MÉTHODE GÉNÉRALE

D'INTÉGRATION,

Par Eg. HANEGRAEFF.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1856

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

AVERTISSEMENT.

Dans son ouvrage sur la *Réforme des Mathématiques,* M. Wronski présente, sous le nom de *Méthode primordiale et universelle,* des considérations analytiques fort remarquables; mais exposées d'une façon obscure et incomplète, elles sont à peu près inintelligibles pour ceux qui n'ont point approfondi ses ouvrages antérieurs.

Bornant l'application de nos formules au cas particulier de l'intégration des fonctions de x, nous avons essayé de présenter cette méthode à notre manière. Nous croyons en avoir abrégé les formules et simplifié la notation. Enfin nous avons trouvé, par une voie simple et facile, l'origine des fonctions fondamentales P, que M. Wronski s'est contenté de poser sans en donner la déduction.

Nous ne pouvons indiquer ici les principes généraux sur lesquels cette méthode nous semble devoir reposer, et qui ne sont pas ceux de M. Wronski. Nous nous proposons de les exposer dans un ouvrage sur la philosophie des mathématiques, que nous comptons publier prochainement.

$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \ldots$
$x=0$
$F(h) = F(0) + hF'(0) + \ldots$
$F(x) = F(0) + xF'(0) + \ldots$

MÉTHODE GÉNÉRALE

D'INTÉGRATION.

Soit

$$F'x\ dx$$

une différentielle donnée.

La fonction primitive

$$Fx$$

peut être supposée égale au produit d'un nombre déterminé de facteurs, et cela avec une approximation d'autant plus grande, que le nombre de facteurs lui-même sera plus grand.

Admettons donc que, pour une valeur particulière de la fonction, nous ayons

$$(1)\qquad Fa = y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\dots,\ y_{\varpi}$$

et supposons que a augmente de $(x-a)$, il viendra

$$(2)\left\{\begin{aligned} Fx &= [y_1-(x-a)]\,[y_2-(x-a)]\,[y_3-(x-a)]\dots[y_{\varpi}-(x-a)] \\ &= A_{\varpi}-(x-a)\,A_{\varpi-1}+(x-a)^2 A_{\varpi-2}-(x-a)^3 A_{\varpi-3}\dots \\ &\qquad (-1)^{\varpi}\,(x-a)^{\varpi} A_0, \end{aligned}\right.$$

A_0 étant toujours égal à l'unité. Ou bien encore, en vertu de l'équation (1),

$$(3)\quad Fx = Fa\left[1-(x-a)\frac{A_{\varpi-1}}{A_{\varpi}}+(x-a)^2\frac{A_{\varpi-2}}{A_{\varpi}}-\dots(-1)^{\varpi}(x-a)^{\varpi}\frac{A_0}{A_{\varpi}}\right].$$

Mais

$$Fa,$$

développé par rapport à $(x-a)$, donne

$$(4)\quad Fa = Fx - F^{(1)}x(x-a) + F^{(2)}x(x-a)^2 - F^{(3)}x(x-a)^3 + \ldots$$

Remplaçant cette valeur de Fa dans l'équation (3), nous obtiendrons

$$(5)\quad Fx = \left[\begin{array}{l} 1-(x-a)\dfrac{A_{\varpi-1}}{A_\varpi} + (x-a)^2\dfrac{A_{\varpi-2}}{A_\varpi} \\ -(x-a)^3\dfrac{A_{\varpi-3}}{A_\varpi}\cdots(-1)^\varpi(x-a)^\varpi\dfrac{A_0}{A_\varpi} \end{array}\right]$$
$$\times\left[Fx-(x-a)F^{(1)}x + (x-a)^2F^{(2)}x - (x-a)^3F^{(3)}x + \ldots\right];$$

effectuant la multiplication,

$$\begin{aligned} Fx = Fx &- \left[A_\varpi F^{(1)}x + A_{\varpi-1}Fx\right]\frac{x-a}{A_\varpi} \\ &+ \left[A_\varpi F^{(2)}x + A_{\varpi-1}F^{(1)}x + A_{\varpi-2}Fx\right]\frac{(x-a)^2}{A_\varpi} \\ &- \left[A_\varpi F^{(3)}x + A_{\varpi-1}F^{(2)}x + A_{\varpi-2}F^{(1)}x + A_{\varpi-3}Fx\right]\frac{(x-a)^3}{A_\varpi} \end{aligned}$$

