Kat

# O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

Inw

**W. Fr. MEYER**

# O STANIE OBECNYM

# TEORYI NIEZMIENNIKÓW

Przełożył
za upoważnieniem Autora
**S. Dickstein.**



Warszawa.
Druk J. Sikorskiego, Warecka 14.

1899.

Дозволено Цензурою
Варшава, 1 Ноября 1899 года.

# Słowo od tłómacza.

Praca, której przekład dajemy, ogłoszona została w tomie I Roczników Stowarzyszenia niemieckiego matematyków (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, I, 1892, str. I—IV, 81—292). Nadzwyczajny rozwój tej nowej gałęzi nauki algebraicznej, rozliczne związki, jakie łączą ją z innemi gałęziami matematyki, oraz rosnące wciąż zastosowania teoryi niezmienników usprawiedliwiają dostatecznie ważność i użyteczność przeglądu głównych zdobyczy naukowych na tem polu badań. Przegląd taki staje się tem niezbędniejszy dla pracujących w tej dziedzinie algebry, że oryentowanie się w olbrzymiej literaturze, rozproszonej po wszystkich niemal dziennikach matematycznych Europy i Ameryki, jest wcale niełatwem, a dla wielu osób wprost niemożliwem. Przedstawienie zatem już nie samego tylko historycznego rozwoju badań, genezy pojęć i teoryj, związku i wzajemnego oddziaływania różnych prac, ale i podanie zupełnej niemal bibliografii teoryi niezmienników jest niepospolitą zasługą autora, za którą szczerze są mu wdzięczni wszyscy pracownicy na niwie matematycznej.

Z trudnego zadania swego wywiązał się prof. Meyer z niepospolitą umiejętnością. Zapanował on, rzecz można, nad całą literaturą przedmiotu, tak że żadne ważniejsze zjawisko uwagi jego nie uszło. Wprawdzie nie ukrywa sam przed czytelnikiem pewnych niedokładności, od których pracy swej za wolną nie poczytuje „Czytelnik — mówi on w przedmowie [1]) — spo-

[1]) Podajemy ją tu w streszczeniu.

strzeże, że w omówieniach nie poddano niektórych badań należytej krytyce; lecz autor sądził, że odda większą usługę matematykom, gdy powstrzymując się w tych razach od sądów osobistych, przedstawi w związku to, co pojedyńczy badacze istotnie zdziałali, nie zaś to, coby zdziałać mogli. Zresztą, w zamian za to starał się zaznaczać wszędzie dotychczasowe braki wiedzy, już to za pomocą odpowiedniego uporządkowania materyału, już przez wskazanie nasuwających się zagadnień. W rozkładzie materyału pozwolił sobie autor na pewną swobodę w wymierzaniu rozmiarów sprawozdań o różnych pracach naukowych; liczne i ważne zastosowania do geometryi uwzględnił w stopniu nieznacznym, pozostawiając komu innemu opracowanie historyczne tego przedmiotu; teoryę kombinantów przedstawił, zbyt jednostronnie".

Te braki, które Autor z całą szczerością przed czytelnikiem odsłania, nie zmniejszają wcale, zdaniem naszem, wielkiej wartości referatu. Przeciwnie pobudzić mogą innych do analogicznych studyów i do rozwinięcia pewnych szczegółów całości, tak umiejętnie zbudowanej.

W czasie przygotowywania przekładu tłómacz korzystał z łaskawych wskazówek Autora, który nadsyłał mu poprawki i uzupełnienia do rozmaitych ustępów pracy; zwłaszcza cennemi są niektóre dopełnienia, uwzględniając badania najnowsze, ogłoszone już po wydaniu referatu, t. j. od r. 1892.

Z pomiędzy prac sprawozdawczych o teoryi niezmienników, ogłoszonych w ostatnich czasach, należy wyróżnić referat Hilberta w „Mathematical Papers of the Congress of Chicago" 1893 New-Jork 1896, oraz artykuł autora niniejszego referatu w „Encyklopaedie de mathematischen Wissenschaften" Lipsk 1899.

Dodajmy jeszcze, że przekład niniejszy wymagał wprowadzenia pewnych nowych terminów naukowych polskich, które staraliśmy się utworzyc w zgodzie z dotychczasowemi dobremi wzorami i z duchem języka Czytelnik znajdzie je łatwo w tekście, gdyż obok wyrazów polskich nowowprowadzonych postawiliśmy w nawiasach odpowiadające im wyrazy obce [1]).

---

[1]) Praca niniejsza wyszła równocześnie w przekładzie francuskim H. Fehra w „Bulletin des sciences mathématiques" i we włoskim G. Vivanti'ego w „Giornale d Matematiche".

# SPIS RZECZY

## WSTĘP.



## Część I.

### Równoważność.

#### A. Formy kwadratowe i dwuliniowe.



#### B. Formy dalsze.



## Część II.

### Pokrewieństwo form.

#### A Pytania, odnoszące się do skończoności.

### *B. Pytania, odnoszące się do niewymierności.*



### *C. Metodyka, symbolika i procesy niezmiennicze.*



## Dopełnienia do części II.

# WSTĘP.

## 1. Rzut oka[1] na okres dawniejszy od 1841 do 1867.

Święcimy obecnie pięćdziesięcioletni jubileusz teoryi niezmienników. Wprawdzie pierwiastki tej teoryi sięgają czasów dawniejszych; na dowód czego dość przypomnieć z jednej strony teoryę form kwadratowych (o spółczynnikach całkowitych), uzasadnioną przez Lagrange'a i Gaussa[2], z drugiej zaś geometryę rzutową, powołaną do życia przez Ponceleta i rozwiniętą następnie przez Chasles'a, Möbiusa, Plückera i Steinera[3]. Właściwa wszakże teorya niezmienników rozpoczyna się dopiero od pracy angielskiego matematyka Boole'a[4]) z listopada r. 1841, w której nietylko udowodniono własność niezmienniczą wyróżników, lecz zarazem podano prostą zasadę, przy pomocy której od wyróżników dojść można do jednoczesnych niezmienników form.

Wkrótce potem (luty, 1892) okazał Boole[5], że biegunowe formy $f$ prowadzą do rozległej klasy spółzmienników, t.j. do tworów niezmienniczych, które oprócz spółczynników formy $f$ (oraz form pomocniczych) zawierają jeszcze same zmienne.

W trzy lata potem (1845) podjął badania w tym kierunku Cayley[6]; on to zbudował odrazu symbolikę systematyczną, którą nazwał „rachunkiem nadwyznaczników" (hyperdeterminants). Przy pomocy tego rachunku można tworzyć dowolnie wielki szereg niezmienników nawet dla formy pojedyńczej.

„Z rachunku tego — powiada Salmon[7] — powstała algebra nowoczesna".

Nieco wcześniej znalazł był (1844) Eisenstein[8] najprostsze niezmienniki i spółzmienniki formy dwójkowej (binäre Form) sześciennej i dwukwadratowej; Hesse [9]) zaś, władający wytwornym aparatem wyznacznikowym, wykończonym przez Jacobi'ego, poświęcił szczegółowe studyum spółzmiennikom, które obecnie noszą jego nazwisko, oraz wykrył znaczenie tych spółzmienników dla teoryi krzywych płaskich, a zwłaszcza krzywych rzędu trzeciego.

Nie należy również pominąć faktu, że w tymże roku (1844) Grassmann [10]) wystąpił ze swoją „nauką rozciągłości“ (Ausdehnungslehre) i że jego pomysły, odnoszące się do wyrażeń z lukami (Lückenausdrücke) i spółrzędnych wielogatunkowych (mehrstufig), zawierają w sobie zawiązek nowszego upostaciowania naszej teoryi.

Pośredni wpływ miał też i Galois [11]) (1846) przez swoją teoryę grupy równania.

Aronhold [12]) pierwszy odkrył w dziedzinie trójkowej (ternär) niezmienniki formy sześciennej oraz ich związek z wyróżnikami (1849); cykl zaś prac Sylvestera [13]) (1851—1854) zawiera już zarysy teoryi ogólnej, obejmującej elementy najróżnorodniejszych gałęzi nauki późniejszej. Z zupełną świadomością celu wprowadzono w nich, obok zmiennych pierwotnych, zmienne przekształcalne za pomocą podstawienia odwrotnego i utworzono tym sposobem naukę o przeciwzmiennikach (Contravarianten) i formach pośrednich (Zwischenformen) i podano szereg nowych procesów na tworzenie form niezmienniczych, a zwłaszcza zasadę różniczkowania wzajemnego, tak symbolicznego jak i niesymbolicznego [14]). Sylvester uzasadnia dalej (1851) naukę o formach kanonicznych [15]); stosuje ją do przedstawienia form dwójkowych rzędu nieparzystego (w szczególności piątego) pod postacią sum potęgowych; przez sformułowanie zaś „prawa bezwładności“ [16]) toruje nowe drogi do ważnego przypadku form kwadratowych o dowolnej liczbie zmiennych. Rozumie on już znaczenie „zasady dzielników elementarnych“ [17]) (Elementartheiler), oraz pojęcia „kombinantów“ (1853) [18]); przy pomocy nieskończenie (małych) liniowych przekształceń zmiennych podaje zasadnicze równania różniczkowe dla niezmienniczych utworów form dwójkowych i wyższych (1852) [19]). Zewnętrzną oznaką uczynionych postępów jest obszerna terminologia, pochodząca po największej części od samego Sylvestera a zestawiona na końcu jego wielkiej rozprawy o funkcyach Sturma 1853) [20]).

Rok 1854, zamykający ten pierwszy szereg prac Sylvestera z dziedziny teoryi niezmienników, jest wogóle najważniejszym w tym pierwszym okresie. Do niego należą bowiem też badania Hermite'a, który zresztą już wcześniej (1851) wzbogacił był teoryę przez wprowadzenie pojęcia „ewektantów“ [21]), a w licznych pracach swoich z dziedziny teoryi liczb rozsiał wiele zarodków z teoryi form [22]). Hermite ustanawia „prawo wzajemności“ [23]), które godnym uwagi sposobem porządkuje w pary utwory niezmiennicze w dziedzinie dwójkowej. W przypadku formy dwójkowej rzędu nieparzystego wprowadza Hermite dwa spółzmienniki liniowe [24]), jako nowe zmienne, i sprowadza formę do postaci „typowej“, w której spółczynniki same są niezmiennikami. W bezpośrednim z tem związku są układy form

„stowarzyszonych“ (associirte Formen), od których zależy sposobem wymiernym każdy utwór dalszy, należący do formy pierwotnej. Przy przeprowadzeniu rachunku dla przypadku formy piątego rzędu podaje Hermite pierwszy przykład niezmiennika „skośnego“ [26]) i wyrażenie tegoż za pomocą trzech innych niezmienników. Pięknem zastosowaniem tej teoryi są kryteryą niezmiennicze rzetelności [27]) pierwiastków równania rzędu piątego.

W innej pracy, ogłoszonej również w r. 1854, badacz ten [28]), stojąc jeszcze na stanowisku teoryi liczb, zajmuje się zagadnieniem o przekształceniu formy kwadratowej trójkowej na samą siebie za pomocą podstawienia liniowego zmiennych; spółczynniki szukanego podstawienia przedstawia jako funkcye wymierne pewnej liczby parametrów dowolnych, co już uskutecznił był ogólnie Cayley [29]) w r. 1846 dla ważnego przypadku szczególnego sumy kwadratów. Cayley (1855) wkrótce potem rozciągnął wzory Hermit e'a na formy ogólne kwadratowe o $n$ zmiennych [30]).

Rok 1854 był płodnym i w innym jeszcze kierunku. Z jednej strony Cayley uzasadnił [31]) (wspomniane już) równania różniczkowe liniowe cząstkowe, którym czynią zadość niezmienniki form dwójkowych, jako funkcye spółczynników; z drugiej zaś strony Brioschi wyprowadził odpowiednie równania, odnoszące się do pierwiastków tych form. Nakoniec w tymże roku rozpoczyna się szereg rozpraw Cayley'a p. t. „Memoirs upon Quantics“, które kończą się tymczasowo w r. 1861 (na 7-ej rozprawie) [32]). Ze względu na swoją wielostronność i wyczerpujące badanie pojedyńczych przypadków, są one dziś jeszcze bogatą kopalnią dla algebraików i geometrów.

Przez uważanie tworów niezmienniczych form dwójkowych za rozwiązania całkowite wymierne ich równań różniczkowych [33]), zbliża się Cayley już w drugiej z rozpraw wymienionych (1856) do ważnego pytania [34]), czy przy danej formie pierwotnej (Urform) nie można oznaczyć a priori liczb należących do niej form (liniowo-niezależnych)? Dla danego stopnia i rzędu takich form otrzymuje on już odpowiednią liczbę pod postacią określonego spółczynnika w szeregu potęgowym „funkcyi tworzącej“ [35]), jakiej użył był już Euler przy rozkładzie liczb. Wywód tego szeregu potęgowego opiera się, co prawda, na pewnym wzorze do obliczania, niezupełnie udowodnionym. Temi badaniami dał Cayley pobudkę do wielu poszukiwań, które sięgają się aż do czasów najnowszych [36]); nie zdołał wszakże rozwiązać w całej ogólności tak sławnego później zagadnienia (postawionego tu poraz pierwszy) o sprowadzeniu nieograniczonego szeregu form niezmienniczych danej formy dwójkowej pierwotnej do funkcyj całkowitych wymiernych skończonej liczby tychże niezmienników [37]).

W rozprawie 4-ej (1858) wprowadza na przykładach zasadnicze pojęcie „nasunięcia“ (Ueberschiebung) [38]) dwóch form i nadaje temuż wyrażenie proste, niesymboliczne, którego ważne znaczenie znowu silniej w ostatnich ujawniło sie latach.

Silną pobudkę do rozszerzenia młodej jeszcze i nieustalonej umiejętności dało piękne, na zasadach teoryi niezmienników oparte, rozwiązanie [39]) równania rzędu trzeciego i czwartego (1858). Nie mniej ważnym przyczynkiem jest związanie metod algebraicznych, rozwiniętych dla form dwójkowych, z metodami geometryi rzutowej [40]) utworów zasadniczych pierwszego gatunku. Zwłaszcza rzutowe oznaczenie miarowe Cayley'a dla płaszczyzny i przestrzeni (Rozprawa VI, 1859) uznano później za podstawowe dla rozwoju geometryi nieeuklidesowej" [41]).

W związku z temi pracami systematycznemi znajdują się i inne prace Cayley'a, o których krótko tylko nadmienimy, mianowicie: badania nad rozkładem liczb (1855, 1856), [42]); wielka rozprawa o funkcyach symetrycznych (1854) [43]) (z prostemi prawidłami na oznaczanie stopnia i wagi tych funkcyj), którą można uważać za wstęp do późniejszej teoryi półniezmienników; dalej płodne przerobienie metody eliminacyi [44]) Bézouta (1857) oraz rozszerzenie metody kanonizacyi Sylvestera na formy rzędu parzystego (1857) [45]).

Za bezpośredni dalszy ciąg tego kierunku badań uważać należy doniosłe odkrycie M. Robertsa [46]) (1861), według którego spółzmiennik (dwójkowy) charakteryzuje się w zupełności przez swój wyraz główny (Leitglied, source, leading term), tak że wszystkie związki (syzygie) pomiędzy spółzmiennikami można zastąpić wprost takiemiż związkami pomiędzy ich wyrazami głównemi, i odwrotnie. Taki wyraz główny jest zawsze (jak i niezmienniki) funkcyą symetryczną różnic pierwiastków, lecz musi i w istocie rzeczy czynić zadość jeszcze jednemu równaniu różniczkowemu. Roberts sam pokazał szczegółowo płodność swej metody na przykładzie form piątego rzędu [47]).

Powiemy tu odrazu, co uczyniono w ciągu uważanego okresu czasu (1854—1861) dla wspomnianej teoryi form oraz równań rzędu piątego, o ile to wchodzi w zakres naszego przedmiotu.

I tu Hermite wskazał nowe drogi, po których poszli dalej Brioschi i Cayley. Już w r. 1856 zastosował Hermite przekształcenie wymierne zmiennych, w którem mianownik był spółzmiennikiem licznika, w celu sprowadzenia całki eliptycznej pierwszego gatunku do postaci normalnej typowej [48]); dwa lata później nadał ogólnie dawno w algebrze używanemu przekształceniu Tchirnhausena taką formę niezmienniczą [49]), przy której ujawnił się wyraźnie charakter niezmienniczy równania przekształconego, które nadto ma zależeć od możliwie najmniejszej liczby parametrów. Za tem poszło już rozwiązanie podobnego zagadnienia dla rozmaitych rozwiązujących (Resolvente) danego równania. W przypadku równania rzędu piątego temi rozwiązującemi są, jak wiadomo, równanie modułowe i równanie mnożnikowe, występujące przy przekształceniu rzędu 5-go funkcyj eliptycznych [50]).

Opracowanie systematyczne pod tym względem równań rzędu 5-go podał Hermite dopiero później (1865 do 1866) [51]).

Obok trzech głównych badaczy na tem polu: Cayley'a, Sylvestera i Hermite'a, występuje w r. 1854 Brioschi [52]), który w najróżniejszych kierunkach uzupełnił i rozwinął badania tamtych. Wymienimy niektóre tylko główne jego rezultaty. I tak (1857) podał on godny uwagi układ równań różniczkowych [53]), charakterystyczny dla rugownika i wyróżnika form dwójkowych—zastosowanie tego układu do teoryi funkcyj hypereliptycznych [54]) uczyniono dopiero w ostatnich czasach;— dalej zawdzięczamy Brioschi'emu istotne rozwinięcie teoryi Hermite'a przedstawień typowych, mianowicie też i do form trójkowych [55]).

Wobec znacznego wzrostu liczby prac w naszej dziedzinie, należy uznać z wdzięcznością fakt, że Salmon,—który już dawniej ogłosił był cenne przyczynki tak do rachunku, [56]) jak i do zastosowań geometrycznych — podjął się uporządkowania i przedstawienia całego obszernego materyału w zwięzłej monografii (1859) [57]). Rozpowszechnienie tej pracy w Niemczech jest zasługą Fiedlera, który już, przed jej wydaniem [58]) (1863) po niemiecku, ogłosił był (1862) pracę samodzielną [59]), przeznaczoną dla początkujących i uprzystępniającą przedewszystkiem zastosowania geometryi rzutowej, podane przez Cayley'a. Około tego samego czasu (1862) pojawiło się dzieło Brioschi'ego [60]), które zjednało teoryi niezmienników rozległe koło zwolenników we Włoszech.

Podczas gdy wzmiankowani matematycy angielscy, francuscy i włoscy pozostawali z sobą w żywej wymianie myśli, nadając wciąż nowy ruch tej teoryi, w Niemczech tymczasem była ona długo zaniedbywaną.

Wprawdzie metody rzutowe [61]) oraz twierdzenia Hessego i Steinera najściślej wiążą się z należącemi do teoryi form poglądami obcych algebraików, lecz idea nie znalazła jeszcze sobie formy właściwej, która tu ma większe znaczenie niż w innych częściach matematyki.

Zmianę pod tym względem sprawił dopiero Aronhold za pomocą swego klasycznego przykładu [62]) (1858), w którym z teoryi Hessego form trójkowych sześciennych wydziela włókna niezmiennicze i nadaje im postać zaokrągloną, wolną od wszelkiej sztuczności i przypadkowości.

Ponieważ myśli zasadnicze, będące podstawą tego badania, zostały przedstawione w późniejszej pracy Aronholda [63]) (1863) w związku organicznym i w całej ogólności, przeto uważamy za odpowiednie tu je zaraz omówić. Obszerność omówienia naszego niechaj usprawiedliwi ta okoliczność, że myśli te miały wpływ stanowczy na plan niniejszego referatu.

Dążeniem Aronholda było objęcie z jednego punktu widzenia różnorodnych utworów natury niezmienniczej i uzasadnienie tym sposobem nietylko ich związku wzajemnego lecz i samej racyi ich bytu; za punkt wyjścia do tego celu służy mu zagadnienie, które formułuje w sposób następujący [64]):

„Niechaj $F(x \backslash a)$, $F'(\xi|a')$ będą dwie dowolne i ***zupełnie ogólne*** funkcye jednorodne rzędu $p$-go odpowiednio $n$ zmiennych, $x_1 \ldots x_n$, $\xi_1 \ldots \xi_n$; znaleść warunki, jakie powinny zachodzić pomiędzy ich spółczynnikami $a$ i $a'$, aby obie funkcye dały się przekształcić jedna na drugą za pomocą podstawienia liniowego“.

Podkreśliliśmy tu wyrazy „zupełnie ogólne,“ gdyż nieuwzględnienie ich doprowadziło do nieporozumień[65]). Z tego, że o spółczynnikach $a$ i $a'$ nie czyni się z góry żadnych założeń, wypływa już, że przez warunki szukane rozumie się tylko konieczne we wszystkich przypadkach, nie zaś wystarczające w przypadku form $F$ i $F'$, w jakikolwiek sposób zniekształconych (ausgeartet), co też sam Aronhold wyraźnie zaznaczył w wielu miejscach [66]) rozprawy z r. 1858 dla formy trójkowej sześciennej.

Wyobraźmy sobie, że z warunków przekształcalności wyrugowano już spółczynniki $\delta$ podstawienia, wtedy równania ostateczne dają się przedstawić tak, aby ich strony prawe były od $\delta$ niezależne. Ten fakt znajduje swój wyraz w istnieniu $n^2$ równań rożniczkowych cząstkowych [67]), które przekształcają się w ten sposób, aby w nich nie zachodziły wcale ilości $\delta$. Stąd, odwrotnie, wnieść można, że związki algebraiczne przekształcenia przedstawić się dają pod postacią równości pomiędzy ułamkami, z których jeden jest zawsze taką samą funkcyą wymierną spółczynników $a$ funkcyi $F$, jaką drugi jest funkcyą spółczynników $a'$ przekształconej funkcyi $F'$.

Ułamki te, jako rozwiązania wymierne wspomnianych równań różniczkowych, uzasadniają istnienie niezmienników „bezwzględnych“ funkcyi $F$. Otrzymuje się stąd także i liczba niezmienników wymiernie niezależnych, ponieważ dalszy rozwój teoryi pozwala na wyprowadzenie ważnego wniosku, że te równania różniczkowe w liczbie $n^2$ są wogóle od siebie liniowo-niezależnemi [68]).

Niezmienniki zwyczajne, które przed Aronholdem stanowiły empiryczny punkt wyjścia, okazują się a posteriori licznikami i mianownikami niezmienników zwykłych; czynią one zadość odpowiedniemu układowi $n^2$ równań różniczkowych.

Układ ten (jak i tuż przedtem wspomniany) jest, według dowodzenia Clebscha (1861), „zupełnym“, (vollständig), co oznacza, że nie jest możliwem dołączenie do tego układu nowych równań liniowych przy pomocy różniczkowania oraz rugowania pochodnych wyższych [69]).

Uogólnienie do układu form pierwotnych [70]) nie sprawia zasadniczych trudności; nadto udało się Aronholdowi [71]) odsłonić głębsze związki pomiędzy różnorodnemi tworami niezmienniczemi, a to przez odkrycie wielu godnych uwagi własności przynależnych form (przeciwzmienników) i form pośrednich (konkomitantów mieszanych).

W badaniach tego rodzaju jest rzeczą ważną, aby pomiędzy spółczynnikami formy pierwotnej nie zachodził żaden związek liniowy; zamiast tej formy można przeto wziąć odpowiednią potęgę formy liniowej [72]), przez co przedewszystkiem ułatwia się stosowanie procesów różniczkowania.

Tak wprowadzona symbolika nie różni się wprawdzie formalnie co do istoty swej od symboliki Cayley'a, lecz właśnie na podstawie samodzielnego uzasadnienia w teoryi Aronholda pozyskała zdolność rozwoju, jaki stał się następnie jej udziałem w Niemczech.

Tu jest właśnie punkt, w którym Clebsch podjął z wielkiem powodzeniem badania w tej dziedzinie; rozprawa Aronholda z r. 1858 pobudziła go do przyjęcia wspomnianej symboliki za wyłączną podstawę teoryi (1861) [73]) i do rozwinięcia pomysłu sprowadzania utworów form wyższych do utworów form liniowych.

Podczas gdy symbolika anglików ograniczała się na tworzeniu form niezmienniczych w liczbie dowolnej, to przedstawienie symboliczne Clebscha zapomocą agregatów wyznacznikowych prowadzi nie tylko do wszystkich niezmienników, lecz może być poczytane też za ich określenie, wszakże, na początek, w zastosowaniu tylko do form, zawierających najwyżej jeden szereg zmiennych oraz szereg ich wzajemnych.

Ta właśnie ogólność symboliki daje możność Clebschowi wyprowadzenia między innemi znanej „zasady przeniesienia“ [74]), która ustanawia związek bezpośredni pomiędzy dziedzinami różnego gatunku.

Clebsch podał w tymże samym czasie szereg interesujących zastosowań do geometryi krzywych i powierzchni algebraicznych; jako najbardziej charakterystyczne wymieniamy traktowanie zagadnienia o normalnych [75]) do utworów rzędu drugiego.

Zresztą, tak w obecnem, jak i w późniejszem naszem omówieniu badań Clebscha, ograniczamy się na rzeczach najkonieczniejszych, bo istnieje już obszerny i jasny wykład tego przedmiotu, uwzględniający zarazem i dziedziny pokrewne [76]).

Według naszego pojmowania, Clebsch i Aronhold wspomnianemi swemi pracami z r. 1861 i 1863 rozpoczynają nową epokę, która daje początek systematycznemu rozwojowi naszej nauki, przytem kierownictwo w niej przechodzi do Niemiec.

Dwa kierunki główne ujawniają się tu i wyróżniają wybitnie.

Jeden, zainaugurowany przez Clebscha i posiłkujący się jego metodami, dąży do zupełnego zbadania nieskończonego zakresu form niezmienniczych i ich wzajemnego pokrewieństwa; rozważanie zadania tego umożliwiły właśnie metody Clebscha. Drugi kierunek podejmuje zagadnienia „równoważności“, t. j. przekształcalności liniowej jednej formy na drugą, postawione przez Aronholda.

Upływa wszakże pewna liczba lat, zanim ujawnia się rzeczywisty postęp w obu kierunkach; można przyjąć, że nastąpiło to w roku 1868, w którym Gordan ogłosił swój dowód o „skończoności układu“ dla form dwójkowych [77]), Weierstrass zaś—badanie równoważności form i gromad form (Formenscharen) dwuliniowych (i kwadratowych) za pomocą nauki o dzielnikach elementarnych [78]).

Niechaj mi zatem wolno będzie omówić dopiero później, w związku z badaniami nowej epoki, rozprawy Clebscha i Gordana [79]) (1867) o typowem przedstawieniu form dwójkowych, oraz Kroneckera [80]) i Christoffela [81]) o formach dwuliniowych, które to rozprawy—zewnętrznie biorąc—należą jeszcze do okresu starszego.

---

## 2. Przejście do nowego okresu od r. 1868 do chwili obecnej.

Rok 1868 przedstawia, obok dwu wyżej wskazanych, jeszcze następujące godne uwagi momenta.

Przedewszystkiem, obowiązkiem jest sprawozdawcy nadmienić, że odtąd dopiero roczniki wydawnictwa „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", założonego przez Ohrtmanna i Müllera [82]) — wydawnictwa jedynego w całej literaturze matematycznej, — umożliwiają przegląd zupełny badań w rozważanej przez nas dziedzinie nauki.

W tymże roku ukazały się dzieła: Plückera [83]) „Neue Geometrie des Raumes" i Rey'ego „Geometrie der Lage", dzięki którym geometrya w wyższym, niż dotąd stopniu, poczęła oddziaływać na algebrę i dostarczać jej nowych źródeł. Za wzór tego rodzaju służyć może zastosowanie, jakie uczynił Klein [84]) (także w r. 1868) z cytowanej już Weierstrassowskiej redukcyi gromady form kwadratowych, w celu podziału kompleksów liniowych drugiego stopnia na różne rodzaje.

Udowodnienie przez Gordana skończoności klasy układów form prowadziło do opanowania i innych form szczególnych w tymże kierunku. Obfitość prac, które dzięki tej pobudce powstały a w których Clebsch i Gordan przeważny udział brali, nasunęła potrzebę założenia nowego czasopisma „Mathematische Annalen" (pierwszy zeszyt wydano w grudniu 1868); pismo to ze szczególną pieczołowitością uprawiało gałęź umiejętności, będącą przedmiotem naszego sprawozdania.

---

## 3. Ograniczenie materyału.

Za podstawę naczelną podziału materyału, który tu przedstawić mamy, przyjmujemy, jak już wyżej zauważono, dwa punkty widzenia: równoważność i powinowactwo form.

Nie ma bezwątpienia dziedziny matematyki, w którejby teorya przekształceń liniowych nie była stosowaną z powodzeniem, i dlatego jest koniecznem ograniczyć w sposób odpowiedni zakres naszych rozważań.

Klein i Lie na początku siódmego dziesiątka lat okazali [85]), że własności wyrażeń, mających cechę niezmienniczą dla pewnej klasy przekształceń, warunkują się zasadniczo charakterem grupowym [86]) przekształceń, t. j. tą właściwością zamkniętej rozmaitości przekształceń, która odtwarza się przy dowolnem ich zestawieniu.

Ten charakter grupowy występuje najdobitniej w przekształceniach liniowych, bo odrazu jest jasnem, że dwa przekształcenia liniowe, wykonane jedno po drugiem, dają znowu przekształcenie liniowe. Do każdej grupy podstawień liniowych ilości zmiennych należy, ściśle biorąc, osobna [87]) teorya niezmienników; tu wszakże rozważać będziemy tylko klasy najgłówniejsze.

W algebrze mamy do czynienia głównie z formami, których spółczynniki są uważane albo za zupełnie niezależne, albo też za zależne sposobem ciągłym od pewnej liczby parametrów dowolnych. Podobnie i spółczynniki podstawień liniowych, którym poddają się zmienne, uważane bywają za wielkości, zmieniające się sposobem ciągłym. Będziemy więc mieli do czynienia z grupami „skończonemi ciągłemi" [88]).

Istnieją wszakże ważne wyjątki od tego prawidła. Przy formach z przekształceniami liniowemi w same siebie występują podstawienia, których liczba jest skończona, skutkiem czego ich spółczynniki przybierają wartości liczebnie stałe. I takie grupy, nazwane krótko „grupami Galois'a", będą nas zajmowały ze stanowiska zagadnienia o równoważności. Grupy te dają zarazem przejście do związku z teoryą równań.

