O zadaniu Malfattego.

Napisał

F. Mertens.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 4. grudnia 1893.

1.

Zadanie Malfattego brzmi jak następuje:

Dane są na płaszczyźnie trzy proste p_1, p_2, p_3, nie przechodzące przez jeden punkt; wykreślić trzy koła K_1, K_2, K_3, z których pierwsze stycznem jest do prostych p_2, p_3 i do kół K_2, K_3, drugie do prostych p_1, p_3 i do kół K_1, K_3, a trzecie do prostych p_1, p_2 i do kół K_1 K_2.

Steiner [1]) uogólnił zadanie Malfattego, podstawiając zamiast danych prostych trzy koła. Zadanie natenczas tak brzmi:

Dane są na płaszczyźnie trzy koła k_1, k_2, k_3; wykreślić trzy koła K_1, K_2, K_3, z których pierwsze stycznem jest do kół k_2, k_3, K_2, K_3, drugie do koł k_1, k_3, K_1, K_3, a trzecie do kół k_1, k_2, K_1, K_2.

Zadanie to uogólnione stanowi przedmiot niniejszej pracy.

2.

Równanie koła w jakimbądź układzie prostokątnym sprowadzić można do postaci

$$a_3\,(x^2+y^2)-2(a_1x+a_2y+a_4)=0$$

[1]) Czasopismo Crelle'a T. 1. p. 180. Por. rozprawę H. Schroetera w Tomie 77. tegoż czasopisma.

czyli, jeżeli użyjemy spółrzędnych jednorodnych, do postaci

$$(1) \qquad a_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3) x_3 = 0.$$

Spółrzędne jednorodne środka tego koła są:

$$a_1, \; a_2, \; a_3,$$

a promień

$$= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_3 a_4}}{a_3^2}.$$

Jeżeli zaś $a_3 = 0$, to równanie powyższe przedstawia parę prostych o równaniach

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3 = 0$$
$$x_3 = 0,$$

z których druga jest prostą nieskończenie daleką.

Dla skrócenia oznaczać będę formę kwadratową

$$u_1^2 + u_2^2 + 2u_3 u_4$$

czterech zmiennych u_1, u_2, u_3, u_4 przez f_u i położę

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3 =$$
$$\frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial f_u}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial f_u}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial f_u}{\partial u_3} + v_4 \frac{\partial f_u}{\partial u_4} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_1 \frac{\partial f_v}{\partial v_1} + u_2 \frac{\partial f_v}{\partial v_2} + u_3 \frac{\partial f_v}{\partial v_3} + u_4 \frac{\partial f_v}{\partial v_4} \right)$$
$$= f_{uv},$$

tak, że promień koła przedstawionego równaniem (1), równa się wyrażeniu $\sqrt{\frac{f_a}{a_3^2}}$.

Warunek styczności dwóch kół, danych przez równania:

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3) x_3 &= 0 \\ b_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3) x_3 &= 0, \end{aligned}$$

brzmi

$$\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{b_1}{b_3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_2}{b_3}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{f_a}{a_3^2}} + \sqrt{\frac{f_b}{b_3^2}}\right)^2$$

czyli

$$\frac{f_a}{a_3^2} + \frac{f_b}{b_3^2} - \frac{2f_{ab}}{a_3 b_3} = \left(\sqrt{\frac{f_a}{a_3^2}} + \sqrt{\frac{f_b}{b_3^2}}\right)^2;$$

po rozwinięciu kwadratu, uproszczeniu i rozmnożeniu przez $\frac{1}{2} a_3 b_3$ otrzymujemy

$$f_{ab} + \sqrt{f_a}\sqrt{f_b} = 0. \tag{3}$$

Styczność zewnętrzna lub wewnętrzna zawisła od znaków pierwiastków $\sqrt{f_a}$, $\sqrt{f_b}$.

Równanie (3) wyraża jeszcze styczność prostej o równaniu

(4) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3 = 0$$

z kołem:

(5) $$b_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3) x_3 = 0,$$

jeżeli $a_3 = 0$; przechodzi bowiem w tym przypadku na

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{f_b} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

czyli na

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_3 \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = -\sqrt{\frac{f_b}{b_3^2}}$$

i poucza, że punkt o spółrzędnych $\frac{b_1}{b_3}$, $\frac{b_2}{b_3}$ czyli środek koła (5), ma od prostej (4) odległość równą promieniowi $\sqrt{\frac{f_b}{b_3^2}}$ tegoż koła.

Dwa koła przedstawione równaniami (2) przecinają się pod kątem prostym, jeżeli

$$\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{b_1}{b_3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{b_2}{b_3}\right)^2 = \frac{f_a}{a_3^2} + \frac{f_b}{b_3^2}$$

czyli

$$f_{ab} = 0. \tag{6}$$

Jeżeli zaś ilość a_3 albo obydwie ilości a_3, b_3 są równe zeru, to warunek (6) wyraża prostokątność prostej (4) względem koła (5), a względnie prostokątność prostych przedstawionych równaniami:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3 = 0.$$

3.

Niechaj dane będą trzy koła k_1, k_2, k_3 przez równania:

$$a_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3) x_3 = 0$$
$$b_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3) x_3 = 0$$
$$c_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_4 x_3) x_3 = 0$$

i przypuśćmy, że wyrażenia

$$f_a,\ f_b,\ f_c$$

są różne od zera. Zadanie uogólnione Malfattego wymaga wykreślenia trzech kół K_1, K_2, K_3, z których koło K_1 stycznem jest do kół k_2, k_3, K_2, K_3, koło K_2 do kół k_1, k_3, K_1, K_3, a koło K_3 do kół k_1, k_2, K_1, K_2. Przyjmijmy równania kół szukanych K_1, K_2, K_3 w postaci:

$$u_3\,(x_1^2+x_2^2) - 2\,(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_4 x_3)\,x_3 = 0$$
$$v_3\,(x_1^2+x_2^2) - 2\,(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_4 x_3)\,x_3 = 0$$
$$w_3\,(x_1^2+x_2^2) - 2(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_4 x_3)\,x_3 = 0.$$

Styczności: koła K_1 do kół k_2, k_3, koła K_2 do kół k_1, k_3, koła K_3 do kół k_1, k_2 wyrażone są równaniami:

$$(7)\qquad \begin{aligned} f_{bu} + \sqrt{f_b}\sqrt{f_u} &= 0 \qquad & f_{cu} + \sqrt{f_c}\sqrt{f_u} &= 0 \\ f_{av} + \sqrt{f_a}\sqrt{f_v} &= 0 \qquad & f_{cv} + \sqrt{f_c}\sqrt{f_v} &= 0 \\ f_{aw} + \sqrt{f_a}\sqrt{f_w} &= 0 \qquad & f_{bw} + \sqrt{f_b}\sqrt{f_w} &= 0, \end{aligned}$$

a styczność kół K_1, K_2, K_3 pomiędzy sobą równaniami:

$$(8)\qquad \begin{aligned} f_{vw} + \sqrt{f_v}\sqrt{f_w} &= 0 \\ f_{wu} + \sqrt{f_w}\sqrt{f_u} &= 0 \\ f_{uv} + \sqrt{f_u}\sqrt{f_v} &= 0. \end{aligned}$$

Mamy tedy dla wyznaczenia dwunastu niewiadomych:

$$(9)\qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix}$$

dziewięć równań (7) i (8). Równania te wystarczają do wyznaczenia niewiadomych, ponieważ tak niewiadome u_1, u_2, u_3, u_4, jako też v_1, v_2, v_3, v_4 i w_1, w_2, w_3, w_4 we wszystkich równaniach zachodzą jednorodnie.

