RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

MÉTHODE SPÉCIALE OU TÉLÉOLOGIQUE

DE

H. WRONSKI,

DÉMONTRÉE

PAR A. BUKATY.

ÉDITÉ PAR L. N.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1878

« *La solution générale des équations algébriques ne va pas au delà du quatrième degré. Les moyens les plus ingénieux, employés par les plus grands analystes, pour résoudre généralement les équations algébriques d'un degré supérieur au quatrième, n'ont servi qu'à rendre la question plus compliquée : les plus heureux de tous ces essais ont été encore ceux qui, après de longs et d'inutiles détours, ont ramené leurs auteurs au point dont ils étaient partis. La raison de ce défaut absolu de succès n'est pas encore connue, et l'on ne peut assurer si le problème renferme en lui-même quelque condition inconnue, mais impossible à remplir, ou si, sans surpasser les forces de l'Analyse en général, elle surpasse seulement celles de la nôtre, et si quelque géomètre des siècles à venir réussira peut-être à vaincre une difficulté qui jusqu'ici a paru insurmontable.* »

(*Arithmétique universelle* de Kramp, n° 96, p. 70, publiée en 1808.)

A MONSIEUR LE COMTE

JEAN DZIALYNSKI

PROTECTEUR GÉNÉREUX

DES

EFFORTS INTELLECTUELS DE SA PATRIE.

L'AUTEUR.

Paris, 24 août 1876.

par conséquent, dans le cas présent,

$$B_1 = \frac{1280}{1024}, \quad B_2 = \frac{912}{1024}, \quad B_3 = \frac{376}{1024}, \quad B_4 = \frac{96}{1024}, \quad B_5 = \frac{14}{1024}, \quad B_6 = \frac{1}{1024}.$$

Les fonctions aleph négatives étant zéro jusqu'à $\aleph[-(m-1)]$ inclusivement, on aura

$$\aleph[-6] = -\frac{1}{1024},$$

$$\aleph[-7] = -\frac{1280}{(1024)^2},$$

$$\aleph[-8] = -\frac{704512}{(1024)^3},$$

$$\aleph[-9] = -\frac{106663296}{(1024)^4},$$

$$\aleph[-10] = +\frac{1275068\,(10)^5}{(1024)^5},$$

$$\aleph[-11] = +\frac{9600191\,(10)^7}{(1024)^6},$$

$$\aleph[-12] = +\frac{1815975\,(10)^{10}}{(1024)^7},$$

$$\aleph[-13] = -\frac{1516649\,(10)^{13}}{(1024)^8},$$

$$\aleph[-14] = -\frac{1242154\,(10)^{16}}{(1024)^9},$$

$$\aleph[-15] = -\frac{2622556\,(10)^{19}}{(1024)^{10}};$$

avec ces valeurs des fonctions aleph négatives simples, on calculera facilement les valeurs des fonctions aleph composées du premier ordre d'après la formule

$$\aleph[\rho](1/\alpha) = \aleph(\rho).\aleph(\rho+\alpha) - \aleph(\rho-1).\aleph(\rho+\alpha+1),$$

qui satisfont à la condition de l'égalité de leurs rapports, et, par conséquent, donnent, pour le facteur principal, l'équation du quatrième degré, dont les coefficients sont

$$Q_3 = 14 - \frac{\aleph[q+1](1/1)}{\aleph[q+1](1/0)} = 14 - \frac{\aleph[-14](1/1)}{\aleph[-14](1/0)} =$$

$$= 14 - \frac{\aleph[-14].\aleph(-13) - \aleph(-15).\aleph(-12)}{\aleph(-14)^2 - \aleph(-15).\aleph(-13)} = 14 - 2 = 12,$$

et, calculant de même d'après la formule générale, on trouvera

$$Q_4 = 96 - 2 \times 14 = 68, \quad Q_5 = 192, \quad Q_6 = 256.$$

On aura donc, pour le facteur principal, l'équation

$$0 = x^4 - 12x^3 + 68x^2 - 192x + 256,$$

et pour le facteur complémentaire

$$0 = x^2 - 2x + 4,$$

dont le produit est effectivement l'équation proposée.

Si l'on voulait décomposer ultérieurement le facteur du quatrième degré, on s'apercevrait que ni les fonctions aleph à exposants positifs, ni celles à exposants négatifs, ne satisfont à la condition de l'égalité de leurs rapports; alors il n'y a pas dans cette équation de racines qui soient plus grandes ou plus petites : elles sont donc toutes égales, et, en effet,

$$\sqrt{(x^4 - 12x^3 + 68x^2 - 192x + 256)} = x^2 - 6x + 16 = (x - 3 - \sqrt{-7})(x - 3 + \sqrt{-7}).$$

Nous avons choisi à dessein ce cas singulier, parce qu'il se résout au moyen de la série récurrente régressive, c'est-à-dire par des fonctions aleph à exposants *négatifs*, et parce qu'il n'est pas spécifié par l'illustre auteur de la méthode, sans doute à cause de la facilité de l'en déduire.