Przeciwnie, w teoryi liczb i w dziedzinach pokrewnych (jak np. w nowoczesnej teoryi funkcyj automorficznych) zmienność spółczynników stosowanych podstawień poddawaną bywa prawom arytmetycznym, a stąd spółczynniki te należą do dziedziny wielkości, zmieniających się w sposób nieciągły.

Badanie niezmienników (arytmetycznych i przestępnych), dających się przyporządkować do takich właśnie grup „nieciągłych" [89]) wymaga metod odmiennych od używanych w algebrze; a ponieważ nadto pytania, związane z tym przedmiotem, rozwijają się w zupełnie innym kierunku, przeto badania z tej dziedziny uwzględniać będziemy tylko okolicznościowo.

Podobnież rzecz się ma z rozległemi badaniami, odnoszącemi się do form i równań różniczkowych, powstałemi stąd, że zmienne niezależne poddawano przekształceniom zupełnie dowolnym. Wprawdzie różniczki zmiennych przekształcają się liniowo—i dlatego teorya algebraiczna niezmienników ma tu do pewnego stopnia zastosowanie [90]), lecz spółczynniki podstawień zawierają w sobie funkcye samych zmiennych, których dowolność może być ograniczona tylko pewnemi warunkami całkowalności. I takiemi grupami „nieskończonemi“ będziemy zajmowali się tylko wtedy, gdy ich charakter specyficzny usuwa się na plan dalszy, występują zaś na widownię cechy z teoryi form.

I w dziedzinie algebry właściwej zaprowadzimy pewne ograniczenia.

Od czasu epokowych prac Cremony z jednej i Riemanna z drugiej strony, istnieje w teoryi krzywych i powierzchni algebraicznych (t. j. funkcyj algebraicznych jednej lub więcej zmiennych) szereg ważnych zjawisk, których prawa zależą nie tyle od podstawień liniowych, ile od jednoznacznych (algebraicznych) podstawień ilości zmiennych. Wprawdzie dają się one w zasadzie sprowadzić do podstawień czysto-liniowych (do tak nazwanych utworów $\varphi$) [91]), lecz opracowanie tych pytań ze stanowiska rzutowo-niezmienniczego zostało dopiero podjęte w ostatnich czasach, i to tylko w pojedyńczych przypadkach.

Z drugiej wszakże strony będziemy zmuszeni przekroczyć granice algebry w innym kierunku.

Jedno z najważniejszych twierdzeń, podanych przez Lie'go, orzeka, że zakres ciągłej skończonej grupy przekształceń można zawsze „rozszerzyć“ (erweitern) [92]), przez włączenie do niej wszystkich tych przekształceń, których doznają pochodne (aż do pewnego dowolnego rzędu) zmiennych, uważanych za niezależne, względem zmiennych niezależnych. Niezmienniki takich grup rozszerzonych, lub wprost „niezmienniki różniczkowe“, mają wielkie podobieństwo do zwykłych niezmienników w przypadku, gdy grupa pierwotna była rzutową. Tym sposobem usprawiedliwiamy włączenie do niniejszego referatu odnośnych prac Halphena, Sylvestera i szkoły tego ostatniego matematyka.

Co się wreszcie tyczy zastosowań naszej dziedziny do innych gałęzi matematyki — które ze względu na swą rozległość wymagałyby oddzielnego sprawozdania — to omówimy z nich tylko te, które, zdaniem naszem, przedstawiają szczególny interes, zwłaszcza ze względu na ilustracyę i ożywienie tekstu.

Jeżeli tym sposobem pole podstawień rzutowych okazuje się stosunkowo szczupłem, to ma ono natomiast ważne znaczenie w dwóch kierunkach. Po pierwsze, specyficzna metodyka wyrobiona w niem może służyć za wzór dla innych gałęzi nauki. Powtóre, nauka o podstawieniach liniowych i ich niezmiennikach stanowi nietylko naturalny stopień przygotowawczy do nauki o przekształceniach w ogólności, lecz nadto przy traktowaniu tych ostatnich uwidocznia się coraz wyraźniej dążenie do sprowadzania głównych zagadnień do zagadnień gałęzi pierwszej. Naprzykład, dla każdej grupy ciągłej przekształceń istnieje grupa rzutowa, która może być izomorficznie odniesiona do grupy danej; zagadnienie o oznaczeniu wszystkich grup oznaczonego składu (Zusammensetzung) należy do zwykłej teoryi niezmienników pewnych form trójliniowych.

---

## 4. Stopniowy rozwój pojęcia niezmiennika.

Jeżeli dany jest układ form i jeżeli różne szeregi zmiennych poddamy pewnej grupie podstawień liniowych, to wytworzą one grupę (holoedryczno-izomorficzną) podstawień spółczynników danych. Każdy niezmiennik jednorodny tej grupy spółczynników, t. j. funkcya analityczna spółczynników, która zarazem jest jednorodną względem każdego szeregu spółczynników, a pozostaje niezmienioną przy przekształceniach grupy, nazywa się „niezmiennikiem bezwzględnym" układu form, w najogólniejszem znaczeniu tego słowa.

W szczególności, gdy pierwotna grupa zmiennych jest ogólną rzutową (spółczynniki ogólnej natury), wtedy niezmiennikami wymiernemi grupy spółczynników są ułamki Aronholda, których liczniki i mianowniki są zwykłemi (lub względnemi) niezmiennikami całkowitemi wymiernemi układu form.

Jeżeli chcemy, aby i ostatnie utwory (i wogóle niezmienniki względne) zawierały się w powyższem określeniu, to należy grupę zmiennych zastąpić taką podgrupą, która powstaje, gdy wyznacznikowi podstawienia pierwszej grupy nadamy wartość stałą, równą jedności.

Po tem sformułowaniu pojęcia niezmiennika, wystarczającem do objęcia z jednego punktu widzenia wielu zjawisk poszczególnych niżej omawianych, zwróćmy się do przedstawienia rozwoju historycznego tego pojęcia i przedstawmy w krótkości najważniejsze momenty postępu.

Punkt wyjścia stanowiły, oczywiście, funkcye całkowite wymierne spółczynników jednej lub kilku form pierwotnych, zmieniających się przy przekształceniu tylko o potęgę (całkowitą) wyznacznika podstawienia. Zakres takich funkcyj prędko rozszerzono, przyjmując za argumenty, obok spółczynników, i zmienne pierwotne oraz zmienne przeciwpodstawieniowe (contragredient) do nich.

Obok tego formalnego jeszcze określenia form niezmienniczych, występuje później bardziej materyalne określenie Cayley'a, który uważa te formy za rozwiązania całkowite wymierne ich równań różniczkowych.

W trzeciem określeniu, według Clebscha, niezmienniki są agregatami pewnych iloczynów symbolicznych.

Następnie uwolniono określenie niezmienników od niepotrzebnego ograniczenia, aby czynnik, przybywający po przekształceniu, był zgóry potęgą wyznacznika podstawienia, i postawiono tylko żądanie, aby zależał wogóle od spółczynników podstawienia (nie zaś od spółczynników form). Ta ostatnia własność, jak to wykazał szereg autorów [93]), pociąga już za sobą własność pierwszą.

Wcześnie już badano formy pierwotne o wielu szeregach zmiennych, które poddawano tylko przekształceniom spółpodstawieniowym (cogredient) lub też przeciwpodstawieniowym.

Clebsch [94]) w r. 1872 wprowadził systematycznie jedne za drugiemi wszystkie zmienne, odpowiadające w dziedzinie $n$-krotnie rozciągłej rozmaitym zawartym w niej gatunkom dziedziny liniowej. Gordan i Capelli [95]) badali formy powstające wtedy, gdy do różnych szeregów ilości zmiennych zastosujemy podstawienia wzajemnie niezależne.

Dopóki rozmaite utwory niezmiennicze, dające się wyprowadzić z danego układu form, są całkowitemi wymiernemi co do spółczynników oraz względem oddzielnych szeregów ilości zmiennych, dopóty, według Aronholda i Clebscha, wypływają one łatwo z pierwotnego pojęcia niezmienników (w znaczeniu ściślejszem); dość tylko w tym celu do danego układu form dołączyć formy liniowe pomocnicze.

Potrzeba istotnego rozszerzenia tego pojęcia zjawia się dopiero wtedy, gdy pojęcie zasadnicze niezmiennika z dziedziny wymiernej przenosimy do dziedziny niewymiernej i przestępnej. Pozostając tylko wewnątrz granic algebry, winniśmy głównie uwzględnić tu pierwiastki równań nieprzywiedlnych, których spółczynniki są niezmiennikami całkowitemi wymiernemi. Nowe badania Hilberta, Kleina i Gordana, jako też i Frobeniusa pokazały [96]), jak naturalnie występują takie utwory niewymierne, jeżeli formy pierwotne dane są pod pewną postacią niewymiernie-kanoniczną, albo, co na jedno wychodzi, jeżeli w odpowiedni sposób rozszerzymy pierwotną dziedzinę wymierności.

Study [97]) w r. 1887 przedstawił w przejrzystym organicznym wykładzie stopniowe wznoszenie się pojęcia niezmiennika, zestawiając równolegle kolejne jego stopnie z tworzeniem arytmetycznem rozmaitych rodzajów wielkości algebraicznych, uzasadnionem przez Kroneckera. W szczególności zaś, nadał on postać ścisłą delikatnemu pojęciu spółzmiennika niewymiernego.

W innym kierunku Christoffel [98]) i w nowszych czasach Maurer [99]) rozszerzyli pole badań, rozważając takie niezmienniki, dla których grupa spółczynników pozostaje rzutową jeszcze wtedy, gdy wyrażenia, służące do przekształceń ilości zmiennych, stają się wymiernemi. Wtedy zachowuje się postać charakterystyczna równań różniczkowych dla niezmienników.

Wreszcie należy także wspomnieć o oznaczaniu niezmienników całkowitych wymiernych za pomocą ich wyrazów głównych. Te ostatnie są niezmiennikami pewnej podgrupy niezmienników pierwotnych i czynią zadość tylko pewnej części równań różniczkowych, odnoszących się do niezmienników zwyczajnych.

W nowszych czasach Mac-Mahon i Cayley utworzyli specyalnie dla form dwójkowych teoryę samodzielną takich „półniezmienników“, które, dzięki właściwej symbolice, znajdują się w najściślejszym związku z teoryą funkcyj symetrycznych [100]. Z drugiej strony Sylvester i Perrin sprowadzili te utwory do utworów jeszcze prostszych [101].

Znaczenie wyrazów głównych sięga jeszcze dalej; z nich bowiem, według Faa di Bruno [102] i Hilberta [103], można otrzymać odpowiednie formy zupełne za pomocą jednego jedynego procesu: dość tylko spółczynniki pojedyńczych form pierwotnych zastąpić pochodnemi tych form względem spółrzędnej niejednorodnej (pomnożonemi przez pewne liczby). Postępowanie to może być stosowane i do form wyższych niż formy dwójkowe.

## PRZYPISY.

¹) Szereg wskazówek do literatury tego przedmiotu znajduje się w „Modern Higher Algebra“ Salmona, wyd. 4-e Dublin, 1885. Porówn. wydanie niemieckie rozszerzone Fiedlera, wyd. 2-ie Lipsk 1877. Dzieła te będziemy w następstwie cytowali w krótkości: „Salmon“, Fiedler“. Zestawienie literatury, odnoszącej się do form dwójkowych, znajduje się w wydaniu dzieła Faà di Bruno w opracowaniu niemieckiem Waltera i Nöthera: Theorie der binären Formen, Lipsk 1881. Cytować je będziemy w krótkości przez „Bruno“.

²) Lagrange stwierdza niezmienniczość wyróżnika wyrażenia $ax^2 + 2bxy + cy^2$ przy przejściu od $x$ do $x + \lambda y$ (Berliner Abhandlungen 1773, str. 265), porówn. Salmon, str. 343. W „Disquisitiones arithmeticae“ Gaussa (1801) przekształcenie ogólne liniowe stanowi podstawę teoryi form dwójkowych i trójkowych, których wyróżniki są niezmiennikami. W art 267, 268 dowodzi Gauss, że wzajemna (forma adjuncta) formy trójkowej pozostaje niezmienną przy podstawieniu „transponowanem“. Porówn. Salmon S. 344 Pierwsze początki znakowania symbolicznego napotkać można, według Gordana (Math. Ann. VII, s. 38), w pracach Cauchy'ego, Boole'a, Pfaffa, Jacobi'ego; dalsze analogie przedstawia rachunek waryacyjny (l. c. str. 37). Twierdzenie o mnożeniu wyznaczników, podane w całej ogólności przez Cauchy'ego w r. 1812, może służyć jako przykład cechy niezmienniczej spółzmiennika, dziś nazywanego tożsamościowym. Takim jest w istocie rzeczy punkt wyjścia badań Cayley'a.

Innego rodzaju stopień wstępny do teoryi niezmienników stanowi przedstawienie form kwadratowych jako sum kwadratów, za pomocą przekształceń ortogonalnych, co do których patrz Teoryę wyznaczników Baltzera (Lagrange, Laplace, Cauchy, Lebesgue, Jacobi). Nakoniec należy tu także pewien szereg twierdzeń przygotowawczych Joachmisthala o wyróżniku, szereg Taylora i t. d. i niektóre przypadki „niezmienników różniczkowych“ u Cauchy'ego.

³) Dwoma momentami głównemi, odnoszącemi się do tego przedmiotu są: rola, jaką odgrywa stosunek anharmoniczny, jako niezmiennik (niewymierny) bezwzględny, dalej teorya wzajemności biegunowej. Osobną ocenę zasług przytoczonych w tekscie geometrów, ze stanowiska algebry, daje Clebsch w swoim życiorysie Plückera. Gott. Abh. XVI, s. 1—32.

⁴) Cambr. Math. Jour. III, s. 1—20; praca nosi datę 28 kwietnia 1841 r. Boole uogólnia przekształcenie ortogonalne form kwadratowych, szukając warunków, przy których dwie dane pary form jednorodnych równego rzędu: $q$, $Q$; $q'$, $Q'$ mogą być przekształcone jedna w drugą za pomocą liniowych podstawień zmiennych. Znajduje on warunek konieczny (jakkolwiek niezawsze dostateczny) ten, by wyróżniki wyrażeń $q + \lambda Q$,

$q' + \lambda Q'$, przyrównane do zera, prowadziły do tych samych równań dla $\lambda$. Stąd wynika wniosek, że wyróżniki wyrażeń $q$ i $q'$ różnią się tylko potęgą wyznacznika podstawienia (l. c. s. 19). Dowód zupełny tego i dokładne wskazanie wykładnika potęgi dał Boole dopiero trzy lata później. Cambr. Math. Journ. IV (List. 1844), str. 167—171. Porówn. przedstawienie tej rzeczy i w „Wyznacznikach“ Gordana-Kerschensteinera, (patrz niżej), gdzie rugownik, jako wyznacznik funkcyjny, poddany jest szczegółowemu rozstrząsaniu. Nie należy pominąć tego, że w r. 1841 pojawiła się rozprawa Jacobi'ego o wyznacznikach funkcyjnych, Journ. f. Math. XXII, s. 319—359. Nie ma ona daty; poprzedzająca ją wielka praca Jacobi'ego o wyznacznikach ma datę 17 marca 1841 r., mniejsza zaś późniejsza praca tegoż autora — datę 18 marca 1841 r. W rozprawie pierwszej podana jest własność zasadnicza wyznaczników funkcyjnych, polegająca na tem, że przy zupełnie ogólnem przekształceniu zmiennych odtwarzają się one jako takież wyznaczniki funkcyjne, przybierając tylko czynnik, który sam jest także wyznacznikiem funkcyjnym. Następnie podane jest zastosowanie tej własności do przekształcania całek wielokrotnych. Szczególnym przypadkiem przytoczonego twierdzenia jest własność kombinantowa rugownika dwóch form dwójkowych $f, g$ jednego rzędu, t. j. że rugownik po przekształceniu przybiera tylko czynnik będący potęgą ilości $\lambda\mu' - \lambda'\mu$, gdy mianowicie $f, g$ zastąpimy przez $\lambda f + \mu g$, $\lambda' f + \mu' g$. Porównaj tom I cytowanego dzieła Gordana „Vorlesungen über Invariantentheorie hg. von Kerschenstein,“ Lipsk, 1885.

[5]) Cambr. Math. Journ. III, s. 106—119. W tej pracy uogólnił rezultaty pierwszej rozprawy do więcej niż dwóch form, które mogą być i nierównych rzędów. Różniczkowanie zupełne danych równoważności form sprowadza zagadnienie do równoważności form różniczkowych rzędów równych i przytem możliwie nizkich. Nie podzielam zdania Salmona, (s. 344), że Boole przez to już uzasadnił twierdzenie, iż niezmienniki biegunowych są spółzmiennikami formy zasadniczej.

[6]) Collected Math. Papers. Vol. I, s. 80—94, 95—112. Druga z tych prac wyszła w 1846 r.

Niezmienniczość badanych form występuje tu wszędzie jako rozszerzenie twierdzenia o mnożeniu wyznaczników. Rozszerzenie to rozwija się w dwóch kierunkach: najprzód tworzą się wyznaczniki wyższego rzędu, składające się z $(\varkappa!)^n$ wyrazów, następnie całkowity agregat wyznaczników przedstawia się pod postacią macierzy. Wyznaczniki rzędu wyższego były wprowadzone przez Cayley'a już w r. 1843 (l. c. 63—79, druga połowa); skrócenie oznaczenia jest pierwszym rodzajem symboliki. Zastosowanie tych pomysłów do formy pierwotnej $n$-go rzędu o $m$ zmiennych uskutecznia się w ten sposób, że formę tę zastępujemy najprzód inną liniową względem $n$ rzędów $m$ zmiennych, które mogą być poddane różnym podstawieniom. Twierdzenie Boole'a o wyróżniku występuje teraz w takiem świetle, że wyróżnik pierwotny i przekształcony różnią się od siebie o potęgę iloczynu wszystkich $n$ wyznaczników podstawienia. Niektóre lub wszystkie $n$ szeregów zmiennych można później znowu utożsamić, tylko nie w równaniach różniczkowych (s. 84) liniowych cząstkowych, którym zadość czynią niezmienniki, gdyż te równania są wyrażeniem pewnej elementarnej własności wyznaczników.

W pierwszej z przytoczonych rozpraw (s. 80—94) metoda jest rozwinięta o tyle, że można już poznać, iż każda forma dwójkowa rzędu parzystego posiada niezmiennik kwadratowy. W końcu Cayley nazywa Boole'a odkrywcą pierwszego niezmiennika sześciennego (formy dwukwadratowej), porówn. Salmon, s. 343 i przypisek poniższy o Eisensteinie.

Rozprawa druga wykazuje istotny postęp. Porówn. Salmon Less. 14. Myśl zasadnicza jest ta, że wyznacznik funkcyjny $n$ funkcyj i $n$ zmiennych można pojmować, jako wynik procesu różniczkowania, zastosowanego do **jednej jedynej** funkcyi, mianowicie do iloczynu tych *n* funkcyj, z których każda jest napisana w innym szeregu zmiennych; następnie należy tę różność *n* szeregów usunąć. Daje to tę korzyść, że można proces różniczkowania powtarzać (iterować) i różne iteracye kombinować. Wszystkie w ten sposób powstające procesy, zastosowane do funkcyj całkowitych jednorodnych, są natury niezmienniczej, t. j. z funkcyj wytwarzają spółzmienniki jednoczesne.

Związana z tem symbolika jest w istocie rzeczy tylko skróconem przedstawieniem procesów **realnych**. Inaczej się ma rzecz w późniejszych badaniach Gordana, który procesy te rozciąga na formy symboliczne. Cayley'owski proces różniczkowania („proces $\Omega$") ma dziś ważne znaczenie. Porówn. Rozdział II, C, b, $\alpha$.

Później Escherich (Wiener Denkschriften XLIII, 1880), Gegenbauer) tamże XLIII, s. 15—32, 1881), Zajączkowski (Pam. Ak. Um. w Krakowie, t. VI, 1881) zastosowali do tworzenia niezmienników wyznaczniki wyższych wymiarów, badane przez Gasparisa, Armenantego, Padowę, Zehfussa i innych.

[7]) Salmon, s. 343.

[8]) Journ. f. Math. XXVII. Spółzmiennik kwadratowy i wyróżnik formy dwójkowej sześciennej znajdują się już w Nocie s. 75—79, z grudnia 1843; porówn pracę s. 82—104 również z grudnia 1843; oba niezmienniki *i, j* formy dwukwadratowej—w znanej nocie o rozwiązywaniu równań czterech pierwszych rzędów s. 81—83, 1 stycz. 1844. Salmon (s. 343) wprawdzie zaprzecza temu, że Eisensteinowi znana już była niezmienniczość tych form. Eisenstein mówi jednak wyraźnie na końcu ostatnio przytoczonej noty o przygotowywanej przez siebie notatce, odnoszącej się do „pewnych bardzo godnych uwagi własności i przekształceń wyrażeń jednorodnych." Notatka ta została ogłoszona w tymże tomie dziennika str. 329—321 i w niej z całą pecyzyą wypowiedziana jest własność niezmiennicza obu spółzmienników oraz wyróżnika formy sześciennej. Nie ulega natomiast zaprzeczeniu, że Boole pierwszy wyraził wyróżnik formy dwukwadratowej, jako funkcyę całkowitą obu niezmienników. Cayley I, s. 94, Salmon s. 343.

[9]) Journ. f. Math. XXVIII, s. 58—107. Postaci kanoniczne form dwójkowych sześciennych i dwukwadratowych i ich zastosowanie do rozwiązania odpowiednich równań są podane w tymże dzienniku; niezmienniki występują tu tylko implicite.

O znaczeniu badań Hessego dla algebry nowoczesnej patrz: Nöther w „Zeitschrift" Schlömilcha, XX, oraz Klein w „Programie politechniki monachijskiej" 1875.

[10]) Zasługi Grassmanna w tej dziedzinie przedstawił jasno Sturm w biografii, Math. Ann. XIV, patrz zwłaszcza str. 25. Porówn. Math. Ann. VII, s. 12.

Schlegel ogłosił próbę wykładu algebry według pomysłów Grassmanna Lipsk 1875, także Schendel. Halle, 1885.

[11]) Badania Galois'a były wprawdzie ogłoszone w r. 1829, ale stały się ogólnie dostępnemi dopiero w 1846 (Journ. Liouv. XI). Ich wpływ na teoryę niezmienników występuje dopiero w okresie nowszym.

[12]) Journ. f. Math. XXXIX s. 140—159. W dwa lata potem przedstawił Aronhold fakultetowi filozoficznemu w Królewcu rękopis (nigdy nieogłoszony), w którym wykłada teoryę niezmienników na jednolitej podstawie. Według jego listów do Cayley'a, musiał on już być wtedy w posiadaniu równań różniczkowych dla niezmienników, por. Salmon, s. 344.

[13]) Cambr. and. Dublin Math. J. VI. s. 186—200; 289—293 (1851); t. VII s. 52—97 (1852), t. VIII s. 62—64, 256—259 (1853); t. IX s. 85—103 (1854); por. Cayley, t. VII 40—51, 97—98.

Artykuły Sylvestera poprzedzone są dwiema rozprawami Boole'a, t. VI, s. 87—106, 107—113 (1851), w których są zebrane i uzupełnione kilku ważnemi dodatkami dawniejsze rezultaty jego badań, por. Salmon, s. 344. Do tych dodatków należy tu zasada bardzo płodna tworzenia nowych utworów niezmienniczych. W przypadku dwóch zmiennych jednorodnych $x, y$, dowodzi Boole, że gdy te przechodzą na $x', y'$ przez podstawienie o wyznaczniku $\varepsilon$, to wtedy też samo podstawienie przekształca pochodne cząstkowe (funkcyi dowolnej) $\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}$ na $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}$ Powtórzenie tego postępowania (które zresztą, jako nasuwające tu samo przez siebie, pominięto) wskazałoby, że $\frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ przechodzą na $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}, -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y'\,\partial x'}, \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$, zupełnie w ten sam sposób, jak $x^2, xy, y^2$ przechodzą na $x'^2, x'y', y'^2$ i t.d.

Z tożsamości $\varphi(x, y) = \psi(x', y')$ wynika zatem w znaczeniu symbolicznem następująca: $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\partial x'}\right)$, t. j. że każdy iloczyn taki, jak $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\lambda}$, daje się zastąpić przez $\frac{\partial^{\varkappa+\lambda}}{\partial y^{\varkappa}\,\partial x^{\lambda}}$, i podobnie dla liter kreskowanych.

Czytelnikowi nieprzywykłemu do znaków symbolicznych wydaje się dziwnem, że Boole nie podaje łatwiej nasuwającego się twierdzenia, iż tożsamość

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y'}, -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

ma też znaczenie realne, tak że zmienne pierwotne można zastąpić istotnemi pochodnemi, co dopiero zauważył Sylvester (patrz niżej).

Boole rozszerza swoje twierdzenie do dziedziny trzech zmiennych, wszakże tylko co do przekształceń ortogonalnych.

W pracy wspomnionej na drugiem miejscu stosuje Boole swoją zasadę do tego, aby przy pomocy przekształcenia liniowego usunąć iloczyny wyrazów z pewnych klas równań z czterema zmiennemi jednorodnemi.

Prace Sylvestera rozpoczynają się od objęcia z jednego punktu widzenia rezultatów osiągniętych przez jego poprzedników. Do tego służy mu ważne twierdzenie „Rugownik $n$ form jednorodnych $\varphi(x)$ z $n$ zmiennemi $x$, jeżeli zmienne zastąpimy $n$ innemi formami $\psi(x)$, staje się równym iloczynowi potęg (łatwo wyznaczalnych) rugownika funkcyi $\varphi(x)$ i rugownika funkcyi $\psi(x)$" (Tom VI, str. 187). Rugownik występuje tu tedy jako niezmiennik w znaczeniu wyższem, t. j. odnośnie do przekształceń wyższych. Jeżeli funkcye $\psi(x)$ są liniowemi, to wracamy znów do teoryi niezmienników zwykłych. Jeżeli z drugiej strony przyjmiemy, że funkcya $\psi(x)$ jest funkcyą dowolną, $\varphi(x)$ zaś funkcyą liniową, to wyrazimy wtedy własność kombinantową rugownika, polegającą na tem, że rugownik $n$ liniowych połączeń form $\psi$ jest równy pierwotnemu rugownikowi pomnożonemu przez potęgę wyznacznika połączenia.

Zasada dowodzenia, implicite tu przyjęta, jest taka: „jeżeli funkcya całkowita $\psi$ $n$ zmiennych jest równa zeru dla wszystkich układów wartości, przy których znika druga także funkcya $F$, wtedy forma $f$ jest czynnikiem formy „$F$".

Zasada ta wymaga wszakże sama dowodzenia, porówn np. Hölder w Böklena Math. natur w Mit. t. I, s. 60 (1884); Study „Methoden zur Theorie der ternären Formen", Lipsk 1889 s. 31.

Dalsze rozważanie Sylvestera mają swój punkt kulminacyjny (t. VII, s. 55) w pomyśle głównym, polegającym na tem, że forma liniowa $u_x = u_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$

pozostaje niezmienioną, jeżeli zmienne $x$ poddajemy pewnemu podstawieniu liniowemu, i zarazem zmienne $u$ t. j. „zmienne przeciw podstawieniowe" (contragradient) podstawieniom odwrotnym. Jażeli do formy $f(x)$ dołączymy formę $u_x$, wtedy niezmienniki lub spółzmienniki jednoczesne odnośnie do zmiennych $x$ prowadzą do przeciwzmienników lub mieszanych konkomitantów (form pośrednich Aronholda) form $f$; odwrotnie rzecz się ma dla formy $\varphi(u)$.

Wszystkie twory niezmiennicze (konkomitanty), powstające z formy pierwotnej lub szeregu takich form prowadzą tedy do ściślejszego pojęcia niezmienników.

Szczególny gatunek przeciwzmienników, t. j. „formes adjointes" występuje już wcześniej u Hermite'a. Journ. für Math t. XL. s 263 (1851). Sylvester nazywa je „ewektantami", T. VII, st. 181.

Nazwy: niezmiennik (Invariante), spółzmiennik (Covariante), przeciwzmiennik (Contravariante), konkomitant, występują pierwszy raz u Sylvestera w t. VI, s. 290; wyrażenia zaś: cogredient, contragredient t. VI, s. 53; wyrożnik—discriminant—Phil. Mag. 1851 s. 406, kombinant w t. VIII s. 63.

[14]) Z faktu, że $x_i$ i $\frac{\partial}{\partial u_i}$ są spółpodstawieniowemi t. j. podlegają tym samym podstawieniom, wynika najprzód (porów. wyżej, co mówiliśmy o Boole'u), że podstawienie pochodnych realnych, (niesymbolicznych) formy $\varphi(u)$ względem $u_i$ zamiast zmiennych $x$ formy $f(x)$ prowadzi do przeciwzmiennika form $f$ i $\varphi$ (Tom. VII, st 194). Ponieważ dalej potęgi i iloczyny $x_1^n$, $x_1^{n-1}x_2, \ldots$ są spółpodstawieniowemi z $\frac{\partial^n}{\partial u^n}$, $\frac{\partial^n}{\partial u_1^{n-1}\,\partial u_2}, \ldots$, to zastąpienie tych form, jednych przez drugie, można przeprowadzić w formie $f(x)$ rzędu $n$-go (a nawet wyższego) (Tom VI, str. 96, 179). Powstały w ten sposób spółzmiennik nazwano później $n$-em nasunięciem (Ueberschiebung) formy $f$ na $\varphi$ (porównaj Salmon str. 346). Ostatni proces nazywa Sylvester wprowadzeniem symbolicznem symbolów $\frac{\partial}{\partial u_i}$ zamiast zmiennych $x_i$. Toż samo odnosi się, oczywiście do $u_i$ i $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

W geometryi znikanie przytoczonego najprzód utworu, jeżeli n. p. liczba zmiennych jest trzy, przedstawia powłóczącą biegunowych (liniowych) punktów $f=0$ względem krzywej $\varphi=0$. Steiner poświęcił wyczerpujące studyum takim utworom biegunowym i ich uogólnieniom.

Nasunięcia badano geometrycznie głównie w przypadku ich znikania tożsamościowego: wtedy forma $f$ nazywa się niebiegunową (apolarną) względem formy $\varphi$. Porównaj późniejsze prace Reye'go.

[15]) Phil. Mag. Nov. 1851 Str. 391—410, i osobno Londyn, Bell 1851.. Porówn. Cambr. and Dublin Math T. VI, Str. 193, 194, 198, 293; na str. 123 jest wzmianka o tem, że nazwa formy „kanonicznej" pochodzi od Hermite'a.