. . . .

$$(-1)^\varpi\left[A_\varpi F^{(\varpi)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi-1)}x + A_{\varpi-2}F^{(\varpi-2)}x \ldots + A_0Fx\right]\frac{(x-a)^\varpi}{A_\varpi}$$

$$(-1)^{\varpi+1}\left[A_\varpi F^{(\varpi+1)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi)}x + A_{\varpi-2}F^{(\varpi-1)}x \ldots + A_0F^{(1)}x\right]\frac{(x-a)^{\varpi+1}}{A_\varpi}$$

$$(-1)^{\varpi+2}\left[A_\varpi F^{(\varpi+2)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi+1)}x + A_{\varpi-2}F^{(\varpi)}x \ldots + A_0F^{(2)}x\right]\frac{(x-a)^{\varpi+2}}{A_\varpi}$$

. . . .

d'où nous tirons les équations

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} A_\varpi F^{(\varpi+1)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi)}x + A_{\varpi'-2}F^{(\varpi-1)}x + \ldots A_0F^{(1)} = 0, \\ A_\varpi F^{(\varpi+2)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi+1)}x + A_{\varpi'-2}F^{(\varpi)}x + \ldots A_0F^{(2)} = 0, \\ A_\varpi F^{(\varpi+3)}x + A_{\varpi-1}F^{(\varpi+2)}x + A_{\varpi-2}F^{(\varpi+1)}x + \ldots A_0F^{(3)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_\varpi F^{(2\varpi)}x + A_{\varpi-1}F^{(2\varpi-1)}x + A_{\varpi-2}F^{(2\varpi-2)}x + \ldots A_0F_\varpi = 0, \end{array}\right.$$

qui serviront à déterminer les ϖ coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\varpi$ en fonctions des différentielles connues $F^{(1)}x$, $F^{(2)}x$, $F^{(3)}x, \ldots, F^{(2\varpi)}x$.

Ainsi, pour

$$\varpi = 1,$$

nous aurons

(7) $$A_1 F^{(2)}x + F^{(1)}x = 0;$$

d'où

(8) $$A_1 = -\frac{F^{(1)}x}{F^{(2)}x}.$$

Pour

$$\varpi = 2,$$

nous pourrions prendre les deux équations

$$A_2 F^{(3)}x + A_1 F^{(2)}x + F^{(1)}x = 0,$$
$$A_2 F^{(4)}x + A_1 F^{(3)}x + F^{(2)}x = 0;$$

mais il est mieux d'éliminer par différentiation.

Ainsi la première de ces deux équations

(9) $$A_2 F^{(3)}x + A_1 F^{(2)}x + F^{(1)}x = 0$$

divisée par $F^{(3)}x$ et différentiée, en ayant soin de diviser chaque différentielle par son nouvel indice, de sorte que

$$F^{(\mu)}x = \frac{d^{\mu} F x}{1.2\ldots\mu\, dx^{\mu}}$$

différentié donnerait

$$F^{(\mu+1)}x = \frac{d^{\mu+1} F x}{1.2\ldots(\mu+1)\, dx^{\mu+1}};$$

nous aurons

$$A_1 \left(\frac{F^{(2)}x}{F^{(3)}x}\right)'' + \left(\frac{F^{(1)}x}{F^{(3)}x}\right)' = 0,$$

c'est-à-dire,

$$A_1 \frac{[(F^{(3)}x)^2 - F^{(2)}x\, F^{(4)}x]}{(F^{(3)}x)^2} + \frac{F^{(3)}x\, F^{(2)}x - F^{(1)}x\, F^{(4)}x}{(F^{(3)}x)^2} = 0,$$

d'où

$$(10) \qquad A_1 = -\frac{F^{(3)}x\,F^{(2)}x - F^{(1)}x\,F^{(4)}x}{[F^{(3)}x]^2 - F^{(2)}x\,F^{(4)}x}.$$

On calculerait cette valeur de A_1, et l'ayant substituée dans (9), nous en tirerions la valeur de A_2.