Il ne faut pas cependant s'imaginer que le recours aux fonctions aleph à exposants négatifs soit absolument indispensable; il est clair, d'après la déduction de la loi, qu'on aurait pu arriver au résultat en poursuivant la formation des fonctions aleph à exposants positifs, en les poussant jusqu'au troisième ordre inclusivement; alors le facteur principal ne serait que du deuxième degré, tandis que le facteur complémentaire monterait au quatrième, et le travail se compliquerait fortement. Nous croyons utile d'en avertir ceux qui étudieront la méthode, parce que cela l'éclaircit éminemment, et ne se trouve pas dans l'ouvrage dont il est question.

Quiconque approfondira suffisamment l'exposé des principes constituant la loi primordiale de la solution de ce grand problème des Mathématiques saura bien se rendre compte de toutes les circonstances, puisque le reste n'a pour but que de faciliter les calculs. Et puisque, sans la résolution des équations d'équivalence, au-

DÉMONSTRATION DE LA LOI FONDAMENTALE

DE LA

MÉTHODE TÉLÉOLOGIQUE DE H. WRONSKI

POUR LA

RÉSOLUTION GÉNÉRALE

DES

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS.

Dieu est l'auteur de la loi de création; mais c'est à l'homme à la saisir et à la formuler. C'est en cela que consiste manifestement tout le savoir, toute la philosophie, le but même de la création.

Cette tâche finale, ce mérite suprême de l'homme a été accompli par l'incomparable génie de l'immortel H. Wronski; il en publia le résultat en 1847, dans le second tome de la *Réforme absolue du savoir humain.*

Muni de cette loi toute-puissante, ce savant extraordinaire aborda la Science en elle-même, et, comme garantie de la vérité de sa découverte, il a produit la LOI SUPRÊME DES MATHÉMATIQUES.

Voici en quels termes les commissaires de l'Institut de France, l'illustre Lagrange ([1]) et Lacroix, ont apprécié l'œuvre de Wronski, dans leur Rapport lu à la Classe des Sciences, le 15 octobre 1810 ([2]) :

« Ce qui a frappé vos Commissaires dans le Mémoire de M. Wronski, c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions (c'est-à-dire toutes les Mathématiques modernes) et qu'elles n'en sont que des cas TRÈS-PARTICULIER »

On conçoit qu'aucun problème mathématique ne pouvait résister à cette toute-puissance scientifique. En effet, le célèbre problème de la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés, dont la solution fut vainement cherchée par les mathématiciens les plus renommés, fut résolu par Wronski au moyen de trois méthodes différentes, qu'il a publiées en 1847 dans le tome III de la *Réforme du savoir humain,* et dont malheureusement il n'a pas donné la démonstration.

([1]) « Le plus grand géomètre après Newton », suivant lord Brougham, membre de l'Institut de France. Voir sa *Dissertation sur Newton.*

([2]) Voir le *Moniteur universel* du 15 novembre 1810.

Comment se fait-il que cette publication, bien que faite depuis près de trente années, soit pour ainsi dire restée inaperçue? Faut-il dire qu'il y a de la part des savants indifférence pour la vérité? Faut-il admettre que ce haut produit de l'esprit humain soit prématuré et dépasse les limites de l'intelligence contemporaine?

Une telle conclusion ne saurait être la nôtre. Nous préférons admettre que l'esprit moderne ne saurait accepter de vérités sans que la démonstration n'en soit mise à côté, et que l'illustre auteur de la *Réforme du savoir humain* a préféré donner une formule, en laissant à la postérité le mérite d'en trouver elle-même la démonstration.

Les lignes qui vont suivre ont pour but de donner cette indispensable démonstration. Espérons que, après qu'elle aura été fournie, l'œuvre du maître ne saurait plus rester dans l'oubli.

Soit proposée l'équation générale du degré m, savoir

$$0 = x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \ldots + (-1)^m A_m x^0,$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Formons, avec la somme de ces racines, les puissances consécutives en remplaçant par l'unité les coefficients du développement, et dénotons, par la lettre aleph $\aleph$, cette sorte de fonctions, lesquelles, pour $m = 3$, seraient ainsi

$$\begin{aligned}
&\aleph(0) = 1,\\
&\aleph(1) = x_1 + x_2 + x_3,\\
&\aleph(2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
&\aleph(3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, puisque ce sont des fonctions symétriques des racines, elles s'exprimeront toujours au moyen des coefficients des équations, quel qu'en soit le degré m.

Considérons d'abord leur exposant comme positif, de sorte que, en le désignant par ϖ, la génération médiate des fonctions alephs, les unes par les autres, est très-simple d'après la formule

$$(a)\quad \aleph(\varpi) = A_1\aleph(\varpi-1) - A_2\aleph(\varpi-2) + A_3\aleph(\varpi-3)\ldots + (-1)^{m-1}A_m\aleph(\varpi-m)\ldots,$$

comme on peut le vérifier facilement.

Or, si l'on forme avec les racines de l'équation proposée $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ la fonction aleph du degré q, on aura, en la développant,

$$\begin{aligned}
\aleph(q) = {} & x_1^q + x_1^{q-1}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m) + x_1^{q-2}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^2 +\\
& + x_1^{q-3}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^3 + \ldots + x_1\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^{q-1} +\\
& + x_1^0\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^q,
\end{aligned}$$

les exposants des parenthèses désignant les degrés par rapport à la caractéristique aleph.