Aby było można użyć jak najprostszego sposobu do rozwiązania powyższych równań bez naruszenia ogólności, należy nasamprzód rozstrzygnąć, czy pomiędzy rozwiązaniami tychże równań mogą zachodzić takie, dla których jedno z wyrażeń f_u, f_v, f_w ma wartość zero.

Przypuśćmy wszystkie równania zadania spełnione i niechaj będzie n. p.

$$f_u = 0.$$

Natenczas będzie:

$$(10)\qquad f_u = f_{bu} = f_{cu} = f_{uv} = f_{uw} = 0.$$

Oznaczmy przez t_1, t_2, t_3, t_4 ilości dowolne i przez $(pqrs)$, dla skrócenia, wyznacznik

$$(pqrs) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_2 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

Rozmnożywszy wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t_1, & t_2, & t_4, & t_3 \\ u_1, & u_2, & u_4, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_4, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_4, & w_3 \end{vmatrix}$$

wierszami przez siebie, otrzymujemy

$$-(tuvw)^2 = \begin{vmatrix} f_t, & f_{tu}, & f_{tv}, & f_{tw} \\ f_{tu}, & f_u, & f_{uv}, & f_{uw} \\ f_{tv}, & f_{uv}, & f_v, & f_{vw} \\ f_{tw}, & f_{uw}, & f_{vw}, & f_w \end{vmatrix}$$

a na mocy równań (8), (10)

$$(tuvw)^2 = -\begin{vmatrix} f_t, & f_{tu}, & f_{tv}, & f_{tw} \\ f_{tu}, & 0, & 0, & 0 \\ f_{tv}, & 0, & f_v, & f_{vw} \\ f_{tw}, & 0, & f_u, & f_w \end{vmatrix}$$

czyli

$$(tuvw) = 0.$$

Ponieważ zaś t_1, t_2, t_3, t_4 są ilościami dowolnemi, przeto wszystkie wyznaczniki trzeciego rzędu, dające się utworzyć z układu

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix} \tag{11}$$

muszą być równe zeru i koła K_1, K_2, K_3 należą do tej samej wiązki.

Mogą tu zachodzić dwa przypadki według tego, czy także wszystkie wyznaczniki drugiego rzędu układu (11) równają się zeru, albo nie.

Jeżeli wszystkie wyznaczniki drugiego rzędu układu (11) są równe zeru, to tak ilości v_1, v_2, v_3, v_4, jako też ilości w_1, w_2, w_3 w_4 są proporcyonalne do u_1, u_2, u_3, u_4 i mamy

$$f_v = 0 \quad f_w = 0.$$

Jest więc według równań (7)

$$f_{av} = 0,$$

a zatem także

$$f_{au} = 0.$$

Z równań:

$$f_{au} = 0 \quad f_{bu} = 0 \quad f_{cu} = 0$$

zaś wynika, że koło K_1 przecina wszystkie trzy koła dane pod kątem prostym. Oznaczywszy więc koło prostokątne do kół k_1, k_2, k_3 przez k, widzimy, że w przypadku, w mowie będącym, każde z trzech kół K_1, K_2, K_3 jest kołem k.

Jeżeli wyznacznik postaci

$$\begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma \\ q_\alpha & q_\beta & q_\gamma \\ r_\alpha & r_\beta & r_\gamma \end{vmatrix}$$

oznaczymy dla skrócenia przez $(p_\alpha\ q_\beta\ r_\gamma)$ i położymy

$$e = (a_2\ b_3\ c_4)^2 + (a_1\ b_3\ c_4)^2 - 2\,(a_1 a_2 a_4)(a_1 a_2 a_3),$$

to koło k przedstawione jest równaniem

$$(a_1\ b_2\ c_4)(x_1^2 + x_2^2) - 2\,(-(a_2\ b_3\ c_4)\,x_1 + (a_1\ b_3\ c_4)\,x_2 - (a_1\ b_2\ c_3)\,x_3)\,x_3 = 0$$

i równanie $f_u = 0$ pociąga za sobą równanie

$$e = 0.$$

Koło więc prostokątne rozpaść się musi na dwie proste. Przypadek ten zachodzi przy zwykłem zadaniu Malfattego i przy trzech kołach, przechodzących przez jeden punkt (prócz punktów kołowych urojonych nieskończenie dalekich).

Wyrażenie $-e$ jest wyznacznikiem układu złożonego z dwóch układów

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_3 \end{matrix}.$$

Układ ten złożony brzmi

$$\begin{matrix} f_a & f_{ab} & f_{ac} \\ f_{ab} & f_b & f_{bc} \\ f_{ac} & f_{bc} & f_c \end{matrix}.$$

Jeżeli więc dla skrócenia położymy

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_a & f_{ab} & f_{ac} \\ f_{ab} & f_b & f_{bc} \\ f_{ac} & f_{bc} & f_c \end{vmatrix}$$

$$= f_a f_b f_c - f_a f_{bc}{}^2 - f_b f_{ca}{}^2 - f_c f_{ab}{}^2 + 2 f_{bc} f_{ca} f_{ab},$$

to

$$e = -\Delta \tag{12}$$

i przypadek w mowie będący określony jest warunkiem

$$\Delta = 0.$$

Jeżeli wyznaczniki drugiego rzędu układu (1) nie są wszystkie równe zeru, to położyć można

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda u_1 + \mu v_1 \\ w_2 &= \lambda u_2 + \mu v_2 \\ w_3 &= \lambda u_3 + \mu v_3 \\ w_4 &= \lambda u_4 + \mu v_4 , \end{aligned}$$

a zarazem, ponieważ koło k_3 do tej samej wiązki jak K_1, K_2 należeć musi, będzie:

$$\begin{aligned} c_1 &= \rho u_1 + \sigma v_1 \\ c_2 &= \rho u_2 + \sigma v_2 \\ c_3 &= \rho u_3 + \sigma v_3 \\ c_4 &= \rho u_4 + \sigma v_4 . \\ f_c &= \sigma^2 f_v . \end{aligned}$$

Jeżeli $\mu = 0$, to mamy:

$$f_w = \lambda^2 f_u = 0$$

$$f_{au} = \frac{1}{\lambda} f_{aw} = -\frac{1}{\lambda}\sqrt{f_a}\sqrt{f_w} = 0$$

$$f_{ac} = \rho f_{au} + \sigma f_{av} = -\sigma \sqrt{f_a}\sqrt{f_v},$$

a zatem

$$f_a f_c - f_{ac}{}^2 = 0.$$

Jeżeli zaś μ nie $= 0$, to mamy:

$$f_{bw} = \mu f_{bv} \qquad f_w = \mu^2 f_v$$

$$f_{bc} = \sigma f_{bv} = \frac{\sigma}{\mu} f_{bw}$$

$$f_c = \sigma^2 f_v = \frac{\sigma^2}{\mu^2} f_w$$

a zatem

$$f_b f_c - f_{bc}^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2} (f_b f_w - f_{bw}^2) = 0.$$

W obydwóch więc razach dwa z pomiędzy kół danych muszą być stycznemi do siebie.

Jeżeli więc przypuścimy, że wyrażenia:

$$f_b f_c - f_{bc}^2, \quad f_c f_a - f_{ca}^2, \quad f_a f_b - f_{ab}^2$$

są różne od zera, i jeżeli w przypadku $\Delta = 0$ pominiemy rozwiązania, w których każde z kół szukanych jest kołem prostokątnem k, to równania (7) i (8) tylko takie rozwiązania posiadać mogą, w których wyrażenia f_u, f_v, f_w różnią się od zera.

