Sposób D'Alemberta

w zastosowaniu do równań różniczkowych liniowych rzędu n-go ze spółczynnikami stałymi.

Przez

A. J. Stodółkiewicza.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. d. 4 lipca 1892.; referował członek Zajączkowski.

Ogólny kształt równań różniczkowych liniowych rzędu n-go ze spółczynnikami stałymi jest

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X, \tag{1}$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są liczby stałe, a X funkcya zmiennej niezależnej x. Wiadomem jest, że całki takiego równania są w ścisłej zależności od pierwiastków równania algebraicznego

$$\lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \ldots . A_{n-1} \lambda + A_n = 0.$$

Sposób całkowania, który w niniejszej pracy zamierzam wyłożyć jest, mojem zdaniem, bardziej z naturą zagadnienia związany, aniżeli sposób, zwykle używany przy wykładach nauki równań różniczkowych. Sposób D'Alemberta wypływa z zagadnienia bezpośrednio i ogólnie przy rozważaniu równania pełnego. Oprócz tego, sposób wspomniany czyni zupełnie zbytecznem rozpatrywanie równań redukowanych i odróżnianie pierwiastków równych urojonych, lub rzeczywistych. Stosując sposób D'Alemberta, połóżmy nasamprzód

$$(2) \qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}, \ldots, \frac{dy'}{dx} = y'', \frac{dy}{dx} = y';$$

natenczas, równanie (2) można napisać w kształcie:

$$(3) \qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = X - A_1\, y^{(n-1)} - A_2\, y^{(n-2)} - \ldots - A_{n-1}\, y' - A_n\, y.$$

Mnożąc równania (2) odpowiednio przez czynnniki nieoznaczone μ_1, μ_2, ..., μ_{n-2}, μ_{n-1} i dodając do równania (3), otrzymamy

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + \mu_1 \frac{dy^{(n-2)}}{dx} + \mu_2 \frac{dy^{(n-3)}}{dx} + \ldots + \mu_{n-2} \frac{dy'}{dx} + \mu_{n-1} \frac{dy}{dx} =$$

$$= X - A_1\, y^{(n-1)} - A_2\, y^{(n-2)} - \ldots - A_{n-1}\, y' - A_n\, y +$$

$$(4) \qquad + \mu_1\, y^{(n-1)} + \mu_2\, y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2}\, y'' + \mu_{n-1}\, y'.$$

Następnie, połóżmy:

$$(5) \qquad y^{(n-1)} + \mu_1\, y^{(n-2)} + \mu_2\, y^{(n-3)} + \ldots + \mu_{n-2}\, y' + \mu_{n-1}\, y = u_1,$$

natenczas, rugując $y^{(n-1)}$ z równania (4) przy pomocy związku (5), łatwo otrzymamy

$$\frac{du_1}{dx} - y^{(n-2)} \frac{d\mu_1}{dx} - y^{(n-3)} \frac{d\mu_2}{dx} - \ldots - y' \frac{d\mu_{n-2}}{dx} - y \frac{d\mu_{n-1}}{dx} = X + (\mu_1 - A_1) u_1 -$$

$$(6) \qquad - y^{(n-2)} [\mu_1(\mu_1 - A_1) + A_2 - \mu_2] - y^{(n-3)} [\mu_2(\mu_1 - A_1) + A_3 - \mu_3] - \ldots$$

$$\ldots - y' [\mu_{n-2}(\mu_1 - A_1) + A_{n-1} - \mu_{n-1}] - y [\mu_{n-1}(\mu_1 - A_1) + A_n].$$

Dla μ_1, μ_2, ..., μ_{n-2}, μ_{n-1} można zawsze znaleźć układ ilości stałych, zadość czyniących warunkowi, ażeby spółczynniki przy $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, ..., y' y były zerami. W rzeczy samej, trzeba tylko rozwiązać następujący układ równań algebraicznych

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mu_1 (\mu_1 - A_1) + A_2 - \mu_2 &= 0, \\ \mu_2 (\mu_1 - A_1) + A_3 - \mu_3 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{n-2} (\mu_1 - A_1) + A_{n-1} - \mu_{n-1} &= 0, \\ \mu_{n-1} (\mu_1 - A_1) + A_n &= 0, \end{aligned}$$

z których, po rozwiązaniu, otrzymamy

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mu_{n-1} &= -\frac{A_n}{\mu_1 - A_1}, \\ \mu_{n-2} &= -\frac{A_{n-1}}{\mu_1 - A_1} - \frac{A_n}{(\mu_1 - A_1)^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\mu_2 = -\frac{A_3}{\mu_1 - A_1} - \frac{A_4}{(\mu_1 - A_1)^2} - \ldots - \frac{A_{n-1}}{(\mu_1 - A_1)^{n-3}} - \frac{A_n}{(\mu_1 - A_1)^{n-2}},$$

$$\mu_1 = -\frac{A_2}{\mu_1 - A_1} - \frac{A_3}{(\mu_1 - A_1)^2} - \ldots - \frac{A_{n-1}}{(\mu_1 - A_1)^{n-2}} - \frac{A_n}{(\mu_1 - A_1)^{n-1}}.$$

Z ostatniego z tych równań (8), kładąc

$$\mu_1 = r + A_1, \tag{9}$$

otrzymamy

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0. \tag{10}$$

Odszukawszy jeden pierwiastek równania (10), otrzymamy z (9) odpowiednią wartość na μ_1, tudzież, z układu (8) obliczymy z łatwością wszystkie pozostałe ilości $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}$.