Okolicznościowo jest mowa o przedstawieniach kanonicznych form $f_{2n}$ dwójkowych rzędu parzystego np. l. c. str. 123, 293; aby forma $f_{2n}$ dała się przedstawić jako suma $n$ zupełnych potęg $(\lambda-\alpha_1)^{2n}$, trzeba, aby znikał „katalektykant" Phil Mag str. 394.

Dla form dwójkowych $f_{2n+1}$ rzędu nieparzystego wzięto pod rozwagę tylko przypadek ogólny przedstawienia pod postacią summy $n+1$ zupełnych potęg $(\lambda-\alpha_i)^{2n+1}$ (l. c. str. 392) t.j. kiedy wyróżnik „kanonizantu" którego pierwiastkami są ilości $\alpha$, jest różny od zera.

O formie czwórkowej sześciennej, jako sumie pięciu sześcianów, wspomina się pu raz pierwszy w Cambr. and Dubl. Math T. VI, St. 199. Porównaj dane w biografii Clebscha Math Ann. VII, Str. 17.

[16]) Phil. Mag. 1852, II str. 138. Phil Trans. 1853, Str. 407—548. Borchardt wspomina w Journ. für Math. t. LIII s. 275—283 (1857), o tem, że Jacobi musiał znać to prawo już w roku 1847. Porówn. dowód Hermite'a, tamże str. 271. Patrz „Fiedler" str.

1471. W Phil. Trans. 1853 (l. c.) podaje Sylvester zasadnicze zastosowanie prawa bezwładności do tak zw. „bezoutianta“, t. j. do formy kwadratowej o $n-1$ zmiennych, wyprowadzonej z wyróżnika formy dwójkowej $f$ $n$-go rzędu; od dyskusyi tej formy zależą bezpośrednio stosunki odnoszące się do rzeczywistości pierwiastków równania $f=0$. Porówn. Hermite, Journ. für Math. t. II. s. 39—51 (1856). Porówn. jeszcze Sylvester, Phil. Mag. (4), IV s. 138, następ. (1852), Hermite C. R. 1852, II. Jacobi (1847), p. Journ. für Mathem. LIII str. 275—280. (1857).

[17]) Phil. Mag. 1851. Str. 119—140, gdzie na podstawie tej zasady obliczono wszystkie możliwe zniekształcenia w stosunkach przecięć dwóch krzywych lub powierzchni stopnia 2-go.

Sylvester stosuje już tę samą zasadę do badania równoważności dwóch form kwadratowych, Phil. Mag. kwiecień 1851, str. 205—305. Porówn. sprostowanie do tegoż, maj 1851, str. 415.

[18]) Cambr. and. Dubl. Math. Journ. VIII str. 63. (porówn. powyższe uwagi o rugowniku), jako też str. 256, nast. t. IX, str. 85 i nast. Sylvester ustanawia równania różniczkowe dla kombinantów; dowodzi, że te ostatnie zależą od wyznaczników, które można utworzyć ze spółczynników pierwotnych. Jako zastosowanie podany jest rugownik trzech form kwadratowych trójkowych w funkcyi dwóch pojedyńczych kombinantów.

W Annali di Mat. I 1858, str. 344—348, podał Betti układ równań różniczkowych charakterystycznych dla kombinantów.

[19]) Porówn. to, co powiedziano wyżej o Aronholdzie, przyp. [12]). Salmon str. 344.

[20]) Phil. Trans. 1853, Str. 543—548. Objaśnieniem nowo wprowadzonych terminów u Cayley'a Papers IV S. 594—608 (Przedruk z Encycl. Brit. 1860).

[21]) Journ. f. Math. X L., Str. 263. Cambr. and Dubl. Math. J. VI, Str. 222.

[22]) U Hermite'a zagadnienie, stanowiące punkt wyjścia, należy ze swej istoty do teoryi liczb; idzie tu mianowicie o wykazanie, że liczba „klas“ różnych, na które rozpadają się formy dwójkowe (i wyższe) danego rzędu z przepisanemi wartościami dla niezmienników, jest skończona. Porówn. w szczególności artykuły w tomie XL i XLI Journ. für Math. (1850, 1851).

[23]) Cambr. and Dubl. Math. J. IX str. 172—217, porówn. zwłaszcza str. 173—175. W jaki sposób przeprowadza się w uogólnienie dla form wyższych, pokazał dopiero Deruyts w ostatnim czasie (1891).

Uogólnienie Deruytsa odnosi się do form specyalnych; Hurwitz niedawno, Math. Ann. 45, str. 381—304, 1894. przez odpowiednią modyfikacyę prawa wzajemności przedstawił rzecz tę w postaci najogólniejszej. Prace te rzuciły zarazem nowe światło na procesy różniczkowe, zachodzące w teoryi niezmienników.

[24]) Należy tu rozróżnić dwa przypadki. Oba niezmieniki liniowe, użyte pierwotnie do przekształcenia przez Hermite'a, są niewymierne; są niemi czynniki liniowe niezmiennika kwadratowego $\varphi$. Jeżeli forma $f$ przechodzi przytem na formę „kanoniczną“ $F$, to wtedy każda funkcya całkowita spółczynników formy $F$, pozostająca niezmienną przy tych samych podstawieniach, które ten niezmiennik przekształcają sam w siebie, jest niezmiennikiem całkowitym wymiernym funkcyi $f$ z potęgą wyróżnika $\varphi$ w mianowniku (L. c. str. 17 ). To daje n. p. możność otrzymania niezmienników formy 5-go rzędu.

W dalszym ciągu czyni się użytek z przekształcenia przy pomocy wymienionych spółzmienników, str. 190, przez co forma $f$ (rzędu nieparzystego) przechodzi na formę „typową“.

[25]) Journ. f. Math. LII str. 1—38. Nazwa „formy stowarzyszone“ wprowadzona na str. 23. Powstawanie tych form najprościej uwidocznić można w sposób następujący: Niechaj $f(x, y)$ będzie daną formą rzędu $n$-go; $g(x \text{ i } y)$, $h(x, y)$—dwoma niezmiennikami formy $f$. Według Boole'a $x$ i $y$ są spółpodstawieniowemi z $-\frac{\partial h}{\partial y}$ i $\frac{\partial h}{\partial x}$, a więc

z $xX - \frac{\partial h}{\partial y} Y$ i $yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y$, gdzie $X$ i $Y$ są najprzód parametrami dowolnemi. Stąd wyrażenie

$$G = g\left(xX - \frac{\partial h}{\partial h} Y,\ yX + \frac{\partial h}{\partial x} Y\right)$$

jest dla wszystkich wartości $X$ i $Y$ niezmiennikiem formy $f$, t. j. spółczynniki pojedyńcze potęg i iloczynów ilości $X$ i $Y$ są niezmiennikami formy $f$; pierwszym z nich jest oczywiście sama forma $f$. Uważajmy teraz $X$ i $Y$ za nowe zmienne zależne liniowo od dawnych. Ponieważ wyznacznik podstawienia (odwracając uwagę od czynnika liczbowego) jest równy $h$, przeto każdy niezmiennik i spółzmiennik formy $G$ zgadza się z pierwotnym aż do potęgi spółzmiennika $h$. Jeżeli weźmiemy w szczególności $g=h=f$, to $f$ przejdzie wskutek podanych podstawień na formę $F$ ze spółczynnikami $f$, $o, f_2, f_3 \ldots f_n$, t.j. na jednę z form stowarzyszonych z formą $f$, i jakikolwiek niezmiennik lub spółzmiennik formy $f$ daje się przedstawić jako funkcya całkowita ilości $f_i$ z potęgą formy $f$ w mianowniku.

U Hermite'a te formy stowarzyszone służą przedewszystkiem do rozwiązania zadania z teoryi liczb o rozdziale form dwójkowych sześciennych i dwukwadratowych na „rzędy" (l. c. str. 31 i następ.)

Jeżeli położymy zresztą $y=0$, $x=1$ w formach $f_i$, to przejście formy $f$ na $F$ utożsami się z postępowaniem znanem w teoryi elementarnej równań, za pomocą którego przekształcamy równanie tak, aby spółczynniki przy potędze zmiennej o dwie jedności niższej od rzędu równania, były zerami.

Innem zastosowaniem form $f_i$ jest związek Cayley'a pomiędzy spółzmiennikami formy dwukwadratowej; związek ten zużytkowujemy przy pięknem przekształceniu całki eliptycznej 1-go gatunku. Porównaj przypisek 50.

[26]) Cambr. and. Dubl. Math. J. IX str. 186 i nast. Rolę, jaką odgrywa ten niezmiennik przy rozwiązywaniu równań rzędu 5-go, wykazał głównie Hermite w Journ. für Math. L. IX str. 394—405.

[27]) L. c. str. 198 i n. Szczegółowe rozwiązanie podał Hermite, C. R. 1865, 866. Porównaj szkic historyczny Harrisa. Annals of Math. V str. 217—228, 1891.

[28]) Cambr. and Dubl. Math J. IX str. 63—67. Porówn. Brioschi, Journ. für Math. LII. str 133—141 (1856).

[29]) Journ für. Math. t. XXII, str. 119—123.

[30]) Journ für Math. L. str. 288—299.

[31]) Journ. für. Math. XLVII str. 109—124

[32]) Annali di Tortolini V, str. 207—211, zwłaszcza str. 209, Por. Betti, Annali di Mat. (1), I, str. 129—134 (1859). W tem samem czasopiśmie t. IX, str. 82 (1859) podaje Brioschi wywód ścisły równań różniczkowych Cayley'a dla niezmienników w przypadku form dwójkowych; w Annali di Mat. (II), I (1858) takiż wywód str. 160 dla form o $n$ zmiennych.

[33]) Pierwsze sześć rozpraw znajdujemy w drugim tomie Coll. Papers str. 221—234 (1854); 250—275 (1856); 310—355 (1856); 513—526 (1858); 527—557 (1858); 561—569 (1859). Porówn. Noty dodane przez Cayley'a w nowem wydaniu. Wyraz „Quantic" odpowiada wyrazowi „forma".

[34]) Jeżeli $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jest formą daną, to wynik procesu $x_i \frac{\partial f}{\partial f k}$ można zastąpić

procesem różniczkowym, wykonanym na spółczynnikach formy $f$; proces ten oznacza Brioschi przez $\left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$. Wtedy wspomnione równania różniczkowe w liczbie $\frac{n(n-1)}{2}$, określające niezmiennik form $f$, są dane przez: $\left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$, Rozszerzenie do większej liczby form i większej liczby zmiennych łatwo daje się przeprowadzić (l. c. str. 224). Cayley za pomocą wyrażenia, które Lie nazywa wyrażeniem nawiasowem Poissona, wykazuje, że spółzmienniki, określone za pomocą poprzedniej symboliki, czynią w istocie zadość tym równaniom. Wszakże dopiero w 1863 Aronhold wykazał ogólnie (Journ. für Math. LXII), że, odwrotnie, równania te charakteryzują dokładnie utwory, nie zmieniające się przy przekształceniu liniowem.

Dla form dwójkowych mamy dwa takie równania; jeżeli utworzymy z nich znowu nawias Poissona, to dojdziemy bezpośrednio do twierdzenia, że odpowiednio unormowana „waga" każdego wyrazu spółzmiennika jest stałą.

W rozprawie II, str. 254 uzasadniono ważne twierdzenie, że przez prosty proces różniczkowy i jego powtórzenie można z pierwszego spółczynnika spółzmiennika otrzymać kolejno pozostałe spółczynniki.

[35]) Cayley wychodzi tu z pojęć spółzmienników „asyzygetycznych" i „nieprzywiedlnych". Asyzygetycznym nazywa się szereg niezmienników, niepołączonych związkiem liniowym (syzygią) o czynnikach liczbowych; nieprzywiedlnym nazywa się spółzmiennik, który nie daje się wyrazić w sposób całkowity i wymierny przez niezmienniki stopnia niższego.

[36]) Twierdzenie na s. 257: „Liczba spółzmienników asyzygetycznych" będących rzędu $n$ (względem zmiennych) i stopnia $\mu$ (względem spółczynników) formy dwójkowej $n$-go, jest równa liczbie wyrazów stopnia $\vartheta$ i wagi $w = \frac{1}{2}(n\vartheta - \mu)$, zmniejszonej o liczbę wyrazów stopnia $\vartheta$ i wagi $w-1$" polega milcząco na niezależności liniowej układu równań liniowych. Dowód, że to założenie istotnie zachodzi, dał dopiero znacznie później Sylvester (Phil. Mag. 1878).

Wspomniana tu liczba, odpowiadająca liczbom $\vartheta$ i $w$, jest równa liczbie sposobów przedstawienia liczby $w$ pod postacią summy $\vartheta$ liczb szeregu $(0, 1, .. n)$, a jako taka (por. str. 243) — równa spółczynnikowi przy $x^w z^\vartheta$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej" (str. 260).

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\,.\,.\,(1-x^n z)},$$

Po odpowiedniem przekształceniu ta funkcya tworząca daje także liczbę zupełną półzmienników nieprzywiedlnych. Ta np. dla $n=3$ mamy

$$\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$

co wskazuje, że istnieją cztery utwory nieprzywiedlne odpowiednio stopnia 1, 2, 3, 4, połączone ze sobą syzygią szóstego stopnia (str 262).

[37]) Porówn. II, A. c.

[38]) Porówn str. 252, 253, 268, 270.

[39]) Porówn. str. 517. Z drugiej strony nasunięcie zawiera się już jako przypadek szczególny w utworach symbolicznych, wprowadzonych przez Cayley'a w r 1846.

[40]) To rozważanie (rozprawa V a) bezpośrednio wypływa z syzygii, istniejącej dla formy sześciennej lub dwukwadratowej. Zresztą, nie należy tu pominąć milczeniem przed-

wstępnych prac B o o l e'a (Cambr, Math. J. III str. 116), E i s e n s t e i n a (Journ. für Math. XXVII, str. 89), H e s s e g o (Journ. für Math. XXXVIII str. 262) i S y l v e s t e r a (Cambr. and Dublin Math J. VI).

Z drugiej strony, przeceniano wielokrotnie doniosłość tych metod rozwiązywania; w samej rzeczy, teorya form wtedy tylko powinna stanowić część istotną zagadnienia o rozwiązywaniu równań, gdy, idąc za K l e i n e m, uważamy grupę należącą do równania za grupę kolineacyj w przestrzeni wyższej.

[41]) Ta część była szczegółowiej opracowaną przez F i e d l e r a (Lipsk 1862)

[42]) Jest zasługą K l e i n a odkrycie zasadniczego znaczenia wyników badań C a y l e y'a; porów. Math. Ann. IV i VI.

[43]) Papers II, str 235—249 (1855), 47—52 (158). Porówn. zwłaszcza· S y l v e s t e r Quart. Math. J. I, str. 141—152 (lipiec 1855), jako też B r i o s c h i i S y l v e s t e r w Annali di Tort. VIII (1857), B e l l a v i t i s w Annali di Mat. II, B r u n o w Journ. für Math LXXXV i Math. Ann. XIV. B e l l a v i t i s w l. c. str. 147 daje przegląd literatury dawniejszej. Krótkie zestawienie odpowiednich twierdzeń głównych daje H a g e n w „Synopsis der höheren Mathematik" Berlln 1891, str. 1—3.

[44]) Papers II, Str. 417—439, cf. str. 454—464. Prawidla C a y l e'a zostały w ostatnich czasach uogólnione przez K o h n a, Wien. Ber. 1893, str. 1—16. B r i l l niedawno zwrócił uwagę na to, że pytanie o związkach, zachodzących pomiędzy funkcyami symetrycznemi elementarnemi par zmiennych, sprowadza się do pytań z teoryi niezmienników form dwójkowych. Gött. Nach: 1893 str. 757—762. Porówn. J o r d a n, Math. Ann. 45, str. 450—427, 1894.

[45]) Journ. für Math. LIII. str. 366—367 lub Papers IV, str. 38—39.

[46]) Journ für Math. LIV, str. 48—58 i 292 lub Papers IV, str. 34—53.

[47]) Quarterly J. IV. (1861) Str. 168—171; 324—328. Twierdzenie zasadnicze tej teoryi orzeka, że wyraz główny iloczynu dwóch spółzmienników równa się iloczynowi pojedyńczych wyrazów głównych.

[84]) Annali di Mat. (1) III (1860). Str. 340—328.

[49]) Journ. für Math. LII, str. 8. Porówn. B r i o s c h i w Annali di Mat. (1), IV, str. 192 (1861). Porównaj przypisek 25-ty. Przekształcenie H e r m i t e'a i B r i o s c h i e'g o całki eliptycznej pierwszego gatunku, sprowadzające ją do formy typowej normalnej $\frac{\partial z}{\sqrt{z^3 - \frac{1}{2} g_2 z - \frac{1}{3} g_3}}$, jest stopnia czwartego względem zmiennych pierwotnych. P i t a r e l l i, zastosowawszy procesy biegunowe, zastąpił to przekształcenie—liniowem (Roma, Acc. L. R. (4) IV, s. 703—705, 1888). Tenże autor badał także przekształcenia wyższe, skutkiem których znika niezmiennik $g_2$ lub $g_3$ w przekstałconej całce.

[50]) C. R. XLVI, str. 961 (1858). Niechaj $f(x) = 0$ będzie równaniem danem, $\alpha$—jego pierwiastkiem, $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - \alpha}$. Pierwiastek równania przekształconego, odpowiadający pierwiastkowi $\alpha$, pisze H e r m i t e pod postacią $\varphi(z) - \frac{1}{n} f'(z)$, gdzie potęgi $z^0, z^1 \ldots z^{n-2}$ należy zastąpiś $n-1$ parametrami dowolnemi. Spółczynniki formy przekształconej są utworami biegunowemi spółzmienników formy $f$; w szczególności znika spółczynnik drugi, gdy następujący bezpośrednio po nim, staje się „bézoutiantem", t. j. formą kwadratową ilości $t$, od której zależą stosunki określające rzetelność pierwiastków równania $f = 0$.

Zresztą modyfikacya, wprowadzona przez Hermite'a w przekształceniu Tschirnhausena, daje tę wielką korzyść, że nowe spółczynniki występują w stopniu możliwie najniższym spółczynników dawnych. Porówn. także Cayley, Journ. für Math. LVIII (1861) str. 259 lub Papers IV str. 259—269.

[51]) Patrz np. Clebscha „Binäre Formen", § 114, 115.

[52]) C. R. 1863, 1864. Tu w dalszym ciągu zmienia przekształcenie Tschirnhausena, tak że nawet pojedyńcze spółczynniki potęg ilości $\alpha$ (patrz wyżej) stają się utworami niezmienniczemi, co dzieje się wszakże z uszczerbkiem dla pierwotnej elegancyi.

[53]) Porówn. przedewszystkiem stanowiące całość przedstawienie teoryi form dwójkowych w Annali di Mat. 1-a Serja; I (1858), Str. 296—309, 349—362; II (1859) Str. 82—85; 265—277; III (1860) str. 160—168; VI (1861) str. 186—194. Odbitka tej pracy ogłoszona w Rzymie w r. 1861 jest wyczerpaną.

[54]) Journ. für Math. LIII, str. 372—376.

Te równania różniczkowe w przypadku rugownika dają się podzielić na trzy grupy Pierwsza orzeka, że rugownik jest zwyczajnym niezmiennikiem; druga, że ma on zarazem własności kombinanta; trzecia wreszcie, że posiada także własności niezmiennicze odnośnie do przekształceń wyższych, mianowicie że po przekształceniu odtwarza się z wyłączeniem czynnika, który sam zależy jeszcze od spółczynników form pierwotnych.

Przy wyróżniku odpada oczywiście druga z wymienionych grup. Grupa ostatnia, jak to później okazał Nöther, daje się sprowadzić do jednego równania. Porówn. Bruno, § 25.

[55]) Porówn. Wiltheiss w Math. Ann. XXXIII, str. 279 (1888).

[56]) Annali di Mat. (1) I (1858) str. 158—161, zwłaszcza str. 163 (Typowe przedstawienie form o $n$ zmiennych). O typowem przedstawieniu form kwadratowych trójkowych, jako pochodnych formy sześciennej, patrz np. C. R. 1863.

[57]) O zastosowaniach geometrycznych patrz notę o spółzmiennikach krzywych i powierzchni, Cambr. und. Dubl. Math. J. II, str. 74 (napisaną bez uwzględnienia prac Hessego). Cenny materyał do symboliki Cayleyowskiej znajduje się w Cambr. and Dublin Math. J. IX, str. 32. W pierwszem wydaniu swego dzieła: „Higher plane curves", 1852 oblicza niezmienniki i spółzmienniki za pomocą funkcyj symetrycznych. W drugiem wydaniu „Algebry" 1865 podaje nowy wywód „układów zupełnych" dla najprostszych form dwójkowych jednoczesnych.

[58]) Dublin 1879. Wydanie czwarte ukazało się w r. 1885.

[59]) Lipsk, 1863; wydanie drugie, 1876.

[60]) Lipsk, 1862.

[61]) Patrz wyżej przyp. 53. Opracowanie elementarne tej teoryi podał Battaglini Atti di Napoli 1867, porówn. ciąg dalszy w Giorn. di Mat.

[62]) Porówn wielokrotnie cytowane biografie Plückera, Hessego, Clebscha.

[63]) Journ. für Math. LV, str. 97—191.

[64]) Journ. für Math. LXII, str. 281—345.

[65]) Str. 282, 283. Podobne zagadnienie dla dwu i więcej par form, wprawdzie nie tak ściśle sformułowane, znajdujemy już u Boole'a, Cambr. Math. J. III i IV. Boole daje także przykład dla pojedyńczej pary form; wtedy jedno z równań podstawienia liniowego przedstawia drugą parę (L. c. tom III, str. 115).

[66]) Takie nieporozumienie widzi referent w zarzutach, jakie metodzie Aronholda stawia Veltmann w Schlöm Z. XXII str. 277—298 (1877) i XXXIV, str. 321—330 (1889).

[67]) Np. Journ. für Math. LV l. c. str. 160.

[68]) Tom LXII, str. 287—288, 293. Maurer zbadał później, o ile, odwrotnie, część takiego układu może określić niezmienniki. Munch. Ber. 1888. Str. 103—150.

[69]) Dowód prosty i bezpośredni podał Aronhold w Journ. für. Math. LXIX str. 185—189. Dowód podany przez Christoffela, t. LXVIII, str. 246—252, został później cofnięty przez autora i zastąpiony innym; porówn. Math. Ann. XIX str. 280—290 (1881).

Pytaniem o wyższych zależnościach pomiędzy $n^2$ równaniami różniczkowemi niezmienników zajmował się później Study, który wykazał dla przypadku $n=3$, że wszystkie one są wynikiem tylko dwu z pomiędzy nich. Patrz. „Methoden zu Theorie der ternären Formen", Lipsk 1889, str. 167.

[70]) Journ. für Math. LXV, str 257—268.

[71]) Fem. LXII § 8. Proces użyty już przez Boole'a, nazwany imieniem Aronholda, przy pomocy którego wyprowadzają się niezmienniki jednocześnie pewnej liczby form z niezmienika formy pojedyńczej przez różniczkowanie względem spółczynników, stanowi w § 10 podstawę systematyczną teoryi utworów jednoczesnych (porówn. Journ. für Math. XXXIX str. 150 i nast.)

[72]) T. LXII § 11, § 14.

[73]) Str. 292—293.

[74]) Journ. für. Math. LIX str 1—62.

[75]) l. c. § 7.

[76]) Journ. für Math. LXII str. 64—109 (1863).

Z późniejszych, poczynionych przez Clebscha zastosowań teoryi niezmienników do geometryi zasługuje na szczególną uwagę zastosowanie do tak zwanego: „zagadnienia o charakterystykach stożkowych" Math. Ann. VI. S. 1—15 (1872). Metoda Clebscha nie jest wolna od zarzutów; porówn. najnowszą pracę Study'ego (Math. Ann. XL. S. 563—578, 1892), który metody swojej książki stosuje z powodzeniem do tego zagadnienia.

[77]) Math. Ann. VII, Str. 1—50, zwłaszcza str. 37—50 (1874).

[78]) Journ. fur Math. LXIX str. 323—354.

[79]) Berliner Berichte, 1868, str. 310—338.

[80]) Annali di Mat. (2), I. str. 23—79.

[81]) Kronecker, Journ. fur Math. LXVIII str. 273—285.

[82]) Christoffel, tamże str. 253—272.

[83]) Pierwszy zeszyt tomu 1-go, który referuje o pracach ogłoszonych w r. 1878, wyszedł w lutym 1871.

„Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik" wydawali 1—X tomu C. Ohrtman, F. Müller i A. Wangerin, od XI do XIV, pierwszy z nich przy spółudziale dwu ostatnich; od XV—XIX M. Henoch i E. Lampe, wreszcie od XX tomu wydaje E. Lampe przy spółudziale i t. d.

[84]) Tom drugi, wydany przez F. Kleina wyszedł w roku następnym.

[85]) Rozprawa, Bonn, przedrukowana w Math. Ann. XXIII, str. 539—578.

[86]) Cytaty tego i następnego rozdziału mają tylko znaczenie prowizoryczne dla oryentowania się w literaturze.

[87]) Patrz np. Math. Ann. IV S. 50—84 (1872), a zwłaszcza Program erlangeński Kleina z r. 1872 (przełożony w „Pracach matematyczno fizycznych", t. VI)

Poniżej często cytować będziemy „Theorie der Transformationsgruppen", Liego t. I i II. Lipsk (1888, 1870) w opracowaniu Engela (w skróceniu: „Lie-Engel") Porówn. też Liego: Vorlesungen uber contuirliche Gruppen unt geometrischen und anderen Anwendungen, herausgegeben von Scheffers, Lipsk 1893.

Jest rzeczą interesującą porównać tu stanowisko, jakie co do tego pytania zasadniczego zajmuje Kronecker; porówn. Berliner Ber. 1890, str. 99 i nast.

[88]) W tym kierunku uczyniono wprawdzie dotąd niewiele, ponieważ dotychczasowe metody teoryi niezmienników, bezpośrednio lub pośrednio stosują różniczkowanie względem spółczynników podstawienia, a więc zakładają, że te spółczynniki są ogólnemi.

Maurer w ostatnich czasach podał ogólną charakterystykę różnych klas szczególnych grup podstawień. Journ. für Math. CVII, str. 86—116 (1890)

[89]) Co do podziału grup przekształceń porówn. rozdział wstępny u Lie-Engela, I.

[90]) Można tu tylko nadmienić o pracach Poincarégo i Picarda z jednej, Kleina, Hurwitza, Frickego i innych — z drugiej strony.

[91]) Lie, który to zagadnienie najdalej posunął, nie uwzględnia związków należących do dziedziny teoryi form.

[92]) Porówn. np. przedstawienie w dziele Kleina-Frickego „Modul-Functionen" (Lipsk, 1890), III Absch. Cap. 2, oraz rozwinięcie Wiltheissa dla rodzaju p=3, Math. Ann. XXXVIII. S. 1—13 (1891).

[93]) Lie-Engel. Cap. I, 25.

[94]) Clebsch, Binäre Formen s. 306 (1872); Gram. Math. Ann. VII str. 234, (1874), d'Ovidio Battag. G. XV S. 187—192 (1877); Capelli Mem. d. Linc. 1882, S. 582 (1882); Hölder. Böklen Mitt. I. str. 59—65 (1884); Elliot, Mess. XVI str. 5—8 (1885, Mansion, Mess. XVI S. 127—129, Brux. S. t. c XII. S. 47—49 (1887—1888); Study-Methoden (1889) s. 32 i nast., Deruyts Théorie générale des formes algébriques, Liége, 1891. S. 49.

Porówn. także dowód Kroneckera, Berliner. Ber. 1889, S. 609 i następn.

[95]) Göttinger Abh. XVII. S. 1—62.

[96]) Gordan przy rozwiązywaniu równań rzędu piątego, Math. Ann. XII. S. 375—404, zwłaszcza str. 379 (1879); Capelli przy badaniu form podwójnie kwadratowych Batt. G. XVII. S. 69—148. (1879).

Układ pewnej formy podwójnie dwójkowej obliczony w cytatowanej pracy Gordana służy w dziele „Modulfunctionen" Kleina-Frickego II. S. 127 i nast. (1892) do ustanowienia równań modułowych.

Jeżeli $\tau$ jest modułem głównym przekształcenia $n$-go rzędu, $\tau'$ moduł przekształcony, to w rzeczy samej lewą stronę $f(\tau', \tau)$ równania modułowego, gdy ją jeszcze uczynimy jednorodną, można uważać za funkcyę podwójnie dwójkową, która nie zmienia się przy podstawieniach jednoczesnych oznaczonej skończonej grupy, a skutkiem tego daje się przedstawić jako funkcya całkowita wymierna form odnośnego układu zupełnego. Należy tu tylko odróżnić przypadki spół-i przeciw podstawienia. Tożsamo odnosi się w dziedzinie trójkowe do tak zwanych „odpowiedniości modułowych" (t. c. s. 690 i nast.). I tu rozważać tylko należy spół i przeciwpodstawienie obu trójkowych szeregów ilości zmiennych. Porówn. jeszcze Kleina „Ikosaeder". S. 232 i nast., rozprawę lipską Fiedlera (1885), albo Wolf. Z. XXX. S. 129—228.

[97]) Porówn. II B.

[98]) Leipzig. Ber. Porównaj wstęp do jego „Metod". Lipsk 1889.

[99]) Christoffel Math. Ann. XIX. S. 280—290 (1881); Maurer. Münch. Ber. 1888, S. 103—150 i Journ. für Math. CVII, S. 89—116 (1890)

[100]) Cayley Quart. J. XIX. str. 131—138 (1883), Am. J. VII. str. 1—25, 59—73 (1884); Mac-Mahon, Am. J. VI. str. 131—164 (1883), Am. J. VII. str. 26—47 (1884), Am. J. VIII. str. 1—18 (1885)

[101]) Sylvester w Am. J. V. str. 79—137 (1882). Perrin w S. M. F. Bull. XI str. 88—107 (1883)

[102]) Amer. J. III. str. 154—164 (1882) albo Journ. für. Math. XC. str. 186—188, porówn. Stroh, Math. Ann. XXII. str. 402 (1883)

[103]) Math. Ann. XXX. S. 15—29, głównie str. 17.

# CZĘŚĆ I.

## I. RÓWNOWAŻNOŚĆ.

### A. Formy kwadratowe i dwuliniowe.

*a) Przekształcenie liniowe form i gromad form, wzajemne i samych na siebie.*

Zwracamy się do przekształcenia liniowego form kwadratowych i dwuliniowych. Formy te wyróżniają się od innych tem, że dwa ogólne indywidua jednego gatunku mogą być zawsze przekształcone liniowo, jedno na drugie. Dla form dwuliniowych zakładamy, że przekształcenie dwu par zmiennych są niezależne od siebie.