Można zatem dwunastu niewiadomym (9) nałożyć jeszcze warunki:

$$f_u = 1 \qquad f_v = 1 \qquad f_w = 1.$$

Natenczas równania zagadnienia (7), (8) przybierają postać prostszą:

$$(13) \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{f_{bu}}{\sqrt{f_b}} = -1 & \dfrac{f_{cu}}{\sqrt{f_c}} = -1 \\[2ex] \dfrac{f_{cv}}{\sqrt{f_c}} = -1 & \dfrac{f_{av}}{\sqrt{f_a}} = -1 \\[2ex] \dfrac{f_{aw}}{\sqrt{f_a}} = -1 & \dfrac{f_{bw}}{\sqrt{f_b}} = -1 \end{array}$$

$$f_{vw} = -1 \quad f_{wu} = -1 \quad f_{uv} = -1$$

$$f_u = 1 \qquad f_v = 1 \qquad f_w = 1.$$

Poleca się prócz dwunastu niewiadomych (9) wprowadzić jeszcze spółczynniki równania koła, przecinającego koła szukane K_1, K_2, K_3 pod kątem prostym, a które przez K oznaczę. Jeżeli koło o równaniu

$$s_1 (x_1^2 + x_2^2) - 2 (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_4 x_3) x_3 = 0$$

ma przecinać koła K_1, K_2, K_3 pod kątem prostym, to spółczynniki s_1, s_2, s_3, s_4 spełniać muszą równania:

$$f_{us} = 0 \qquad f_{vs} = 0 \qquad f_{ws} = 0.$$

Równania te posiadają tylko jedno rozwiązanie, jeżeli wyznaczniki

$$(14) \qquad (u_2\ v_3\ w_4),\ (u_1\ v_3\ w_4),\ (u_1\ v_2\ w_4),\ (u_1\ v_2\ w_3)$$

nie są wszystkie równe zeru. Utworzywszy, jak powyżej, wyznacznik układu złożonego z dwóch układów

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \quad & u_1 & u_2 & u_4 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & & v_1 & v_2 & v_4 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & & w_1 & w_2 & w_4 & w_3, \end{matrix}$$

otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} &(u_1\, v_2\, w_3)(u_1\, v_2\, w_4) + (u_1\, v_2\, w_4)(u_1\, v_2\, w_3) + (u_1\, v_3\, w_4)(u_1\, v_4\, w_3) + \\ &\qquad + (u_2\, v_3\, w_4)(u_2\, v_4\, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} f_u & f_{uv} & f_{uw} \\ f_{uv} & f_v & f_{vw} \\ f_{uw} & f_{vw} & f_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1 \\ -1, & -1, & 1 \end{vmatrix} \\ &= -4. \end{aligned} \tag{15}$$

Nie mogą więc wszystkie wyznaczniki (14) zniknąć i możemy położyć:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{2}(u_2\, v_3\, w_4) \\ s_2 &= +\frac{1}{2}(u_1\, v_3\, w_4) \\ s_3 &= \frac{1}{2}(u_1\, v_2\, w_3) \\ s_4 &= -\frac{1}{2}(u_1\, v_2\, w_4) \end{aligned} \tag{16}$$

a na mocy równania (15) będzie

$$f_s = 1.$$

Połóżmy dla skrócenia

$$\begin{aligned} U &= u_3\,(x_1^2 + x_2^2) - 2\,(u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_4\, x_3)\, x_3 \\ V &= v_3\,(x_1^2 + x_2^2) - 2\,(v_1\, x_1 + v_2\, x_2 + v_4\, x_3)\, x_3 \\ W &= w_3\,(x_1^2 + x_2^2) - 2\,(w_1 x_1 + w_2\, x_2 + w_4\, x_3)\, x_3 \\ S &= s_3\,(x_1^2 + x_2^2) - 2\,(s_1\, x_1 + s_2\, x_2 + s_4\, x_3)\, x_3 \end{aligned}$$

i obliczmy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

utworzony ze spółczynników wyrażeń U, V, W, S. Rozwinąwszy go w tym celu według ostatniego wiersza, znajdziemy wyrażenie

$$-s_1\,(u_2\, v_3\, w_4) + s_2\,(u_1\, v_3\, w_4) - s_3\,(u_1\, v_2\, w_4) + s_4\,(u_1\, v_2\, w_3),$$

które na mocy równań (16) przechodzi na

$$-2f_s = -2.$$

Mamy więc

(17) $$(uvws) = -2.$$

Jeżeli zaś wyznacznik $(uvws)$ różnym jest od zera, to koła K, K_1, K_2, K_3 do tej samej sieci należeć nie mogą i równanie każdego koła płaszczyzny sprowadzić można do postaci

$$\lambda U + \mu V + \nu W + \rho S = 0,$$

gdzie λ, μ, ν, ρ oznaczają spółczynniki stosownie wyznaczone.

4.

Połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{a_3(x_1^2 + x_2^2) - 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_3) x_3}{\sqrt{f_a}} = A$$

$$\frac{b_3(x_1^2 + x_2^2) - 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_4 x_3) x_3}{\sqrt{f_b}} = B$$

$$\frac{c_3(x_1^2 + x_2^2) - 2(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_4 x_3) x_3}{\sqrt{f_c}} = C$$

$$d_3(x_1^2 + x_2^2) - 2(d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_4 x_3) x_3 = D$$

i określmy ilości d_1, d_2, d_3, d_4 w następujący sposób:

Jeżeli Δ różne od zera, to położymy

$$\begin{aligned} d_1 &= -(a_2 b_3 c_4) \\ d_2 &= (a_1 b_3 c_4) \\ d_3 &= (a_1 b_2 c_3) \\ d_4 &= -(a_1 b_2 c_4) \end{aligned}$$

tak, że równanie

$$D = 0$$

przedstawia koło prostokątne k do kół danych k_1, k_2, k_3. Wyznacznik $(abcd)$ rozwinięty według ostatniego wiersza przybiera postać

$$-d_1(a_2 b_3 c_4) + d_2(a_1 b_3 c_4) - d_3(a_1 b_2 c_4) + d_4(a_1 b_2 c_3)$$

i ma według równania (12) wartość różną od zera Δ.

Jeżeli zaś $\Delta = 0$, to można obrać d_1, d_2, d_3, d_4 dowolnie tak, aby wyznacznik $(abcd)$ był różnym od zera.

Otrzymujemy proste rozwiązanie zagadnienia czyli równań (13), jeżeli wyrażenia A, B, C, D przedstawimy liniowo jednorodnie przez wyrażenia U, V, W, S.

Weźmy sobie za zadanie, sprowadzić wyrażenie A tożsamościowo do postaci

$$A = \lambda U + \mu V + \nu W + \rho S \tag{18}$$

przez stosowne wyznaczenie spółczynników niewiadomych λ, μ, ν, ρ.