Takim sposobem, rozporządzać będziemy nowem równaniem różniczkowem (5), w którem u_1 jest funkcyą zmiennej niezależnej x, określoną równaniem

$$\frac{du_1}{dx} = X + (\mu_1 - A_1) u_1,$$

skąd, oznaczając dla krótkości pierwszy pierwiastek równania (10) przez r_1, wskutek związku (9), mamy

$$u_1 = e^{r_1 x} \left\{ c_1 + \int X e^{-r_1 x} dx \right\}. \tag{11}$$

Widzimy z poprzedzającego, że równanie (5) ma znowu ten sam kształt co równanie dane (1), ale jest rzędu o 1 niższego, i podobnie jak (1) zawiera wszystkie spółczynniki stałe; przeto, do równania (5) możemy również zastosować sposób D'Alemberta. Napiszemy w tym celu układ następujący

$$\begin{aligned}
&\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = u_1 - \mu_1 y^{(n-2)} - \mu_2 y^{(n-3)} - \ldots - \mu_{n-2} y' - \mu_{n-1} y, \\
&\frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}, \\
&\frac{dy^{(n-4)}}{dx} = y^{(n-3)}, \\
&\ldots\ldots\ldots, \ldots \\
&\frac{dy'}{dx} = y'', \\
&\frac{dy}{dx} = y'.
\end{aligned} \tag{12}$$

Mnożąc drugie równanie z układu (12) przez ν_1, trzecie przez ν_2 i t. d. przedostatnie przez ν_{n-3} i ostatnie przez ν_{n-2} i dodając do równania pierwszego, otrzymamy

$$(13) \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} + \nu_1 \frac{dy^{(n-3)}}{dx} + \nu_2 \frac{dy^{(n-4)}}{dx} + \ldots + \nu_{n-3} \frac{dy'}{dx} + \nu_{n-2} \frac{dy}{dx} =$$

$$= u_1 - \mu_1 y^{(n-2)} - \mu_2 y^{(n-3)} - \ldots - \mu_{n-2} y' - \mu_{n-1} y + \nu_1 y^{(n-2)} + \nu_2 y^{(n-3)} + \ldots$$

$$\ldots + \nu_{n-3} y'' + \nu_{n-2} y'.$$

Jeżeli dalej położymy

$$(14) \quad y^{(n-2)} + \nu_1 y^{(n-3)} + \nu_2 y^{(n-4)} + \ldots + \nu_{n-3} y' + \nu_{n-2} y = u_2$$

i celem wyznaczenia stałych ilości ν weźmiemy

$$(15) \quad \begin{aligned} -(\nu_1 - \mu_1)\nu_1 + \nu_2 - \mu_2 &= 0, \\ -(\nu_1 - \mu_1)\nu_2 + \nu_3 - \mu_3 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -(\nu_1 - \mu_1)\nu_{n-3} + \nu_{n-2} - \mu_{n-2} &= 0, \\ -(\nu_1 - \mu_1)\nu_{n-2} - \mu_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

natenczas z równania (3) otrzymamy

$$(15a) \quad \frac{du_2}{dx} = u_1 + (\nu_1 - \mu_1) u_2.$$

Liczby ν wyznaczy się z układu (15), gdyż:

$$(16) \quad \begin{aligned} \nu_{n-2} &= \frac{-\mu_{n-1}}{\nu_1 - \mu_1}, \\ \nu_{n-3} &= -\frac{\mu_{n-2}}{\nu_1 - \mu_1} - \frac{\mu_{n-1}}{(\nu_1 - \mu_1)^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_2 &= -\frac{\mu_3}{\nu_1 - \mu_1} - \frac{\mu_4}{(\nu_1 - \mu_1)^2} - \ldots - \frac{\mu_{n-1}}{(\nu_1 - \mu_1)^{n-3}}, \\ \nu_1 &= -\frac{\mu_2}{\nu_1 - \mu_1} - \frac{\mu_3}{(\nu_1 - \mu_1)^2} - \ldots - \frac{\mu_{n-1}}{(\nu_1 - \mu_1)^{n-2}}. \end{aligned}$$