De même, pour

$$\varpi = 3,$$

nous prendrions l'équation

$$(11) \qquad A_3\,F^{(4)}x + A_2\,F^{(3)}x + A_1\,F^{(2)}x + F^{(1)}x = 0;$$

divisant d'abord par $F^{(4)}x$, et différentiant de la manière convenue, il viendra

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2[(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x\,F^{(5)}x] + A_1[F^{(4)}x\,F^{(3)}x - F^{(2)}x\,F^{(5)}x] \\ \qquad + [F^{(4)}x\,F^{(2)}x - F^{(1)}x\,F^{(5)}x] = 0; \end{array} \right.$$

divisant de nouveau par

$$(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x\,F^{(5)}x$$

et différentiant, nous obtiendrons

$$(13)\ A_1 = -\frac{[(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x\,F^{(5)}x][F^{(4)}x\,F^{(3)}x - F^{(1)}x\,F^{(6)}x] - [F^{(4)}x\,F^{(2)}x - F^{(1)}x\,F^{(5)}x][F^{(4)}x\,F^{(5)}x - F^{(3)}x\,F^{(6)}x]}{[(F^{(4)}x)^2 - F^{(3)}x\,F^{(5)}x][(F^{(4)}x)^2 - F^{(2)}x\,F^{(6)}x] - [F^{(4)}x\,F^{(3)}x - F^{(2)}x\,F^{(5)}x][F^{(4)}x\,F^{(5)}x - F^{(3)}x\,F^{(6)}x]}.$$

Calculons cette valeur de A_1 et portons-la dans l'équation (12), nous en tirerons la valeur de A_2; substituant ensuite A_1 et A_2 dans (11), nous aurons A_3.

On procéderait de la même manière pour obtenir les coefficients, en prenant

$$\varpi = 4, \quad \varpi = 5, \ldots.$$

Supposons donc que les coefficients de l'équation (3) soient remplacés par leurs valeurs en fonction des différentielles de la fonction que l'on cherche, on aura

$$Fx = Fa\left[1 - (x-a)\frac{A_{\varpi-1}}{A_\varpi} + (x-a)^2\frac{A_{\varpi-2}}{A_\varpi} - \ldots(-1)^\varpi(x-a)^\varpi \cdot \frac{A_0}{A_\varpi}\right],$$

ou bien, en exprimant le facteur polynôme par $f(x, a)$,

$$(14) \qquad Fx = Fa \times f(x, a).$$

Or, pour que cette équation ait lieu dans toute l'étendue des valeurs dont x est susceptible, nous diviserons l'équation (14) par $(x-a)$, et prenant la différentielle $\varpi^{ième}$ par rapport à a, nous aurons

$$d^{\varpi}\left(\frac{\mathrm{F}x}{x-a}\right)\frac{1}{da^{\varpi}} = d^{\varpi}\left(\mathrm{F}a\times\frac{f(x,a)}{x-a}\right)\cdot\frac{1}{da^{\varpi}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1.2.3\ldots\varpi.\mathrm{F}x}{(x-a)^{\varpi+1}} = \mathrm{F}a.d^{\varpi}\left(\frac{f(x,a)}{x-\alpha}\right)\frac{1}{da^{\varpi}} + \varpi.\mathrm{F}'ad^{\varpi-1}\left(\frac{f(x,a)}{x-a}\right)\frac{1}{da^{\varpi-1}}$$
$$+\frac{\varpi(\varpi-1)}{1.2}\mathrm{F}''a.d^{\varpi-2}\left(\frac{f(x,a)}{x-a}\right)\frac{1}{da^{\varpi-2}}\cdots\cdots$$
$$+\mathrm{F}^{\varpi}a\left(\frac{f(x,a)}{x-a}\right),$$

d'où nous tirons

$$(15)\quad \mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \mathrm{F}^{(1)}a\,\mathrm{P}_{(1)}(x-a) + \mathrm{F}^{(2)}a\,\mathrm{P}_{(2)}(x-a)^2 + \mathrm{F}^{(3)}a\,\mathrm{P}_{(3)}(x-a)^3\ldots$$
$$+\mathrm{F}^{(\varpi)}a\,\mathrm{P}_{(\varpi)}(x-a)^{\varpi},$$