Oznaczmy w tym celu przez t_1, t_2, t_3, t_4 dowolne ilości i podstawmy wartości

$$\frac{a_1}{\sqrt{f_a}} = \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 + \rho s_1$$

$$\frac{a_2}{\sqrt{f_a}} = \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 + \rho s_2$$

$$\frac{a_3}{\sqrt{f_a}} = \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 + \rho s_3$$

$$\frac{a_4}{\sqrt{f_a}} = \lambda u_4 + \mu v_4 + \nu w_4 + \rho s_4 ,$$

wynikające z tożsamości (18) we wyrażeniu:

$$\frac{f_{at}}{\sqrt{f_a}} = \frac{a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_4 + a_4 t_3}{\sqrt{f_a}},$$

to otrzymamy tym sposobem:

$$\frac{f_{at}}{\sqrt{f_a}} = \lambda f_{tu} + \mu f_{tv} + \nu f_{tw} + \rho f_{ts} . \tag{19}$$

Jeżeli w tożsamości tej zastąpimy ilości nieoznaczone t_1, t_2, t_3, t_4 kolejno ilościami:

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ \frac{a_1}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_2}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_3}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_4}{\sqrt{f_a}}, \end{matrix}$$

to na mocy równań (13) otrzymamy:

$$\frac{f_{au}}{\sqrt{f_a}} = \lambda - \mu - \nu$$

$$\frac{f_{av}}{\sqrt{f_a}} = -1 = -\lambda + \mu - \nu$$

$$\frac{f_{aw}}{\sqrt{f_a}} = -1 = -\lambda - \mu + \nu$$

$$\frac{f_{as}}{\sqrt{f_a}} = \rho$$

$$1 = \lambda \frac{f_{au}}{\sqrt{f_a}} - \mu - \nu + \rho \frac{f_{as}}{\sqrt{f_a}}.$$

Z pomiędzy tych równań drugie i trzecie dają

$$\lambda = 1 \qquad \mu = \nu,$$

a następnie pierwsze, czwarte i piąte

$$\frac{f_{au}}{\sqrt{f_a}} = 1 - 2\mu$$

$$0 = -4\mu + \rho^2$$

czyli

$$\mu = \frac{1}{4} \rho^2.$$

Położywszy dla uproszczenia 2α zamiast ρ, mamy $\mu = \alpha^2$ i

(20) $$A = U + \alpha^2 V + \alpha^2 W + 2\alpha S$$

$$\frac{f_{au}}{\sqrt{f_a}} = 1 - 2\alpha^2$$

$$\frac{f_{as}}{\sqrt{f_a}} = 2\alpha.$$

Tym samym sposobem znajdziemy równania:

(21) $$B = \beta^2 U + V + \beta^2 W + 2\beta S,$$

$$\frac{f_{bv}}{\sqrt{f_b}} = 1 - 2\beta^2$$

$$\frac{f_{bs}}{\sqrt{f_b}} = 2\beta.$$

(22) $$C = \gamma^2 U + \gamma^2 V + W + 2\gamma S$$

$$\frac{f_{cw}}{\sqrt{f_c}} = 1 - 2\gamma^2$$

$$\frac{f_{cs}}{\sqrt{f_c}} = 2\gamma.$$

Aby wyznaczyć niewiadome α, β, γ, połóżmy dla skrócenia

$$\frac{f_{bc}}{\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} = l, \quad \frac{f_{ca}}{\sqrt{f_c}\sqrt{f_a}} = m, \quad \frac{f_{ab}}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}} = n,$$

$$1 - \beta\gamma = a, \quad 1 - \gamma\alpha = b, \quad 1 - \alpha\beta = c,$$

i zastąpmy w tożsamości (19), która po podstawieniu wartości znalezionych na λ, μ, ν, ρ przechodzi na

$$\frac{f_{at}}{\sqrt{f_a}} = f_{tu} + \alpha^2 f_{tv} + \alpha^2 f_{tw} + 2\alpha f_{ts},$$

ilości nieoznaczone t_1, t_2, t_3, t_4 raz przez :

$$\frac{b_1}{\sqrt{f_b}}, \quad \frac{b_2}{\sqrt{f_b}}, \quad \frac{b_3}{\sqrt{f_b}}, \quad \frac{b_4}{\sqrt{f_b}}$$

a drugi raz przez:

$$\frac{c_1}{\sqrt{f_c}}, \quad \frac{c_2}{\sqrt{f_c}}, \quad \frac{c_3}{\sqrt{f_c}}, \quad \frac{c_4}{\sqrt{f_c}}.$$

Tedy otrzymujemy na mocy równań (13), (21), (22)

$$\begin{aligned} \frac{f_{ab}}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}} = n &= \frac{f_{bu}}{\sqrt{f_b}} + \alpha^2 \frac{f_{bv}}{\sqrt{f_b}} + \alpha^2 \frac{f_{bw}}{\sqrt{f_b}} + 2\alpha \frac{f_{bs}}{\sqrt{f_b}} \\ &= -1 + \alpha^2 (1-2\beta^2) - \alpha^2 + 4\alpha\beta \\ &= 1 - 2(1-\alpha\beta)^2 = 1 - 2c^2 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{ac}}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_c}} = m &= \frac{f_{cu}}{\sqrt{f_c}} + \alpha^2 \frac{f_{cv}}{\sqrt{f_c}} + \alpha^2 \frac{f_{cw}}{\sqrt{f_c}} + 2\alpha \frac{f_{cs}}{\sqrt{f_c}} \\ &= -1 - \alpha^2 + \alpha^2 (1 - 2\gamma^2) + 4\alpha\gamma \\ &= 1 - 2(1-\alpha\gamma)^2 = 1 - 2b^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Zupełnie podobnym sposobem znajdujemy

$$\frac{f_{bc}}{\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} = l = 1 - 2(1-\beta\gamma)^2 = 1-2a^2. \tag{25}$$

Mamy więc

$$a = 1 - \beta\gamma = \sqrt{\frac{1-l}{2}} \qquad \beta\gamma = 1 - \sqrt{\frac{1-l}{2}}$$

$$b = 1 - \gamma\alpha = \sqrt{\frac{1-m}{2}} \qquad \gamma\alpha = 1 - \sqrt{\frac{1-m}{2}}$$

$$c = 1 - \alpha\beta = \sqrt{\frac{1-n}{2}} \qquad \alpha\beta = 1 - \sqrt{\frac{1-n}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\frac{1-l}{2}}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\frac{1-m}{2}}}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\frac{1-n}{2}}},$$

gdzie

$$\varepsilon = \left(1-\sqrt{\frac{1-l}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{1-m}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{1-n}{2}}\right).$$

Pozostaje jeszcze przedstawienie wyrażenia D. Połóżmy

(26) $$D = -\tfrac{1}{2}(\beta'+\gamma')\,U - \tfrac{1}{2}(\gamma'+\alpha')\,V - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta')\,W + \delta' S,$$

z którejto tożsamości, jak powyżej wynika

(27) $$f_{dt} = -\tfrac{1}{2}(\beta'+\gamma')f_{tu} - \tfrac{1}{2}(\gamma'+\alpha)f_{tv} - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta')f_{tw} + \delta' f_{ts}.$$

Aby wyznaczyć niewiadome

$$\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

zastąpimy w tożsamości (27) nieoznaczone ilości t_1, t_2, t_3, t_4 kolejno przez:

$$\begin{array}{cccc}
u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\
v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\
w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\
s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\
\frac{a_9}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_2}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_3}{\sqrt{f_a}}, & \frac{a_4}{\sqrt{f_a}} \\
\frac{b_1}{\sqrt{f_b}}, & \frac{b_2}{\sqrt{f_b}}, & \frac{b_3}{\sqrt{f_b}}, & \frac{b_4}{\sqrt{f_b}} \\
\frac{c_1}{\sqrt{f_c}}, & \frac{c_2}{\sqrt{f_c}}, & \frac{c_3}{\sqrt{f}}, & \frac{c_4}{\sqrt{f_c}} \\
d_1, & d_2, & d_3, & d_4,
\end{array}$$

i połóżmy dla skrócenia:

$$\frac{f_{ad}}{\sqrt{f_a}} = l', \quad \frac{f_{bd}}{\sqrt{f_b}} = m', \quad \frac{f_{cd}}{\sqrt{f_c}} = n'.$$