Z ostatniego równania powyższego układu (16), kładąc

$$(16a) \quad \nu_1 = s + \mu_1,$$

mieć będziemy równanie

$$(17) \quad s^{n-1} + \mu_1 s^{n-2} + \mu_2 s^{n-3} + \ldots + \mu_{n-2} s + \mu_{n-1} = 0,$$

które, jak to łatwo okazać, ma wszystkie pierwiastki wspólne z równaniem (10). Ażeby tego dowieść, napiszmy równanie (17) w kształcie

$$r^{n-1} + \mu_1 r^{n-2} + \mu_2 r^{n-3} + \ldots + \mu_{n-2} r + \mu_{n-1} = 0 \tag{18}$$

i wprowadźmy pierwiastek, którego mu brakuje:

$$r = \mu_1 - A_1 ;$$

w tym celu, mnożymy równanie (18) przez $r - \mu_1 + A_1$ a, po uporządkowaniu iloczynu podług potęg r, otrzymamy

$$r^n + A_1 r^{n-1} + (\mu_2 - \mu_1^2 + A_1 \mu_1) r^{n-2} + (\mu_3 - \mu_1 \mu_2 + A_1 \mu_2) r^{n-3} + \ldots .$$
$$\ldots + (\mu_{n-1} - \mu_2 \mu_{n-2} + A_1 \mu_{n-2}) r - \mu_1 \mu_{n-1} + A_1 \mu_{n-1} = 0.$$

Z ostatniego równania, przy pomocy związków (7), mieć będziemy

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + A_3 r^{n-3} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0,$$

co było do dowiedzenia.

Stąd wypływa, że, jeżeli odnajdziemy drugi pierwiastek równania (10) i nazwiemy go r_2, natenczas na zasadzie związku (16a) będzie

$$\nu_1 = r_2 + \mu_1 .$$

Tutaj zauważyć już można, że sposób nic nie traci na ogólności w przypadku, gdy r_2 równa się poprzedniemu pierwiastkowi r_1. Następnie, pozostanie nam tylko obliczyć $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{n-2}$ z równań (16) i całkować równanie różniczkowe (14) rządu n-2go, w którem funkcya u_2 określa się równaniem (15a), a które scałkowane daje:

$$u_2 = e^{r_2 x} \left\{ c_2 + \int u_1 \, e^{-r_2 x} dx \right\} .$$

Do całkowania równania (14) ze spółczynnikami stałymi znowu stosujemy z tym samym pożytkiem sposób D'Alemberta. Powtórzywszy n-1 razy szereg podobnych, jak powyższe, działań, obniżymy rząd równania aż do 1-go i otrzymamy równanie liniowe kształtu

$$y' - r_n y = u_{n-1},$$

z którego po scałkowaniu wynika

$$y = e^{r_n x} \left(c_n + \int u_{n-1} e^{-r_n x} dx \right) ;$$

r_n jest tutaj ostatnim pierwiastkiem równania (10), a u_{n-1} funkcyą zmiennej niezależnej x, wiadomą z poprzedzającego całkowania. Ostatni związek będzie zarazem całką ogólną danego rownania, która zawierać musi n stałych dowolnych, gdyż każde całkowanie wprowadza jednę ilość stałą c. Wszystkie stałe, oprócz ostatniej c_n, zawarte będą we funkcyi u_{n-1}. Ponieważ zależność funkcyi u_1, u_2, . . . , u_{n-1} jest zawsze jednakowego kształtu, przeto, rugując kolejno z całki ogólnej wzmiankowane funkcye u_1, u_2, . . . , u_{n-1}, możemy napisać całkę szukaną w postaci szeregu n następujących, zależnych jedna od drugiej kwadratur.

$$y = e^{r_n x} + \Big[c_n + \int e^{-r_n x + r_{n-1} x} \{c_{n-1} + \int e^{-r_{n-1} x + r_{n-2} x} [c_{n-2} +$$

$$+ \int \ldots\ldots (c_1 + \int X e^{-r_1 x} dx) \ldots dx] \, dx \} \, dx\Big],$$

Wzór ten jest ogólny dla wszelkich możliwych przypadków.

Jeżeli równanie (1)będzie redukowane, natenczas należy tylko wzór powyższy uprościć, pisząc $X = 0$.

Jeżeli napotkamy w (10) pierwiastki równe, naprzykład $r_n = r_{n-1}$ wówczas będzie

$$e^{-r_n x + r_{n-1} x} = e^0 = 1$$

i wzór powyższy w tym przypadku na ogólności bynajmniej nic nie straci.

Teoryę wyłożoną objaśnimy biorąc przykład następujący:
Niech będzie dane równanie

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = x^m,$$

w którem a_1, a_2, a_3 są liczby jakiebądź.

Równania całkowe, według poprzedzającej teoryi, będą

$$u_1 = e^{r_1 x}\Big(c_1 + \int x^m e^{-r_1 x} dx \Big),$$

$$u_2 = e^{r_2 x}\Big(c_2 + \int u_1 e^{-r_2 x} dx \Big),$$

$$y = e^{r_3 x}\Big(c_3 + \int u_2 e^{-r_3 x} dx \Big),$$

gdzie r_1, r_2, r_3 oznaczają pierwiastki równania

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0.$$

Z trzech powyższych równań całkowych łatwo utworzyć następującą całkę ogólną

$$y = e^{r_3 x}\left[c_3 + \int e^{-r_3 x + r_2 x}\left\{c_2 + \int e^{-r_2 x + r_1 x}\left(c_1 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int x^m e^{-r_1 x}\, dx\right) dx\right\} dx\right],$$

W przypadku kiedy m jest całkowite dodatne kwadratury te nie przedstawiają żadnych trudności.