Ważne przez swoje zastosowania zagadnienie specyalne przekształcenia formy lub dwóch form jednoczesnych kwadratowych o $n$ zmiennych na sumę możliwie najmniejszej liczby kwadratów, było już wielokrotnie traktowane w czasach dawniejszych (Lagrange, Cauchy, Gauss, Jacobi, Plücker, Hesse i inni[1]).

Weierstrass okazał[2]) w r. 1858, w jaki sposób wzory Cauchy'ego i Jacobi'ego na jednoczesną redukcyę dwóch form kwadratowych należy zmodyfikować w „przypadku wyjątkowym,“ gdy liczba kwadratów jest mniejsza od liczby zmiennych, gdy mianowicie pierwiastki równania „charakterystycznego“ (od których zależy oznaczenie tych kwadratów) nie są wszystkie różne od siebie. W szczególności bada Weierstrass przekształcenie rzeczywiste form rzeczywistych.

Już w pierwszym rozdziale wspomina o wzorach Cayley'a i Hermite'a dla gromady przekształceń formy kwadratowej na samą siebie.

Badania Weierstrassa o przekształceniu ogólnych funkcyj $\theta$ (przy niezmienności parametrów) doprowadziły do zagadnienia algebraicznego, polegającego na przedstawieniu funkcyi dwuliniowej $2n$ zmiennych pod postacią kanoniczną pewnej sumy iloczynów. Kronecker, wprowadziwszy formy tak zwane „podporządkowane“ (beigeordneten), znalazł w r. 1866[3]), że żądana redukcya, jeżeli wyznacznik formy nie jest zerem, daje się wykonać po rozwiązaniu równania „rozwiązującego“ $n$-go stopnia o pierwiastkach nierównych, i wskazał zarazem, w jaki sposób do tego przypadku sprowadza się zadanie ogólniejsze o przekształceniu samej na siebie formy dwuliniowej za pomocą jednakowych podstawień obu szeregów zmiennych.

W roku następnym Christoffel [4]) stwierdził te wyniki metodą Aronholda i dowiódł ważnego twierdzenia, że liczba parametrów dowolnych, zawartych w spółczynnikach podstawienia, równa się liczbie niezmienników bezwzględnych formy. Środkiem pomocniczym jest tu dla niego istotne wypisanie utworów niezmienniczych.

Na początku nowego okresu (1868, jak już wyżej wspomniano) zajmuje się znowu Weierstrass [5]) ogólniej pojętą równoważnością dwóch „gromad“ form dwuliniowych i kwadratowych. Wprowadzenie „dzielników elementarnych“ [6]) nadaje przejrzystość wynikom. Utwórzmy kolejne różnice pomiędzy liczbami wskazującemi, ile razy pewien czynnik liniowy wyznacznika danej gromady form $f+\lambda\varphi$ dzieli bez reszty wszystkie wyznaczniki rzędów: pierwszego, drugiego i t. d. Jeżeli każdy czynnik liniowy podniesiemy do potęgi, której stopniem jest odnośna z rzeczonych różnic, a następnie wszystkie czynniki pomnożymy przez siebie, to otrzymamy rozkład wyznacznika na iloczyn jego dzielników elementarnych.

Kryteryum wzajemnego przechodzenia dwóch gromad $f+\lambda\varphi$, $F+\lambda\Phi$ jednej na drugą, polega wprost na tem, że wyznaczniki obu form powinny mieć jednakowe dzielniki elementarne [7]).

Dzielnik elementarny jest oczywiście niezmiennikiem niewymiernym gromady. Kronecker pokazał później (1874), że powyższemu kryteryum można nadać formę wymierną [8]) przez zastąpienie dzielników elementarnych największemi wspólnemi dzielnikami wszystkich podwyznaczników tego samego rzędu.

Celem porównania dwóch danych gromad form co do ich równoważności, sprowadza je Weierstrass do odpowiednich postaci kanonicznych [9]), których nowe zmienne zależą jedynie od dzielników elementarnych.

Pojęcie postaci „kanonicznej,“ które zresztą ma cechę pewnej dowolności, zawiera się tu w wyższem zagadnieniu o równoważności i zyskuje przez to charakter określony. Jedyne ograniczenie, wprowadzone przez Weierstrassa, polega na tem, aby dzielniki elementarne wogóle istniały, t. j. aby wyznacznik gromady form nie znikał tożsamościowo. Bezpośrednio potem pokazał Kronecker [10]), w jaki sposób można traktować i ten skrajny przypadek wyjątkowy, mianowicie przez ustanowienie w nim postaci kanonicznej gromady za pomocą podziału zmiennych na dwie grupy różnorodne [11]). W tejże krótkiej nocie wskazuje, że dla gromad kwadratowych, zawierających przynajmniej jedną formę o znaku niezmiennym, można postępowanie Weierstrassa odwrócić; za pomocą podanej tu metody można wprost dojść do gromady zredukowanej, a stąd odwrotnie odczytać własność równoważności dzielników elementarnych. W sześć lat później (1874)[12]) wszystkie swoje badania algebraiczne o tym przedmiocie Kronecker połączył w jednę całość, obejmującą wszystkie istniejące gromady kwadratowe oraz dwuliniowe $f + \lambda\varphi$.

Jakkolwiek metoda wymierna największego wspólnego dzielnika ma znaczenie zasadnicze — Kronecker[13]) kładzie nacisk na wyższość arytmetycznej teoryi wyznaczników nad zwykłym literalnym sposobem ich tworzenia — to wszakże głębsze wniknienie w treść tych badań uczy, że równość wyznaczników, jako kryteryum równoważności dwu danych gromad, nie zawsze wystarcza we wszystkich przypadkach. Spełnia to dopiero pojęcie podstawowe „gromad elementarnych“ [13]), t. j. takich, których wyznacznik jest albo potęgą zupełną wyrażenia liniowego, albo znika tożsamościowo. Dowolna gromada form zawsze tylko jednym sposobem przedstawić się daje jako agregat gromad elementarnych; te ostatnie (oraz ich liczba) stanowią prawdziwe niezmienniki równoważności.

Do istotnego wykonania redukcyi gromady na jej części składowe potrzeba było rozszerzenia na dowolne gromady metody, podanej w roku 1868 dla gromad z jedną przynajmniej formą oznaczoną. Stało się to dopiero możliwem przez to, że usuwano kolejno nie zmienną po zmiennej (jak u Jacobi'ego), lecz odrazu całe grupy zmiennych (zastępując je zmiennemi kanonicznemi).

C. Jordan [14]), w pracy wcześniej nieco ogłoszonej, doszedł był do innych wyników. W polemice, która skutkiem tego wywiązała się pomiędzy nim i Kroneckerem, ten ostatni wyjaśnił, że przy stopniowem zastępowaniu pewnych zmiennych przez nowe, jak to czyni Jordan, może w przypadkach skrajnych zajść ta szczególna okoliczność, że usunięte poprzednio zmienne ukazują się znowu w dalszym przebiegu rachunku.

Pięknym wynikiem badania Kroneckera jest to, że metoda redukcyi Weierstrassa, przy odpowiedniem uporządkowaniu zmiennych, stosowaną być może nawet w przypadku znikającego wyznacznika [14]), gdy tymczasem metoda Jacobi'ego może być bezpośrednio stosowana tylko do form symetrycznych i znako-zmiennych (dwuliniowych).

Utworzywszy teoryę bezwyjątkową przekształceń (niekongruentnych) form i gromad form dwuliniowych, zwrócił się Kronecker do swego dawnego zagadnienia (z r. 1866) o przekształceniach tożsamościowych (kongruentnych), dla obu szeregów zmiennych formy dwuliniowej samej na siebie[15]).

Tu znowu sprawia trudności pominięty dawniej przypadek znikającego wyznacznika (i innych jeszcze zniekształceń); lecz wtedy forma zależy w istocie rzeczy od mniejszej liczby zmiennych i może być przedstawiona jako ich funkcya w ten sposób, że jej wyznacznik (odtąd „wyróżnik“ [16]), będzie różny od zera.

Można tu znowu wydzielić kolejno pewne najprostsze formy kanoniczne, których Kronecker wypisuje cztery („zredukowane") typy [17]; dalszy zaś przebieg postępowania jest podobny do stosowanego przy przekształceniach niekongruentnych. Układy wyznaczników podstawienia określają się znowu na podstawie pojęcia największego spólnego dzielnika [18])

Szereg uzupełnień w tym kierunku podał Kronecker w czasie najnowszym (1889 i 1890 [18]).

Dotąd punkty widzenia, arytmetyczny i właściwy teoryi form, były z sobą niezwiązanemi: odtąd stało się pożądanem ich przeniknienie wzajemne.

Pierwszy krok w tym kierunku uczynił niedawno Rosenow [19]) (1890). Otrzymuje on niezmienniki Kroneckerowskie dla formy dwuliniowej w przypadku dwu trójek ilości zmiennych; te niezmienniki, jeżeli odwrócimy uwagę od ich wyznacznika, mają tylko pewne cechy całkowito-liczbowe i według nich dzielą się na różne klasy. Z drugiej strony klasy te charakteryzują się w ten sposób, że zawsze niektóre z należących do nich form zwyczajnych (niezmienniki, spółzmienniki, przeciwzmienniki) znikają tożsamościowo.

Wracając do roku 1874, wspomnijmy przedewszystkiem o rozprawie Darboux'a [20]), w której twierdzenia Weierstrassa i Kroneckera z r. 1868 są ogólnie i pięknie wyprowadzone. Pomocniczy środek systematyczny w tem badaniu stanowi wyznacznik jednej lub dwu form, „wybrzeżony" (gerändert) za pomocą pewnej liczby szeregów wielkości dowolnych.

Szereg tych wyznaczników, jeżeli pierwotny przechodzi przez zero, zachowuje się jak szereg funkcyj Sturma przy przekraczaniu pierwiastka równania algebraicznego.

Do przedstawienia pod postacią sumy dochodzi Darboux, rozkładając na ułamki cząstkowe formę (lub gromadę form), wyrażalną jako iloraz dwu sąsiednich wyznaczników wybrzeżonych, według metody Jacobi'ego, z uwagą wszakże, by zmiany wymagane w przypadkach wyjątkowych były w istocie rzeczy szczegółowo wykonane.

Dalszy nasz wykład [22]) skoncentrujemy głównie na przekształceniach formy kwadratowej i dwuliniowej.

Gdy dotąd wychodzono z form jako danych i szukano takich podstawień ilości zmiennych, które sprawiają pewne przekształcenia form, to obecnie występuje zwrot stanowczy, polegający na tem, że odwrotnie z danej grupy ogólnej podstawień, staramy się wydzielić tę podgrupę, która jest w stanie jakąkolwiek formę kwadratową (dwuliniową) przekształcić samą na siebie, i później dopiero wyznaczamy odpowiednie formy. Formy ustępują teraz na plan dalszy, jako coś drugorzędnego, interes zaś główny zwraca się przedewszystkiem ku grupie podstawień, jako utworowi samodzielnemu. Niestety, ta płodna zasada zaledwie w pojedyńczych przypadkach została dotąd uwzględniona w innych częściach teoryi niezmienników.

Pierwszą pobudkę w tym kierunku zawdzięczamy R o s a n e s o w i [23]) 1875, który ograniczył się na formach kwadratowych o charakterze „ogólnym.“ Według C a y l e y'a, wraz z formą kwadratową przekształcają się na same siebie i jej pierwsze pochodne, t. j. układ form liniowych, posiadający tę ważną własność, że jest wzajemnym [24]). R o s a n e s dowodzi własności odwrotnej, mianowicie, że do każdego równania wzajemnego należy układ „asymetryczny“ [25]) form liniowych, a więc i odpowiednia forma kwadratowa. Z jednego takiego rozwiązania można otrzymać pozostałe.

Przytoczoną zasadę dla form kwadratowych badał w całej ogólności F r o b e n i u s [26]) (1877) i na tej drodze odkrył, obok wszystkich przypadków wyjątkowych, charakterystyczne własności podstawień, pozostawiających bez zmiany formę kwadratową lub, co na jedno wychodzi, formę dwuliniową, symetryczną lub znakozmienną.

Nie należy pominąć milczeniem tego, że już w r. 1873 B a c h m a n n zbadał bezpośrednio formy kwadratowe trójkowe co do ich zniekształceń i uzupełnił tym sposobem badania H e r m i t e'a, który wkrótce potem pokazał, że wzory B a c h m a n n a wynikają z jego własnych wzorów przy poprawnem przejściu do granicy.

F r o b e n i u s wychodzi z prostej myśli zasadniczej, że układ spółczynników formy dwuliniowej przedstawia podstawienie oznaczone pojedyńczego szeregu zmiennych. To pozwala mu uważać przekształcenia form dwuliniowych za „zestawienia“ podstawień i zbudować na tej zasadzie płodny algorytm, którego działania są tem samem, czem są pewne odznaczające się prostotą gatunki mnożenia liczb nadurojonych (lub „rozciągłych“). Stąd wypływają kryterya dla takiego podstawienia, które formę przekształca na samą siebie. Jeżeli forma żądana jest ogólna, t. j. o nieznikającym wyznaczniku, wtedy [27]) dzielniki elementarne charakterystycznej funkcyi podstawienia muszą parami być jednego stopnia i znikać dla wartości wzajemnych (wyjąwszy wartość $\pm 1$). Przeciwnie, jeżeli wyznacznik formy znika [28]), to — gdy $m$ oznacza stopień najwyższy nieznikających wyznaczników — funkcya charakterystyczna musi być podzielną przez funkcyę w z a j e m n ą $m$-go stopnia.

Gdy w ten sposób określono w zupełności warunki równoważności, można już było zastosować za pomocą zręcznego przejścia do granicy wzory C a y l e y a - H e r m i t e'a do spółczynników tych podstawień we wszystkich przypadkach wyjątkowych [29]).

Godne uwagi zastosowanie, które poczynił F r o b e n i u s do nauki o układach liczb nadurojonych, zaprowadziłyby nas zbyt daleko; pomijamy też pokrewne badania L i p s c h i t z a i K r o n e c k e r a [30]) nad związkiem wewnętrznym pomiędzy kwaternionami (i bikwaternionami) H a m i l t o n a i odpowiedniemi podstawieniami ortogonalnemi.

### b) *Równoważność form różniczkowych. Zagadnienie Pfaffa.*

Powiemy tu o podanem przez Frobeniusa zastosowaniu przekształcenia form dwuliniowych do tak nazwanego zagadnienia Pfaffa, a stanowiącem godny uwagi przykład na to, w jaki sposób badanie niezmienników grup nieskończonych, należące właściwie do teoryi funkcyi, daje się przy dogodnych okolicznościach sprowadzić do badania czysto-algebraicznego niezmienników grupy rzutowej. Przy zagadnieniu Pfaffa idzie o poznanie, czy i kiedy dwa dane wyrażenia różniczkowe liniowe $n$-wyrazowe mogą być przekształcone jedno na drugie, jeżeli zmienne poddajemy „ogólnym przekształceniom punktowym.“ Frobenius pokazuje najprzód, że przy założeniu możliwości tego przekształcenia, pewien układ, składający się z formy dwuliniowej znakozmiennej i formy liniowej, przechodzi równocześnie za pomocą pewnych przekształceń kongruentnych (liniowych) na inny układ podobny; przytem spółczynniki form jakoteż i podstawień, lubo zależą od zmiennych zagadnienia, odgrywają rolę zwyczajnych stałych. Okazuje się także, że i odwrotnie, samo spełnianie się związków algebraicznego przekształcenia pociąga już za sobą spełnienie warunków całkowalności. Stąd idzie głębsze (ze stanowiska teoryi form) wniknięcie w charakter związków algebraicznych, polegające na tem, że wymagają one tylko równości niezmiennika całkowito-liczbowego $p$ dla obu par form; jest to twierdzenie, które na krótko przedtem udowodnił był Lie przy pomocy teoryi grup. Charakterystyczny niezmiennik $p$ jest, jak to wykazuje Frobenius, liczbą funkcyj niezależnych, występujących w postaci „kanonicznej“ wyrażenia różniczkowego Pfaffa.

Z pytaniami, poruszonemi przez Frobeniusa, wiążą się badania Stickelbergera[31]) nad stanowiskiem, które zajmują podstawienia ortogonalne i wogóle podstawienia, nie zmieniające formy oznaczonej (kwadratowej), względem nowego Weierstrass'owskiego punktu widzenia. Przez wprowadzenie odpowiedniej normalnej formy trygonometrycznej dla podobnych podstawień dochodzi Stickelberger do prostego wyniku, że funkcya charakterystyczna tych podstawień posiada jedynie dzielniki elementarne; że skutkiem tego podstawienie takie jest już zupełnie oznaczone przez podanie jego funkcyi charakterystycznej. Stickelberger podał nadto cenne dopełnienie[32]) do Weierstrass'owskiej redukcyi gromad form dwuliniowych, wyjaśniwszy, że można zawsze uniknąć ewentualności, przy której znikają mianowniki spółczynników, zachodzących w formie normalnej, przez co ta forma mogłaby się stać iluzoryjną.

Ważne zadanie rozciągnięcia teoryi Frobeniusa o przekształceniach kongruentnych form kwadratowych na same siebie do dowolnie utworzonych form dwuliniowych, pozostawało jeszcze w stanie niedoskonałości. Dopiero w czasach najnowszych Voss [33]) udoskonalił metody do tego stopnia, że potrzebne procesy pomocnicze dają się wykonać w sposób wymierny. Opierając się na Kroneckerowskiem pojęciu formy przyłączonej, sprowadził on to zadanie do prostszego, mianowicie do przekształcenia „kongruentnego" pewnych gromad form dwuliniowych jednych na drugie; przez co udało mu się układ związków przekształceń kwadratowych co do spółczynników formy pierwotnej zastąpić układem liniowym, i tym sposobem łatwo poznać, dlaczego obie klasy form symetrycznych i znakozmiennych są wyróżnionemi u poprzednich badaczy, zwłaszcza u Frobeniusa. Wzory ostateczne mają wyraźną analogię z wzorami Cayley'a-Hermite'a.

Aby od jednego znalezionego podstawienia przejść do wszystkich pozostałych z tą samą własnością, należy znaleść wszystkie podstawienia „przemienne." Zadanie to rozwiązał już był Frobenius przy pomocy swego algorytmu [34]).

I stanowisko formy normalnej Kroneckera i Christoffela wśród całej teoryi teraz występuje wybitnie. Zresztą należy zauważyć, że jądro postępowania, użytego przez Vossa, tkwi już w dawniejszej jego pracy [35]) o podstawieniach ortogonalnych, która wyszła prawie jednocześnie z wielką rozprawą Frobeniusa w r. 1877. Dalszą zasługą Vossa stanowi to, że w pojedyńczej tożsamości wyznacznikowej [36]) odkrył wspólne źródło szeregu poczęści głęboko tkwiących twierdzeń o dzielnikach elementarnych, które podali Frobenius, Siacci, Stickelberger i Stieltjes.

Wspomnieliśmy już wyżej o polemice pomiędzy Kroneckerem i Jordanem z r. 1874. Jordan musiał wtedy uznać zasadność zarzutów mu uczynionych co do rzeczy głównej. Później podjął jeszcze raz ten sam przedmiot i ogłosił pierwszą część swoich studyów [37]) w r. 1888 w pracy o przekształceniu form kwadratowych samych na siebie. Podział form na klasy i podklasy, uwarunkowany przez dzielniki elementarne funkcyi charakterystycznej, przenosi on tu na same podstawienia. Dla tych ostatnich pozyskuje na końcu parę najprostszych typów kanonicznych; należące zaś do nich formy kwadratowe buduje explicite a posteriori. Uderza tu nienależyte uwzględnienie prac obcych.

Można powiedzieć, że teorya równoważności form dwuliniowych i kwadratowych, jak to pokazuje nasz wykład, zawdzięcza dzisiejsze swoje wydoskonalenie prawie wyłącznie dzielności badaczy niemieckich.

### *c). Formy kanoniczne. Charakter grupowy przedstawień.*

W wykładzie powyższym musieliśmy pozostawić na uboczu pewne zadania specyalniejsze. Takiem jest np. zadanie o kanonizowaniu formy, które samo przez się ma ważne znaczenie, lecz ustępuje na plan dalszy, skoro przedewszystkiem mamy na widoku własności niezmiennicze stosowanych podstawień.

Należą tu także: uproszczenie i uogólnienie przez Gundelfingera [49]) metody Jacobi'ego-Plückera, służącej do zamiany formy kwadratowej na sumę kwadratów; dalej szereg dowodów prawa bezwładności Sylvestera-Jacobi'ego [50]); dokładniejsze badanie zależności [51]) pomiędzy związkami, które muszą być spełnione, aby forma kwadratowa o $n$ zmiennych dała się przedstawić jako suma mniej niż $n$ kwadratów, oraz różnorodne sformułowanie tych związków; wyrażenie spółczynników kanonicznych w zamkniętej formie wyznacznikowej [52]); i inne podobne.

Niechaj mi będzie wszakże wolno zwrócić jeszcze uwagę na pewien punkt donioślejszego znaczenia.

Jakkolwiek w cytowanych pracach stosowano implicite charakter grupowy podstawień, które pozostawiają bez zmiany formę kwadratową lub dwuliniową, to wszakże jesteśmy jeszcze bardzo dalecy od organicznego wcielenia zasady teoryi grup i przekształceń do omawianej przez nas teoryi. Do tego przedewszystkiem byłoby koniecznem zupełne zbadanie podgrup, zawartych w grupie takiej i spożytkowanie tychże dla form.

Co do pierwszego, to w najnowszym czasie Werner [53]) podał dla utworów kwadratowych oznaczenie największych podgrup; przedtem zaś Lie [54]) traktował był już niektóre przypadki. Są to grupy przekształcające „punkt,“ albo „rozmaitość płaską“ (którą przedstawia formy przyrównana do zera) utworu zasadniczego same na siebie. Killing [55]) na innej drodze uzasadnił to twierdzenie.

W ogólnej teoryi Liego największe znaczenie ma ta grupa („trójwyrazowa“), pozostawiająca niezmienną formę kwadratową o trzech zmiennych. Stosownie do tego, czy ta grupa jest zawarta lub nie jako podgrupa w pewnej grupie przekształceń o $n$ ($\geqq 3$) zmiennych, rozpadają się one na dwie różne istotnie klasy. Podział ten, jak to pokazali Engel [56]) i Killing [57]), zgadza się z dawniej już przez Liego [58]) podanym (i do całkowania równań różniczkowych zastosowanym) podziałem na grupy „całkowalne“ i „niecałkowalne.“

Scheffers [59]) wskazał zastosowanie tej teoryi do układów nadurojonych, dla których zakłada się istnienie prawa łączności, a wyłącza prawo przemienności w mnożeniu.

## B. Formy dalsze.

### *a). Przekształcalność liniowa form jednych na drugie.*

Clebsch[60]) (1810) pierwszy postawił pytanie, czy równość niezmienników bezwzględnych, konieczna według Aronholda, jest zarazem zawsze wystarczającą, by dwie formy dane *) dały się przekształcić liniowo jedna na drugą; jeżeli zaś nie, to jakie prócz tego spełniać się jeszcze muszą inne warunki? W istocie, można podać proste przykłady [61]), stwierdzające niedostateczność pierwszego przypuszczenia. Środek do bliższego zbadania tej kwestyi wskazało typowe przedstawienie form, w którem spółczynniki są już same niezmiennikami. Wtedy bowiem widać wprost, że gdy dwie formy dają się za pomocą podstawienia liniowego sprowadzić do tej samej postaci typowej, to istnieć też musi podstawienie, które umożliwia przejście jednej formy na drugą. Będzie więc szło o to, aby oznaczyć granicę, aż do której można osiągnąć przedstawienie typowe, o jakiem mowa. Okazuje się, że równoważność dwu form dwójkowych (równego rzędu) zachodzi zawsze wtedy, gdy (oprócz równości niezmienników bezwzględnych) istnieje za każdym razem para spółzmienników równych i niezależnych, liniowych lub kwadratowych, stosownie do tego, czy rząd form był nieparzysty lub parzysty [62]).

Droga ta wszakże nie okazuje się właściwą do otrzymania układu warunków, tak koniecznych, jak i dostatecznych, rozwiązalności zadania; zresztą dotychczasowe wiadomości nasze o typowych postaciach form wyższych są jeszcze bardzo skromne.

Bezpośrednie ujęcie tego zagadnienia daje Aronholdowska metoda badania równoważności, i dlatego następni badacze tego zagadnienia szli prawie wszyscy za Aronholdem.

Przedewszystkiem należało otrzymać same niezmienniki bezwzględne na drodze wprost algebraicznej, bez pomocy równań różniczkowych. Uczynił to Gram[63]) (1874) sposobem prostym, przez wysunięcie na plan główny charakteru grupowego podstawień, zmieniających jedne na drugie formy, tylko do jednej i tej samej należące klasy, podobnie jak to dawniej z wielkiem powodzeniem przeprowadził był Gauss dla podstawień całkowito-liczbowych w zastosowaniu do form kwadratowych.

*) Odwracamy tu uwagę od teoryi form kwadratowych (i dwuliniowych).

Gram badał najprzod rugowniki Aronholda, utworzone ze związków między przekształceniami dla pary form $F$, $F'$, następnie dla drugiej pary $F$, $F''$; po wyrugowaniu spółczynników formy $F$ z tego podwójnego układu związków, wnosi bezpośrednio o równości niezmienników bezwzględnych dla form $F'$ i $F''$. By odpowiedzieć na pytanie odwrotne, uważa on pojedyńcze kolumny spółczynników podstawienia za samodzielne układy zmiennych i ze względu na nie poddaje formy dane procesom biegunowym. Dochodzi wtedy do twierdzenia, że każdy niezmiennik i spółzmiennik tych form tworzy się w sposób całkowito-wymierny z takich utworów biegunowych. Wynika stąd następujące kryteryum zupełne przekształcalności wzajemnej dwóch układów form: równość niezmienników bezwzględnych i znikanie tożsamościowe tych samych spółzmienników.

To nie posunęło wszakże pytania ważnego dla zastosowań: w jakim zakresie dają się wydzielić te klasy form, dla których sama równość niezmienników bezwzględnych wystarcza już do określenia równoważności?

Tem pytaniem zajmuje się bliżej Christoffel w r. 1881 [64]). Posługując się podobnie jak Gram „zasadą równoważności“ Gaussa, wnika on głębiej w oddzielne stadya procesów eliminacyjnych przez to, że nie czyni z góry żadnych założeń o postaci równań ostatecznych. Zadanie formułuje ściślej w ten sposób, że szuka wszystkich form równoważnych z daną. Aby módz wypowiedzieć pewne własności równań ostatecznych dla spółczynników nieznanych, ruguje spółczynniki podstawienia w jakimkolwiek porządku, z tem wszakże ograniczeniem, aby dla każdego z nich bieg eliminacyi był „systematycznym“, t. j. raz na zawsze unormowanym. W ten sposób można wskazać, które z tych nieznanych spółzmienników występują w warunkach równoważności, oraz które z pozostałych spółczynników podstawienia—w równaniach ostatecznych. Zależy to wszystko od liczby tych ostatnich, która, jak to udowodnić się daje, jest niezależna od porządku, w którym wykonywają się pojedyńcze eliminacye. Liczba ta osiąga w ogólności pewną wartość najwyższą, mianowicie $n^2$ ($n$ jest liczba zmiennych), co według Aronholda zachodzi z pewnością, gdy wyróżnik uważanej formy jest różny od zera. Wyłączywszy wyraźnie wszystkie formy, dla których ta wartość najwyższa nie bywa osiąganą, dowodzi Christoffel, że równoważność dwu form zależy w rzeczy samej jedynie od równości obustronnych niezmienników bezwzględnych, i wywodzi równocześnie nowym sposobem ich liczbę.

Byłoby pożądanem zbadać ze stanowiska teoryi niezmienników jądro tego zadania Christoffela. Na pewno powiedzieć można, że spółczynniki podstawienia nie powinny zawierać parametrów dowolnych, t. j. że formy dane nie zezwalają na gromady przekształceń na same siebie, a nadto wszystkie niezmienniki jednej z form powinny znikać [65]).

V e l t m a n n spróbował także zmodyfikować A r o n h o l d o w y proces eliminacyi w ten sposób, aby z równości niezmienników różniczkowych można było odwrotnie wywnioskować prawdziwość związków między przekształceniami; musiał wszakże w tym celu pominąć całe klasy form, wedle subjektywnego uznania, którego wewnętrzną istotę trudno jest zrozumieć.

Zagadnienie o równoważności wtedy dopiero będzie mogło być zadawalająco rozwiązane, gdy z punktu widzenia teoryi niezmienników pozyskamy dostateczną znajomość różnorodnych zniekształceń form[66]).

Z kolei należałoby teraz zbadać te szczególne przekształcenia, które przekształcają formy dane na pewne postaci kononiczne, zbudowane dla użytku praktycznego; ponieważ wszakże w rozwoju historycznym tego przedmiotu daleko więcej uwzględniano pytanie o występujących przy tem niewymiernościach, aniżeli o przekształceniach, przeto omówienie tej kwestyi odkładamy do innego miejsca (II, B).

---

### *b). Formy z liniowemi przekształceniami na siebie same. Związek z teoryą równań algebraicznych i teoryą równań różniczkowych o całkach algebraicznych.*

---

W niezmiennikach formy lub większej liczby form odkryto proste funkcye spółczynników, zmieniające się przy pewnych grupach przekształceń liniowych tylko o czynnik, zależny od spółczynników podstawienia. Czynnik ten można zresztą uczynić równym jedności.

Jakkolwiek niezmienniki te są natury specyalnej ze względu na ich argumenty—bo winny czynić zadość pewnym równaniom różniczkowym liniowym cząstkowym—to wszakże ogólność form, pierwotnie danych, pozwoliła zbudować daleko sięgające metody tworzenia niezmienników.

Jeżeli oderwiemy pojęcie niezmiennika od podstawy, którą stanowią formy pierwotne, i zapytamy, jakie formy o pewnej oznaczonej liczbie argumentów przechodzą same na siebie przy pewnych podstawieniach, stosowanych do argumentów, albo — co w istocie wychodzi na to samo — jeżeli szukamy wszystkich możliwych grup podstawień $n$ zmiennych, oraz należących do nich niezmienników (całkowitych i wymiernych), to musimy wtedy obejrzeć się za nowemi środkami pomocniczemi.

W poniższym wykładzie ograniczymy się na skończonych grupach podstawień, zwanych grupami G a l o i s'a[67]), albowiem grupy z parametrami dowolnemi nie były dotąd prawie badane[68]).