Znajdujemy tym sposobem

$$
\begin{aligned}
f_{du} &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') + \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') + \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \alpha' \\
f_{dv} &= \tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') + \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \beta' \\
f_{dw} &= \tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \gamma' \\
f_{ds} &= \delta' \\
l' &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma')(1 - 2\alpha^2) + \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') + \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta')\, 2\alpha\delta' \\
&= \alpha' + \alpha^2 \beta' + \alpha^2 \gamma' + 2\alpha\delta' \\
m' &= \beta^2 \alpha' + \beta' + \beta^2 \gamma' + 2\beta\delta' \\
n' &= \gamma^2 \alpha' + \gamma^2 \beta' + \gamma' + 2\gamma\delta' \\
f_d &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') f_{du} - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') f_{dv} - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') f_{dw} + \delta' f_{ds} \\
&= \delta'^2 - \beta'\gamma' - \gamma'\alpha' - \alpha'\beta'.
\end{aligned}
$$

Prócz tego z tożsamości (20), (21), (22), (26), uważając

$$A,\ B,\ C,\ D,\ U,\ V,\ W,\ S$$

jako funkcye liniowe wyrażeń

$$x_1^2 + x_2^2,\ -2x_1x_3,\ -2x_2x_3,\ -2x_3^2,$$

wywodzimy równanie

$$
\frac{(abcd)}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} = (uvws)
\begin{vmatrix}
1, & \alpha^2, & \alpha^3, & 2\alpha \\
\beta^2, & 1, & \beta^2, & 2\beta \\
\gamma^3, & \gamma^2, & 1, & 2\gamma \\
-\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma'), & -\tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha'), & -\tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta'), & \delta'
\end{vmatrix}
$$

czyli według (17)

$$
\frac{(abcd)}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} =
\begin{vmatrix}
1, & \alpha^2, & \alpha^2, & 2\alpha \\
\beta^2, & 1, & \beta^2, & 2\beta \\
\gamma^2, & \gamma^2, & 1, & 2\gamma \\
\beta' + \gamma', & \gamma' + \alpha', & \alpha' + \beta', & -2\delta'
\end{vmatrix}.
$$

Aby równanie to rozwinąć, należy utworzyć wyznaczniki

$$
\delta_1 = \begin{vmatrix}
\alpha^2 & \alpha^2 & 2\alpha \\
1 & \beta^2 & 2\beta \\
\beta^2 & 1 & 2\gamma
\end{vmatrix}
$$

$$
\delta_2 = \begin{vmatrix}
\alpha^2 & 1 & 2\alpha \\
\beta^2 & \beta^2 & 2\beta \\
1 & \gamma^2 & 2\gamma
\end{vmatrix}
$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & 2\alpha \\ \beta^2 & 1 & 2\beta \\ \gamma^2 & \gamma^2 & 2\gamma \end{vmatrix}$$

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & 1 & \beta^2 \\ \gamma^2 & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Znajdujemy

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 2\alpha\,(1-\beta^2\gamma^2) + 2\beta\alpha^2\gamma^2 - 2\beta\alpha^2 + 2\gamma\alpha^2\beta^2 - 2\gamma\alpha^2 \\
&= 2\alpha\,(1-\beta^2\gamma^2) - 2\alpha^2(\beta+\gamma)(1-\beta\gamma) \\
&= 2\alpha a\,(1+\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma) \\
&= 2\alpha a\,(b+c-a) \\
\delta_2 &= 2\beta b\,(c+a-b) \\
\delta_3 &= 2\gamma c\,(a+b-c) \\
\delta_0 &= 1-\beta^2\gamma^2-\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
&= 1-(1-a)^2-(1-b)^2-(1-c)^2+2(1-a)(1-b)(1-c) \\
&= 2\,(bc+ca+ab)-a^2-b^2-c^2-2abc.
\end{aligned}$$

Z tych równań wynika

$$\begin{aligned}
\delta_2\delta_3 &= 4\beta\gamma bc\,(a^2-(b-c)^2) \\
&= 4\,(1-a)\,bc\,(a^2-b^2-c^2+2bc) \\
&= 4abc\,(2a-a^2+b^2+c^2-2bc) + 8b^2c^2 - 4bc\,(a^2+b^2+c^2) \\
\delta_3\delta_1 &= 4abc\,(2b-b^2+c^2+a^2-2ca) + 8c^2a^2 - 4ca\,(a^2+b^2+c^2) \\
\delta_1\delta_2 &= 4abc\,(2c-c^2+a^2+b^2-2ab) + 8a^2b^2 - 4ab\,(a^2+b^2+c^2) \\
\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1+\delta_1\delta_2 &= 4abc\,(2a+2b+2c+a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab) \\
&\quad + 8\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) - 4\,(bc+ca+ab)\,(a^2+b^2+c^2) \\
\delta_0^2 &= 4\,(bc+ca+ab)^2 + (a^2+b^2+c^2)^2 + 4a^2b^2c^2 \\
&\quad - 4\,(bc+ca+ab)\,(a^2+b^2+c^2) - 4abc\,(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2) \\
&= a^4+b^4+c^4+6\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+4a^2b^2c^2 \\
&\quad -4(bc+ca+ab)(a^2+b^2+c^2)+4abc(2a+2b+2c+a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab).
\end{aligned}$$

Jest więc

$$\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1+\delta_1\delta_2-\delta_0^2 = -a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-4a^2b^2c^2.$$

Podstawiwszy zaś wyrażenia

$$l = 1-2a^2, \qquad m = 1-2b^2, \qquad n = 1-2c^2,$$

wynikające z równań (23), (24), (25), w równaniu

$$\frac{\Delta}{f_a f_b f_c} = 1 - l^2 - m^2 - n^2 + 2lmn,$$

otrzymujemy

$$\frac{\Delta}{f_a f_b f_c} = 1 - (1-2a^2)^2 - (1-2b^2)^2 - (1-2c^2)^2 + 2(1-2a^2)(1-2b^2)(1-2c^2)$$

$$\frac{\Delta}{4 f_a f_b f_c} = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - 4a^2b^2c^2. \tag{28}$$

Jest zatem

$$\delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_1 + \delta_1\delta_2 - \delta_0^2 = \frac{\Delta}{4 f_a f_b f_c}. \tag{29}$$

Mamy więc do wyznaczenia niewiadomych α', β', γ', δ' równania:

$$\begin{aligned}
\alpha' + \alpha^2\beta' + \alpha^2\gamma' + 2\alpha\delta' &= l' \\
\beta^2\alpha' + \beta' + \beta^2\gamma' + 2\beta\delta' &= m' \\
\gamma^2\alpha' + \gamma^2\beta' + \gamma' + 2\gamma\delta' &= n' \\
\delta'^2 - \beta'\gamma' - \gamma'\alpha' - \alpha'\beta' &= f_d \\
(\delta_2+\delta_3)\alpha' + (\delta_3+\delta_1)\beta' + (\delta_1+\delta_2)\gamma' + 2\delta_0\delta' + \frac{(abcd)}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} &= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Aby równania te rozwiązać, należy odróżnić przypadki, w których Δ nie jest równe zeru i jest równe zeru.