On obtiendra de même

$$\aleph(q-1)=x_1^{q-1}+x_1^{q-2}\aleph(x_2+x_3\ldots+x_m)+x_1^{q-3}\aleph(x_2+x_3\ldots+x_m)^2+$$
$$+x_1^{q-4}\aleph(x_2+x_3\ldots+x_m)^3+\ldots+x_1^0\aleph(x_2+x_3\ldots+x_m)^{q-1},$$

et, en divisant la première expression par la seconde, il vient

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}=x_1+\frac{\aleph(x_2+x_3\ldots x_m)^q}{\aleph(x_1+x_2+x_3\ldots x_m)^{q-1}}.$$

Ce quotient est donc plus grand que la racine x_1. Mais si, en augmentant l'exposant q, le rapport des fonctions aleph consécutives devient constant, le second terme du quotient disparaît nécessairement, et la racine x_1 se trouvera exacte. Ainsi la condition déterminante de la racine cherchée est l'égalité des rapports

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}=\frac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)},$$

c'est-à-dire l'équation

$$0=\aleph(q)^2-\aleph(q-1).\aleph(q+1).$$

Cette racine sera toujours la plus grande, puisque c'est en réduisant le surcroit du quotient qu'on l'obtient. Telle est aussi la raison de ce que, dans la méthode de D. Bernoulli, le quotient de deux termes consécutifs élevés de la série récurrente, formée avec les coefficients de l'équation, donne sa plus grande racine.

Il en résulte qu'en divisant l'équation proposée par le rapport des fonctions aleph consécutives suffisamment élevées, on obtiendra deux facteurs, l'un du premier degré, l'autre du degré $(m-1)$, inférieur d'unité de celui de l'équation proposée. C'est le facteur principal constituant la loi de la solution de ce grand problème. X — rapp

Soit donc proposée, pour la détermination des racines inconnues z, l'équation générale du degré m,

$$0=z^m-A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}-A_3z^{m-3}.\ .+(-1)^mA_mz^0;$$

on aura, en vertu des fonctions aleph, pour la décomposition de cette opération en ses facteurs, l'équation générale du degré inférieur $m-1$, savoir

$$0=z^{m-1}-P_2z^{m-2}+P_3z^{m-3}-P_4z^{m-4}\ldots+(-1)^{m-1}P_mz^0,$$

dont les coefficients P_2, P_3, ..., P_m se détermineront par la division

$$
\begin{array}{l|l}
z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} - A_3 z^{m-3} \ldots + (-1)^m A_m z^0 & z - \dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} \\
\quad - z^m + \dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} z^{m-1} & \\
\hline
- \dfrac{A_1 \aleph(q-1) - \aleph(q)}{\aleph(q-1)} z^{m-1}, & z^{m-1} - \dfrac{A_1 \aleph(q) - \aleph(q+1)}{\aleph(q)} z^{m-2} + \\
 & + \dfrac{A_2 \aleph(q) - A_1 \aleph(q+1) + \aleph(q+2)}{\aleph(q)} z^{m-3} \ldots + \\
 & \dfrac{\left[\begin{array}{l} + (-1)^{m-1} A_{\mu-1} \aleph(q) - A_{\mu-2} \aleph(q+1) \ldots + \\ + (-1)^{\mu+1} A_0 \aleph(q+\mu-1) \end{array}\right]}{\aleph(q)} z^0,
\end{array}
$$

ou en remplaçant $\aleph(q-1)$ par $\aleph(q)$, dont le rapport est constant par hypothèse, ou à

$$- \frac{A_1 \aleph(q) - \aleph(q+1)}{\aleph(q)} z^{m-1}$$

et

$$\ldots + \frac{A_2 \aleph(q-1) - A_1 \aleph(q) + \aleph(q+1)}{\aleph(q-1)} z^{m-2},$$

donne aussi

$$+ \frac{A_2 \aleph(q) - A_1 \aleph(q+1) + \aleph(q+2)}{\aleph(q)} z^{m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura ainsi, pour les coefficients de l'équation réduite au degré $(m-1)$, la détermination,

$$
(23) \quad \left\{
\begin{array}{l}
P_2 \aleph(q) = A_1 \aleph(q) - \aleph(q+1), \\
P_3 \aleph(q) = A_2 \aleph(q) - A_1 \aleph(q+1) + \aleph(q+2), \\
P_4 \aleph(q) = A_3 \aleph(q) - A_2 \aleph(q+1) + A_1 \aleph(q+2) - \aleph(q+3), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_\mu \aleph(q) = A_{\mu-1} \aleph(q) - A_{\mu-2}(q+1) + A_{\mu-3} \aleph(q+2) \ldots \\
\qquad + (-1)^{\mu+1} A_0 \aleph(q+\mu-1);
\end{array}
\right.
$$

c'est la formule donnée par Wronski, sans déduction, et numérotée (23).