en posant, pour abréger,

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{P}_{(1)} &= 1-(x-a)^{\varpi}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_{\varpi}},\\
\mathrm{P}_{(2)} &= 1-(x-a)^{\varpi-1}\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_{\varpi}}+\frac{\varpi-1}{1}(x-a)^{\varpi}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_{\varpi}},\\
\mathrm{P}_{(3)} &= 1-(x-a)^{\varpi-2}\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_{\varpi}}+\frac{\varpi-2}{1}(x-a)^{\varpi-1}\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_{\varpi}}\\
&\quad -\frac{(\varpi-2)^{2|1}}{1^{2|1}}(x-a)^{\varpi}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_{\varpi}},\\
\mathrm{P}_{(4)} &= 1-(x-a)^{\varpi-3}\frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_{\varpi}}+\frac{\varpi-3}{1}(x-a)^{\varpi-2}\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_{\varpi}}\\
&\quad -\frac{(\varpi-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(x-a)^{\varpi-1}\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_{\varpi}}+\frac{(\varpi-3)^{3|1}}{1^{3|1}}(x-a)^{\varpi}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_{\varpi}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{P}_{(\varpi)} &= 1-(x-a)\frac{\mathrm{A}_{\varpi-1}}{\mathrm{A}_{\varpi}}+(x-a)^2\frac{\mathrm{A}_{\varpi-2}}{\mathrm{A}_{\varpi}}\\
&\quad -\ldots(-1)^{\varpi}(x-a)^{\varpi}\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_{\varpi}}.
\end{aligned}\right.$$

2

Faisons de plus dans la formule (15)

$$\Sigma_{(\varpi)} = F^{(1)}a\, P_{(1)}(x-a) + F^{(2)}a\, P_{(2)}(x-a)^2 + F^{(3)}a\, P_{(3)}(x-a)^3 \ldots + F^{(\varpi)}a\, P_{(\varpi)}(x-a)^{\varpi},$$

il viendra

$$(17) \qquad Fx = Fa + \Sigma_{(\varpi)},$$

et nous aurons ainsi Fx avec une approximation aussi grande que l'on voudra, et même d'une manière rigoureusement exacte pour $\varpi = \infty$.

Cependant, comme le calcul des fonctions $P_{(1)}, P_{(2)}, \ldots, P_{(\varpi)}$ devient de plus en plus laborieux à mesure que le nombre ϖ des éléments $y_1, y_2, y_3, \ldots$, augmente, on pourra toujours s'arrêter à tel nombre que l'on voudra, pourvu qu'on ajoute alors au second membre de l'équation (17) une série complémentaire. Or cette série offre cette particularité, qu'elle procède suivant les puissances ascendantes d'une fonction entièrement arbitraire, pourvu seulement qu'elle satisfasse à la condition de s'annuler pour $x = a$.

Soit donc

$$\varphi x$$

cette fonction arbitraire, et

$$(18) \begin{cases} S_{\varpi+1} = N_{\varpi+1}(\varphi x)^{\varpi+1} + N_{\varpi+2}(\varphi x)^{\varpi+2} + N_{\varpi+3}(\varphi x)^{\varpi+3} \ldots \\ \qquad + N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + N_{\varpi+\mu+1}(\varphi x)^{\varpi+\mu+1} + \ldots \end{cases}$$

la série complémentaire; nous aurons

$$(19) \qquad Fx = Fa + \Sigma_{(\varpi)} + S_{(\varpi+1)},$$

et il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient général de cette série

$$N_{\varpi+\mu}.$$

Or, en faisant passer tous les termes qui précèdent celui qu'affecte ce coefficient dans le premier membre (19), et divisant le tout par

$$(\varphi x)^{\varpi+\mu},$$

nous aurons

$$\frac{Fx - [Fa + \Sigma_{(\varpi)}] - [S_{\varpi+1} - (N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + \ldots)]}{(\varphi x)^{\varpi+\mu}} = N_{\varpi+\mu} + N_{\varpi+\mu+1}(\varphi x) + \ldots$$

Mais pour $x = a$, il vient

$$N_{\varpi+\mu} = \frac{0}{0},$$

et levant l'indétermination

$$(20)\quad \frac{d^{\varpi+\mu}\left\{Fx-[Fa+\Sigma(\varpi)]-\left[S_{\varpi+1}-\left(N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}+\ldots\right)\right]\right\}\dfrac{1}{dx^{\varpi+\mu}}}{d^{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}\cdot\dfrac{1}{dx^{\varpi+\mu}}}=N_{\varpi+\mu}.\qquad (x=a)$$