Najbliższe formy tego rodzaju, formy dwójkowe, zostały znalezione przy pomocy metod teoryi funkcyj. Doszedł do nich H. A. S c h w a r z[69]), zajmując się pytaniem o całkach algebraicznych równania różniczkowego hypergeometrycznego, które jest liniowem i drugiego rzędu. Iloraz $s$ dwóch rozwiązań szczególnych $y_1$, $y_2$ tego równania czyni zadość równaniu różniczkowemu rzędu 3-go[70]); skutkiem tego półpłaszczyzna dodatnia zmiennej niezależnej $x$ odwzorowuje się z podobieństwem (conform)[71]) na trójkącie $S$, złożonym z łuków kołowych (bez punktu rozgałęzienia wewnątrz), który może być analitycznie przedłużony po za każdy z trzech boków za pomocą „powtórzenia symetrycznego." Liczba powstających w ten sposób obszarów musi być skończoną, jeżeli $s$ ma być funkcyą algebraiczną zmiennej[72]). Pytanie zatem, do którego doszedł S c h w a r t z: „znaleść wszystkie trójkąty kuliste, których powtórzenia symboliczne na powierzchni kuli prowadzą tylko do skończonej liczby trójkątów kulistych różnego położenia"—pytanie to jest implicite równoważne temu, o którem mówimy[73]). S c h w a r t z rozwija odpowiednie formy i podaje także związek, zachodzący pomiędzy dwoma spółzmiennikami wymiernemi i forma pierwotną[74]).

Nie znając pierwotnie[75]) pracy S c h w a r z a, doszedł K l e i n wprost do oznaczenia grup skończonych dwójkowych i liniowych oraz ich form. Podstawą jego rozważania jest związek, który daje się ustanowić pomiędzy R i e m a n n o w s k ą interpretacyą zmiennej zespolonej $z$ na powierzchni kuli z jednej strony[76]) a znaczeniem geometrycznem przekształcenia liniowego z drugiej. Przekształcenia te przyporządkowują się jednoznacznie do „ruchów" rzeczywistych przestrzeni[77]).

Grupy skończone takich ruchów można otrzymać za pomocą bezpośredniego poglądu[78]). Sprowadzone do formy kanonicznej, są to pospolite powtórzenia obrotu kuli około jednej oznaczonej średnicy (grupa cykliczna), obok obrotów, powstających tu przez przemianę obu końców średnicy (grupa dwuścienna). Temi klasami grup nie będziemy się tu zajmowali. Dalej idą grupy obrotów, sprowadzających pięć brył foremnych (platońskich) do przystania, każdą do siebie samej; można tu ograniczyć się na czworościanie, ośmiościanie (lub sześciościanie) i dwudziestościanie (lub dwunastościanie). Te trzy grupy obejmują odpowiednio $n$=12, 24, 60 obrotów.

Idzie o zbudowanie „zupełnego układu form" takiej grupy, t. j. takich form, aby wszystkie inne (pozostające niezmiennemi przy podstawieniach grupy) były funkcyami całkowitemi wymiernemi tamtych. Z prostej zasady, że „spółzmienniki przechodzą same na siebie przy pomocy tych samych przekształceń liniowych, jak i forma zasadnicza," wynika prawo: „Jeżeli zastosujemy działania jednej z trzech grup do każdej z dwóch dowolnych wartości początkowych (t. j. do punktów kuli), otrzymamy za każdym razem $n$ wartości, które są pierwiastkami dwóch równań $\pi=0$, $\pi'=0$. Wtedy w gromadzie liniowej $\pi+\varkappa\pi'$ znajdują się zawsze trzy (i tylko trzy) zupełne potęgi form rzędu niższego $f$, $H$, $T$, które to formy (po dobraniu jedynego niezmiennika) tworzą układ zupełny grupy.

Pomiędzy odpowiedniemi potęgami ilości $f$, $H$, $T$ zachodzi związek liniowy; przytem $H$ jest spółzmiennikiem Hessego formy $f$, $T$ zaś wyznacznikiem funkcyjnym obu.

Tym sposobem w przypadku „grupy dwudziestościennej“ otrzymujemy najprzód szereg form 60-go rzędu; zawiera ona formy 12, 20 i 30 go rzędu: $f_{12}$, $H_{20}$, $T_{30}$ odpowiednio pięciokrotnie, trójkrotnie i dwukrotnie liczone; $f=0$ przedstawia wierzchołki dwudziestościanu; $H=0$ wierzchołki dwunastościanu; wreszcie $T=0$ środki krawędzi obu ciał. W dwóch pierwszych przypadkach przedstawiają analogiczne $f_4=0$, $f_6=0$ wierzchołki czworościanu i sześcianu.

Trzy formy $f$ posiadają, jak to okazuje łatwy rachunek, tę godną uwagi własność, że ich czwarte „nasunięcie“ względem samych siebie, $(f, f)^4$, znika tożsamościowo; odwrotnie też, ta własność oraz rzęd 4, 6, 12 (rozumie się przy nieznikającym wyróżniku) charakteryzuje te formy w zupełności [79]).

Możemy tu dotknąć zaledwie wewnętrznego związku, zachodzącego pomiędzy „równaniem dwudziestościanu“ $f_{12}=0$ a ogólnemi równaniami rzędu 5-go. Zresztą jest prawie widocznem geometrycznie, że równanie $f_{12}=0$ posiada rozwiązujące rzędu 5-go i 6-go. Trzydzieści punktów $T=0$ stanowi właśnie wierzchołki pięciu foremnych ośmiościanów, których formy $t$ są pierwiastkami równania rzędu 5-go. Z drugiej strony 12 wierzchołków dwudziestościanu rozkłada się na 6 par wierzchołków przeciwległych i jeżeli $\varphi$ jest formą takiej pary, to $\varphi^2$ zależy od równania rzędu 6-go.

Okazuje się, że związki pomiędzy dwoma ostatniemi równaniami zgadzają się ze związkami w znanych badaniach Kroneckera, Hermite'a i Brioschi'ego nad ogólnem równaniem rzędu 5-go.

Dalsze rozwinięcie tego przedmiotu w rękach Kleina doprowadziło do tego, że dwudziestościan stał się punktem środkowym rozgałęzionej teoryi równań rzędu piątego [80]).

Wspomnimy obecnie o związku, zachodzącym pomiędzy grupami skończonemi podstawień i ich formami, a równaniami różniczkowemi liniowemi.

Całki ogólne równania różniczkowego liniowego rzędu $n$-go o spółczynnikach, będących funkcyami wymiernemi, dają się wyrazić liniowo i jednorodnie za pomocą $n$ całek szczególnych, liniowo niezależnych: $y_1$, $y_2 \ldots y_n$. Jeżeli zmienna obiega drogi zamknięte około punktów osobliwych równania, wtedy ilości $y$ podstawiają się liniowo ze spółczynnikami stałemi [81]); te podstawienia stanowią „grupę“ równania. Jeżeli równanie posiada tylko całki algebraiczne, to grupa jest skończoną, i odwrotnie. Taką jest podstawa pracy Fuchsa z r. 1875 [82]), z którą wiążą się dalsze badania Jordana, Kleina, Brioschi'ego. Fuchs ma przedewszystkiem tę ważną zasługę, iż odkrył głębszy związek między należącemi do grupy formami $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$, zachodzący wewnątrz teoryi równań różniczkowych liniowych.

Jeżeli równanie różniczkowe, dane u Fuchsa w postaci zredukowanej—niechaj niem będzie w szczególności równanie rzędu drugiego—ma posiadać tylko pierwiastki algebraiczne, to muszą istnieć pewne formy $f(y_1, y_2)$, które są pierwiastkami funkcyi wymiernej. Te formy „pierwsze" (Primformen) zlewają się z formami $\pi + \varkappa\pi'$ grupy równania (patrz wyżej); ich spółzmienniki są znowu formami pierwszemi [83]. Formy pierwsze rzędu najniższego $n$ wyróżniają się tem, że wszystkie ich spółzmienniki rzędu niższego od $n$ znikają tożsamościowo [84]. Stąd można wyprowadzić wniosek, że rząd $n$ może przyjmować tylko ograniczoną liczbę wartości; Fuchs znajduje, że możliwemi wartościami są jedynie $n$=2, 4, 6, 8, 10, 12. Podane środki pomocnicze pozwalają dla każdego danego konkretnie równania różniczkowego rzędu 1-go określić kroki, których potrzeba użyć celem rozwiązania pytania o całkach algebraicznych.

Pytanie odwrotne o ustanowieniu wszystkich takich typów równań różniczkowych rzędu 2-go podjął Klein [85] i doprowadził je do pewnego zakończenia. Przedewszystkiem, opierając się na poprzednich swoich pracach, mógł odrazu napisać pięć możliwych gatunków równań całkowych, którym powinien zadość czynić iloraz $\eta$ dwóch rozwiązań algebraicznych szczególnych $y_1$, $y_2$. Stąd przeszedł do odpowiednich pięciu możliwych równań różniczkowych dla funkcyi $\eta$. Wystąpiło wtedy godne uwagi zjawisko, że te ostatnie równania powstają bezpośrednio z równania rzędu 3-go, zbadanego w przypadku hypergeometrycznym przez Schwarza, jeżeli (po podstawieniu odpowiednich wartości liczebnych za trzy zachodzące tam stałe dowolne) przemienimy argument $x$ na dowolną funkcyę wymierną tego argumentu [86]. Przytem okazuje się także, że tablica Fuchsa możliwych „form pierwszych" najniższego rzędu zawiera w istocie przypadki zbyteczne [87].

Brioschi oryginalnym sposobem obliczył niezmienniki i spółzmienniki form pierwszych przez wprowadzenie form stowarzyszonych Hermite'a [88].

Gordan, pierwszy, przy pomocy zasad czysto-algebraicznych badał formy dwójkowe z podstawieniami liniowemi na same siebie [89]. Przedewszystkiem podstawienie dwójkowe $S$ sprowadza do postaci normalnej [90], w której obok formy kwadratowej, określającej oba zlewające się elementy (Coincidenzelemente) podstawienia $S$, występuje jeszcze kąt zmienny $\varphi$: argument podstawienia $S$. Wtedy wprost $n\,\varphi$ jest argumentem podstawienia $S^n$; jeżeli $S$ ma należeć do grupy skończonej, to $n\,\varphi$ musi być wielokrotnością kąta $\pi$.

Jeżeli mamy dwa podstawienia $S$ i $T$ z argumentami $\varphi$, $\psi$ i jeżeli $\Phi$, $\Psi$ są argumentami podstawień $ST$ i $T^{-1}S$, złożonych z tamtych, to pomiędzy temi czterema kątami zachodzi prosty związek [91])

$$\cos \Phi + \cos \Psi = \cos (\varphi + \psi) + \cos (\varphi - \psi).$$

Na podstawie tego związku oraz podziału podstawień według wielkości ich peryodów, zadanie pierwotne sprowadza się do zadania z teoryi liczb [92]), a mianowicie do rozwiązania równania

$$1 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 = 0$$

za pomocą kątów wymiernych $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$.

Badanie dalsze zależy co do swej istoty od twierdzenia Kroneckera o nieprzywiedlności uogólnionego równania podziału koła [93]). Wynik badania stanowi oczywiście pięć grup Kleina, które przybierają tu postać kanoniczną, bardzo dogodną w użyciu.

W następującej, tuż po poprzedniej, rozprawie przyjmuje Gordan [94]) za podstawę własność form pierwszych najniższego rzędu, dostrzeżoną przez Fuchsa, a polegającą na tem, że wszystkie ich spółzmienniki rzędu niższego od $n$, znikają tożsamościowo. Najprzód, przy pomocy należącego tu układu form, wykazuje, że formy $f_6$, $f_{12}$ ośmiościanu i dwudziestościanu mają tę własność. Trudne do udowodnienia twierdzenie odwrotne, mianowicie, że formy $f$ są jedynemi swego rodzaju, wyprowadza z własności tych spółz mienników najniższego rzędu, których ostatnie nasunięcie znika tożsamo ściowo wraz z formą $f$.

Wreszcie Wedekind i Brioschi [95]) przez bezpośrednie porównanie spółzmienników wykazali, że zauważone przez Kleina tożsamościowe znikanie czwartego nasunięcia formy dwójkowej na samą siebie, jeżeli odwrócimy uwagę od form $f_n$ z $n-1$-krotnym czynnikiem, prowadzi wyłącznie po form $f_4$, $f_6$, $f_{12}$ czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu [96]).

C. Jordan podjął ogólne zagadnienie o grupach skończonych podstawień liniowych dla $n$ zmiennych ze stanowiska teoryi podstawień [97]). Niechaj $G$ będzie taką grupą; zawiera ona z pewnością podstawienia $s$, które zmieniają zmienne (jednorodne) tylko o czynniki, będące pewnemi pierwiastkami z jedności. Po kolei przekształca za pomocą wszystkich podstawień $G$ wszystkie podgrupy $F$ grupy $G$ przemienne z podstawieniem $s$. Pomiędzy rzędami wszystkich tych podgrup $F$ i rzędami grupy $G$ zachodzi równanie diofantowe. Dyskusya tego równania dla $n=2$ daje znowu pięć znanych typów. Lecz już w najbliższym przypadku $n=3$ należy rozpatrzeć oddzielnie nadzwyczaj wielką liczbę przypadków. Nakoniec pozostaje 11 różnych typów jako rzeczywiście istniejących; pomiędzy niemi jest tylko jeden istotnie nowy, gdyż pozostałe albo są pospolitemi, albo należą w rzeczywistości do grup o 2 lub 1 zmiennej [98]). Wspomniana nowa grupa jest tak nazwaną grupą Hessego $G_{216}$ (o 216 podstawieniach); własność jej[99]), zbadana najprzód przez Hessego, polega na tem, że pozostawia bez zmiany konfiguracyę czterech trójkątów zwrotnych krzywej płaskiej trzeciego rzędu.

Skutkiem błędu rachunkowego pominął Jordan inną, również istotnie nową grupę $G_{168}$ (o 168 trójkowych podstawieniach), które odkrył Klein przy badaniu przekształceń 7-go rzędu funkcyj eliptycznych [100]). Odpowiednia rozwiązująca Galois'a (168-go rzędu) posiada mianowicie grupę 168 podstawień, gdyż jeden jej pierwiastek $\eta$, uważany za funkcyę stosunku $\omega$ peryodów, pozostaje właśnie niezmiennym przy tych 168 podstawieniach, które są kongruentne z tożsamością względem mod. 7. Wielkość $\eta$ jest związana z niezmiennikiem bezwzględnym $J$ całki eliptycznej równaniem (168-go rzędu względem $\eta$), które jest rodzaju trzeciego i zezwala również na 168 przekształceń jednoznacznych na samo siebie. Równanie to można znowu odnieść jednoznacznie do równania krzywej normalnej 4-go rzędu: $f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1 = 0$, przechodzącej na samą siebie za pomocą grupy $G_{168}$ kolineacyj trójkowych, izomorficznej z grupą wyżej wspomnianą [101]). Układ zupełny formy $f$, a zarazem grupy, składa się oprócz $f$, jeszcze z trzech spółzmienników rzędów: 6, 14, 21, pomiędzy któremi zachodzi syzygia.

Geometrycznie łatwo widzieć, że rozwiązująca Galois'a posiada rozwiązującą 7-go i 8-go rzędu. Z jednej strony 56 punktów styczności 28 stycznych podwójnych krzywej $f$ można wydzielić za pomocą 7 stożkowych [102]), zależących od równania rzędu 7-go. Następnie 24 styczne zwrotne krzywej $f$ połączyć można w 8 trójboków, określonych równaniem rzędu 8-go[103]). Odwrotnie, każde równanie rzędu 7-go z grupą o 168 podstawieniach można sprowadzić do przypadku powyższego, a więc rozwiązać je za pomocą funkcyj eliptycznych, jak to najprzód pokazał Klein, a następnie szerzej rozwinął Gordan[104]).

Grupy skończone podstawień czwórkowych (i wyższych) nie są jeszcze wszystkie znanemi. Niedawno Klein na różnych drogach napotkał kilka ważnych przykładów grup czwórkowych. Dwie takie grupy stanowią jądro metody rozwiązania, podanej przez Kleina dla równań ogólnych rzędu 6-go i 7-go[105]).

Wyobraźmy sobie najprzód równania, sprowadzone do „formy głównej“, w której spółczynniki drugiego i trzeciego wyrazu są równe zeru, w której zatem suma pierwiastków oraz suma kwadratów pierwiastków jest zerem. Wtedy pierwiastki $x$ można uważać za spółrzędne liniowe prostych pewnego oznaczonego kompleksu liniowego, albo też prostych zwyczajnej przestrzeni. Jeżeli teraz w przypadku 6-go rzędu poddamy pierwiastki [80]) wszystkim 6! przemianom, a w przypadku 7-go rzędu ½.7! przemianom parzystym, to spółrzędne punktów przestrzeni doznają tyluż przekształceń liniowych, te zaś ostatnie tworzą obie skończone grupy, o które idzie. Równania dane sprowadza się do „układów równań,“ należących do tych grup.

Trzecią ważną grupę (czwórkową) odkrył Klein przy badaniach liniowo-geometrycznych [106]. Jeżeli proste przestrzeni odniesiemy do sześciu kompleksów zasadniczych $x=0$ (gdzie $\Sigma\, x^2=0$), to każda z 6! przemian ilości $x$ i każda z 64 zmian znaku tych ilości daje kolineacyę lub dualistyczne przekształcenie przestrzeni. Wszystkie wynikające stąd przestawienia stosunków ilości $x$ wytwarzają grupę skończoną o 32.6! podstawieniach, która jest „rozszerzeniem" grupy, uważanej przy równaniach rzędu 6-go. Podgrupa tej grupy o 16.6! kolineacyach zlewa się z grupą[107], której podlegają „moduły," wprowadzone przez Borchardta dla funkcyj hyperliptycznych rodzaju 2 przy liniowem przekształceniu peryodów. Posiada ona grupę wyróżnioną o 64 podstawieniach. Maschke podał układ zupełny form tej grupy [108].

Jeżeli moduły Borchardta można było uważać za funkcye Jacobi'ego rzędu 2-go, to istnieją i takież funkcye rzędu 3-go, zachowujące się analogicznie, jak to spostrzegł był Klein, a następnie rozwinął Witting [109]. Prowadzą one do nowej grupy czwórkowej o 25920 kolineacyach. Maschke dowiódł, że grupa ta zawiera się znowu w grupie o podwójnej liczbie podstawień i dla tej ostatniej (nie zawierającej się już w żadnej grupie obszerniejszej) obliczył układ zupełny [110]. Można to było uskutecznić przez powrót do grupy $G_{216}$ Hessego i przyrównanie do zera pewnej funkcyi czterech zmiennych.

Grupa, o której mówimy, jest z jednej strony izomorficzną z grupą podziału potrójnego funkcyi hypereliptycznej rzędu pierwszego; z drugiej zaś strony z tem równaniem rzędu 27-go, od którego zależy 27 prostych powierzchni rzędu trzeciego [111].

Kończąc o skończonych grupach podstawień, wspomnimy jeszcze odnośnie do grup o parametrach dowolnych, o badaniu Maurera, które wiąże się bezpośrednio z pytaniem, poruszonem na początku rozdziału; zasługuje ono na uwagę z powodu swej metody, gdyż ustanawia związek pomiędzy badaniami Liego o „układach zupełnych" pewnych równań różniczkowych a dzielnikami elementarnemi Weierstrassa.

Jeżeli za pomocą pewnego podstawienia forma [112] $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ma przejść tożsamościowo na formę $f(y_1, y_2 \ldots y_n)$, to powstaje przez to układ $S$ równań algebraicznych, któremu czynić winny zadość spółczynniki podstawienia. Pomiędzy utworami nieprzywiedlnemi, określonemi przez układ $S$, znajduje się zawsze jeden [113], zawierający podstawienie tożsamościowe i jemu to odpowiadającą grupę jedynie tu rozważać należy. Według Aronholda tożsamość $f(x) \equiv f(y)$ zamienia się na układ zupełny równań różniczkowych liniowo-niezależnych. Stąd wynika ważny rezultat, że podstawienie, zawierające $m$ parametrów niezależnych, można zestawić z tyluż podstawień „elementarnych," t. j. zależnych od jednego tylko parametru.

Badanie takich grup elementarnych polega na własnościach dzielników elementarnych „wyznacznika zasadniczego“

$$| c_{11}-r,\ c_{12},\ c_{13}\ \dots\ c_{1n} |\ ,$$

gdzie liczby $c$ są określone przez naturę grupy. Istnieją dwa [114]) wyróżnione układy liczb $c$, w których jeden z parametrów zachodzi sposobem wymiernym; wszystkie inne przypadki dają się do tego jednego sprowadzić. Tym sposobem pozyskujemy kryteryum[115]), że forma $f$ powinna czynić zadość $m$ równaniom różniczkowym liniowo-niezależnym postaci

$$\sum_{\lambda}\sum_{\mu} c^{(i)}_{\lambda\mu} \frac{df}{dx_\lambda} x_\mu = 0, \qquad (i=1,2\dots m)\ ,$$

gdzie spółczynniki $c$ są układami wyróżnionemi jednego z dwóch rodzajów. W przypadku niezmienników zwykłych $m$ równa się oczywiście $n^2$, t. j. liczbie dowolnych spółczynników podstawienia [116]).

---

P R Z Y P I S Y.

---

[1]). Math. Ann: XXX, s. 15—29, zwłaszcza str. 17.

[2]). Patrz „Wyznaczniki“ B a l t z e r a. Patrz np. zastosowania do „zagadnienia o małych drganiach“ w pracy P o c k e l s a: „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$.“ Lipsk, 1891, s. 44—50, jako też do zagadnienia o drganiach „przytłumionych“ w dziele R o u t h a: „Dynamics of a system of rigid bodies“ (1890) Part. II.

[3]) Berliner Ber. 1858 s. 207—220. Dalsze rozwinięcie w pracy z r. 1868. Co do liczby rzeczywistych nierównoważnych przekształceń form rzeczywistych, patrz H e n s e l, Journ. f. Math. CXIII, p. 303—317, 1894.

[4]) Str. 19

[5]) Journ. f. Math. LXVIII, s. 273—285, lub Berliner Ber. paźdz. 1866. (Porówn. też rozdział o przekształceniu liniowem funkcyi $\Theta$ w dziele C l e b s c h a i G o r d a n a: „Abelsche Functionen,“ Lipsk, 1866). Pojęcie formy przyłączonej, podano tu na str. 179, pojęcie „formy normalnej,“ na którą można przekształcić każdą dwuliniową, na str. 275.

F r o b e n i u s w dalszym ciągu stosował przekształcenie K r o n e c k e r a do funkcyi $\vartheta$ z wielu zmiennemi, Journ. f. Math. XCV, s. 264 i dalsze (1883). Porówn. W e b e r, Anali. di Mat. (2), IX s. 127 i dalsze (1880) i W i l t h e i s s, Math. Ann. XXVI, s. 127 i dalsze (1886).

[6]) Journ. f. Math. LXVIII, s. 253—272. Twierdzenie wymienione znajduje się na str. 262-ej. Niezmienniki bezwzględne formy dwuliniowej, której obie pary zmiennych są wzajemnemi (dualistycznemi), występują już w rozprawie B o r c h a r d t a, Journ. f. Math. XXX, s. 38; porówn. str. 270—271 (1846).

[7]) Berliner Ber. 1868, s. 310—338. Dzielniki elementarne są wprowadzone na str. 311.

[8]) Porówn. traktowanie tego zadania w rozprawach Stickelbergera, Berlin 1874 i Maurera, Strassburg, 1887, jako też u Ed. Weyera, Prag. Jubiläumsfond der k. böhm. Ges. d. Wiss, 1889, oraz Wiener Monatshefte, 1896, t. I, które to prace opierają się na Cayley'owskiej teoryi macierzy.

[9]) O dzielnikach elementarnych u Sylvestera patrz wyżej str. 18.

Za pomocą dzielników elementarnych zbadał niedawno Frobenius równoważność dwu form kwadratowych dwójkowych, oraz dwu kwadratowo-kwadratowych dwójkowych (Journ. f. Math. CVI, s. 125 do 188, 1890, § 4, 5, 14, porówn. także prace Deruytsa, o których później będzie mowa).

Klein bada bezpośrednio równoważność dwu form dwukwadratowych dwójkowych, oraz jednej takiej formy ze samą sobą za pomocą niezmienników niewymiernych (liczniki i mianowniki sześciu odnośnych stosunków podwójnego podziału). Patrz Klein-Fricke, Modulfunctionen, Lipsk, 1890, §§ 4, 5, 6.

Segre badał przekształcenia liniowe jednoczesne dwu form dwuliniowych na ich „wzajemne" (Batt. G. XXII s. 29 do 33-ej, 1884).

W blizkim związku z badaniami Weierstrassa i Kroneckera jest praca Study'ego, który rozważa własności form dwuliniowych, wynikające z teoryi szeregów zwrotnych i opiera się przytem na układzie niezmienników niewymiernych tych form (Wiener Monatshefte, II, str. 1—32, 1891).

Poincaré i Picard badali równoważność formy dwuliniowej o trzech zmiennych jednorodnych z samą sobą w przypadku, gdy odpowiednie zmienne i spółzmienniki s wielkościami zespolonemi sprzężonemi (C. R. XCVIII, s. 344—352, C. R. XCVIII, str. 416-417, 1884).

Killing zajmuje się geometrycznem zastosowaniem dzielników elementarnych (Rozprawa, Berlin, 1872) do badania przecięć dwu powierzchni rzędu drugiego.

Patrz także Sauvage, Ann. de l'École Normale (3), VIII, str. 285—340, 1991.

[10]) Str. 312, 314, 326.

[11]) Berliner Ber. 1874, str. 60.

[12]) l. c., str. 319.

[13]) Porówn. uwagi o tem Kroneckera w Berliner Ber., 1874, str. 72.

[14]) Do form rzędu wyższego stosowano dotąd przeważnie postępowanie odwrotne; patrz Sylvester w Cambr. and Dublin Math. VI, str. 193.

[15]) Berliner Ber. 1868, str. 339—346.

[16]) Berliner Ber. 1874, str. 59—76, 149—156, 206—232.

[17]) l. c. str. 60.

[18]) l. c. str. 61.

[19]) C. R. grudzień, 1873. Po replice Kroneckera (Berliner Ber., 1874, str 71—76) następują dalsze komunikaty Jordana w Journ. Liouville'a (2), XIX, str. 35—54 i w C. R., marzec 1874. Odpowiedź obszerną i ostateczną pomieścił Kronecker w Berliner Ber. 1874, str. 206—232. W szczególności patrz str. 226. Traktowanie form kwadratowych u Jordana w Journ. Liouville'a (2), XIX, str. 397—422 jest poprawne.

[20]) l. c. str. 156, 211, 212. Co do przekształcenia Jacobi'ego (Journ. f. Math. t. III, str. 265—270), patrz zwłaszcza str. 398 i dalsze.

[21]) Berliner Ber., str. 397—447.

[22]) l. c. str. 410.

[23]) l. c. str. 430. Temi typami są:

1. $$\sum_k x_k y_k ; \quad k=0, 1, \ldots, 2m-1$$

II. $\sum\limits_k (x_k\, y_{k+1} + c y_k\, x_{k+1})$; $k=0, 1, \ldots, 2m-2,\ c^2 \gtreqless 1.$ ;

III. $\sum\limits_k ((-1)^m x_k\, y_{k+1} + (-1)^k y_k\, x_{k+1})$; $k=0, 1, \ldots, 2m-2.$ ;

IV. $c' x_0\, y_0 + \sum\limits_k (x_k\, y_{k-1} + (-1)^k y_k\, x_{k-1})$; $k=1, 2, \ldots, n;\ c' \gtreqless 0.$ ;

[24]) l. c. str. 435—438. Porówn. Sauvage, cyt. $n^o$9.

[25]) Berliner Ber. 1889, str. 1225—1237, 1375—1388, 1890, str. 9—17, 34—44.

[26]) Journ. f. Math. CVIII, str. 1—24, Beilage zum Programm der 4 höheren Bürgerschule zu Berlin, Ostern, 1891.

Rozwinięcie dalsze do form z $n$ zmiennemi wymagałoby uprzedniej znajomości odnośnych układów niezmienników (algebraicznych), dotychczas bardzo niezupełnie jeszcze znanych. Porówn. Mertens: „O niezmiennikach jednej i dwóch form dwuliniowych alternujących,“ Pam. Akad. Krak. t. X, str. 26—56, 1886, oraz „O utworach niezmiennikowych form kwadratowych,“ tamże, t. XII, str. 1—93, 1886.

Rosenow w najnowszej pracy (Progr. der 4 Städt. hoh. Burgërschule, Berlin. Ostern, 1892) podaje jako zastosowanie poszukiwań poprzednich formy normalne dla 472 różnych „klas“ właściwych form dwuliniowych o 10 parach zmiennych przy kongruentnem przekształceniu tychże.

[27]) Journ. Liouv. (2), XIX, str. 347—396.

[28]) Porówn. z poprzedzającemi jeszcze: sprowadzenie formy dwuliniowej przez podstawienia biortogonalne do postaci kanonicznej: Beltrami, Batt. G. XI, str. 89—107 (1873), oraz nowsze prace Cosserata Ann. Toul. III, str. 1—12 i Sylvester C. R. CVIII, str. 651—623, Messenger (2), XIX, str. 1—5, 42—46.

[29]) Porówn. pracę Maurera w Journ. f. Math. CVIII, str. 89—116 (1890), który teoryę niezmienników form zniekształconych przyporządkowuje do pewnych grup przekształceń.

[30]) Journ. f. Math. LXXX, str. 52—72.

[31]) Porówn. dla najprostszego przypadku: Brioschi, Annali di Tort. V, str. 201—206 (1854). Ogólnie, własność wzajemności równania zasadniczego udowodnił Kronecker w 1866 (Journ. f. Math. LXVIII, str. 276).

[32]) l. c., str. 59—61.

[33]) Journ. f. Math. LXXXIV, str. 1—63. Porówn. C. R. LXXXV, str. 131—134. W związku z tem są dalsze prace tegoż autora w Journ. f. Math. LXXXVI, str. 44—71, 146—208 (1879) i tom LXXXVIII, str. 96—117 (1880).

[34]) Journ. f. Math. LXXXIV, str. 331—341; por. Tannery Bull. Darboux XI, str. 221—233 (1876).

[35]) Journ. f. Math. LXXVIII, str. 325—328 (1874).

[36]) l. c. str. 31.

[37]) l. c. str. 32, 35.

[38]) l. c. § 11.

[39]) Lipschitz: „Untersuchungen über die Summen von Quadraten,“ Bonn. 1886 Journ. de Math. (4), II, 373—440 (1886), Berliner Ber. 1890

Kronecker, Berliner Ber. 1890, str. 525—541, 602—607, 691—699, 873—884, 1063—1080; 1375—1388; 1891, str. 9—17, 33—44.