Elle se transforme facilement, en y mettant pour $\aleph(q+1)$, $\aleph(q+2)$, ... leurs valeurs données par la formule générale (a) des fonctions aleph, comme il suit :

$$
(21) \quad \left\{
\begin{array}{l}
P_2 \aleph(q) = A_2 \aleph(q-1) - A_3 \aleph(q-2) + A_4 \aleph(q-3) \ldots + \\
\qquad + (-1)^m A_m \aleph[q - (m-1)], \\
P_3 \aleph(q) = A_3 \aleph(q-1) - A_4 \aleph(q-2) + A_5 \aleph(q-3) \ldots + \\
\qquad + (-1)^{m+1} A_m \aleph[q - (m-2)], \\
P_4 \aleph(q) = A_4 \aleph(q-1) - A_5 \aleph(q-2) + A_6 \aleph(q-3) \ldots + \\
\qquad + (-1)^{m+2} A_m \aleph[q - (m-3)], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
P_\mu \aleph(q) = A_\mu \aleph(q-1) - A_{\mu+1} \aleph(q-2) + A_{\mu+2} \aleph(q-3) \ldots + \\
\qquad + (-1)^{m+\mu} A_m \aleph[q - (m-\mu+1)];
\end{array}
\right.
$$

c'est la formule portant, dans l'ouvrage sur la *Résolution générale des équations algébriques,* le nº 21, mais aussi sans déduction.

On choisit, entre ces deux formules (21) et (23), celle qui convient mieux aux circonstances.

Maintenant, si avec les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ de l'équation proposée, au lieu des fonctions aleph à exposants *positifs,* on forme ces fonctions à exposants *négatifs,* on aura, pour la fonction $\aleph(-\rho)$, en la développant, l'expression

$$\aleph[-\rho] = x_1^{-\rho} - x_1^{-\rho-1}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m) + x_1^{-\rho-2}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^2 - x_1^{-\rho-3}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^3 + \ldots \text{ à l'infini};$$

les exposants des parenthèses désignent les degrés des fonctions aleph et non leurs puissances.

On obtient de même

$$\aleph[-\rho-1] = x_1^{-\rho-1} - x_1^{-\rho-2}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m) + x_1^{-\rho-3}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^2 - x_1^{-\rho-4}\aleph(x_2 + x_3 \ldots + x_m)^3 + \ldots \text{ à l'infini.}$$

Ces deux expressions, l'une et l'autre, sont infinies; mais les quantités infinies varient, de sorte que, en divisant la première par la seconde, le quotient

$$\frac{\aleph[-\rho]}{\aleph[-\rho-1]} = x_1 - m$$

sera plus petit que la racine x_1, en désignant par m la partie due à la différence des quantités infinies. Et, puisque les fonctions aleph négatives se déterminent exactement d'après la formule

$$\aleph[-\rho] = B_1\aleph[-(\rho-1)] - B_2\aleph[-(\rho-2)] + B_3\aleph[-(\rho-3)] \ldots + (-1)^{m-1}B_m\aleph[-(\rho-m)],$$

en formant les quantités auxiliaires

$$B_1 = \frac{A_{m-1}}{A_m}, \quad B_2 = \frac{A_{m-2}}{A_m}, \quad B_3 = \frac{A_{m-3}}{A_m}, \quad \ldots, \quad B_m = \frac{A_0}{A_m},$$

leur rapport se trouvera déterminé.

Or, si en augmentant l'exposant en sens négatif le rapport des fonctions aleph consécutives devient constant, la partie du quotient $-m$ disparaîtra, et la racine x_1 aura sa détermination. Ainsi la condition déterminante de la racine cherchée est l'égalité des rapports

$$\frac{\aleph[-\rho]}{\aleph[-(\rho+1)]}=\frac{\aleph[-(\rho-1)]}{\aleph[-\rho]},$$

c'est-à-dire l'équation

$$0=\aleph[-\rho]^2-\aleph[-(\rho-1)]\,\aleph[-(\rho+1)].$$

Cette racine sera toujours la plus petite, puisque c'est en réduisant le reste dans le quotient qu'on l'obtient. Donc l'explication de la méthode de Bernoulli, par la raison que les hautes puissances de la racine la plus grande font disparaître les puissances des racines plus petites, est très-inexacte, puisque, dans le cas dont il s'agit, ce sont les puissances de la plus petite racine qui font disparaître les puissances des racines plus grandes.

Il en résulte qu'en divisant l'équation proposée par le rapport des deux fonctions aleph négatives consécutives, suffisamment élevées, on obtiendra deux facteurs, l'un du premier degré, l'autre du degré $(m-1)$ inférieur d'une unité de celui de l'équation proposée. Ce sera le facteur principal exprimé au moyen des fonctions aleph négatives, constituant la loi de la solution du problème. On conçoit que, de cette manière, on pourrait appliquer la méthode de D. Bernoulli et son extension par Euler, basée sur les séries récurrentes progressives, avec le même succès, au moyen des séries récurrentes régressives, parce que le principe s'en trouve dans les fonctions aleph.

Mais le succès de cette solution n'est dû qu'à la circonstance que dans l'équation proposée se trouve une racine plus forte ou bien une racine plus faible que toutes les autres.

Cela manquant, le rapport des fonctions aleph est tout différent, et ce rapport n'est plus la racine de l'équation proposée.

Il en résulte nécessairement que, dans l'équation proposée, il y a au moins deux racines égales, réelles ou idéales, les plus fortes, si ce sont les fonctions aleph à exposants positifs qui sont en défaut, ou bien deux racines égales, réelles ou idéales, les plus faibles, si ce sont les fonctions aleph à exposants négatifs qui ne se prêtent pas, ou, enfin, qu'en même temps s'y trouvent deux racines égales, les plus fortes et les deux plus faibles, réelles ou idéales, si les fonctions aleph à exposants positifs ou négatifs ne peuvent pas servir.