Il est facile de voir que

$$(21)\quad \begin{aligned}
&\frac{d^{\varpi+\mu}[Fa+\Sigma(\varpi)]}{dx^{\varpi+\mu}}\\
&=(\varpi+\mu)\,F^{(1)}a\,\frac{d^{\varpi+\mu-1}P_{(1)}}{dx^{\varpi+\mu-1}}+(\varpi+\mu-1)^{2|1}\,F^{(2)}a\,\frac{d^{\varpi+\mu-2}P_{(2)}}{dx^{\varpi+\mu-2}}\\
&+(\varpi+\mu-2)^{3|1}\,F^{(3)}a\,\frac{d^{\varpi+\mu-3}P_{(3)}}{dx^{\varpi+\mu-3}}+(\varpi+\mu-3)^{4|1}\,F^{(4)}a\,\frac{d^{\varpi+\mu-4}P_{(4)}}{dx^{\varpi+\mu-4}}\\
&\qquad\ldots+(\mu)^{\varpi|1}\,F^{(\varpi)}a\,\frac{d^{\mu-1}P_{(\varpi)}}{dx^{\mu-1}}\\
&\qquad\qquad x=a.
\end{aligned}$$

Mais les différentielles de $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$,..., $P_{(\varpi)}$ (16), en posant, pour abréger,

$$\frac{d^{\mu-\rho-1}}{1^{\mu-\rho-1|1}}\left(\frac{A_\nu}{A_\varpi}\right)\cdot\frac{1}{dx^{\mu-\rho-1}}=(A_{\nu,\varpi})^{(\mu-\rho-1)}\qquad (x=a),$$

sont :

$$(22)\quad \begin{aligned}
&\frac{d^{\varpi+\mu-1}P_{(1)}}{dx^{\varpi+\mu-1}}=-1^{\varpi+\mu-1|1}(A_{0,\varpi})^{(\mu-1)}\\
&\qquad x=a,\\
&\frac{d^{\varpi+\mu-2}P_{(2)}}{dx^{\varpi+\mu-2}}=-1^{\varpi+\mu-2|1}\left\{(A_{1,\varpi})^{(\mu-1)}-(\varpi-1)(A_{0,\varpi})^{(\mu-2)}\right\}\\
&\qquad x=a,\\
&\frac{d^{\varpi+\mu-3}P_{(3)}}{dx^{\varpi+\mu-3}}=-1^{\varpi+\mu-3|1}\left\{(A_{2,\varpi})^{(\mu-1)}-(\varpi-2)(A_{1,\varpi})^{(\mu-2)}+\frac{(\varpi-2)^{2|1}}{1^{2|1}}(A_{0,\varpi})^{(\mu-3)}\right\}\\
&\qquad x=a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^{\mu-1}P_{(\varpi)}}{dx^{\mu-1}}=-1^{\mu-1|1}\left\{\begin{aligned}&(A_{\varpi-1,\varpi})^{(\mu-1)}-(A_{\varpi-2,\varpi})^{(\mu-2)}\\&+(A_{\varpi-3,\varpi})^{(\mu-3)}-\ldots\ldots\\&(-1)^{\varpi-1}(A_{0,\varpi})^{(\mu-\varpi)}\end{aligned}\right\}.\\
&\qquad x=a,
\end{aligned}$$

Or, si nous substituons ces valeurs dans l'équation (21), il viendra

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^{\varpi+\mu}\left[\mathrm{F}a+\Sigma_{(\varpi)}\right]}{dx^{\varpi+\mu}} = -\,1^{\varpi+\mu|1}\times \mathrm{A}_{(\varpi)}{}^{(\mu)}, \\ \qquad\qquad x=a, \end{array}\right.$$