[40]) Journ. f. Math. LXXXII, str. 230—315 (1877). Analogiczne zastosowanie równoważności dwu form kwadratowych znajdujemy już u Christoffela (1870) Journ. f. Math. LXX, str. 46—70, 241—261, który wyznacza równoważność dwóch form różniczkowych

odnośnie do nieskończonych grup punktów na drodze algebraicznej. Lipschitz za pomocą metod rachunku waryacyjnego dochodzi do tego samego wyniku, patrz Journ. für Math. LXX, str. 71—102, 274—287, 288—295; LXII, str. 1—56, oraz uogólnienia do form wyższych.

Porówn. Darboux w Bull. Darboux (2), VI, str. 14—36, 49—68, 1882. Pogląd zasadniczy tej pracy znajdujemy już u Natani'ego. Journ. f. Math. LXXXII, str. 301—328, 1861.

[41]) Morera później zbadał dokładniej ten układ ze stanowiska teoryi form, Atti di Torino XVIII, str. 383—403 (1883).

[42]) Progr. des Polytechnikums Zürich, 1877, str. 1—16.

[43]) Journ. f. Math. LXXXVI, str. 20—43 (1879). Porówn. rozprawę tegoż autora Berlin, 1879.

[44]) Göttinger Nachr., wrzesień (1887), str. 425—433; Münchener Abh. XVII, (1890), str. 3—121.

Voss w Münchener Ber. 1889, str. 175—211 bada w szczególności przekształcenie formy dwuliniowej na siebie samą, przy którem obie pary zmiennych podlegają podstawieniom sprzężonym.

[45]) Voss w Münchener Ber. 1889, str. 283—300 udowodnił to twierdzenie na innej drodze, na której tworzenie wszystkich form sprowadza do przejrzystego procesu, pozwalającego równocześnie na badanie funkcyi charakterystycznej form przemiennych z formą daną.

[46]) Math. Ann. XIII, str. 320—374 (1878).

[47]) Münchener Ber. 1889, str. 329—339.

[48]) Journ. de Math. (4), IV, str. 349—368. Porówn. poprzedzające tę pracę komunikaty w C. R.

[49]) Journ. für Math. XCI, str. 221—237 (1881).

[50]) Patrz np. de Presle S. M. F. Bull. XV, str. 179—181 (1887).

[51]) Patrz np. Benoit C. R. CI, str. 869—871 (1885); Nouv. Ann. (3) V, str. 30—36 (1885); de Presle S. M. F. Bull. XIV, str. 98—100 (1886); André S. M. F. Bull. XV, str. 188—192 (1888); Valyi Hoppe Arch. (2), VI, str. 445—448 (1888).

[52]) Patrz np. Studniczka, Prag. Ber., str. 256—265 (1888).

[53]) Math. Ann. XXXV, str. 113—160 (1889).

[54]) Rozprawy Tow. nauk w Chrystyanii (1885).

[55]) Math. Ann. XXXVI, str. 239—254 (1890).

[56]) Leipz. Ber., str. 95—99 (1887), cf. F. M. XIX, str. 356 (1881).

[57]) Math. Ann. XXXVI, str. 172 (1890).

[58]) Archiwum norwegskie, III, str. 112—116 (1874).

[59]) Math. Ann. XXXIX, str. 293—390 (1891) Porówn. Study Gött. Nach. 1889, str. 237—268, Leipz. Ber., 1889, str. 177—228, Wiener Monatshefte I, 1890, II, 1891. Dodamy jeszcze, że Stephanos badał układy liczb zespolonych, za pomocą środków pomocniczych, wziętych z teoryi form; Ateny, tom jubileuszowy (po grecku), 1888.

Poincaré pierwszy zauważył, że każdemu układowi liczb odpowiada grupa o parametrach, zachodzących liniowo (C. R. XCIX, str. 740—742, 1884).

[60]) Math. Ann., II, str. 373—382.

[61]) Najprostszym przykładem tego rodzaju jest forma dwójkowa 6-go stopnia z elementem potrójnym.

Niezwrócenie uwagi na tę okoliczność było przyczyną błędnego obliczenia, które podał Cayley dla modułów „klasy“ form trójkowych. Patrz Cayley, Math. Ann., str. 268—271, 1870.

Kryterya zachodzenia potrójnego pierwiastka dają się wyrazić za pomocą związków przez niezmienniki, lecz za pomocą kryteryów tych nie można oddzielić możliwych tu jeszcze przypadków szczególnych. Bolza (Math. Ann. XXX, s. 546—552, 1887, obszerniej w Am. J., X, s. 47—70, 1887) wykazał, że dla wszystkich form dwójkowych 6-go stopnia, których zniekształcenie nie dosięga zniekształcenia potrójnego pierwiastka, równość niezmienników bezwzględnych wystarcza w rzeczy samej do równoważności. W szczególności podał Bolza cztery przypadki (Math. Ann. l. c., s. 549), w których metoda Clebscha odmawia usług, lecz w rozważaniu ich nie domaga się wymierności wzorów, służących do przekształcenia. Nadto kryteryum równości niezmienników bezwzględnych nie daje rezultatu, gdy wszystkie niezmienniki każdej z dwóch form znikają, a więc gdy niezmienniki bezwzględne stają się nieoznaczonemi.

Najprostszym jest przypadek dwóch form dwukwadratowych, z których jedna wykazuje element potrójny, druga poczwórny.

[62]) Przykłady z teoryi form rzędów 5-go i 6-go opierają się na rozprawie Clebscha i Gordana w Annali di Mat. (2), I, s. 23—79 (1867).

[63]) Math. Ann., VII, str. 230—241. Porówn. sposób przedstawienia Gundelfingera u „Fiedlera," str. 452—458 (1874), oraz rozważania Study'ego w jego dziele „Methoden" i t. d. (1889), str. 104 i nast.

[64]) Math. Ann. XIX, str. 280—290. Porówn. Study l. c.

[65]) Przypadek wyjątkowy, cytowany na str. 284 przez Christoffela, mianowicie $f = x_1^3 + 3x_2^2 x_3$ jest właśnie tego rodzaju. Tu znikają oba niezmienniki Aronholda $S$ i $T$, a więc wszystkie.

[66]) Prawie nic dotąd nie zrobiono jeszcze dla zbadania równoważności przekształceń wyższych (np. w przypadku form dwójkowych przy przekształceniu Tschirnhausena)

[67]) Patrz wyżej str. 25—26. Zwracamy jeszcze raz uwagę na to, że Lie przez grupę „skończoną" rozumie taką, która zależy od skończonej liczby parametrów.

[68]) Klein i Lie badali krzywe i powierzchnie podległe gromadom podstawień (przemiennych) na siebie same, C. R. czerwiec, 1870, Math. Ann. IV, str. 50—84. Wspominamy tylko o późniejszych odpowiednich badaniach Liego, Halphena, Sylvestera, Poincarégo, Picarda.

U Liego z zagadnienia tego powstało inne daleko ogólniejsze, odnoszące się do badania systematycznego rownań różniczkowych o ciągłych (nietylko rzutowych) grupach przekształceń.

[69]) Journ. für Math. LXXV, str. 292—335. (Porówn. Verhandl. der Schweizer Naturf. Ges., 1871).

Poprzednia pokrewna literatura zebrana jest w VI rozdziale rozprawy Schwarza. Porówn. też przedstawienie rzeczy w dziele Darboux'a: „Theorie des surfaces," I, Livre II, Chap. IV.

[70]) l. c. str. 300. Wyrażenie po stronie lewej tego równania różniczkowego stało się później punktem wyjścia w teoryi wzajemników (Reciprocanten) Sylvestera. Cf. IIC. Dodatek.

[71]) Str. 311

[72]) Str. 316—317.

[73]) Punkt widzenia „skończonej grupy podstawień" występuje dopiero u Kleina, zarówno jak i pojęcie i tworzenie odpowiedniego układu zupełnego. Schwarz nie operuje ani na zmiennych jednorodnych, ani na spółzmiennikach.

[74]) Zwłaszcza występuej najważniejsza z nich „forma dwudziestościenna" (ikosaedrowa) w postaci kanonicznej $s\,(1-11\,s^5-s^{10})$ na str. 330-ej. Tamże znajduje się odpowiedni „związek."

[75]) Erlanger Ber., czerwiec, 1874. W nocie późniejszej, tamże, grudzień, 1874, wyjaśnia autor stosunek swej pracy do pracy Schwarza. Według tego, do pierwotnego pojęcia Kleina dochodzi się wtedy, gdy trójki z łuków kołowych w rozprawie Schwarza zastąpiono wielokątami (które wszakże mnożyć należy nie według zasady przedłużania ana-

litycznego). Tu znajduje się także wzmianka, że „związek,“ o którym mowa w tekście, można uważać za szczególny przypadek znanego (od czasów H e s s e g o) w teoryi form twierdzenia o wyznacznikach funkcyjnych.

Trzecia nota, tamże, lipiec 1875, ma za przedmiot rozwiązującą 5-go i 6-go stopnia równania „dwudziestościanu.“ Nieco później (1875) ukazała się rozprawa, zbierająca powyższe badania w Math. Ann., IX, str. 183—208. (Pierwsza z niżej omówić się mających rozpraw F u c h s a została ogłoszona w Gött. Nachr., sierpień, 1875).

[76]) M ö b i u s pierwszy wprowadził stosunek podwójnego podziału czterech wartości zespolonych. W e d e k i n d przeniósł te rozważania na kulę. (Rozprawa, Erlangen, 1875, Beiträge etc., Erlangen, 1875, Math. Ann., IX, str. 209—217). B e l t r a m i od roku 1870 badał ze stanowiska teoryi niezmienników formy dwójkowe, zwłaszcza 3-go rzędu ze spółczynnikami zespolonemi. Mem. di Bologna X.

Ogólne przedstawienie przedmiotu tego znajduje się w Programie erlangeńskim K l e i n a z roku 1872 (Prace mat.-fiz., VI).

[77]) Porówn. np. L i n d e m a n n, Math. Ann., VII, str. 56 i dalsze. Dla zwyczajnego oznaczenia miarowego dawno już określono wszystkie skończone grupy ruchu. Uogólnienie rozważań K l e i n a do wyższych przestrzeni znajdujemy u u B i e r m a n n a (Wien. Ber., XCV, str. 523—548, 1887), który wiąże podstawienia liniowe dwóch zmiennych zespolonych w przestrzeni pięciowymiarowej z odpowiedniemi ciałami foremnemi, a także u G o u r s a t a (C. R. CVI, str. 1786—1789, 1888), który za pomocą ciał foremnych w przestrzeni czterowymiarowej upraszcza zagadnienie o szukaniu grup podstawień liniowych i ortogonalnych rzędu skończonego z czterema zmiennemi.

Porówn. też C l e b s c h-L i n d e m a n n, II, 1, oddział 3, IX, X.

Rzeczywistemi grupami ruchu zajmował się szczegółowo J o r d a n, Annali di Mat. (2), II, str. 168—215; 320—345 (1869). Zupełna dyskusya tych z pomiędzy grup, przy których z ruchów tworzących nie można wyprowadzić dowolnie małych zmian miejsca, znajdujemy u S c h ö n f l i e s s a, Math. Ann. XXVII, str. 319—342, XXIX, str. 50—80 (1887); XXXIV, str. 172—203 (1889). Ostatnia z tych prac traktuje o takich grupach przekształceń skończonych przestrzeni w siebie, przy których dowolna figura przestrzenna przechodzi zawsze na przystającą lub symetrycznie równą.

[78]) Porówn. notę poprzednią.

[79]) l. c. § 4. Należy tu wszakże zauważyć, że oprócz utworów niezmienniczych ogólnej teoryi form, istnieją jeszcze utwory szczególne, uwarunkowane właściwością uważanych tu skończonych grup podstawień. Tak np. w przypadku formy „dwudziestościennej“ występuje specyficzny niezmiennik wymierny, lecz nie całkowito-wymierny, stopnia 1-go. Porówn. Math. Ann., IX, str. 198.

[80]) „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades,“ Lipsk, 1884. Porówn. Erlanger Ber. 1876—77, Math. Ann., XII, str. 503—560 (1877), dalej dwie późniejsze ważne prace G o r d a n a, Math. Ann., XXVIII, str. 152—166, XXIX, str. 318—326 (1887).

[81]) Porówn. podstawowe prace F u c h s a w Journ. für Math., LXVI, str. 121—160 (1866); LXVIII, str. 354—385 (1883). Twierdzenie to znajdnje się już u R i e m a n n a.

[82]) Gött. Nachr., 1875, str. 568—581. 612—613, Journ. für Math., LXXXI, str. 97—142 (1876). W drugiej rozprawie Journ. für Math., LXXXV, str. 1—26 (1875) bada systematycznie ogół form pierwszych.

[83]) Patrz notę 79-ą.

[84]) Puruszone przez F u c h s a pytanie o odwracalności twierdzenia rozstrzygnął twierdząco G o r d a n (patrz niżej).

[85]) Erlanger Ber., 1876 lub Math. Ann., XI str. 115 –118 i Math. Ann., XII, str. 167—180 (1877).

Typy podane przez Jordana w C. R. LXXXII, str. 605—607, LXXXIII, str. 1003—1037 nie były wyczerpującemi. Patrz uwagi, odnoszące się do literatury przedmiotu u Kleina: Math. Ann., XI, str. 118 u dołu (1876).

[86]) Odwrotnie do oznaczenia $R(x)$ z danego równania różniczkowego dla $\eta$ podaną jest metoda, prowadząca do celu po skończonej liczbie prób.

Brioschi w r. 1877 (Math. Ann., XI, str. 405—411, Rend. Ist. Lomb (2), X, str. 48—58, oznaczył funkcyę $R$ w przypadku tylko trzech punktów szczególnych dla wszyst- „zredukowanych" typów Schwartza (Journ. für Math., LXXV, str. 323), prócz trzech. Te trzy ostatnie podał Klein, Math. Ann., XII, str. 175, 176 (1877); porówn. sprostowanie Cayley'a, tamże XVII, str. 65, 66 (1880). (Dalsze przypadki dwudziestościenne obliczył O. Fischer w rozprawie, ogłoszonej w Lipsku w r. 1885: patrz uwagi Kleina w Math. Ann., XXVI, str. 463 (1886).

[87]) Patrz Math. Ann, XI, s. 118.

[88]) Math. Ann., XI, str. 461—411. Według Fuchsa, forma pierwsza $f(y_1, y_2)$ równa się $\varphi(x)$, gdzie $\varphi$ jest pierwiatkiem z funkcyi wymiernej. Różniczkowanie względem $x$ daje przeto:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi\psi,$$

gdzie $\psi$ jest znowu wymierne względem $x$; z drugiej strony twierdzenie Eulera dla funkcyi jednorodnych daje:

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = nf = n\varphi.$$

Jeżeli obliczymy stąd $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ i $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ i te wartości wstawimy do wzorów przekształcenia Hermite'a, to trzeba będzie jeszcze uwzględnić to, że spólny mianownik $y_2\frac{\partial y_1}{\partial x} - y_1\frac{\partial y_2}{\partial x}$, według jednego z twierdzeń Abela, jest ilością stałą.

[89]) Math. Ann., XII, str. 23—46 (1877). Z żalem nie mogę bliżej zająć się rozpatrzeniem subtelnych badań Gordana, które słowami oddać daleko trudniej niż pokrewne prace geometryczne i teoretyczno-funkcyjne. Porówn. także Halphen, Sav. étr., T. XXVIII, (1880—1883).

[90]) l. c., str. 24. Można ją napisać w postaci

$$(y-x)\cos\varphi = i\sin\varphi k\left\{(x-\alpha)(y-\beta) + (x-\beta)(y-\alpha)\right\},$$

gdzie $\alpha$ i $\beta$ są dwoma elementami zlewającemi się, $k$ zaś odpowiednio dobraną wartością liczbową.

Przejrzyściej przedstawia się Gordanowska postać normalna podstawienia tak

$$\frac{y-\alpha}{y-\beta} = e^{2i\varphi}\cdot\frac{x-\alpha}{x-\beta},$$

gdzie $\varphi$ przebiega wszystkie wartości zespolone.

[91]) l. c., str. 25.

[92]) l. c., str. 29.

[93]) Math. Ann., XII, str. 147—166 (1877).

[94]) Określenie Gordana jest o tyle zmodyfikowane, że wyłącza z góry formy o czynniku wielokrotnym

[95]) W e d e k i n d, rozprawa habilitacyjna, 1876, B r i o s c h i, Annali di Mat. (2), VIII, str. 24—43 (1877). Porówn. przedstawienie rzeczy u G o r d a n a - K e r s c h e n s t e i n e r a, II, § 19. Równanie $(ff)_4 = 0$ jest ze stanowiska teoryi form równoważnikiem poprzednio omówionego równania różniczkowego 3-go rzędu; w odczytach swoich przeprowadzał zwykle G o r d a n przejście od jednego do drugiego sposobu przedstawienia.

Co do równania rzędu 3-go patrz także H u r w i t z, Math. Ann., XXXII, str. 345 — 352 (1889).

B r i o s c h i zbadał także przypadek formy $f_8$, której czwarte nasunięcie na siebie samą zlewa się, prócz czynnika stałego, z formą pierwotną i doszedł także do postaci równania różniczkowego 3-go rzędu S c h w a r z a (Chelini, Coll. Math., str. 213—219, 1881, C. R., XCVI, str. 1689—1692, 1883).

[96]) H i l b e r t udowodnił (Math. Ann., XXX, str. 561—570 (1887), że formy dwójkowe z przekształceniami liniowemi na siebie otrzymać można jako przypadek szczególnej obszerniejszej klasy form. Ta ostatnia występuje wtedy, gdy szukamy takich pęków $\varphi + \lambda\psi$, których trzecie nasunięcie formy $\varphi$ na $\psi$ znika tożsamościowo.

U G o r d a n a-K e r s c h e n s t e i n e r a, II, § 13 znajdujemy piękny wywód „ciał foremnych“ z form kwadratowych. Szuka się układu takich form, aby wszystkie dwuliniowe nasunięcia każdych dwu form znikały, albo miały wartość spólną, różną od zera, albo też wreszcie wartość spólną bez względu na znak. W pierwszym przypadku dochodzimy do trzech form kwadratowych, których iloczyn jest „ośmiościanem“; w drugim do dwu form, których iloczyn jest „sześcianam“; w trzecim wreszcie do trzech form, których iloczyn jest „dwudziestościanem“.

[97]) C. R. LXXXIV, str. 1446—1448, Journ. für Math., LXXXIV, str. 85—215 (1877) Rewizyę i ciąg dalszy daje autor w pracy konkursowej, Atti di Napoli, VIII (1880). „Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.“

Stwierdzenie na innej drodze pojedyńczych wyników w przypadku $n = 3$ było pożądane, ponieważ w liczeniu J o r d a n a błędy spostrzeżenia były nieuniknione. Pomijając pewne odstępstwa, sprawdzenie takie znajdujemy u V a l e n t i n e r a, Kjöb. Skrift (6), V str. 64—235 (1889), który bezpośrednio wyprowadza grupy za pomocą rozważań czysto-algebraicznych (przez przybranie prostych równań diofantowych). U V a l e n t i n e r a zostają ostatecznie trzy skończone grupy trójkowe: jedna $G_{12}$, powstająca przez „rozszerzenie“ dwójkowej grupy czworościennej; druga $G_{360}$, powstająca analogicznie z dwójkowej grupy dwudziestościennej; i właściwa grupa trójkowa $G_{168}$, wymieniona w tekście. (Zauważymy mimochodem, że ostatnia grupa, jako grupa 7 liter została w r. 1858 odkryta przez K r o n e c k e r a). Godnem jest uwagi, że grupa $G_{216}$, wymieniona w tekście, nie jest u V a l e n t i n e r a właściwą grupę trójkową (p. V a l e n t i n e r, l. c., str. 222).

V a l e n t i n e r opiera swoje wywody na powtórzeniach podstawień. Kryteryum na to, aby podstawienie $n$ zmiennych po $n$-krotnem powtórzeniu dało podstawienie tożsamościowe, jest—jak to już zauważył był L i p s c h i t z, Acta mathem., X, str. 137—144 (1887)—aby równanie charakterystyczne zawierało tylko $n$-te pierwiastki z jedności i aby jego dzielniki elementarne były rzędu pierwszego. (Porówn. co do podstawień ortogonalnych rozprawę B e r m b a c h a, Bonn, 1888).

V a l e n t i n e r dowodzi przedewszystkiem, że rząd grupy skończonej jest albo najmniejszą spólną wielokrotnością rzędów jej „podstawień zasadniczych,“ albo też podwójną lub potrójną, lub poszóstną wielokrotnością tejże (str. 226, tamże).

Wspomnijmy jeszcze, że, biorąc absrtakcyjnie, grupa dwudziestościenna $G_{60}$ i grupa $G_{168}$ tekstu, aż do rzędu 200-go są jedynemi p o j e d y ń c z e m i grupami działań o rzędzie, który jest liczbą złożoną (H ö l d e r, Math. Ann., XI, str. 55—88, 1892), i że A s k w i t h podał wszystkie możliwe grupy podstawień, które dają się utworzyć z 3, 4, 5, 6, 7 liter (Quar. J., XXIV, str. 111—167, 1881). Wszakże brak u niego grupy $G_{167}$.

Własność form pierwszych F u c h s a rozszerzył J o r d a n na równanie różniczkowe rzędu wyższego niż drugi. Tak np. dla rzędu 3-go otrzymujemy twierdzenie, że forma pierwsza jest pierwiastkiem z funkcyi wymiernej zmiennej $x$ i pewnej wielkości pomocniczej dołączonej, która sama zależy wogóle od równania algebraicznego rzędu $n$-go ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9$).

[98]) Nie wyłącza to wszakże faktu, że takie grupy „przejęte" mają znaczenie dla geometryi. Przypomnijmy np. grupę 18 kolineacyj, które przekształcają krzywą 3-go rzędu na siebie samą, albo grupę 16 kolineacyj (i 16 wzajemnych przekształceń), które toż samo czynią z powierzchnią Kummerowską.

Grupa $G_{16}$ szesnastu przemiennych inwolucyjnych przekształceń, występująca u Kleina, Rohna i innych i porządkująca punkty lub płaszczyzny przestrzeni w konfiguracye Kummerowskie, była szczegółowo badaną (ustanowienie układu zupełnego i t. d.) przez Study'go (Leipz Ber., 1892, str. 122—161). Grupa ta służy temu autorowi tylko jako przykład teoryi systematycznej, opierającej badanie grup skończonych podstawień liniowych ze stanowiska teoryi form na pewnych rozwinięciach (mówimy o tem niżej w niniejszym referacie), przy których główną rolę gra pojęcie niebiegunowości. Najbardziej godnym uwagi wynikiem jest to, że do oznaczenia niezmienników takiej grupy w przypadku najmniej sprzyjającym potrzeba tylko rozwiązać równania czyste. (Patrz wyżej u Valentinera).

[99]) Grupę Hessego szczegółowo badał Maschke, Math. Ann., XXXIII, str. 324 i dalsze (1889). Zadanie rozwiązane przez Maschkego, mianowicie podanie zupełnego układu grupy $G_{216}$, doprowadziło bezpośrednio do innego zadania, tj. do oznaczenia zupełnego układu kombinantów krzywej $C_3$ i jej formy Hessego (Math. Ann., XXXIII, str. 328 i nast.).

Z wymienionemi w tekście pracami Wittinga i Maschkego porówn. Burkhardt, Math. Ann., XXXVIII, str. 161—224, (1891).

[100]) Math. Ann., XIV, str. 428—471; patrz zwłaszcza uwagę na str. 438 (1879) Teorya grupy $G_{168}$ jest szczegółowo traktowana w dziele „Modulfunctionen" Klein a-Frickego, Dział III, rozdz. 6.

[101]) „Układ zupełny" formy $f$ w tem znaczeniu, aby zostały uwzględnione i podstawienia zmiennych przeciwpodstawieniowych, a więc obejmujący przeciwzmienniki i formy pośrednie, podał pierwszy Gordan. Math. Ann., XVII, str. 217—233. Patrz zwłaszcza tablicę na końcu rozprawy.

[102]) Możliwe to jest w sposób dwojaki. Związek wzajemny pierwiastków dwóch odpowiednich równań rzędu 7-go stanowi u Gordana jądro teoryi. Spółczynniki obu równań rzędu 7-go tworzą według Gordana układ zupełny tak zwanych „Affectfunctionen," gdy tymczasem część ich wystarcza do otrzymania układu stowarzyszonego (Math. Ann., XX, str. 528). Kładziemy tu nacisk na ogólne uwagi, jakie poczynił tu Gordan nad pojęciem „afektu" w jego stosunku do teoryi niezmienników.

[103]) Porówn. Noether, Math. Ann., XV, str. 89—110 (1879).

[104]) Gordan, Math. Ann., XVII, str. 217—233 (1890), str. 359—378 (1880), XIX 529—552 (1882), XX, str. 487—514, 515—530 (1882), XXV, str. 459—521 (1885).

Haskell zbadał dokładniej powierzchnię Riemanowską krzywej normalnej $f=0$, Amer. Jour. XIII, str. 1—52 (1890). (Idzie tu o podany przez Kleina, Math. Ann. VII, X „nowy" gatunek powierzchni Riemannowskich, powstający z punktów rzeczywistyth stycznych urojonych do krzywych).

[105]) Math. Ann., XXVIII, str. 499—532 (1887). Porówn. Cole, Amer. J., VIII str. 265—275 (1886).

Grupę wymienioną na drugiem miejscu zbadał dokładniej ze stanowiska geometryi liniowej Maschke (1890) Math. Ann., XXXVI, str. 190—215. Prowadzi ona do godnej uwagi konfiguracyi 140 prostych w przestrzeni.

[106]) Math. Ann., IV, str. 346—358 (1871).

[107]) Porówn. Reichardt, Math. Ann., XXIII, str. 84—98 (1887).

[108]) Math. Ann., XXX, str. 496—515 (1887).

[109]) Math. Ann., XXIX, str. 157—170 (1887), cf. Reichardt, tamże XXVIII, s. 84—98 (1887).

[110]) Math. Ann., XXXIII, s. 317—344 (1889).

[111]) Jordan, Traité des substitutions, 1871.

Co do związku obu zagadnień patrz Klein, 1888, Journ. de Math. (4), IV, str. 169—177 i Burkhardt, Gött. Nachr. 1892, str. 1—5.

[112]) Z badaniami, poruszonemi w tekście, o ile odnoszą się do grup skończonych dwójkowych i trójkowych, znajduje się w związku scisłym szereg prac Autonne'a, C. R., XCVII, str. 567—570; (1883), C. R., XCVIII, s. 565—567, IC, s. 646—649; (1889), C. R. CI, str. 53—56, Journ. de Math. (4) I, s. 431—454; (1885), C. R. CII, s. 313—316, CIII, s. 1176—1178, Journ. de Math. (4), II, s. 49—104; (1886); C. R. CIV, s. 767—770, 1422—1425, CV, s. 267—270, 929—95, Journ. de Math. (4), III, s. 63—85; (1887). Journ. de Math. (4), IV, s. 177—247; 407—464; (1888). W tych pracach autor założył sobie oznaczenie wszystkich skończonych grup i podgrup przekształceń Cremony (płaszczyzny), a specyalnie przekształceń kwadratowych i sześciennych. Conf. S. Kantor, Wien. Denk., 1882, s. 46.

[113]) Ueber allgemeinere Invarianten-Systeme, Münch. Ber., 1888, s. 103—150.

[114]) Pozostaje to w swej mocy, jak to zaznacza Maurer, gdy $f$ jest wogóle funkcyą wymierną i jednorodną zmiennych $x$.

[115]) l. c., str. 107.

[116]) Wtedy wyznacznik funkcyjny ilości $c$ albo równa się $r_n$, albo też ma dzielniki elementarne tylko pierwszego rzędu i nadto pierwiastki całkowito-liczbowe. Twierdzenie to podał i udowodnił autor jeszcze w rozprawie swej. Strasburg, 1887.

[117]) Str. 138.

[118]) W innej rozprawie (Journ. für Math.. CVII, str. 89—116, 1890) Maurer rozciągnął badania swoje na podstawienia nieliniowe.

# CZĘŚĆ II.

## POKREWIEŃSTWO FORM.

### A. Pytania, odnoszące się do skończoności.

#### *a). Wiadomości ogólne o obszarach całkowitości. Najważniejsze dowody skończoności.*

Po załatwieniu się z pytaniami, odnoszącemi się do zagadnienia o równoważności, zwracamy się do rozpatrzenia różnorodnych związków algebraicznych pomiędzy utworami niezmienniczemi, powstającemi z danej formy pierwotnej lub ze szeregu takich form.

Jeżeli zwrócimy najprzód uwagę na utwory całkowito-wymierne, to okres nowszy (od 1868) daje się scharakteryzować przez to, że w nim wysunięto na plan pierwszy określone „zadanie o skończoności", (Endlichkeitsproblem). Z istoty algebry nowszej wynika, że najcelniejszem pytaniem w niej jest, czy obszar form, dających się wyprowadzić z pewnych form pierwotnych za pomocą procesów niezmienniczych, jest „obszarem całkowitości" [1]) (Integritätsbereich), t. j. czy można z niego wydzielić liczbę skończoną indywiduów w ten sposób, by każde inne indywiduum tego obszaru dało się przedstawić liniowo przez potęgi i iloczyny tamtych, przy pomocy spółczynników liczbowych; jeżeli ten przypadek zachodzi, to za pomocą jakich środków otrzymać można konkretnie w przypadkach pojedyńczych te indywidua, stanowiące podstawę lub układ zupełny form zasadniczych?

Pytania te mają początek już w badaniach Cayley'a[2]) w rozprawie (II Memoir, 1856). Już Cayley i Sylvester dowiedli przedtem, że forma dwójkowa, aż do rzędu czwartego włącznie, posiada układ zupełny form zasadniczych; w tej zaś rozprawie rozpatruje Cayley ogólne formy dwójkowe. Za pomocą rozważań, opierających się na wyrażeniu „wagi" niezmiennika i spółzmiennika, czyni Cayley rozwiązanie tego pytania zależnem od pewnego układu diofantowych równań liniowych. Przyjąwszy, że te równania są niezależne, dochodzi on do wniosku, że wyżej określona skończoność, w odniesieniu do form rzędu wyższego nad czwarty, nie istnieje. Później okazało się, że twierdzenie to nie jest prawdziwem (Porów. II A, d).