La raison en est que, avec l'accroissement de l'exposant des fonctions aleph, le nombre des termes contenant ces racines égales croît progressivement.

En effet, si $x_1 = x_2$, on aura manifestement

$$\begin{aligned}
\aleph(1) &= 2x_1 + x_3 \ldots + x_m, \\
\aleph(2) &= 3x_1^2 + 2x_1 \aleph[x_3 \ldots + x_m] + \aleph[x_3 \ldots + x_m]^2, \\
\aleph(3) &= 4x_1^3 + 3x_1^2 \aleph[x_3 \ldots + x_m] + 2x_1 \aleph[x_3 \ldots + x_m]^2 + \aleph[x_3 \ldots + x_m]^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\aleph(q) &= (q+1)x_1^q + q x_1^{q-1} \aleph[x_3 \ldots + x_m] + \\
&\quad + (q-1)x_1^{q-2} \aleph[x_3 \ldots + x_m]^2 + \ldots + \aleph[x_3 \ldots + x_m]^q.
\end{aligned}$$

Donc le rapport $\dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}$ ne sera plus une racine de l'équation proposée; et, la division de l'équation proposée par $x_1 - \dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}$ ne se faisant pas exactement, le quotient résultant ne sera pas égal à zéro, mais bien à une certaine quantité r, c'est-à-dire qu'on aura alors l'équation

$$r = z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P_3 z^{m-3} - P_4 z^{m-4} \ldots + (-1)^{m-1} P_m z^0.$$

Observons maintenant que les rapports des fonctions aleph consécutives actuelles convergent vers un rapport constant, de sorte qu'en élevant leur exposant d'une unité et divisant l'équation proposée par $x_1 - \dfrac{\aleph(q+1)}{\aleph(q)}$, on obtiendra un nouveau quotient avec la même différence, savoir :

$$r = z^{m-1} - (P_2) z^{m-2} + (P_3) z^{m-3} - (P_4) z^{m-4} \ldots + (-1)^{m-1} (P_m) z^0,$$

en dénotant par $(P_2), (P_3), (P_4), \ldots, (P_m)$ les coefficients du second quotient, l'identité de la quantité r résultant de la constance du rapport entre les fonctions aleph consécutives. Si donc on retranche la première de ces deux équations de la seconde, on obtiendra

$$0 = z^{m-2} - Q_3 z^{m-3} + Q_4 z^{m-4} - Q_5 z^{m-5} \ldots + (-1)^m Q_m z^0,$$

équation dont les coefficients seront $Q_3 = \dfrac{(P_3) - P_3}{(P_2) - P_2}$, $Q_4 = \dfrac{(P_4) - P_4}{(P_2) - P_2}$, ..., et généralement $Q_\mu = \dfrac{(P_\mu) - P_\mu}{(P_2) - P_2}$; et l'on aura ainsi le facteur général de l'équation proposée, inférieur de deux degrés, savoir, du degré $(m-2)$. Les coefficients $Q_3, Q_4, \ldots$ s'obtiennent directement en mettant pour $(P_3), (P_2), \ldots, P_3, P_2$ leurs valeurs données par les formules (21) ou (23), c'est-à-dire au moyen des fonctions aleph simples, lesquelles, en se combinant, produisent les fonctions aleph composées du premier ordre, d'après la formule

$$\aleph[\rho](1/\alpha)=\aleph(\rho)\aleph(\rho+\alpha)-\aleph(\rho-1)\aleph(\rho+\alpha+1),$$

en désignant ainsi par le premier membre cet ordre de composition formé de quatre fonctions aleph simples.

Avec ces fonctions aleph, composées du premier ordre, on construit les coefficients Q_3, Q_4, ..., en vertu des formules (21), comme il suit :

$$\begin{aligned}Q_3\aleph[q+1](1/0)&=A_3\aleph[q](1/0)-A_4\aleph[q-1](1/1)+A_5\aleph[q-2](1/2)\ldots+\\&\quad+(-1)^{m-3}A_m\aleph[q-(m-3)](1/m-3),\\Q_4\aleph[q+1](1/0)&=A_4\aleph[q](1/0)-A_5\aleph[q-1](1/1)+A_6\aleph[q-2](1/2)\ldots+\\&\quad+(-1)^{m-4}A_m\aleph[q-(m-4)](1/m-4),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et généralement

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}Q_\mu\aleph[q+1](1/0)&=A_\mu\aleph[q](1/0)-A_{\mu+1}\aleph[q-1](1/1)+A_{\mu+2}\aleph[q-2](1/2)\\&\quad\ldots+(-1)^{m-\mu}A_m\aleph[q-(m-\mu)](1/m-\mu);\end{aligned}\right.$$

ou bien, en vertu des formules (23),

$$\begin{aligned}Q_3\aleph[q+1](1/0)&=A_1\aleph[q+1](1/0)-A_0\aleph[q+1](1/1),\\Q_4\aleph[q+1](1/0)&=A_2\aleph[q+1](1/0)-A_1\aleph[q+1](1/1)+A_0\aleph[q+1](1/2),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et généralement

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}Q_\mu\aleph[q+1](1/0)&=A_{\mu-2}\aleph[q+1](1/0)-A_{\mu-3}\aleph[q+1](1/1)+\\&\quad+A_{\mu-4}\aleph[q+1](1/2)\ldots+(-1)^{\mu}A_0\aleph[q+1](1/\mu-2),\end{aligned}\right.$$

on choisit entre les deux systèmes, (39) et (41), celui qui donne les expressions les plus simples.