en faisant

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{(\varpi)}{}^{(\mu)} = {} & \mathrm{F}^{(1)}a\,(\mathrm{A}_{0,\varpi})^{(\mu-1)} \\
& + \mathrm{F}^{(2)}a\left\{(\mathrm{A}_{1,\varpi})^{(\mu-1)} - (\varpi-1)(\mathrm{A}_{0,\varpi})^{(\mu-2)}\right\} \\
& + \mathrm{F}^{(3)}a\left\{(\mathrm{A}_{2,\varpi})^{(\mu-1)} - (\varpi-2)(\mathrm{A}_{1,\varpi})^{(\mu-2)} + \frac{(\varpi-2)^{2|1}}{1^{2|1}}(\mathrm{A}_{0,\varpi})^{(\mu-3)}\right\} \\
& + \mathrm{F}^{(4)}a\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A}_{3,\varpi})^{(\mu-1)} - (\varpi-3)(\mathrm{A}_{2,\varpi})^{(\mu-2)} + \dfrac{(\varpi-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(\mathrm{A}_{1,\varpi})^{(\mu-3)} \\ \qquad - \dfrac{(\varpi-3)^{3|1}}{1^{3|1}}(\mathrm{A}_{0,\varpi})^{(\mu-4)}\end{array}\right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \mathrm{F}^{(\varpi)}a\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A}_{\varpi-1,\varpi})^{(\mu-1)} - (\mathrm{A}_{\varpi-2,\varpi})^{(\mu-2)} + (\mathrm{A}_{\varpi-3,\varpi})^{(\mu-3)} \\ \qquad \ldots(-1)^{\varpi-1}(\mathrm{A}_{0,\varpi})^{(\mu-\varpi)}\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Voyons maintenant ce que devient

$$\frac{d^{\varpi+\mu}\left[\mathrm{S}_{\varpi+1} - (\mathrm{N}_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu} + \ldots)\right]}{dx^{\varpi+\mu}},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d^{\varpi+\mu}\left[\mathrm{N}_{\varpi+1}(\varphi x)^{\varpi+1} + \mathrm{N}_{\varpi+2}(\varphi x)^{\varpi+2} + \mathrm{N}_{\varpi+3}(\varphi x)^{\varpi+3}\ldots + \mathrm{N}_{\varpi+\mu-1}(\varphi x)^{\varpi+\mu-1}\right]}{dx^{\varpi+\mu}}$$

pour $x=a$.

Afin de pouvoir développer les calculs, prenons

$$(24)\qquad \varphi x = \frac{x-a}{n+x},$$

n étant une constante arbitraire. Nous aurons généralement

$$d^{\varpi+\mu}\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^{\varpi+\nu}\cdot\frac{1}{dx^{\varpi+\mu}} = (-1)^{\mu-\nu}\cdot\frac{1^{\varpi+\mu|1}\,(\varpi+\nu)^{\mu-\nu|1}}{1^{\mu-\nu|1}\,(n+a)^{\varpi+\mu}}.$$
$$x=a.$$

Au moyen de cette formule, il est facile de voir que

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^{\varpi+\mu}\left[S_{\varpi+1}-\left(N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}+\ldots\right)\right]}{dx^{\varpi+\mu}} = -\dfrac{1^{\varpi+\mu|1}}{(n+a)^{\varpi+\mu}}\cdot \dot{N}_{(\varpi)}{}^{(\mu)}, \\ \qquad\qquad x = a, \end{array} \right.$$

en posant

$$\dot{N}_{(\varpi)}{}^{(\mu)} = \frac{(\varpi+\mu-1)}{1}\cdot\dot{N}_{\varpi+\mu-1} - \frac{(\varpi+\mu-2)^{2|1}}{1^{2|1}}\dot{N}_{\varpi+\mu-2}$$
$$+\frac{(\varpi+\mu-3)^{3|1}}{1^{3|1}}\dot{N}_{\varpi+\mu-3}$$
$$-\cdots(-1)^{\mu}\frac{(\varpi+1)^{\mu-1|1}}{1^{\mu-1|1}}\dot{N}_{\varpi+1}.$$

Enfin

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}}{dx^{\varpi+\mu}} = \dfrac{1^{\varpi+\mu|1}}{(n+a)^{\varpi+\mu}}. \\ \qquad\qquad x = a. \end{array} \right.$$

Remplaçant les valeurs obtenues (23), (25) et (26) dans (20), il viendra

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^{\varpi+\mu}\left\{Fx-\left[Fa+\Sigma_{(\varpi)}\right]-\left(S_{(\varpi+1)}-\left[N_{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}+\ldots\right]\right)\right\}\dfrac{1}{dx^{\varpi+\mu}}}{d^{\varpi+\mu}(\varphi x)^{\varpi+\mu}\dfrac{1}{dx^{\varpi+\mu}}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x = a. \\ = \dot{N}_{\varpi+\mu} = (n+a)^{\varpi+\mu}\left[\dfrac{d^{\varpi+\mu}Fx}{1^{\varpi+\mu|1}\,dx^{\varpi+\mu}} + A_{(\varpi)}{}^{(\mu)}\right] + \dot{N}_{(\varpi)}{}^{(\mu)}, \end{array} \right.$$

et, au moyen de cette formule, on calculera facilement les coefficients

$$\dot{N}_{\varpi+1},\quad \dot{N}_{\varpi+2},\quad \dot{N}_{\varpi+3},\ldots$$

de la série complémentaire $S_{(\varpi+1)}$.