P. Gordan[3]) wykazał (1868) skończoność obszaru form, należących do ogólnej formy dwójkowej $f$. Dowód Gordana (nawet w późniejszych uproszczonych postaciach) jest zawiły; daje natomiast bezpośrednio praktyczne metody w celu otrzymania lub ograniczenia istniejących układów zupełnych. Wogólności, w układach tych występują jeszcze indywidua zbyteczne; atoli dla form piątego i szóstego rzędu można doprowadzić redukcyę aż do możliwie małego układu, złożonego z 23 i odpowiednio 26 form zasadniczych[4]). (Porówn. niżej II A, b).

Siła metody dowodzenia Gordana tkwi co do istoty swej w przedstawieniu symbolicznem Aronholda i Clebscha dla niezmienników i spółzmienników formy $f$, oraz w roli zasadniczej, którą pomiędzy spółzmiennikami odgrywają wprowadzone przez Cayley'a nasunięcia. Pokazuje się to odrazu na prawie zwrotnem[5]), będącem podstawą całego wywodu. Według tego prawa, każdy iloczyn symboliczny jakiegokolwiek stopnia $m$ względem spółczynników formy $f$, a więc i każda istotna forma niezmiennicza tegoż stopnia jest funkcyą liniową o spółczynnikach liczbowych takich form, które są utworzone przy pomocy nasunięcia form $(m-1)$-go stopnia z formą $f$. Można te nasunięcia uporządkować tak, aby na czele stały nasunięcia drugie formy $f$ na siebie samą, aby powstałe tym sposobem wyrażenia były nasunięte na formę $f$, 0, 1, 2, ... razy i t. d. Jeżeli w tym nieograniczonym szeregu form opuścimy wszystkie wyrażalne liniowo przez formy już napisane, a pozostałe nazwiemy $T$, to można wykazać, że każda forma w jeden jedyny sposób jest funkcyą całkowitą liniową takich utworów $T$[6]). Zadanie sprowadza się tedy do oznaczenia układu zupełnego dla form $T$[7]).

Przyjmijmy, że znaleźliśmy taki układ zupełny dla formy początkowej $f'$ rzędu $(n-1)$-go, wtedy łatwo widzieć, że każdej formie, należącej do $f'$, odpowiada zupełnie określona forma, należąca do $f$; można przeto ograniczyć się na nowo na pozostałych jeszcze formach, należących do $f$. O tych formach dowodzi się, że pozostają one bez zmiany, jeżeli nasunięcia drugie formy $f$ samej na siebie nasuwamy dostateczną liczbę razy na formy, pochodzące od $f'$ [8]. Stosownie do wysokości tych drugich nasunięć, dzielą się one na różne klasy; dla każdej z klas, za pomocą subtelnych rozważań charakteru kombinatoryjnego, uzasadnia G o r d a n istnienie układu zupełnego.

G o r d a n rozciągnął wkrótce twierdzenie na układ form dwójkowych pierwotnych [9] na „kombinanty" takiego układu form równego rzędu, jakoteż na najniższe formy trójkowe [10] i pracował odtąd nieustannie nad uproszczeniem sposobu dowodzenia.

Wprowadzenie jednoczesne wielu form pierwotnych pozwala na ważne ułatwienia. Środkami stosunkowo prostemi można uzasadnić daleko sięgające twierdzenie, że jeżeli każdy z dwóch układów form posiada podstawę skończoną, to tęż własność posiada też układ „s k o m b i n o w a n y" [11]. Taki układ powstaje wtedy, gdy na jakiekolwiek iloczyny indywiduów pierwszego układu nasuniemy jakiekolwiek iloczyny z drugiego. Twierdzenie to można zastosować bezpośrednio do obu wyżej wspomnianych układów (form pochodzących od $f'$ i nasunięć drugich formy $f$ samej na siebie).

Program G o r d a n a z r. 1875 [12] przedstawia postęp w wielu kierunkach. Wyłączne używanie procesu nasunięcia miało tę niedogodność, że pociągało za sobą wprowadzenie znacznej liczby nowych symbolów. Niedogodność tę znacznie zmniejszyło przyjęcie za podstawę procesu „fałdowanie" (Faltung), stanowiącego symboliczne uogólnienie nasunięcia i umożliwiającego bardziej organiczną konstrukcyę układu form [13].

Obok wyrobionej symboliki postawić należy proces niesymboliczny „rozwijania na szeregi" [14]. Forma o dwóch niejednorodnych spółrzędnych $x, y$ daje się rozwinąć według potęg skończonych różnicy $x-y$ w ten sposób, że spółczynniki rozwinięcia stają się biegunowemi form, zawierających tylko zmienną $x$. Przy dwukrotnem stosowaniu tego postępowania do formy z trzema zmiennemi $x, y, z$ możliwą jest zmiana kolei; przyrównanie zaś otrzymanych wyników daje bardzo płodne związki pomiędzy iloczynami symbolicznemi. Związki te z trudnością otrzymaćby można za pomocą rachunków czysto symbolicznych. Szukany „układ zupełny" rozkłada się na szereg układów znacznie prostszych, które w dalszym ciągu wzajemnie kombinować należy. Z form, powstałych przez kombinowanie, można pozostawić na boku wszystkie, nie spełniające pewnego układu równań diofantowych. Wszystkie zaś rozwiązania tego układu równań (w liczbach całkowitych dodatnich) można otrzymać ze skończonej liczby takich rozwiązań za pomocą dowolnych czynników dodatnich i całkowitych. (Porówn. dowód graficzny P e t e r s e n a w II, C, a). Dla form rzędu wyższego nad szósty działania te doprowadzono już do tego stopnia, że później von G a l l [15], celem oznaczenia form zasadniczych, należących do form siódmego i ósmego rzędu, mógł się oprzeć bezpośrednio na układzie G o r d a n a.

Większość użytych środków, a zwłaszcza rozwinięcie na szereg, przy odpowiedniej modyfikacyi, stosować można i do form trójkowych i wyższych [16]). Jeżeli mimo to dowód skończoności dla dowolnych form wyższych połączony jest z nieprzezwyciężonemi trudnościami, pochodzi to stąd, że wyrażeń symbolicznych w całej ich zupełności przejrzeć nie podobna; nadto począwszy od form czwórkowych, występują pewne czynniki symboliczne wyznacznikowe, które łączą w sobie wiele „pni symbolicznych", których zależność wzajemna z trudnością uwidocznić się daje.

Dowód, podany w książce G o r d a n a [17]) dla formy dwójkowej $f$, jest bardziej przejrzystym, dlatego, że ponad pojęciem układu zupełnego umieszczono pojęcie układu „względnie zupełnego". Z układu takiego, przy dowolnem „fałdowaniu" (nasunięciu) [18]), wynikają tylko takie formy, które po za wyrazami, pomnożonemi przez pewną potęgę „czynnika klamrowego" zależą w sposób całkowity i wymierny od form układu. Dzięki temu, wszystkie poprzednie zawiłe rozwinięcia na szereg stają się zbytecznemi. Obok tego w praktyce używane są tak zwane „reducenty" [18]), t. j. takie czynniki iloczynów symbolicznych, które wskazują bezpośrednio możność sprowadzenia tych iloczynów do utworów niższego charakteru. Środek ciężkości dowodu leży w następującem rozważaniu:

Spółzmiennik lub niezmiennik formy $f = a_x{}^n = b_x{}^n = \ldots$ daje się zawsze napisać jako iloczyn symboliczny tak, że najwyższa potęga czynnika klamrowego; np. czynnika $(a\,b)$ jest p a r z y s t a. Następnie można wszystkie formy, wyprowadzone z formy $f$, podzielić na $g+1$ klas $A_0, A_1, \ldots, A_g$, gdzie $g = \frac{n}{2}$ lub $\frac{n-1}{2}$, stosownie do tego, czy $n$ jest parzyste lub nieparzyste, przytem każda k l a s a o b e j m u j e w s z y s t k i e p o p r z e d z a j ą c e. Pierwsza klasa $A_0$ zawiera tylko samą formę $f$, następna $A_1$ wszystkie [19]) formy, w których żaden z czynników klamrowych nie zachodzi w potędze wyższej nad drugą; dla trzeciej klasy $A_2$ ta najwyższa potęga jest czwartą i t. d., aż do ostatniej klasy $A_g$, która oczywiście obejmuje wszystkie formy, należące do formy $f$. Idzie tedy o to, aby kolejno okazać, że każda z klas jest w sobie s k o ń c z o n ą, t. j. że posiada układ zupełny. Uskutecznia się to przez utworzenie $g$ układów s k o ń c z o n y c h pomocniczych $B_0, B_1, \ldots, B_g$, odpowiadających układom $A_0, A_1, \ldots, A_{g-1}$ i mających tę własność, że otrzymujemy zawsze układ $A_{k+1}$ [20]), n a s u w a j ą c układ poprzedzający $A_k$ na odpowiadający mu układ $B_k$. Przy uwzględnieniu skończoności układu $A_0 = f$ wypływa stąd skończoność układów $A_1, A_2, \ldots$ i ostatecznie skończoność układu $A_g$.

T e u k ł a d y p o m o c n i c z e o t r z y m u j e m y z a p o m o c ą $g$ n i e z m i e n n i k ó w $\varphi_i$ s t o p n i a d r u g i e g o f o r m y $f$, g d z i e $\varphi_i = (f, f)^{2i+2}$. D o p ó k i r z ą d t a k i e j f o r m y $\varphi_i$ n i e j e s t j e s z c z e n i ż s z y m o d l i c z b y $n$, t w o r z y m y i n d y w i d u a u k ł a d u $B_i$ z f o r m $\varphi_i$ s y m b o l i c z n i e, t a k s a m o j a k i ndywidua $A_i$ z formy $f$. Gdy wszakże rząd formy $\varphi_i$ staje się niższym od $n$ (t. j. gdy tamten proces jest już niewykonalny), układ $B_i$ składa się wprost z (przyjętego za skończony) układu zupełnego form $\varphi_i$.

Posiadamy już obecnie elegancką konstrukcyę dla form piątego i szóstego rzędu[21]).

Ponieważ w tych wszystkich dowodach formy pierwotne są wypisane w postaci symbolicznej, to i tamte przyjmuje się za „ogólne" swego rodzaju, t. j. za takie, których spółczynniki są uważane za zmienne niezależne. Toż samo stosuje się i do wykonywanych podstawień.

Pozyskane wyniki można zastosować bezpośrednio do form dwójkowych, zawierających więcej szeregów zmiennych (jednorodnych), w założeniu, że te ostatnie poddano tym samym podstawieniom, gdyż według zasady rozwinięcia na szereg należy tylko oznaczyć układ zupełny, należący do zwiększonej liczby form pierwotnych, które zawierają tylko jeden pojedyńczy (i ten sam) szereg zmiennych.

Peano w r. 1881 [22]) pokazał, że nie uciekając się do nowych środków pomocniczych, można dowód skończoności przeprowadzić i dla przypadku ogólniejszego, w którym podstawienia, mające być wykonanemi na różnych szeregach zmiennych $x_1, x_2$; $y_1, y_2$; . . . , są całkowicie lub częściowo niezależnemi. Niechaj dane formy pierwotne $f, g, \ldots$, rozwinięte według $x_1, x_2$ mają za spółczynniki formy: $f_i, g_k, \ldots$ Przyjmujemy, że te ostatnie formy (w których liczba szeregów ilości zmiennych jest o 1 mniejsza) mają podstawę i mamy to samo okazać dla form pierwotnych $f, g, \ldots$ Niechaj $F$ będzie formą niezmienniczą form $f, g, \ldots$, która będąc uporządkowaną według $x_1, x_2$, ma spółczynniki $F_i$; wtedy nie trudno poznać, że spółczynniki $F_i$ należą do układu form $f_i, g_k, \ldots$ Zastosujmy teraz do każdej z form pierwotnych $f, g, \ldots$ proces biegunowy $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$ dostateczną liczbę razy; wtedy powstanie układ utworów: $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots$; $g, \Delta g, \Delta^2 g; \ldots$, mogący całkowicie zastąpić układ form $f_1, g_k, \ldots$, w ten sposób, że każda forma zasadnicza $P$ tego ostatniego układu służy za model określonej formy zasadniczej $P'$ pierwszego układu. Przy zwykłem rozwinięciu formy $P'$ według potęg różnicy $x_1 y_2 - x_2 y_1$, spółczynniki będą biegunowemi form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ Porównanie form $P$ z formami $P'$ wskaże, że i ogół form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ posiada podstawę. Ponieważ wreszcie w sensie form dwójkowych, t. j. względnie do $x_1, x_2$, forma $F$ daje się przedstawić jako forma niezmiennicza form $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, przeto okazuje się, że i układ form $F$ jest skończony.

Twierdzenie to znajduje ważne zastosowanie do tak nazwanych „odpowiedniości"[23]).

W ostatnich czasach Gordan doszedł bezpośrednio do tego samego rezultatu przez wprowadzenie ważnego pojęcia układu form „rozszerzonego[24]). Aby otrzymać ten układ dla najprostszego przypadku jednej formy (dwójkowej) $f$, wyobraźmy sobie już utworzony układ zupełny dowolnej liczby form $f_1, f_2, \ldots$, wszystkich rzędu równego rzędowi formy $f$, a mianowicie w postaci nasunięć formy $f$ na siebie (dostateczną liczbę razy powtórzonych). Stąd, przez proste opuszczenie skaźników $i, k, \ldots$ powstaje układ rozszerzony formy $f$. Na podstawie swego powstania, układ ten może służyć bezpośrednio do wyprowadzenia układów jednoczesnych szeregu pierwotnych form dwójkowych, tak z jednym szeregiem, jak i z większą liczbą szeregów ilości zmiennych, podległych podstawieniom niezależnym. Tak np. dla form kwadratowych z dwoma niespółpodstawieniowemi szeregami zmiennych $x_1, x_2, y_1, y_2$ można obliczyć i wypisać układ zupełny z 38 utworów złożony.

Peano (1881)[25]) rozwinął tę teoryę i w innym kierunku. Według Clebscha[26]) niezmienniki i spółzmienniki szeregu form liniowych i kwadratowych posiadają tę własność, że mogą być podzielone na „typy" tak, że indywidua jednego i tego samego typu można otrzymywać jedne z drugich wyłącznie za pomocą procesu Aronholdowego, t. j. przez biegunowanie względem spółczynników. Liczba typów pozostaje przytem skończoną przy jakiejkolwiek liczbie form danych. Otóż Peano uogólnia tę własność dla szeregów form dowolnego (jednego) stopnia. Dowód jego opiera się głównie na tem, że według pewnego twierdzenia Capelli'ego[27]) jakakolwiek funkcya jednorodna całkowita $F$ $n+1$ szeregów o $n+1$ spółczynnikach zmiennych, należących do $n+1$ form $n$-go stopnia, daje się rozwinąć według potęg ich wyznacznika, przyczem występujące czynniki, które są biegunowemi form, wyprowadzonych z formy $F$, zawierają o jeden mniej układów spółczynnikowych. Rachunek ten, przeprowadzony w przypadku form sześciennych, wykazuje dziesięć typów; przytem podano sposób, w jaki według tych typów rozkładają się formy układu zupełnego.

Doszliśmy już do punktu zwrotnego w rozwoju teoryi. Gdy w dotychczasowych dowodach skończoności miano zarazem na widoku istotne tworzenie odpowiedniego układu zupełnego, to obecnie ten bardziej praktyczny punkt widzenia zostawia się na uboczu, a główną uwagę zwraca się na czystą teoryę skończoności[28]). Z tą zmianą wiąże się okoliczność, że nowe metody mają wybitnie charakter niesymboliczny, przez co wyraźniej odznacza się ich moment pojęciowy. Pierwszą pobudkę w tym kierunku dał podany przez Mertensa[29]) dowód skończoności układu form dwójkowych z jednym szeregiem zmiennych. Ponieważ szereg form liniowych posiada zawsze układ zupełny form pochodnych, to wymagany dowód można przeprowadzić dla dowolnego szeregu form początkowych $(g, f, f', \ldots)$, przy przyjęciu, że twierdzenie, w mowie będące, jest prawdziwem dla szeregu $(f, f', f'', \ldots)$, w którym rząd formy $f$ jest o jedność niższy od rzędu formy $g$. Najprzód z powyższego założenia wypływa wniosek, że i szereg $(p, f, f', f'', \ldots)$, rozszerzony za pomocą formy liniowej $p$, posiada układ zupełny. W tym ostatnim układzie zawiera się jako „podukład“ (Untersystem) ogół wszystkich utworów, osiągających ten sam stopień w spółczynnikach form $p$ i $f$. Albowiem utwory te wyznacza się za pomocą ogółu rozwiązań dodatnich pewnego równania diofantowego[30]); rozwiązania te można zresztą utworzyć liniowo ze skończonej liczby z pomiędzy nich, przy pomocy spółczynników dodatnich (i całkowitych). Jeżeli wyobrazimy sobie formę $f$ rozszczepioną na jej czynniki liniowe $q, r, r, \ldots$ i zastąpimy formę liniową $p$ kolejno formami $q, r, s, \ldots$, wtedy przez kombinowanie symetryczne powstałych w ten sposób układów zupełnych, otrzymamy nowy układ zupełny, należący do form pierwotnych:

$$(p, q, r, s, \ldots; f', f'', \ldots)$$

i zarazem symetryczny względem spółczynników form $p, q, r, s, \ldots$ Dość tylko wprowadzić znanym sposobem spółczynniki iloczynu $g$ form $p, q, r, s, \ldots$, aby otrzymać żądany układ zupełny szeregu $(g, f', f'', \ldots)$.

H i l b e r t[31]), zachowując myśl zasadniczą powyższego dowodu, uczynił go bardziej przejrzystym.

Niechaj będzie forma pierwotna $f = f(x, y)$ rzędu $n$-go, rozpadająca się na czynniki liniowe $\alpha_i x + \beta_i y$. Niezmiennik $J$ (w znaczeniu ściślejszem) formy $f$ jest agregatem symetrycznym różnic pierwiastków równania $f = 0$, a więc, po sprowadzeniu go do postaci jednorodnej, jest iloczynem utworów:

$$\omega = (1, 2)^{e_{12}} \cdot (1, 3)^{e_{13}} \cdot (2, 3)^{e_{23}} \ldots (n-1, n)^{e_{n-1, n}} = \prod_{k, l} (k, l)^{e_{k, l}},$$

gdzie $(k, l)$ oznacza różnicę $\alpha_k \beta_l - \alpha_l \beta_k$, $e_{k, l} = e_{l, k}$ jest wykładnikiem całkowitym dodatnim i gdzie każda z liczb $1, 2, \ldots, n$ zachodzi jednakową liczbę razy. Ostatnio wspomniany warunek zamienia się na układ równań liniowych diofantowych, mianowicie:

$$e_{12} + e_{12} + \ldots + e_{1n} = e_{21} + e_{23} + \ldots + e_{2n} = \ldots$$
$$= e_{n,1} + e_{n,2} + \ldots + e_{n-1, n}.$$

Wszystkie rozwiązania dodatnie tego układu otrzymać znów można liniowo ze skończonej liczby $m$ z pomiędzy nich, przy pomocy spółczynników dodatnich całkowitych $p$, a mianowicie:

$$e_{k, l} = p_1 e_{k, l}^{(1)} + p_2 e_{k, l}^{(2)} + \ldots + p_m e_{k, l}^{(m)}.$$

Jeżeli więc $\omega_r$ oznacza niezmiennik (niewymierny) $\omega_r = \prod_{k,l} (k, l)^{e^{(r)}_{k, l}}$, to $\omega_r$ czyni zadość równaniu wymiernemu stopnia $n!$ i na zasadzie znanego twierdzenia z teoryi równań algebraicznych, jakakolwiek potęga niezmiennika $\omega_r$ np. $p_r$-ta może być przedstawiona jako forma liniowa, jednorodna potęg 0-ej, 1-ej, ..., $(n-1)$-ej ilości $\omega_r$, o spółczynnikach, które są funkcyami całkowitemi wymiernemi odpowiednich sum potęgowych $\omega_r + \ldots$, $\omega_r^2 + \ldots$, $\omega_r^{n'} + \ldots$ Uwzględniając powyższe wyrażenia ilości $e_{k,l}$ przez wybrane ilości $e_{k,l}^{(r)}$, można niezmiennikowi $J$ nadać postać sumy symetrycznej:

$$J = \Sigma\, \omega_1^{p_1},\ \omega_2^{p_2}, \ldots, \omega_m^{p_m}.$$

Podstawiając tu podane wartości potęg $\omega_r^{p_r}$, poznamy bezpośrednio, że $J$ jest funkcyą całkowitą skończonej liczby analogicznie zbudowanych niezmienników, w których żaden z wykładników ilości $\omega_r$ nie może przekroczyć liczby $n'$! Uogólnienie tej metody dla niezmienników szeregu form pierwotnych $f$, ... uskutecznia się za pomocą łatwych do zrozumienia modyfikacyj; w szczególności wynika stąd, że szereg form niezmienników i spółzmienników posiada układ zupełny.

W pracy zasadniczej z r. 1890 wykazał Hilbert[32]) ogólnie—i przy wyłącznem użyciu procesów wymiernych[33])—skończoność układu niezmienników, pochodzącego od szeregu zupełnie dowolnych (a nawet i zniekształconych w jakikolwiek sposób) form o $n$ zmiennych. Rezultat ten osiągnął, oddzieliwszy jądro pytania od ściślejszej dziedziny teoryi niezmienników[34]) i ugruntowawszy je jako własność podstawową nieskończonej liczby układów form algebraicznych.

Dajmy sobie z góry prawo[35]), według którego postępuje nieprzerwany szereg form $F_1, F_2, \ldots$, o $n$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Rzędy form $F$ i ich spółzmienniki nie mają podlegać żadnym ograniczeniom, spółczynniki zaś niechaj należą do pewnego obszaru wymierności $R$. „Można wtedy z szeregu form $F$ wybrać zawsze skończoną liczbę $m$ takich form $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$, że każda forma $F_s$ szeregu jest ich kombinacyą liniową, t. j., że jest:

$$F_s = A_{s,1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \ldots + A_{s_m} F_{i_m},$$

gdzie spółczynniki $A$ są także formami ilości $x$ o spółczynnikach, należących do tego samego obszaru wymierności $R$."

Oczywiście, należy spółczynniki $A$ wybrać w ten sposób, aby suma iloczynów była znowu formą jednorodną co do zmiennych $x$.

Wybierzmy mianowicie z danego szeregu dowolne indywiduum $F$ wymiaru $r$ względem ilości $x$. Możliwem jest założenie (w razie potrzeby osiągnąć się to daje przez odpowiednie podstawienie), że spółczynnik ilości $x_n^r$ w formie $F$ nie znika. Wtedy można najprzód sposobem znanym zniżyć stopień ilości $x_n$ w każdej z form $F_s$, tak aby był mniejszy od $r$; dość w tym celu od formy $F_s$ odjąć formę $F$, pomnożoną przez formę pomocniczą $B_s$. Przez to otrzymuje $F_s$ postać:

$$F_s = B_s F + g_{s_1} x_n^{r-1} + g_{s_2} x_n^{r-2} + \ldots + g_{s_r},$$

gdzie formy $g$ po stronie prawej zależą tylko od zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, zresztą zaś mogą być dowolnie wysokiego wymiaru. Jeżeli więc przyjmiemy, że twierdzenie w mowie będące jest już dowiedzione dla form o $n-1$ zmiennych i zastosujemy je do kolumny spółczynników $g_{s_1}$ [36]), to będzie możliwem z powyższego przedstawienia form $F$ wydzielić skończoną ich liczbę $\mu$ (np. dla $s = 1, 2, \ldots, \mu$) tak, aby po pomnożeniu obustronnem przez dobrane formy pomocnicze ilości $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, przez dodanie i przez odjęcie wreszcie od wyrażenia każdej dalszej formy $F_s$, ta ostatnia okazała się złożoną liniowo z form $F, F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ i innej jeszcze formy, która co do zmiennej $x_n$ dochodzi najwyżej do stopnia $r-2$.

Do kolumny spółczynników najwyższej potęgi ilości $x_n$ tych nowych przedstawień form $F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \ldots$ zastosujmy ponownie to samo postępowanie i t. d.: jest rzeczą jasną [37]), że najwyżej po $r$ krokach dojdziemy do skończonej liczby $m$ form $F$, które stanowią szukaną podstawę szeregu pierwotnego. Pozostaje jeszcze bezpośrednie załatwienie przypadku najprostszego $n = 1$. Tu wyrazami szeregu są, po za czynnikami stałemi, potęgi całkowite dodatnie zmiennej $x_1$, a jest rzeczą widoczną, że wtedy wszystkie wyrazy szeregu muszą być podzielne przez $x_1$ z wykładnikiem najmniejszym.

Przedstawiony tu dowód naszego twierdzenia pomocniczego [38]) pozwala nam poznać zarazem, że spółczynniki form mnożących $A$ należą do tego samego obszaru wymierności, co i spółczynniki formy $F$.

Aby przejść do zastosowania do teoryi niezmienników, przyjmijmy, że mamy do czynienia z pojedyńczą pierwotną formą trójkową $f$. Układ niezmienników całkowitych wymiernych $i_1, i_2, \ldots$ tej formy $f$ daje się łatwo uporządkować na szereg [39]), do którego stosuje się twierdzenie powyższe. Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_m$ oznaczają pewne funkcye pomocnicze całkowite i wymierne formy $f$, to jakikolwiek niezmiennik $i$ formy $f$ można wyrazić liniowo przez $m$ takich niezmienników w ten sposób:

$$i = A_1\, i_1 + A_2\, i_2 + \ldots + A_m\, i_m .$$

Drugi krok stanowi zastąpienie form $A$ przez niezmienniki $J_1, J_2, \ldots, J_m$, które znowu są funkcyami całkowitemi niezmienników $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Jeżeli $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ są odpowiednio stopnia $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$ względem spółczynników, to forma $A_s$ może być uważana za formę jednorodną stopnia $r - r_s$ względem tych spółczynników. Do formy $f$ zastosujmy dowolne podstawienie $T$ zmiennych o spółczynnikach $a_{ikl}$ i wyznaczniku $a$. Jeżeli przez $f_a$ oznaczymy spółczynniki przekształconej formy pierwotnej $f$, przez $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ wagi niezmienników $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ to na podstawie własnosci zasadniczej niezmienników równanie powyższe zamienia się na następujące:

$$a^p\, i = a^{p_1} A_1\,(f_a)\, i_1 + a^{p_2} A_2\,(f_a)\, i_2 + \ldots + a^{p_m} A_m\,(f_a)\, i_m .$$

Stosujemy tu w dalszym ciągu inne twierdzenie pomocnicze (w ogólniejszej postaci), dowiedzione przez Gordana i Mertensa[40]). Niechaj $A(f_a)$ oznacza wogóle dowolną formę jednorodną, izobaryczną, należącą do form $f_a$ o wadze $g$; $q$ liczbę całkowitą dodatnią (z włączeniem zera), $\Omega_a$ — Cayley'owski proces różniczkowania:

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{23}\,\partial a_{32}} \pm \ldots - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{22}\,\partial a_{31}}\,.$$

„Jeżeli iloczyn $a^q A(f_k)$ poddamy procesowi $\Omega_a$ tyle razy, np. $p$ razy, póki nie usuną się zupełnie spółczynniki podstawienia, to otrzymamy nowy niezmiennik $J$ formy $f_v$ o wadze $g = p - q$."

Wykonanie $p$-krotne procesu $\Omega_a$ po obu stronach tożsamości dla $a^{p}i$ sprawia, że po stronie lewej odtwarza się $i$ z czynnikiem dodatnim całkowitym i nieznikającym, po stronie zaś prawej wszystkie czynniki form $i_1, i_2, \ldots, i_m$ przechodzą na niezmienniki formy $f$. Po podzieleniu przez tamten czynnik, otrzymujemy przedstawienie postaci:

$$i = J_1\, i_1 + J_2\, i_2 + \ldots + J_m\, i_m,$$

w którem stopnie i wagi niezmienników $J$ są niższe niż dla niezmiennika pierwotnego $i$. Wystarcza przenieść toż samo na niezmienniki $J$ i t. d., aby po skończonej liczbie działań dojść do żądanego celu.

Podane tu rozważania zastosować można prawie wprost do przypadku $n$ zmiennych, jakoteż do układu form pierwotnych, do spółzmienników, przeciwzmienników, kombinantów i t. d. Dalej podlega prawu głównemu i ogólniejszy przypadek większej liczby szeregów o równej lub różnej liczbie zmiennych, poddanych dowolnym, jednakowym lub różnym podstawieniom. Nawet i wtedy, gdy stosowane podstawienia stanowią tylko część (podgrupę) grupy wszystkich podstawień, metoda dowodzenia pozostaje w swojej mocy dopóty, dopóki z dwóch podstawień tego samego typu daje się złożyć typ trzeci w ten sposób, iż parametry nowe są funkcyami dwuliniowemi dawnych i jeżeli prócz tego istnieje proces różniczkowy, analogiczny do procesu $\Omega$.

Wpływ twierdzénia pomocniczego o obszarze całkowitości nieskończonego szeregu form na naukę o połączeniach niezmienniczych sięga jeszcze dalej. By znieść ograniczenie, jakie sprawia jednorodność, przyjmijmy najprzód, że jedna z $n$ zmiennych jest jednością. Pomiędzy niezmiennikami jednej lub więcej form pierwotnych zachodzi tedy nieograniczona liczba związków, spełniających się tożsamościowo pomiędzy spółczynnikami pierwotnemi. Strony lewe (syzyganty) tych „syzygij"[41]) można uważać za formy niejednorodne, których zmienne są właśnie układem zupełnym $m$ niezmienników $i_1, i_2, \ldots, i_m$. A więc i nieskończony układ syzygantów posiada podstawę skończoną. Syzyganty znów łączą się znów ze sobą za pomocą nieskończonej mnogości związków, spełniających się tożsamościowo względem $i_1, i_2, \ldots, i_m$. A więc i nieskończony układ syzygantów posiada podstawę skończoną. Strony lewe tych „syzygantów drugiego rodzaju" mają więc także podstawę skończoną i t. d.

Za pomocą dość zmudnego zresztą postępowania, w którem twierdzenie pomocnicze za każdym razem na nowo się stosuje, stwierdził Hilbert fakt ważny, że proces kolejnego tworzenia syzygij przerywa się po skończonej liczbie kroków, najwyżej zaś po $m$ krokach [42]. Dopiero tworzenie wszystkich podstaw nietylko dla niezmienników pierwotnych, ale i dla syzygantów kolejnych rzędów, pozwala bliżej wniknąć w zupełności [43] w strukturę niezmienników całkowitych wymiernych, pochodzących od danego utworu algebraicznego (l. c. str. 534). W najnowszym czasie [44] Hilbert wysnuł jeszcze ze swych ogólnych twierdzeń o skończoności dalsze konsekwencye, zbliżające nas bardziej do pytania: za pomocą jakich zadań pomocniczych można w istocie otrzymać odpowiednie układy zupełne?