Jeżeli Δ różnem jest od zera, mamy

$$l' = 0 \qquad m' = 0 \qquad n' = 0$$

$$f_d = -\Delta \qquad (abcd) = \Delta$$

i równania brzmią:

$$\begin{aligned}
\alpha' + \alpha^2\beta' + \alpha^2\gamma' + 2\alpha\delta' &= 0 \\
\beta^2\alpha' + \beta' + \beta^2\gamma' + 2\beta\delta' &= 0 \\
\gamma^2\alpha' + \gamma^2\beta' + \gamma' + 2\gamma\delta' &= 0 \\
\delta'^2 - \beta'\gamma' - \gamma'\alpha' - \alpha'\beta' &= -\Delta \\
(\delta_2+\delta_3)\alpha' + (\delta_3+\delta_1)\beta' + (\delta_1+\delta_2)\gamma' + 2\delta_0\delta' + \frac{\Delta}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} &= 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ wyznaczniki δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 nie mogą być wszystkie równe zeru, jak wynika ze zrównania (29), przeto z pierwszych trzech równań wnioskujemy:

$$\alpha' = t\delta_1 \qquad \beta' = t\delta_2 \qquad \gamma' = t\delta_3 \qquad \delta' = -t\delta_0,$$

gdzie t oznacza niewiadomą. Z dwóch pozostałych równań według (29) wynika natenczas

$$\frac{\Delta}{4 f_a f_b f_c} t^2 = \Delta$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{f_a f_b f_c} + \frac{\Delta}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}} = 0.$$

Jest więc

$$\begin{aligned} t &= -2\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c} \\ \alpha' &= -2\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}\,\delta_1 \\ \beta' &= -2\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}\,\delta_2 \\ \gamma' &= -2\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}\,\delta_3 \\ \delta' &= 2\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}\,\delta_0. \end{aligned}$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to z równania (28) wynika

$$\begin{aligned} 4a^2 b^2 c^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 \\ &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

i jasnem jest, że ilość $a+b+c$ jest różną od zera, ponieważ żadna z ilości a, b, c nie może zniknąć. Położywszy więc

$$\frac{\alpha'}{2\alpha a} + \frac{\beta'}{2\beta b} + \frac{\gamma'}{2\gamma c} = t\,(a+b+c),$$

widzimy, że równania:

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha^2\beta' + \alpha^2\gamma' + 2\alpha\delta' &= l' \\ \beta^2\alpha' + \beta' + \beta^2\gamma' + 2\beta\delta' &= m' \\ \gamma^2\alpha' + \gamma^2\beta' + \gamma' + 2\gamma\delta' &= n' \\ \frac{\alpha'}{2\alpha a} + \frac{\beta'}{2\beta b} + \frac{\gamma'}{2\gamma c} \qquad &= t\,(a+b+c) \end{aligned}$$

rozwiązać można co do niewiadomych α', β', γ', δ', ponieważ wyznacznik tychże równań ma wartość różną od zera

$$-\frac{\delta_1}{2\alpha a} - \frac{\delta_2}{2\beta b} - \frac{\delta_3}{2\gamma c} = -(a+b+c).$$

Znajdujemy wartości kształtu:

$$\alpha' = \alpha'_0 + \delta_1 t, \quad \beta' = \beta'_0 + \delta_2 t, \quad \gamma' = \gamma'_0 + \delta_3 t,$$
$$\delta' = \delta'_0 - \delta_0 t$$

i z dwóch ostatnich równań układu (30) dla ilości t wynikają warunki

$$(\beta'_0\delta_3+\gamma'_0\delta_2+\gamma'_0\delta_1+\alpha'_0\delta_3+\alpha'_0\delta_2+\beta'_0\delta_1+2\delta_0\delta'_0)t=\delta_0'^2-\beta'_0\gamma'_0-\gamma'_0\alpha'_0-\alpha'_0\beta'_0-f_d$$

$$(\delta_2+\delta_3)\alpha'_0+(\delta_3+\delta_1)\beta'_0+(\delta_1+\delta_2)\gamma'_0+2\delta_0\delta'_0+\frac{(abcd)}{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}}=0.$$

Jest więc

$$t=\frac{\sqrt{f_a}\sqrt{f_b}\sqrt{f_c}}{(abcd)}(f_d-\delta_0'^2+\beta'_0\gamma'_0+\gamma'_0\alpha'_0+\alpha'_0\beta'_0).$$

5.

Tożsamości znalezione:

$$\begin{aligned} A &= U+\alpha^2V+\alpha^2W+2\alpha S \\ B &= \beta^2U+V+\beta^2W+2\beta S \\ C &= \gamma^2U+\gamma^2V+W+2\gamma S \end{aligned} \tag{31}$$

$$D=-\tfrac{1}{2}(\beta'+\gamma')U-\tfrac{1}{2}(\gamma'+\alpha')V-\tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta')W+\delta'S$$

uważać można jako cztery równania liniowe o niewiadomych U, V, W, S. Wyznacznik tych równań [według ostatniego równania układu (30)] różnym jest od zera. Można przeto rzeczone równania rozwiązać. Jeżeli wypadki otrzymane oznaczymy przez:

$$\begin{aligned} U&=p_3(x_1^2+x_2^2)-2(p_1x_1+p_2x_2+p_4x_3)x_3 \\ V&=q_3(x_1^2+x_2^2)-2(q_1x_1+q_2x_2+q_4x'_3)x_3 \\ W&=r_3(x_1^2+x_2^2)-2(r_1x_1+r_2x_2+r_4x_3)x_3 \\ S&=h_3(x_1^2+x_2^2)-2(h_1x_1+h_2x_2+h_4x_3)x_3, \end{aligned}$$

to jasnem jest, że każde rozwiązanie zagadnienia musi być jednym z układów kół przedstawionych przez równania:

$$U=0,\quad V=0,\quad W=0,$$

odpowiadające jednemu i temu samemu układowi wartości pierwiastków:

$$\begin{gathered} \sqrt{f_a},\quad \sqrt{f_b},\quad \sqrt{f_c} \\ \sqrt{\frac{1-l}{2}},\ \sqrt{\frac{1-m}{2}},\ \sqrt{\frac{1-n}{2}},\ \sqrt{\varepsilon}. \end{gathered} \tag{32}$$

Powstaje pytanie, czy naodwrót każde trzy koła przedstawione przez układ równań:

$$U=0,\quad V=0,\quad W=0, \tag{33}$$

odpowiadają zagadnieniu, i czy równanie

$$S = 0$$

przedstawia koło prostokątne do tych kół.

Z tożsamości (31) dla ilości nieoznaczonych t_1, t_2, t_3, t_4 wynika

$$(34)\quad \begin{aligned} \frac{f_{at}}{\sqrt{f_a}} &= f_{tp} + \alpha^2 f_{tq} + \alpha^2 f_{tr} + 2\alpha f_{th} \\ \frac{f_{bt}}{\sqrt{f_b}} &= \beta^2 f_{tp} + f_{tq} + \beta^2 f_{tr} + 2\beta f_{th} \\ \frac{f_{ct}}{\sqrt{f_c}} &= \gamma^2 f_{tp} + \gamma^2 f_{tq} + f_{tr} + 2\gamma f_{th} \\ f_{dt} &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') f_{tp} - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') f_{tq} - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') f_{tr} + \delta' f_{th}. \end{aligned}$$

