2}{s'^5_0} + \frac{3.5}{2.4}\alpha^2\beta\frac{r^2 r'^3}{s'^7_0} + \ldots\right), \end{aligned}\right. \tag{136}$$

$$(137)\quad \begin{cases} Z_1 = fm'\left(\dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right) r' \dfrac{1}{2}\gamma \\ \quad + \dfrac{1}{2} fm'\left(\dfrac{3}{2}\alpha\gamma\dfrac{rr'^2}{s_0'^5} + \dfrac{3.5}{2.4}\alpha^2\gamma\dfrac{r^2 r'^3}{s_0'^7} + \dfrac{3.5.7}{2.4.6}\alpha^3\gamma\dfrac{r^3 r'^4}{s_0'^9} + \cdots\right). \end{cases}$$

Comparons actuellement ces développements avec les formules que Wronski a publiées, sous la marque (113), p. LXV.

En vue de simplifier les résultats, l'auteur prend, pour plan fixe, le plan dans lequel se meut la planète m à l'instant considéré, de sorte que l'inclinaison I est nulle, tandis que les quantités I′ et Ω′ désignent l'inclinaison de l'orbite de m' sur celle de m et la longitude du nœud ascendant de m' sur le plan de la même orbite. D'un autre côté, les longitudes χ et χ' des lignes fixes étant arbitraires, Wronski fait

$$(137\ bis)\qquad \chi' = \chi.$$

Enfin, il néglige dans ses développements les termes du quatrième ordre par rapport aux inclinaisons.

Sous ces conditions, nos formules (124), (126) et (128) se réduisent à

$$(138)\quad \begin{cases} \alpha = -\ \ \sin(\chi + \Phi' - \Omega')\sin(\chi + \Phi - \Omega')\sin^2 I', \\ \beta = -\ \ \sin(\chi + \Phi' - \Omega')\cos(\chi + \Phi - \Omega')\sin^2 I', \\ \gamma = +\,2\sin(\chi + \Phi' - \Omega')\sin I'. \end{cases}$$

Mettant ces valeurs dans les équations précédentes, il vient

$$(139)\quad \begin{cases} X_1 = fm'\left[\left(\dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right) r'\cos(\Phi' - \Phi) - \dfrac{r}{s_0'^3}\right] \\ \quad - \dfrac{1}{2} fm'\left\{\dfrac{3r}{s_0'^5}[r'\cos(\Phi' - \Phi) - r] + \dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right\} \times \\ \quad \times r'\sin(\chi + \Phi' - \Omega')\sin(\chi + \Phi - \Omega')\sin^2 I' + \ldots, \\ Y_1 = fm'\left(\dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right) r'\sin(\Phi' - \Phi) \\ \quad - \dfrac{1}{2} fm'\left[\dfrac{3rr'}{s_0'^5}\sin(\Phi' - \Phi)\sin(\chi + \Phi - \Omega') + \left(\dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right)\cos(\chi + \Phi - \Omega')\right] \times \\ \quad \times r'\sin(\chi + \Phi' - \Omega')\sin^2 I' + \ldots, \\ Z_1 = fm'\left(\dfrac{1}{s_0'^3} - \dfrac{1}{r'^3}\right) r'\sin(\chi + \Phi' - \Omega')\sin I' \\ \quad - \dfrac{1}{2} fm'\dfrac{3rr'^2}{s_0'^5}\sin^2(\chi + \Phi' - \Omega')\sin(\chi + \Phi - \Omega')\sin^3 I' + \ldots. \end{cases}$$

Wzory 113.

Ces résultats sont exactement conformes avec ceux de Wronski.

Il est presque superflu de rappeler que les valeurs finales des X_1, Y_1, Z_1 s'obtiendront en calculant, au moyen des formules (135) à (139), les valeurs fournies par chacune des planètes perturbatrices et faisant les sommes respectives.

On a ainsi tous les éléments nécessaires à l'application des méthodes d'intégration proposées par l'auteur de la *Réforme absolue du savoir humain*.

Il n'est pas sans intérêt de faire connaître que les épreuves de ce travail ont été revues, avec soin, par M. O. Callandreau. Nous prions ce jeune et zélé astronome d'en agréer tous nos remerciements. Y. V.

ERRATA.

Page 17, ligne 1, supprimez le mot : mouvement.
22, ligne 5 en remontant, au lieu de $(\cos - e)$, lisez $(\cos u - e)$.
32, ligne 11, au lieu de *en négligeant,* lisez *en considérant comme constante.*
32, lignes 5 et 6 en remontant, mettez dt en diviseur de $d\psi$.
46, ligne 10 en remontant, ajoutez (99 *bis*) comme marque de l'équation $\varphi = \chi + \Phi - \Omega$.
49, ligne 7 en remontant, au lieu de $\frac{a}{r}$, lisez $\frac{r}{a}$.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Note sur les Méthodes de Wronski, publiée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XCII, séance du 4 avril 1881 1

Avertissement 8

NOUVELLE FORME DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DES PLANÈTES ET DES COMÈTES 9

Intégration, en négligeant les forces perturbatrices 17

Variation des éléments de l'orbite 21

Détermination du plan de l'orbite 32

Autres formes des expressions différentielles des éléments a, e, ϖ 33

Exposé de la méthode de Wronski 39

Résumé de la méthode de Wronski 54

Tableau des formules de Wronski 56

Calcul des composantes X_1, Y_1, Z_1 des forces perturbatrices suivant les axes mobiles 58

Errata 66

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.