Donc nous aurons pour intégrale de $F'x$,

$$Fx = Fa + \Sigma_{(\varpi)} + S_{(\varpi+1)}.$$

Pour donner un exemple de l'application de ces formules, cherchons la fonction $\mathrm{F}x$ dont

$$\mathrm{F}'x = \frac{1}{x}$$

est la différentielle, et calculons-la avec deux éléments y_1, y_2, c'est-à-dire pour $\varpi = 2$.

La formule (15) deviendra

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \mathrm{F}^{(1)}a\,\mathrm{P}_{(1)}(x-a) + \mathrm{F}^{(2)}a\,\mathrm{P}_{(2)}(x-a)^2 = \mathrm{F}a + \Sigma_{(2)},$$

c'est-à-dire, en remplaçant les valeurs de $\mathrm{P}_{(1)}$ et $\mathrm{P}_{(2)}$ (16),

$$(\mathrm{A}.1)\quad \begin{aligned} \mathrm{F}x = \mathrm{F}a &+ \mathrm{F}^{(1)}a\left[1 - (x-a)^2\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_2}\right](x-a) \\ &+ \mathrm{F}^{(2)}a\left[1 - (x-a)\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} + (x-a)^2\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_2}\right](x-a)^2. \end{aligned}$$

Mais les valeurs de A_1 et A_2 en fonction de

$$\mathrm{F}^{(1)}x = \frac{1}{x},\quad \mathrm{F}^{(2)}x = -\frac{1}{2x^2},\quad \mathrm{F}^{(3)}x = \frac{1}{3x^3},\quad \mathrm{F}^{(4)}x = -\frac{1}{4x^4},$$

sont, au moyen de la formule (10),

$$\mathrm{A}_1 = -\frac{-\frac{1}{3x^3}\times\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}\times\frac{1}{4x^4}}{\left(\frac{1}{3x^3}\right)^2 - \frac{1}{2x^2}\times\frac{1}{4x^4}} = 6x,$$

et par la formule (9) en y remplaçant A_1 par sa valeur $6x$,

$$\mathrm{A}_2\frac{1}{3x^3} - 6x\times\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = 0,$$
$$\mathrm{A}_2 = 6x^2.$$

Remplaçant les valeurs de A_1 et A_2 et celles de

$$\mathrm{F}^{(1)}a = \frac{1}{a},\quad \mathrm{F}^{(2)}a = -\frac{1}{2a^2}$$

dans (A.1), elle deviendra

$$\begin{aligned} \mathrm{F}x = \mathrm{F}a &+ \frac{1}{a}\left[1 - (x-a)^2\frac{1}{6x^2}\right](x-a) \\ &- \frac{1}{2a^2}\left[1 - (x-a)\frac{1}{x} + (x-a)^2\frac{1}{6x^2}\right](x-a)^2, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$(\mathrm{A}.2)\qquad \mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \frac{(x+a)(x-a)}{12\,a^2 x^2}\left[8ax - (x^2 + a^2)\right].$$

Quant à la série complémentaire, nous calculerons ses coefficients au moyen de la formule (27), qui devient, pour $\varpi = 2$,

$$(\mathrm{A}.3)\qquad \mathrm{N}_{(2+\mu)} = (n+a)^{2+\mu}\left\{\frac{d^{2+\mu}\,\mathrm{F}x}{1^{2+\mu|1}\,dx^{2+\mu}} + \mathrm{A}_{(2)}{}^{(\mu)}\right\} + \mathrm{N}_{(2)}{}^{(\mu)}.$$