Zastąpiwszy ilości nieoznaczone t_1, t_2, t_3, t_4 przez:

$$\frac{a_1}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{a_4}{\sqrt{f_a}},$$

widzimy, że wyrażenia:

$$\frac{f_{ap}}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{f_{aq}}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{f_{ar}}{\sqrt{f_a}}, \quad \frac{f_{ah}}{\sqrt{f_a}}$$

zadość czynią równaniom

$$(35)\quad \begin{aligned} 1 &= X + \alpha^2 Y + \alpha^2 Z + 2\alpha T \\ n &= \beta^2 X + Y + \beta^2 Z + 2\beta T \\ m &= \gamma^2 X + \gamma^2 Y + Z + 2\gamma T \\ l' &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma) X - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') Y - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') Z + \delta' T \end{aligned}$$

o niewiadomych X, Y, Z, T. Tym samym równaniom jednakowoż czynią także zadość wartości:

$$X = 1 - 2\alpha^2, \quad Y = -1, \quad Z = -1, \quad T = 2\alpha,$$

jak się o tem łatwym rachunkiem, uwzględniwszy równania (23), (24) i (30) przekonać można. Ponieważ zaś równania (35) mają wyznacznik różny od zera, przeto jedno tylko rozwiązanie posiadać mogą; musi więc być:

$$\frac{f_{ap}}{\sqrt{f_a}} = 1 - 2\alpha^2, \quad \frac{f_{aq}}{\sqrt{f_a}} = -1, \quad \frac{f_{ar}}{\sqrt{f_a}} = -1,$$

$$\frac{f_{ah}}{\sqrt{f_a}} = 2\alpha.$$

Tym samym sposobem z tożsamości (34) dla podstawień:

$$t_1 = \frac{b_1}{\sqrt{f_b}}, \quad t_2 = \frac{b_2}{\sqrt{f_b}}, \quad t_3 = \frac{b_3}{\sqrt{f_b}}, \quad t_4 = \frac{b_4}{\sqrt{f_b}},$$

$$t_1 = \frac{c_1}{\sqrt{f_c}}, \quad t_2 = \frac{c_2}{\sqrt{f_c}}, \quad t_3 = \frac{c_3}{\sqrt{f_c}}, \quad t_4 = \frac{c_4}{\sqrt{f_c}},$$

otrzymujemy:

$$\frac{f_{bp}}{\sqrt{f_b}} = -1, \quad \frac{f_{bq}}{\sqrt{f_b}} = 1 - 2\beta^2, \quad \frac{f_{br}}{\sqrt{f_b}} = -1,$$

$$\frac{f_{bh}}{\sqrt{f_b}} = 2\beta,$$

$$\frac{f_{cp}}{\sqrt{f_c}} = -1, \quad \frac{f_{cq}}{\sqrt{f_c}} = -1, \quad \frac{f_{cr}}{\sqrt{f_c}} = 1 - 2\gamma^2,$$

$$\frac{f_{ch}}{\sqrt{f_c}} = 2\gamma.$$

Położywszy jeszcze:

$$t_1 = d_1, \quad t_2 = d_2, \quad t_3 = d_3, \quad t_4 = d_4,$$

widzimy, że wyrażenia:

$$f_{pd}, \quad f_{dq}, \quad f_{dr}, \quad f_{dh}$$

zadość czynią równaniom:

$$\begin{aligned}
l' &= X + \alpha^2 Y + \alpha^2 Z + 2\alpha T \\
m' &= \beta^2 X + Y + \beta^2 Z + 2\beta T \\
n' &= \gamma^2 X + \gamma^2 Y + Z + 2\gamma T \\
f_d &= -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma')X - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha')Y - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta')Z + \delta' T.
\end{aligned}$$

Tym samym równaniom według (30) zadość czynią wartości:

$$X = \alpha', \quad Y = \beta', \quad Z = \gamma', \quad T = \delta';$$

jest więc:

$$f_{dp} = \alpha' \quad f_{dq} = \beta' \quad f_{dr} = \gamma' \quad f_{dh} = \delta'.$$

Podstawmy dalej p_1, p_2, p_3, p_4 zamiast t_1, t_2, t_3, t_4. Równania otrzymane pouczają, że wyrażenia:

$$f_p, \quad f_{pq}, \quad f_{pr}, \quad f_{ph}$$

czynią zadość równaniom:

$$\frac{f_{ap}}{\sqrt{f_a}} = 1 - 2\alpha^2 = X + \alpha^2 Y + \alpha^2 Z + 2\alpha T$$

$$\frac{f_{bp}}{\sqrt{f_b}} = -1 = \beta^2 X + Y + \beta^2 Z + 2\beta T$$

$$\frac{f_{cp}}{\sqrt{f}} = -1 = \gamma^2 X + \gamma^2 Y + Z + 2\gamma T$$

$$f_{dp} = \alpha' = -\tfrac{1}{2}(\beta' + \gamma') X - \tfrac{1}{2}(\gamma' + \alpha') Y - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') Z + \delta' T.$$

Ponieważ zaś te same równania zostają spełnione i dla wartości :

$$X = 1, \quad Y = -1, \quad Z = -1, \quad T = 0,$$

przeto mamy:

$$f_p = 1, \quad f_{pq} = -1, \quad f_{pr} = -1,$$
$$f_{ph} = 0.$$

Podobnym sposobem podstawienia:

$$t_1 = q_1, \quad t_2 = q_2, \quad t_3 = q_3, \quad t_4 = q_4,$$
$$t_1 = r_1, \quad t_2 = r_2, \quad t_3 = r_3, \quad t_4 = r_4,$$
$$t_1 = h_1, \quad t_2 = h_2, \quad t_3 = h_3, \quad t_4 = h_4,$$

prowadzą do równań:

$$f_{pq} = -1, \quad f_q = 1, \quad f_{qr} = -1, \quad f_{qh} = 0,$$
$$f_{pr} = -1, \quad f_{qr} = -1, \quad f_r = 1, \quad f_{rh} = 0,$$
$$f_h = 1.$$

Równania zatem (33) przedstawiają dla każdego układu wartości pierwiastków (32) trzy koła rzetelne albo urojone, odpowiadające zagadnieniu.

Biorąc każdy z pierwiastków $\sqrt{f_a}$, $\sqrt{f_b}$, $\sqrt{f_c}$ raz ze znakiem +, drugi raz ze znakiem —, otrzymujemy dla l, m, n cztery układy wartości. Pierwiastki

$$\sqrt{\frac{1-l}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1-m}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1-n}{2}}, \quad \sqrt{\varepsilon}$$

tworzą zatem 64 różnych układów wartości. Dwa układy wartości pierwiastków $\sqrt{f_a}$, $\sqrt{f_b}$, $\sqrt{f_c}$, z których jeden z drugiego powstaje, przez odwrócenie znaku przy każdym z pierwiastków, prowadzą do tego samego rozwiązania. Jeżeli więc Δ nie równa się zeru, to istnieje 64 rozwiązań. Jeżeli zaś $\Delta = 0$, to dwom wartościom pierwiastka $\sqrt{\varepsilon}$ o znakach przeciwnych odpowiada tylko jedno rozwiązanie, a rozwiązań jest 32.

6.

Koła K_1, K_2, K_3 w następujący sposób wykreślić można.

Oznaczmy sieć kół, do której dane koła k_1, k_2, k_3 należą, przez Σ i weźmy sobie za zadanie, wyznaczyć wiązkę kół W_1, która należy do sieci Σ i której koła przecinają koło K_1 pod kątem prostym.

W tym celu należy uwzględnić, że, jeżeli znaki pierwiastków $\sqrt{f_a}$, $\sqrt{f_b}$, $\sqrt{f_c}$, zachodzących w wyrażeniach A, B, C, w jakibądź sposób obierzemy, to także równania:

$$B - C = 0, \quad C - A = 0, \quad A - B = 0,$$

zupełnie są oznaczone i trzy koła potęgowe kół k_1, k_2, k_3 przedstawiają należące do jednej i tej samej wiązki. Przez koła zaś potęgowe dwóch kół danych k', k'' rozumiem według Steinera dwa koła, które z temiż kołami k', k'' należą do tej samej wiązki i których środki są punktami podobieństwa kół k' i k''. Trzy koła posiadają trzy pary kół potęgowych i trzy koła obrane stósownie z różnych par należą do tej samej wiązki. Takich wiązek jest cztery. Jeżeli odwrotnie obierzemy jakiebądź trzy koła potęgowe P_1, P_2, P_3 kół k_1, k_2, k_3, należące do jednej wiązki i przedstawimy je równaniami:

$$B - C = 0, \quad C - A = 0, \quad A - B = 0,$$

to przez to samo nadaliśmy pierwiastkom $\sqrt{f_a}$, $\sqrt{f_b}$, $\sqrt{f_c}$ znaki takie, iż ilości l, m, n mają wartości zupełnie oznaczone. Koła potęgowe par (k_2, k_3), (k_3, k_1), (k_1, k_2) różne od P_1, P_2, P_3 mają równania:

$$B + C = 0, \quad C + A = 0, \quad A + B = 0.$$

Oznaczymy takowe przez Q_1, Q_2, Q_3.