Pour que l'équation proposée puisse se réduire au degré $(m-2)$, il faut, selon tout ce qui a été dit, que les fonctions aleph composées du premier ordre convergent vers leur rapport constant, savoir, qu'à un degré suffisamment haut, elles arrivent à l'égalité

$$\frac{\aleph[\rho](1/\alpha)}{\aleph[\rho-1](1/\alpha)}=\frac{\aleph[\rho+\beta+1](1./\alpha_2)}{\aleph[\rho+\beta](1./\alpha_2)};$$

si cela ne se réalise pas, ni avec les exposants positifs, ni avec les négatifs, l'équation n'admet pas le facteur du degré $(m-2)$, et il doit y avoir trois racines égales les plus fortes, et, en même temps, trois racines égales, réelles ou idéales, les plus faibles.

En effet, dans le cas où l'équation proposée a ses trois racines égales $x_1 = x_2 = x_3$, on aura manifestement

$$\begin{aligned}
&\aleph(0) = 1,\\
&\aleph(1) = 3x_1 + x_4 \ldots + x_m,\\
&\aleph(2) = 6x_1^2 + 3x_1\,\aleph(x_4 + \ldots x_m) + \aleph(x_4 + \ldots + x_m)^2,\\
&\aleph(3) = 10x_1^3 + 6x_1^2\,\aleph(x_4 + \ldots + x_m) + 3x_1\,\aleph(x_4 + \ldots x_m)^2 +\\
&\qquad + \aleph(x_4 + \ldots x_m)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned}
\aleph(q) = {} & \frac{q^2 + 3q + 2}{2}x_1^q + \frac{(q-1)^2 + 3(q-1) + 2}{2}x_1^{q-1}\,\aleph(x_4 + \ldots x_m) +\\
& + \frac{(q-2)^2 + 3(q-2) + 2}{2}x_1^{q-2}\,\aleph(x_4 + \ldots x_m)^2 + \ldots +\\
& + \aleph(x_4 + x_5 \ldots + x_m)^q;
\end{aligned}$$

les exposants, sur les parenthèses, désignent l'ordre des fonctions aleph, non leurs puissances.

Donc, le rapport $\dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}$, étant tout différent, ne fera plus l'équation réduite du degré $(m-2)$ égale à zéro, mais bien à une certaine quantité r, c'est-à-dire qu'on aura alors l'équation

$$r_1 = z^{m-2} - Q_3 z^{m-3} + Q_4 z^{m-4} - Q_5 z^{m-5} \ldots (-1)^m Q_m z^0.$$

Mais observons que le rapport entre deux fonctions aleph consécutives actuelles converge vers un rapport constant, de sorte que, en élevant leur exposant de 1, on doit obtenir une nouvelle équation

$$r_1 = z^{m-2} - (Q_3) z^{m-3} + (Q_4) z^{m-4} - (Q_5) z^{m-5} \ldots (-1)^m (Q_m) z^0,$$

en dénotant par $(Q_3), (Q_4), (Q_5), \ldots, (Q_m)$ les coefficients de cette seconde substitution, l'identité de la quantité r_1 résultant de la constance du rapport entre les fonctions aleph consécutives actuelles.

En retranchant la première de ces deux équations de la seconde, on obtient

$$0 = z^{m-3} - R_4 z^{m-4} + R_5 z^{m-5} - R_6 z^{m-6} \ldots + (-1)^{m-1} R_m z^0,$$

équation dont les coefficients seront

$$R_4 = \frac{(Q_4) - Q_4}{(Q_3) - Q_3}, \quad R_5 = \frac{(Q_5) - Q_5}{(Q_3) - Q_3}, \quad R_6 = \frac{(Q_6) - Q_6}{(Q_3) - Q_3}, \quad \ldots,$$

et généralement

$$R_\mu = \frac{(Q_\mu) - Q_\mu}{(Q_3) - Q_3}.$$

On aura ainsi le facteur de l'équation proposée, inférieur de trois degrés, savoir du degré $(m - 3)$.

La même raison régit nécessairement les résultats qu'on obtient au moyen des fonctions aleph à exposants négatifs : il est inutile d'y revenir.

Les coefficients $R_4, R_5, \ldots, R_m$ s'obtiennent directement en mettant pour (Q_3), $(Q_4), \ldots, Q_3, Q_4, \ldots$ leurs valeurs données par les formules (39) et (41), c'est-à-dire au moyen des fonctions aleph composées du premier ordre, lesquelles, en se combinant, produisent les fonctions aleph composées du second ordre, d'après la formule

$$\aleph[\rho](2/\alpha_1 . \alpha_2/\beta) = \aleph[\rho](1/\alpha_1) . \aleph[\rho + \beta](1/\alpha_2) - \aleph[\rho - 1](1/\alpha_1) . \aleph[\rho + \beta + 1](1/\alpha_2),$$

en désignant ainsi, par le premier membre, cet ordre de composition formé par quatre fonctions aleph composées du premier ordre.