Or

$$(\mathrm{A}.4)\qquad \underset{x=a.}{\frac{d^{2+\mu}\,\mathrm{F}x}{1^{2+\mu|1}\,dx^{2+\mu}}} = \frac{(-1)^{\mu+1}}{(\mu+2)\,a^{2+\mu}},$$

$$\mathrm{A}_{(2)}{}^{(\mu)} = \mathrm{F}^{(1)}a\,\underset{x=a}{\frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1|1}}\left(\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_2}\right)\frac{1}{dx^{\mu-1}}}$$

$$+\,\mathrm{F}^{(2)}a\left\{\underset{x=a}{\frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1|1}}\left(\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}\right)\frac{1}{dx^{\mu-1}}} - \underset{x=a.}{\frac{d^{\mu-2}}{1^{\mu-2|1}}\left(\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_2}\right)\frac{1}{dx^{\mu-2}}}\right\}.$$

Remplaçant $\mathrm{F}^{(1)}a$, $\mathrm{F}^{(2)}a$, A_1, A_2 par leurs valeurs

$$\mathrm{A}_{(2)}{}^{(\mu)} = \frac{1}{a}\cdot\underset{x=a}{\frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1|1}}\left(\frac{1}{6x^2}\right)\frac{1}{dx^{\mu-1}}}$$

$$+\,\frac{1}{2a^2}\left[\underset{x=a}{\frac{d^{\mu-1}}{1^{\mu-1|1}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{dx^{\mu-1}}} - \underset{x=a}{\frac{d^{\mu-2}}{1^{\mu-1|1}}\left(\frac{1}{6x^2}\right)\frac{1}{dx^{\mu-2}}}\right].$$

Effectuant les différentiations indiquées, et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$\mathrm{A}_{(2)}{}^{(\mu)} = \frac{1}{a}\times(-1)^{\mu-1}\cdot\frac{\mu}{6a^{\mu+1}}$$

$$-\,\frac{1}{2a^2}\left[(-1)^{\mu-1}\frac{1}{a^{\mu}} - (-1)^{\mu}\,\frac{\mu-1}{6a^{\mu}}\right],$$

donc

$$(\mathrm{A}.5)\qquad \mathrm{A}_{(2)}{}^{(\mu)} = (-1)^{\mu-1}\,\frac{\mu-5}{12a^{2+\mu}}.$$

Quant à $\dot{N}_{(2)}^{(\mu)}$, nous aurons l'équation (25),

$$\text{(A.6)} \qquad \dot{N}_{(2)}^{(\mu)} = (\mu+1).\dot{N}_{\mu+1} - \frac{\mu^{2|1}}{1^{2|1}}.\dot{N}_{\mu} + \frac{(\mu-1)^{3|1}}{1^{3|1}}.\dot{N}_{\mu-1} - \ldots (-1)^{\mu}.\frac{3^{\mu-1|1}}{1^{\mu-1|1}}.\dot{N}_3.$$

Remplaçant (A.4), (A.5) et (A.6) dans (A.3), et prenant la constante arbitraire n égale à a, il vient

$$N_{2+\mu} = (-1)^{\mu+1}\frac{2^{\mu}}{3}.\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{\mu+2} + (\mu+1)\dot{N}_{\mu+1} - \frac{\mu^{2|1}}{1^{2|1}}\dot{N}_{\mu} + \frac{(\mu-1)^{3|1}}{1^{3|1}}\dot{N}_{\mu-1} - \ldots (-1)^{\mu}.\frac{3^{\mu-1|1}}{1^{\mu-1|1}}.\dot{N}_3.$$

Ce qui donne successivement

$$\dot{N}_3 = 0, \qquad \dot{N}_4 = 0, \qquad \dot{N}_5 = \frac{2^4}{3.5},$$
$$\dot{N}_6 = 0, \qquad \dot{N}_7 = \frac{2^4}{3}\times\frac{3}{7}, \qquad \dot{N}_8 = 0,$$
$$\dot{N}_9 = \frac{2^4}{3}\times\frac{6}{9}, \qquad N_{10} = 0, \qquad \dot{N}_{11} = \frac{2^4}{3}\times\frac{10}{11}, \ldots$$

Donc la série complémentaire (18) deviendra

$$S_{(3)} = \frac{2^4}{3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{6}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \ldots\right]$$

et nous aurons

$$Fx = Fa + \Sigma_{(2)} + S_{(3)},$$

$$Fx = Fa + \frac{(x+a)(x-a)}{12a^2x^2}[8ax - (x^2+a^2)] + \frac{2^4}{3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{6}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \ldots\right].$$