Każde koło sieci Σ ma równanie kształtu

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Jeżeli takie koło ma przecinać koło K_1 pod kątem prostym, to mamy warunek

$$\lambda \frac{f_{au}}{\sqrt{f_a}} + \mu \frac{f_{bu}}{\sqrt{f_b}} + \nu \frac{f_{cu}}{\sqrt{f_c}} = 0$$

czyli

$$(1 - 2\alpha^2)\lambda - \mu - \nu = 0.$$

Wystarcza wyprowadzić dwa rozwiązania niezawisłe tego równania i jako takie zalecają się:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = -1,$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \mu = -\alpha^2, \quad \nu = \tfrac{1}{2}.$$

Wiązka szukana W_1 jest więc określona przez koła o zrównaniach

$$B - C = 0$$

$$\tfrac{1}{2} A - \alpha^2 B + \tfrac{1}{2} C = 0.$$

Pierwsze z tych kół jest kołem P_1. Pozostaje więc tylko wykreślić koło drugie.

W tym celu dla skrócenia położę:

$$(1-\alpha\beta)A-\tfrac{1}{2}(A-B)=A'$$
$$(1-\alpha\gamma)A-\tfrac{1}{2}(A-C)=A''$$
$$(1-\beta\gamma)B-\tfrac{1}{2}(B-C)=B'$$
$$(1-\alpha\beta)B-\tfrac{1}{2}(B-A)=B''$$
$$(1-\alpha\gamma)C-\tfrac{1}{2}(C-A)=C'$$
$$(1-\beta\gamma)C-\tfrac{1}{2}(C-B)=C''$$
$$\tfrac{1}{2}(A+C)-\alpha^2B=R$$
$$\beta A-\alpha B=N$$
$$(\tfrac{1}{2}-\alpha\beta)A+\tfrac{1}{2}C=J$$
$$\tfrac{1}{2}\beta(A+C)-\tfrac{1}{2}\alpha(B+C)=H.$$

Koła przedstawione równaniami:

$$A'=0,\quad A''=0,\ \ldots\quad H=0$$

krótko oznaczać będę temi samemi głoskami A', A'', ... H, a wiązkę kół określoną przez dwa koła k', k'', należące do tejże wiązki dla uproszczenia nazywać będę wiązką (k', k'').

Koło A' jest jednem z dwóch kół potęgowych pary kół (P_3, k_1). Położywszy bowiem dla skrócenia

$$A-B=i_3(x_1^2+x_2^2)-2(i_1x_1+i_2x_2+i_4x_3)x_3,$$

otrzymujemy

$$f_i=2-2n=4(1-\alpha\beta)^2$$

czyli

$$2(1-\alpha\beta)=\pm\sqrt{f_i}$$

oraz:

$$A''=(1-\alpha\beta)\left(A\pm\frac{A-B}{\sqrt{f_i}}\right).$$

Podobnież koła A'', B', B'', C', C'' są kołami potęgowemi par kół (k_1, P_2), (k_2, P_1), (k_2, P_3), (k_3, P_2), (k_3, P_1).

Z tych sześciu kół potęgowych

$$A',\ A'',\ B',\ B'',\ C',\ C''$$

wskutek dowolnych znaków pierwiastków $\sqrt{\frac{1-l}{2}}$, $\sqrt{\frac{1-m}{2}}$, $\sqrt{\frac{1-n}{2}}$ wolno wybrać dowolnie koła A', C', C'', które wystarczają do wyznaczenia wiązki W_1.

Pomyślmy sobie koła A', C', C'' wykreślone. Z tożsamości

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}\beta(A + C) - \tfrac{1}{2}\alpha(B + C) \\ &= \beta C' - \alpha C'' \\ N &= \beta A - \alpha B \\ &= 2H + (\alpha - \beta) C \\ J &= (\tfrac{1}{2} - q\beta) A + \tfrac{1}{2} C \\ &= A' - \tfrac{1}{2}(B - C) \\ R &= \tfrac{1}{2}(A + C) - \alpha^2 B \\ &= J + \alpha N, \end{aligned}$$

wynika natenczas, że koło H wykreślić można jako koło spólne wiązkom (Q_1, Q_2) i (C', C''), koło N jako koło spólne wiązkom (k_1, k_2) i (H, k_3), koło J jako koło spólne wiązkom (k_1, k_3) i (A', P_1), a nareszcie koło R jako koło spólne wiązkom (k_2, Q_2) i (J, N).

Podobnym sposobem wyznaczyć można wiązki W_2 i W_3, które zawierają względnie koła sieci Σ, przecinające koła K_2 i K_3 pod kątem prostym, jeżeli znane są koła A'', B', B''. Aby koła te otrzymać, należy nasamprzód wykreślić koła:

$$\begin{aligned} \varphi &= \beta\gamma A - \tfrac{1}{2}(B + C) = \beta\gamma(A - C) - C'' = 0 \\ \psi &= \gamma\alpha B - \tfrac{1}{2}(C + A) = \gamma\alpha(B - C) - C' = 0 \\ \chi &= \alpha\beta B - \tfrac{1}{2}(A + B) = \alpha\beta(C - A) - A' = 0, \end{aligned}$$

które względnie są kołami wspólnemi wiązkom (k_1, Q_1) i (P_2, C''), (k_2, Q_2) i (P_1, C'), (k_3, Q_3) i (P_2, A'). Na mocy tożsamości:

$$\begin{aligned} A'' &= (\tfrac{1}{2} - \alpha\gamma) A + \tfrac{1}{2} C \\ &= \alpha\gamma(B - A) - \psi \\ B' &= (\tfrac{1}{2} - \beta\gamma) B + \tfrac{1}{2} C \\ &= \beta\gamma(A - B) - \varphi \\ B'' &= (\tfrac{1}{2} - \alpha\beta) B + \tfrac{1}{2} A \\ &= \alpha\beta(C - B) - \chi \end{aligned}$$

znajdujemy następnie koła A'', B', B'' jako koła spólne wiązkom (k_1, k_3) i (P_3, ψ), (k_2, k_3) i (P_3, φ), (k_1, k_2) i (P_1, χ).

Kół A', A'', ... H nie potrzeba kreślić, wystarcza bowiem znać ich środki. Wyznaczenie zaś koła spólnego dwom wiązkom danym wymaga tylko kreślenia linij prostych.

Aby po wyznaczeniu wiązki W_1 wykreślić koło K_1, należy wykreślić koło, przecinające pod kątem prostym wszystkie koła wiązki W_1

i styczne do jednego z kół k_2, k_3 n. p. do koła k_2. Zadanie to posiada dwa rozwiązania. Punkta styczności kół, które stanowią te dwa rozwiązania, z kołem k_2, są punktami przecięcia koła k_2 z kołem, należącem do wiązki W_1 i przecinającem prostokątnie koło k_2. Linia łącząca te punkta także powstaje przez połączenie środka koła k z biegunem linii środków kół wiązki W_1 względem koła k_2.

Dla zwyczajnego zadania Malfattego należy to wykreślenie nieco zmodyfikować, ponieważ tu wiązki W_1, W_2, W_3 składają się z kół spółśrodkowych.