Avec ces fonctions aleph composées du second ordre, on construit les coefficients $R_4, R_5, \ldots, R_m$, en vertu des formules (39) et (41), comme il suit :

$$\begin{aligned} R_\mu . \aleph[q + 2](2/0, 1/- \quad) = {} & A_\mu . \aleph[q + 1](2/0, 0/0) - A_{\mu+1} . \aleph[q](2/1, 0/1) + \\ & + A_{\mu+2} . \aleph[q - 1](2/2, 0/2) \ldots + \\ & + (-1)^{m+\mu} A_m . \aleph[q - (m - \mu - 1)][2/(m - \mu, 0/m - \mu)] \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} R_\mu \; \aleph[q + 2](2/0, 1/-1) = {} & A_{\mu-3} \aleph[q + 2](2/0, 1/-1) - A_{\mu-4} \aleph[q + 2](2/0, 2/-1) \\ & + A_{\mu-5} \aleph[q + 2](2/0, 3/-1) \ldots + \\ & + (-1)^{m+1} A_0 \aleph[q + 2][2/0, (\mu - 2)/-1]. \end{aligned}$$

On choisit entre ces formules celles qui conviennent le mieux.

Et, puisque l'égalité entre deux rapports des fonctions aleph actuelles forme précisément l'égalité entre deux rapports des fonctions aleph composées du second ordre, la condition de la décomposition dont il s'agit est

$$\frac{\aleph[\rho](2/\alpha_1, \alpha_2/\beta_1)}{\aleph[\rho-1](2/\alpha_1, \alpha_2/\beta_1)} = \frac{\aleph[\rho+\gamma+1](2/\alpha_3, \alpha_4/\beta_2)}{\aleph[\rho+\gamma](2/\alpha_3, \alpha_4/\beta_2)}.$$

Ces fonctions aleph composées, bien qu'elles paraissent se compliquer, ne sont rien autre que des fonctions aleph simples, formées avec les coefficients de l'équation réduite précédente; et l'on conçoit que, sitôt que leur rapport devient constant, l'équation s'abaisse d'un degré immédiatement en formant le facteur principal; mais, pour plus de clarté, nous l'avons démontré d'une manière explicite. Si le second ordre ne satisfait pas à la condition voulue, il faut recourir au troisième, puis au quatrième, etc., et l'on arrivera nécessairement à la solution définitive.

La démonstration est donc complète et si élémentaire, qu'il suffit d'avoir quelques notions d'Algèbre pour la comprendre, et cependant c'est un des plus hauts problèmes des Mathématiques.

Au moyen des fonctions aleph composées du second ordre, on résout l'équation du sixième degré la plus complexe, qui ne se décompose qu'en deux facteurs du troisième degré, et, poursuivant, l'équation du septième degré qui n'admettra que la décomposition en deux facteurs du troisième et du quatrième degré, les autres cas étant plus simples.

De même, par ces fonctions composées du troisième ordre, on résoudra les équations du huitième et du neuvième degré; par celles du quatrième ordre, les équations du dixième et du onzième degré; par les composées du cinquième ordre, on résoudra les équations du douzième et du treizième degré, et qu'on ne saurait songer à résoudre par aucune autre méthode.

La loi de la solution est une et universelle; elle consiste dans l'expression du facteur principal du degré $(m-1)$, savoir

$$0 = z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P z^{m-3} - P_4 z^{m-4} \ldots + (-1) P_m z^0,$$

dont se déduisent tous les facteurs ultérieurs; mais, donnée sans démonstration, elle restait incomprise. Cependant, quelle admirable simplicité, quelle facilité dans l'exécution des calculs, au point qu'on peut sûrement affirmer que la résolution des équations algébriques des degrés supérieurs ne réussira pratiquement que par cette méthode! Elle porte le double caractère, numérique et algébrique, parce qu'il faut d'abord constater numériquement la constance du rapport des fonctions aleph de l'ordre correspondant; mais, cela fait, l'expression des facteurs de l'équation donnée est rigoureusement algébrique; c'est pourquoi elle est dite téléologique. Il est facile d'en déduire les méthodes connues pour la solution des équations du quatrième degré de Ferrari et d'Euler, qui, en réalité, ne sont qu'une espèce de divination, un succès du tâtonnement algébrique, tandis que la méthode téléologique est basée sur son principe rationnel et universel.

Bien plus, et c'est une remarque d'une haute importance philosophique : quelle que soit la solution d'un problème mathématique, elle peut et elle doit toujours se ramener à la forme universelle, puisqu'une quantité déterminée, n'importe son expression, a nécessairement sa génération fondamentale unique. Par conséquent, quelque différente que soit la forme de la solution directe, fondamentale ou philosophique, ou même la solution des équations algébriques, dite finie, elle doit être ramenée à la même forme universelle constituant la solution téléologique, et elles ne formeront définitivement qu'une même solution.

