NOTE DE GÉOMÉTRIE À PROPOS D'UN THÉORÈME DE M. STEWART.

Par M. le Prof. *A. Mannheim.*

Soient a, b, c, d les sommets d'un quadrilatère convexe inscrit dans une circonférence de cercle. Il est évident que la somme des aires des deux triangles dans lesquels il est partagé par l'une de ses diagonales est égale à la somme des aires des deux autres triangles déterminés par l'autre diagonale. Ainsi on peut écrire tout de suite

$$(1)\quad abc + acd = abd + bcd.$$

Exprimant l'aire de chacun de ces triangles en fonction du produit de leurs trois côtés et du rayon du cercle qui leur est circonscrit et remarquant que ce cercle est commun aux quatre triangles, on a simplement

$$(2)\quad ab.bc.ac + ac.cd.ad = ab.bd.ad + bc.cd.ad,$$

relation qui donne l'expression du rapport des diagonales du quadrilatère $abcd$ en fonction de ses côtés, et à laquelle on arrive ainsi d'une manière rapide et très simple.

Transformons par rayons vecteurs réciproques les sommets du quadrilatère $abcd$ et la circonférence circonscrite à ce quadrilatère en prenant pour pôle de transformation un point arbitraire O dans l'espace.

On obtient ainsi les points A, B, C, D qui sont encore les sommets d'un quadrilatère convexe inscrit dans une circonférence de cercle.

Appliquant une formule bien connue* à chacun des segments qui entrent dans la relation (2) celle ci devient:

$$\frac{AB}{OA.OB} \times \frac{BC}{OB.OC} \times \frac{AC}{OA.OC} + \frac{AC}{OA.OC} \times \frac{CD}{OC.OD} \times \frac{AD}{OA.OD}$$
$$= \frac{AB}{OA.OB} \times \frac{BD}{OB.OD} \times \frac{AD}{OA.OD} + \frac{BC}{OB.OC} \times \frac{CD}{OC.OD} \times \frac{BD}{OB.OD},$$

* *Eléments de Géométrie*, par Rouché et de Comberousse, 4[e] édition, page 367.

www.rcin.org.pl

que l'on peut écrire:

$$(3)\quad AB.BC.AC(OD)^2+AC.CD.AD(OB)^2$$
$$=AB.BD.AD(OC)^2+BC.CD.BD(OA)^2.$$

Si l'on introduit les aires des triangles dans lesquels le quadrilatère $ABCD$ est partagé par ses diagonales, on a

$$ABC(OD)^2+ACD(OB)^2=ABD(OC)^2+BCD(OA)^2,$$

qui est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la relation (1). Elle permet de retrouver celle ci lorsque O est à l'infini ou en un point de l'axe de la circonférence circonscrite au quadrilatère $ABCD$.

Reprenons la relation (3) relative à quatre points qui se suivent sur une circonférence de cercle et un point arbitraire O dans l'espace.

Lorsque le rayon de la circonférence $ABCD$ est infini la relation (3) concerne quatre points d'une droite et un point O arbitraire.

Si le point O est lui-même sur la droite $ABCD$ la relation (3), qui s'applique toujours, concerne cinq points en ligne droite.

Cette dernière relation a été donnée sans démonstration par Chasles à la page 176 de son *Aperçu historique*. Chasles a donné en outre des cas particuliers de cette relation concernant quatre points d'une droite, cas particuliers que je ne crois pas utile de reproduire ici et qu'il est du reste facile de retrouver.

Replaçons le point O en dehors de la droite $ABCD$ et écrivons ainsi la relations (3)

$$AB.BC.AC+AC(OB)^2\frac{CD.AD}{(OD)^2}$$
$$=AB(OC)^2\frac{BD.AD}{(OD)^2}+BC(OA)^2\frac{CD.BD}{(OD)^2}.$$

Si l'on suppose maintenant le point D à l'infini il vient simplement:

$$AB.BC.AC+AC(OB)^2=AB(OC)^2+BC(OA)^2,$$

qui est l'expression du théorème de Stewart.

Ainsi le théorème de Stewart résulte ici de la transformation par rayons vecteurs réciproques du théorème de géométrie élémentaire qui donne l'expression du rapport des diagonales d'un quadrilatère convexe inscrit dans une circonférence de cercle. Cette transformation peut s'effectuer directement

www.rcin.org.pl

en plaçant le pôle de transformation en un des sommets du quadrilatère.

La transformation de la relation (2) a donné la relation (3). Il ne faut pas croire qu'en transformant cette dernière relation on soit conduit à en obtenir une nouvelle concernant six points.

En opérant ainsi on ne fera que retrouver la relation (3).

Ceci est facile à vérifier. Mais cette vérification est inutile car l'on sait, en vertu d'une belle proposition due à Liouville que, lorsqu'il s'agit de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le résultat de transformations successives d'une propriété ne fait que donner le résultat obtenu directement par une seule transformation générale de cette propriété.

Remarques. Appelons s l'aire du triangle abc, S l'aire du triangle ABC et k^2 la puissance de la transformation. Supposons O sur le plan de abc et désignons par T la longueur de la tangente menée du point O à la circonférence ABC.

Il est facile de voir, d'après ce qui précède, que:

$$s = \frac{S.T^2.k^4}{(OA)^2(OB)^2(OC)^2}.$$

On trouvera aussi très simplement cette autre expression:

$$2s = k^4\left(\frac{\sin COA}{OA.OC} + \frac{\sin BOC}{OB.OC} - \frac{\sin BOA}{OA.OB}\right).$$

Si en faisant usage de cette dernière expression, on transforme cette propriété: *les triangles de même aire qui ont pour base ab ont leur troisième sommet sur une parallèle à ab*, on trouve que: *Etant donnés trois points fixes A, B, O si l'on prend un point C, tel que*

$$\frac{\sin COA}{OA.OC} + \frac{\sin BOC}{OB.OC} = \text{const}^e.$$

le lieu des points tels que C est une circonférence tangente en O au cercle circonscrit au triangle ABO.

Il est évidemment très facile d'appliquer les formules précédentes à la transformation de théorèmes concernant les aires des triangles.

www.rcin.org.pl