NOTRE unique objet n'étant que la démonstration pure et simple de l'importante loi en question, nous n'insisterons ici, ni sur la réduction des équations à leur forme normale, où le dernier coefficient est l'unité, ni sur la transformation ayant pour objet l'écartement des racines trop rapprochées, ni sur d'autres circonstances, utiles sans doute, mais qui ne sont que des accessoires parfaitement exposés dans l'ouvrage sur la *Résolution générale des équations algébriques de tous les degrés :* c'est là qu'il faut les étudier.

Mais il ne sera pas mal à propos de donner un exemple de cette solution sur une équation du sixième degré, insoluble par aucune méthode connue, telle que celle-ci :

$$0 = x^6 - 14x^5 + 96x^4 - 376x^3 + 912x^2 - 1280x + 1024.$$

En construisant d'abord les fonctions aleph à exposants *positifs,* on s'apercevra aisément que ces fonctions, soit simples, soit composées du premier ordre, ne satisfont à la condition de la constance de leur rapport; il faut donc recourir aux fonctions aleph à exposants *négatifs*.

Leur construction se fait d'après la formule

$$\begin{aligned}\aleph[-\rho] = \mathrm{B}_1\aleph[-(\rho-1)] - \mathrm{B}_2\aleph[-(\rho-2)] + \mathrm{B}_3\aleph[-(\rho-3)]\ldots + \\ + (-1)^{m-1}\mathrm{B}_m\aleph[-(\rho-m)],\end{aligned}$$

en formant auxiliairement les quantités

$$\mathrm{B}_1 = \frac{\mathrm{A}_{m-1}}{\mathrm{A}_m},\quad \mathrm{B}_2 = \frac{\mathrm{A}_{m-2}}{\mathrm{A}_m},\quad \mathrm{B}_3 = \frac{\mathrm{A}_{m-3}}{\mathrm{A}_m},\quad \ldots,\quad \mathrm{B}_m = \frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_m} = \frac{1}{\mathrm{A}_m};$$

cune intégration des équations ne saurait s'effectuer, à quoi se réduisent-elles ce Mathématiques imposantes? Presque à rien, à bien peu de chose, à des puérilités de nature à embarrasser les écoliers et à former un vain prestige aux savants professeurs. Mais qu'une Faculté des Sciences, libre ou officielle, n'importe sa qualification, parvienne seulement à s'élever aux hauteurs des solutions universelles, elle verra bientôt tout s'incliner devant elle, tout se hâter à suivre ses traces. Toute opposition s'y briserait, parce que c'est le pinacle de la culture intellectuelle, parce que ce n'est que cela qui est rationnel.

H. Wronski, avant de descendre dans sa tombe, avait imposé à la postérité savante les trois obligations suivantes, à savoir :

1° La démonstration de la solution de la congruence fondamentale

$$x^m \equiv a(\text{mod.} = \text{M});$$

2° La démonstration de la loi primordiale dans la méthode téléologique de la résolution générale des équations de tous les degrés

$$0 = z^{m-1} - \text{P}_2 z^{m-2} + \text{P}_3 z^{m-3} - \text{P}_4 z^{m-4} \ldots + (-1)^{m-1}\text{P}_m z^0;$$

3° Enfin la démonstration des lois fondamentales pour la solution finie des équations algébriques

$$\begin{aligned}
0 &= \aleph[n+1]\Omega_0 - \aleph[n]\Omega_1 + \aleph[n-1]\Omega_2 - \aleph[n-2]\Omega_3 \ldots (-1)^{\omega m}\aleph[1-m]\Omega_{\omega m},\\
0 &= \aleph[n+2]\Omega_0 - \aleph[n+1]\Omega_1 + \aleph[n]\Omega_2 - \aleph[n-1]\Omega_3 \ldots (-1)^{\omega m}\aleph[2-m]\Omega_{\omega m},\\
0 &= \aleph[n+3]\Omega_0 - \aleph[n+2]\Omega_1 + \aleph[n+1]\Omega_2 - \aleph[n]\Omega_3 \ldots (-1)^{\omega m}\aleph[3-m]\Omega_{\omega m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= \aleph[n+m]\Omega_0 - \aleph[n+m-1]\Omega_1 + \aleph[n+m-2]\Omega_2 - \aleph[n+m-3]\Omega_3 \ldots\\
&\quad (-1)^{\omega m}\aleph[0]\Omega_{\omega m}.
\end{aligned}$$

Nous avons donné, en 1872, la démonstration de la loi de la congruence fondamentale, en déduisant la génération du résidu a de la racine x et du module M (¹).

Actuellement, nous présentons la démonstration de la loi primordiale de la résolution téléologique des équations de tous les degrés, en déduisant d'abord le facteur principal par la détermination des coefficients $\text{P}_2, \text{P}_3, \text{P}_4, \ldots, \text{P}_m$, et en-

(¹) Bukaty, *Déduction et démonstration de trois lois primordiales de la* Congruence des nombres *constituant la troisième loi de l'Algorithmie donnée par H. Wronski.* Paris, Amyot, 1873.

suite le facteur réduit par la détermination des coefficients Q_3, Q_4, Q_5, ..., Q_m, et ainsi indéfiniment.

Dans l'avenir, nous essayerons la démonstration de la célèbre résolution finie des équations algébriques de tous les degrés, qui certes n'est pas impossible. Le savoir en indiquera la voie, quand même le terme serait dans l'infini.

4977 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.