Istotną pomoc w tym względzie daje twierdzenie, że z rozmaitości niezmienników utworu algebraicznego można wydzielić zawsze skończoną liczbę $\sigma$ niezmienników, algebraicznie niezależnych $J_1, J_2, \ldots, J_\sigma$, w ten sposób, że wszystkie pozostałe będą funkcyami „całkowitemi algebraicznemi" tamtych, a tem samem znikają, jeżeli ilości $J$ znikają. Odwrotnie, ta własność (i algebraiczna niezależność) charakteryzuje w zupełności niezmienniki $J$.

Przyjmijmy, że znaleźliśmy taki układ $\sigma$ niezmienników; stąd wnioskując wstecz, można, według twierdzeń Kroneckera [45], uzasadnić na nowo nietylko skończoność całego obszaru niezmienników, lecz zarazem podać określoną drogę arytmetyczną do znalezienia ich podstawy. Podstawa ta składa się z niezmienników $J$, oraz tych niezmienników $i$, które stanowią podstawę „ciała" algebraicznego, określonego przez niezmienniki $J$.

Przedewszystkiem idzie tu o oznaczenie „stopnia" $g$ tego ciała.

Dla formy pierwotnej dwójkowej $f$ rzędu $n$-go dał odpowiedź na to pytanie Hilbert [46]. Tu liczba $\sigma$ równa się $n-2$; szukana liczba $g$ jest prostą funkcyą teoretyczno-liczbową, która, gdy odwrócimy uwagę od $n$, zależy wyłącznie od stopni niezmienników $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ (względem spółczynników). Zastosowania, poczynione w celu otrzymania form z pewnemi z góry danemi niezmiennikami, pomijamy [47].

W przypadku formy pierwotnej dwójkowej $f$, można za pomocą tworzenia rugowników otrzymać układ niezmienników, przez które wszystkie inne niezmienniki dają się wyrazić całkowicie i algebraicznie. Niechaj np. rząd $n$ formy $f$ będzie nieparzysty; utwórzmy spółzmienniki drugiego stopnia $F_1, F_2, \ldots, F_{\frac{1}{2}(n-1)}$ i z odpowiednio dobranych potęg form $f$ i $F$ zbudujmy przy pomocy dowolnych parametrów $u, v$ dwie kombinacye liniowe jednorodne $U$, $V$. Znikanie tożsamościowe rugownika form $U$ i $V$ jest równoważne $\mu$ równaniom $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, ..., $J_\mu = 0$. Ilości $J$ stanowią żądany układ niezmienników. Toż samo stosuje się i do rzędu parzystego $n$.

Od tych ilości $J$, przy pomocy procesu Aronholda, dochodzimy do analogicznego układu niezmienników jednoczesnych. I dla form o większej liczbie zmiennych można za pomocą skończonej liczby z góry danych procesów wymiernych otrzymać taki układ niezmienników, których znikanie pociąga za sobą znikanie wszystkich pozostałych. Do tego potrzebne jest kryteryum, pozwalające rozstrzygnąć, czy forma dana ze spółczynnikami liczbowemi posiada niezmiennik różny od zera. Ostatnia okoliczność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik podstawienia jest funkcyą całkowitą algebraiczną spółczynników formy liniowo-przekształconej. To daje środek otrzymania zupełnych układów niezmienników i granic wyższych[48]) dla ich liczby i wagi (zależnych tylko od $n$).

### b) Szczegóły o układach zupełnych.

Powiemy krótko o układach zupełnych, jakie dotąd obliczono in extenso dla danych form pierwotnych. Z istoty stosowanych metod tworzenia, uzasadnionych głównie przez Clebscha i Gordana, wynika, że liczby odnośnych form mają cechę granic wyższych; w rzeczy samej późniejsza rewizya[49]) wykazała niejednokrotnie, że niektóre z dawniej otrzymanych układów były zbytecznemi, t. j. dały się sprowadzić do innych.

Dopiero porównanie z angielskim kierunkiem badań[50]) wskaże, której z tych liczb należy przypisać dokładność bezwzględną.

Zaczynamy od pojedyńczej formy dwójkowej $f_n$. Dawniej już Cayley i Sylvester rozwiązali zagadnienie dla $n = 2, 3, 4$; Gordanowi zaś w r. 1868 udało się dopiero rozwiązać je dla form $f_5$ i $f_6$[51]). Dowód zupełności otrzymanego układu zupełnego o 23 i odpowiednio 26 „formach zasadniczych", mógł Gordan podać w ten sposób, że rozszerzenie tego dowodu na układ dowolnej formy $f_n$ nie wymagało już istotnie nowych środków pomocniczych. Przy pomocy uproszczonego przedstawienia „programu" Gordana zbudował v. Gall in concreto układ zupełny dla formy $f_9$[52]), później (przedstawiający więcej trudności) układ dla formy $f_7$[53]), korzystając zręcznie przy tym rachunku z pewnych syzygij celem wydzielenia form zbytecznych.

Co się tyczy jednoczesnych układów dwóch form dwójkowych $f_n$, to to traktowanie przypadków (2, 2), (2, 3), (3, 3) zawdzięczamy Salmonowi i Clebschowi; układ (3, 4) znajduje się u Gundelfingera[54]); (2, 5) u Wintera[55]); (2, 6) u v. Galla[56]).

Studyum systematyczne tym układom poświęcił Gordan[57]) w pracy, na której końcu znajduje się tablica wszystkich przypadków, w których żadna z obu form pierwotnych nie jest rzędu wyższego nad czwarty.

Inny wywód układu (4, 4), zgodny pod względem wyników z wywodem Gordana, zawdzięczamy Bertini'emu[58]).

Dla układów jednoczesnych więcej niż dwóch form dwójkowych nie posunięto tej rzeczy o wiele dalej, niż u Clebscha[59]), który załatwił się z przypadkiem dowolnego szeregu form liniowych i kwadratowych. Perrin[60]) zbadał bliżej układ czterech form, z których dwie są liniowe, dwie zaś kwadratowe.

Co się tyczy form trójkowych $C_n$, to pierwszy przypadek takiej pojedyńczej formy, przedstawiający istotne trudności, mianowicie przypadek $n = 3$, załatwił Gordan[61]). Do utworów, otrzymanych dawniej przez Aronholda, Cayley'a, Hermite'a, Brioschi'ego, trzeba było dodać stosunkowo niewiele; dla zapewnienia się wszakże o zupełności otrzymanego układu (razem 34 form) Gordan w sposób oryginalny przeprowadził rozszerzenie metod symbolicznych z dziedziny dwójkowej na dziedzinę trójkową.

Dopiero później Mertens[62]) otrzymał ten sam rezultat na drodze niesymbolicznej, używając jedynie procesu $\Omega$.

W przypadku $n = 4$ bogactwo występujących form jest tak wielkie, że Gordan wołał ograniczyć się na typie szczególnym[63]) (z okoliczności równań 7-go rzędu z 168 podstawieniami na same siebie), który można scharakteryzować za pomocą zachodzącej tożsamościowo pewnej prostej równości spółzmienniczej.

Z utworów, należących do ogólnej formy $C_4$, obliczył Maisano[64]) wszystkie, dochodzące aż do stopnia 5-go włącznie.

Układ dwóch $C_2$ został podany także najprzód przez Gordana[65]), następnie w związku ze wspomnianemi specyalnemi $C_4$. Niedawno zaś Perrin[66]) zbadał bliżej wzajemny związek algebraiczny i geometryczny pomiędzy formąmi tego układu.

Znajomość układu zupełnego trzech $C_2$ zawdzięczamy Ciamberlini'emu[67]).

W dziedzinie czwórkowej, oprócz zmiennych $x$ formy $F_n(x)$ i ich przeciwpodstawieniowych $u$, należy uwzględnić jeszcze wyznaczniki dwuszeregowe, tworzące się z dwóch szeregów zmiennych spółpodstawieniowych $x$, $y$. Za pomocą odpowiedniej modyfikacyi procesu $\Omega$ udało się w ostatnim czasie Mertensowi[68]) znaleść dla $F_2$ układ zupełny 20 form i zarazem podać drogę, na jakiej, za pomocą łatwo przewidzieć się dających procesów różniczkowych, można z układów pojedyńczych dla form $F_2$ zbudować układ jednoczesny dla tychże form. Za pomocą podobnych środków badał M e r t e n s i „układy zerowe“ (Nullsysteme)[69]), t. j. formy znakozmienne dwuliniowe o dwóch spółpodstawieniowych czwórkowych szeregach zmiennych $x$, $y$, do których można dołączyć dowolnie wiele form liniowych względem $x$ lub $u$. Dla pięciu (i mniej) układów zerowych wynik daje się ugrupować w sposób przejrzysty.

Do się wreszcie tyczy form o większej liczbie niekongruentnych szeregów zmiennych, to już wyżej wspomnieliśmy o układzie zupełnym dla formy pierwotnej dwójkowej kwadratowo-kwadratowej, otrzymanym przez S t u d y'e g o i G o r d a n a[70]).

W dziedzinie trójkowej tylko przypadek formy liniowej względem dwóch spółpodstawieniowych szeregów $x$, $u$ rozpatrzyli C l e b s c h i G o r d a n[71]). Analogiczne zadanie w dziedzinie czwórkowej zostało niedawno posunięte przez M e r t e n s a[72]) o tyle, że potrzeba jeszcze pewnych kombinacyj jego rozmaitych form grupowych, aby pozyskać układ zupełny.

Nakoniec należy wspomnieć jeszcze o pewnych podukładach zupełnych (t. j. stanowiących część składową ogólnych układów zupełnych). Odwracając uwagę od takich układów, których istnienie jest odrazu widocznem[73]), możemy ograniczyć się na przytoczeniu dwóch zjawisk. Pierwsze należy do gatunku kombinantów dwójkowych, które już w r. 1872 G o r d a n[74]) rozważał jako układ zupełny formy pojedyńczej w większej liczbie (spółpodstawieniowych) szeregów zmiennych. Najprostszym przypadkiem, wymagającym oddzielnego badania, jest przypadek dwóch form $f_4$. Według metody G o r d a n a, otrzymanie zupełnego układu kombinantów sprowadza się do znalezienia zwykłego układu jednoczesnego dwóch „spółzmienników elementarnych“ stopnia 6-go lub odpowiednio 2-go, związanych ze sobą pewnym związkiem tożsamościowym. Odnośny rachunek wykonał S t e p h a n o s[75]).

W i l t h e i s s, wychodząc z teoryi funkcyj hypereliptycznych, doszedł do godnego uwagi podukładu formy dwójkowej $f_6$[76]). Niechaj $A_i$ będą spółczynnikami, $x_1$, $x_2$ — zmiennemi formy $f_6$; niechaj dalej $\varphi_6$ oznacza pewien spółzmiennik 6-go rzędu i 2-go stopnia, w którego spółczynnikach $B_i$ zachodzą jeszcze w rzędzie drugim dwie zmienne $y_1$, $y_2$, spółpodstawieniowe ze zmiennemi $x_1$, $x_2$. Jeżeli przez $\underset{y=x}{\delta}$ rozumieć będziemy proces A r o n h o l d o w y $\Sigma B_i \frac{\partial}{\partial A_i}$, wraz z następnem przyrównaniem ilości $x$ i $y$, to można wykazać istnienie układu 9 spółzmienników, które przez zastosowanie działania $\delta$ dają znowu spółzmienniki układu.

Niżej uwzględnimy badanie, odnoszące się do zupełnych układów form zasadniczych, związane z tak nazwanemi „funkcyami tworzącemi" i także badania, dotyczące zupełnych układów syzygij. Układy zupełne, związane z grupami podstawień liniowych, już omówiliśmy w rozdziale I, A, b.

---

### c). *Układy stowarzyszone i przedstawienie typowe.*

Należy obecnie omówić dążenia, mające na celu objęcie rozmaitości utworów niezmienniczych, powstających z danych form pierwotnych, w jednym obszarze całkowitości [77]).

Początek tym dążeniom dał Hermite [78]), który już w r. 1852 pokazał, w jaki sposób z niezmienników i spółzmienników formy dwójkowej $f_n(x_1, x_2) = f$ wydzielić można rozmaitemi sposobami skończoną ich liczbę tak, aby wszystkie pozostałe zależały od poprzednich wymiernie. Jeżeli chcemy mieć najprostsze takie przedstawienie, przy którem wszystkie indywidua podstawy są od siebie algebraicznie niezależne, wprowadzamy nowe zmienne $\xi$, $\eta$ o wyznaczniku $f_n(x_1, x_2)$ za pomocą „spółzmiennika":

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \eta = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

gdzie zmienne pomocnicze $y$ są spółpodstawieniowemi ze zmiennemi $x$. Wtedy forma $f_n(y_1, y_2)$, pomnożona przez $(n-1)$-ą potęgę formy $f_n(x_1, x_2)$ przechodzi na nową formę $\Phi_n(\xi, \eta)$, której pierwszy spółczynnik jest równy 1, drugi 0, pozostałe zaś $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, razem z $f_n(x_1, x_2)$ stanowią żądaną podstawę, albo mówiąc z Hermitem, przedstawiają „układ stowarzyszony" z formą $f$.

Aby wyrazić jakikolwiek spółzmiennik formy $f$ za pomocą form $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, f$, dość w jej wyrazie głównym zastąpić spółczynniki formy $f$ przez spółczynniki formy $\Phi$ i następnie przy pomocy formy $f$ uczynić je jednorodnemi, przez co potęga formy $f$ wystąpi w mianowniku.

Można wszakże, jak to wypowiedział Clebsch [79]) w r. 1870, sprowadzić formy stowarzyszone do jeszcze prostszych, a mianowicie do spółzmienników $\psi$ stopnia 2-go formy $f$ i do wyznaczników funkcyjnych form $\chi$ i $f$ (t. j. spółzmienników 3-go stopnia formy $f$). Formy $\varphi$ za pomocą wzorów zwrotnych dają się wyrazić wymiernie przez formy $\psi$, $\chi$, $f$, tak że tylko potęga formy $f$ może występować jako mianownik, który zresztą w przypadkach najniższych, obliczonych przez C l e b s c h a, $n = 2, 3, \ldots, 7$, sprowadza się do jedności.

W roku następnym G u n d e l f i n g e r [80]) nietylko udowodnił na drodze symbolicznej twierdzenie C l e b s c h a, ale prócz tego uzasadnił ogólnie, że formy $\varphi$ są funkcyami całkowitemi wymiernemi form $\psi, \chi, f$. Jednocześnie rozszerzył twierdzenie do układu jednoczesnego dwóch form $f_n$ i $\varphi_m$. Niechaj $n$ będzie niewiększa z dwu liczb $m$ i $n$, wtedy do powyższych form $\psi, \chi, f$ dołącza się jeszcze $m$ nasunięć formy $f$ na formę $\varphi$. S y l v e s t e r [81]), wychodząc z wyrazów głównych niezmienników, rozszerzył ten rezultat na dowolny szereg pierwotnych form dwójkowych.

Ciekawe zastosowanie form stowarzyszonych podał K o h n [82]). Wprowadziwszy zamiast form $\varphi$ ich równoważniki niewymierne, mianowicie pierwiastki równania $\Phi_n\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right) = 0$, podległe przejrzystemu prawu tworzenia, potrafił określić podzielność przez potęgę wyróżnika formy pierwotnej rugowników i wyróżników, odnoszących się do spółzmienników. Łatwo już wtedy zastosować tę metodę do form pierwotnych jednoczesnych.

Wyrazy główne form stowarzyszonych, wprowadzonych przez C l e b s c h a, posłużyły P e r r i n o w i [83]) do uogólnienia twierdzenia głównego dla form pierwotnych $F$ z $p$ zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Uważajmy formę $F$, uporządkowaną według potęg ilości $x_1$:

$$F = a\,x_1^n + \binom{n}{1} F_1\,x_1^{n-1} + \binom{n}{2} F_2\,x_1^{n-2} + \ldots + F_n,$$

za formę dwójkową ze zmiennemi niejednorodnemi $x_1$ i utwórzmy wyrazy główne $n-1$ form $\psi\,(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, $\chi\,(x_2, x_3, \ldots, x_p)$, t. j.:

$$v_2 = a\,F_2 - F_1^2,\quad v_3 = a^2\,F_3 - 3a\,F_2\,F_1 + 2F_1^3,$$
$$v_4 = a\,F_4 - 4\,F_3\,F_1 + 3\,F_2^2, \ldots;$$

wtedy każdy niezmiennik formy $F$ lub odpowiednio spółczynnik najwyższej potęgi ilości $x_1$ w każdym spółczynniku formy $F$, po pomnożeniu przez odpowiednio dobraną potęgę ilości $a$, staje się funkcyą całkowitą ilości $a$ i spółzmienników układu wyrazów $v$ (i odwrotnie). Przy przejściu od wyrazów głównych do samych utworów, zamiast $a$ wchodzi sama forma $F$.

Jeżeli chcemy uwzględnić i te formy, które zależą także od zmiennych $u$, spółpodstawieniowych ze zmiennemi $x$, to należy dołączyć jeszcze prostą formę pomocniczą, liniową względem $u$, oraz względem $x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Toż samo zachodzi i dla szeregów form pierwotnych $F$. W sposób bardziej bezpośredni i ogólny traktował toż samo zagadnienie F o r s y t h [84]), który przeprowadził je całkowicie dla pewnej liczby pojedyńczych przypadków w dziedzinie trójkowej i czwórkowej.

Niechaj $F = F_n(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{m})$ będzie formą trójkową i, jak wyżej, uporządkowaną według potęg ilości $x_1$; niechaj $\Phi(x_1, x_2, x_3; \overbrace{u_1, u_2, u_3}^{p})$ oznacza pewien utwór niezmienniczy („ternaryant") formy $F$, którego rozwinięcie. według malejących potęg ilości $x_1$ i $u_1$, rozpoczyna się od wyrazu $\Phi_{00}\, x_1^m\, u_1^p$. Wtedy spółczynnik główny $\Phi_{00}$ formy $\Phi$ czyni zadość dwóm charakterystycznym (liniowym, cząstkowym) równaniom różniczkowym; „są one zarazem równaniami charakterystycznemi dla wyrazów głównych spółzmienników szeregu form (dwójkowych) $F_1, F_2, \ldots, F_n$".

Po za spółzmiennikiem tożsamościowym $u_x$ układ ternaryantów stowarzyszonych z formą $F$ składa się z $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ indywiduów. Jeżeli zaś forma pierwotna $F$ zależy, oprócz od ilości $x$, jeszcze od ilości $u$, to liczba tych indywiduów dochodzi do $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n'+1)(n'+2) - 3$, gdzie $n'$ oznacza rząd formy $F$ względem zmiennych $u$.

Przy czterech [85]) zmiennych $x$ rozważa się podobnie wyraz główny $\Phi_{000}$ „kwaternaryantu", uporządkowanego według potęg zmiennych $x_1$, $u_1$, $p_1$, gdzie $p_1$ jest jedną z sześciu zmiennych pośrednich $p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & x_k \end{vmatrix}$; $\Phi_{000}$ czyni zadość sześciu równaniom charakterystycznym.

Początkową metodę H e r m i t e'a, polegającą na uzasadnieniu układów stowarzyszonych za pomocą przekształceń (liniowych) pierwotnych form dwójkowych, wkrótce rozszerzył B r i o s c h i [86]) na formy o większej liczbie zmiennych. Istotne przeprowadzenie tej metody znamy dla dwóch pojedyńczych przypadków form trójkowych, mianowicie dla ogólnej formy $C_3$ i dla specyalnej $C_4$.

Pierwszy przypadek zbadali C l e b s c h i G o r d a n [87]); przekształcenie liniowe zmiennych $x$ przeprowadza się za pomocą trzech „form pośrednich", liniowych względem $u$ i liniowych co do $x$, odpowiednio rzędów 1, 4, 7, ... Każda forma, wyprowadzalna z formy $C_3$, może być pomnożona przez taką potęgę pewnego spółzmiennika $G$, że przechodzi na funkcyę całkowitą 7 form stowarzyszonych, które składają się z powyższych trzech form pośrednich i jeszcze z czterech spółzmienników. Obok tego mamy drugie równorzędne przedstawienie, przy którem 7 form stowarzyszonych, odpowiadających sobie dualistycznie, składa się z trzech form pośrednich liniowych co do $x$ i czterech „form przynależnych," (zugehörige Formen) (przeciwzmienników). Blizko spokrewnionem z tem badaniem form $C_3$ jest inne wielokrotnie już wspomniane badanie G o r d a n a [88]), odnoszące się do formy $C_4$ z 168 podstawieniami.

Omówione do tej pory przedstawienie wymierne form niezmienniczych możnaby nazwać „typiką spółzmienników". W rzeczy samej jądro metody tkwi w tem, że forma pierwotna $F(x)$ (albo szereg takich form) mnoży się przez potęgę odpowiednio dobranego spółzmiennika, napisanego w zmiennych spółpodstawieniowych $y$, aby iloczyn dał się rozwinąć według potęg funkcyj całkowitych $\xi$, $\eta$ zmiennych $x$, $y$, jako nowych zmiennych, i aby nowe spółczynniki były spółzmiennikami formy $F(a)$. Ograniczmy się wszakże przytem na przypadku, w którym podstawienie względem zmiennych $y$ jest liniowem.

Temu przedstawieniu przeciwstawia się „typika niezmienników“. Forma pierwotna $F(x)$ (lub szereg takich form, po pomnożeniu przez pewną potęgę niezmiennika $R$ formy $F$ i rozwinięciu według potęg funkcyj całkowitych $\xi$, $\eta$ zmiennych $x$, (które są wtedy spółzmiennikami formy $F$), przyjmuje postać, w której nowe spółczynniki są niezmiennikami formy $F$. Pośredniczące w tem przejściu przekształcenie jest zwyczajnem przekształceniem „Tschirnhausenowskiem“; należy wszakże zaznaczyć, że w niektórych przypadkach można ominąć bozpośrednio jego stosowanie (połączone z trudnościami) i że wogóle przekształcenie występuje całkowicie na plan dalszy.

Wielki szereg zagadnień algebraicznych, geometrycznych i teoretyczno-funkcyjnych prowadzi, jak łatwo widzieć a priori, do upostaciowania „niezmienniczego“, sprawiającego, że już same formy pierwotne lub ich funkcye dane okazują się w świetle niezmienniczem.

I tu pierwszy Hermite[89]) w r. 1851 uzasadnił taką typikę dla form dwójkowych $f_{2n+1}$ rzędu nieparzystego (w szczególności piątego), wprowadziwszy jako nowe zmienne dwa spółzmienniki liniowe. Clebsch i Gordan[90]) w r. 1867 na drodze, wskazanej przez Hermite'a, rozwinęli w szczegółach typikę formy $f_5$, z uwzględnieniem rozmaitych przypadków wyjątkowych, występujących skutkiem znikania pewnych niezmienników. Tu pokazuje się wyraźnie, w jaki sposób przy użyciu tożsamości symbolicznych, ominąć można bezpośrednie wykonywanie podstawienia. Jeżeli mianowicie $\alpha_x$, $\beta_x$ oznaczają dwie dowolne formy liniowe o nieznikającym rugowniku $R = (\alpha, \beta)$, $a_x$ — czynnik liniowy symboliczny formy pierwotnej $f_l = f_{2n+1}$, to iloczyn $(\alpha, a)\, a_x$ można napisać jako kombinacyę liniową form $\alpha_x$ i $\beta_x$. Jeżeli obie strony podniesiemy do potęgi $l$ ej, to iloczyn $R^l f_l$ przedstawia się już przez to typowo, lubo w formie surowej; $\alpha_x$, $\beta_x$ są wtedy nowemi zmiennemi, a nowe spółczynniki — niezmiennikami jednoczesnemi form $f_l$, $\alpha_x$, $\beta_x$. Stają się one niezmiennikami samej formy $f$, jeżeli za $\alpha_x$, $\beta_x$ wybierzemy dwa spółzmienniki liniowe formy $f$. Rachunek dalszy sprowadza się do tego, aby nowe spółczynniki, występujące przedtem w postaci symbolicznej, wyrazić przez niezmienniki najprostsze układu zupełnego formy $f$. W rozprawie tej wskazano, że tożsamo postępowanie stosować można i do przedstawienia typowego form $f_{2n}$ rzędu parzystego; potrzeba tylko operować na odpowiednich formach kwadratowych, zamiast na liniowych; przekształcenie Tschirnhausenowskie staje się kwadratowem. Niechaj $\alpha^2_x$, $\beta^2_x$, $\gamma^2_x$ będą trzy dowolne formy kwadratowe o nieznikającym rugowniku $R = (\alpha, \beta, \gamma)$ i $a^2_x$ czynnik symboliczny kwadratowy form $f_{2n}$; wtedy

$(\alpha, \beta, \gamma)\, a^2_x$ jest kombinacyą liniową trzech form powyższych. Przez podniesienie do potęgi $n$-ej przechodzi $R^n f_{2n}$ na postać typową $C_n$ z trzema zmiennemi $\alpha^2_x, \beta^2_x, \gamma^2_x$, za które znowu wziąć można spółzmienniki formy $f$. Clebsch i Gordan wykonali całkowicie rachunek w przypadku formy $f_6$.

Lindemann[91]) wykazał, że forma $C_n$, uważana jako trójkowa jakichkolwiek trzech zmiennych, cechuje się znikaniem tożsamościowem pewnego spółzmiennika, a interpretacya geometryczna tych stosunków doprowadziła go przytem do elementów tak zwanej „teoryi apolaryzacyi“[92]). Typowem przedstawieniem najprostszych jednoczesnych form dwójkowych zajmowali się Bessel[93]) i Harbordt[94]). Na ciekawy przypadek tego rodzaju zwrócił już był przedtem uwagę Hermite[95]), spostrzegłszy, że dwom formom dwójkowym sześciennym można nadać proste wyrażenie typowe w postaci pierwszych pochodnych formy dwukwadratowej; na tem oparł Cayley[96]) przekształcenie 3-go rzędu całki eliptycznej 1-go gatunku.

Clebsch[97]) poświęcił obszerne studyum spostrzeżeniu Hermite'a; postępowanie zaś jego znacznie uprościł Gundelfinger[98]). Lindemann[99]) pierwszy zauważył, że trzy formy dwójkowe kwadratowe uważać można za pochodne drugie formy 6-go rzędu. Hermite'owi[100]) też zawdzięczamy pierwszy przykład analogiczny z dziedziny trójkowej. Pokazał on, w jaki sposób z trzech form kwadratowych otrzymać można formę sześcienną ze spółczynnikami, będącemi niezmiennikami jedneczesnemi trzech form danych; pierwsze pochodne tej formy sześciennej są właśnie formami danemi. Wtedy dopiero wystąpiło w prawdziwem świetle Sylvesterowskie[101]) wyrażenie rugownika trzech form kwadratowych, jako „kombinantu“ tych form.

Przejrzysty dowód twierdzenia Hormite'a podał Gundelfinger[102]). Niezmienniki jednoczesne trzech form okazały się wymier niezależnemi od jedenastu takich form; niezmienniki kombinantowe —od dwóch tylko. Gundelfinger[103]) zastosował swoje wyniki do przekształcenia kwadratowego całki eliptycznej 1-go gatunku, rozciągniętej wzdłuż krzywej trzeciego rzędu.

Dla teoryi rozwiązania wielokrotnie już wspomnianych równań rzędu 7-go z 168 podstawieniami w siebie ma znaczenie przedstawienie typowe, podane przez Gordana[104]) dla układu jednoczesnego przyporządkowanej formy trójkowej $C_4$ i dowolnej formy $C_2$ („stożkowej“). Ze spółzmienników układu wydzielają się dwie dalsze formy $C_2$ i wyróżniona forma $C_1$ („prosta“): „bieguny“ formy $C_1$ względem trzech form $C_2$ tworzą wierzchołki „typowego trójkąta spółrzędnych.“

Rolę godną uwagi odgrywa, według Stroha[105]), typika niezmienników dla zupełnego układu kombinantów dwóch form dwójkowych $f_n$ i $\varphi_n$

indywidua takiego układu, po pomnożeniu przez odpowiednio dobraną potęgę rugownika form $f_n$ i $\varphi_n$ zamieniają się na indywidua układu zupełnego pojedyńczej formy dwójkowej rzędu 2 $(n-1)$. Znaczenie typiki dla teoryi syzygij wyjaśnimy bliżej w rozdziale następnym.

---

### *d) Syzygie.*

Obszary całkowitości oraz wymierności układów form niezmienniczych pozwalają bliżej wniknąć w pokrewieństwo algebraiczne tych form.

Jest to, oczywiście, dopiero krok pierwszy. Znowu bowiem dążyć należy do tego, by ogół istniejących związków algebraicznych lub „syzygij" objąć ze stanowiska teoryi niezmienników, t. j. by strony lewe syzygij (syzyganty) połączyć w obszary całkowitości lub wymierności o podstawie skończonej (syzygantów zasadniczych) i aby przytem spółczynniki były formami zasadniczemi pierwotnego układu form. Od tych syzygij 1-go rodzaju można się wznieść do syzygij rodzaju wyższego.

Że zadanie to jest określonem, t. j. że w rzeczy samej syzygie każdego rodzaju tworzą układ zupełny i że łańcuch syzygij przerywa się po skończonej liczbie kroków, tego dowiódł niedawno, jak już wspomniano, pierwszy Hilbert[106]).

Bieg historyczny zagadnienia był taki, że szukano najprzód możliwie największej liczby syzygij dla najprostszych form pierwotnych (lub grup podstawień). Doświadczalny charakter tych badań sprawia, że czytelnik niełatwo je rozumie, gdyż osiągnięcie rezultatów ostatecznych zależy przedewszystkiem od indywidualnej zręczności autora. Dlatego to ograniczymy się tu na przytoczeniu kilku bardziej zasadniczych „motywów głównych". Najbliższy środek do zbudowania syzygij 1-go rodzaju daje Hermite'owska teorya układów stowarzyszonych, gdyż znajomość wyrazu głównego jakiejkolwiek formy pochodnej pozwala już na otrzymanie bezpośrednie wyrażenia wymiernego przez formy stowarzyszone.

Cayley[107]) i Brioschi[108]) zastosowali tę drogę z powodzeniem do formy dwójkowej $f_5$: gdy według tej metody traktujemy indywidua układu zupełnego, to do dalszego postępowania wystarczają już procesy eliminacyjne. Cayley otrzymał w ten sposób tablicę syzygij 1-go rodzaju formy $f_5$, którą później w kilku punktach uzupełnił[109]).

Dalszy rozwój tej metody, nie pozwalającej wejrzeć należycie w konstrukcyę układu syzygij, jest połączony z wielkiemi trudnościami rachunkowemi.

Inną metodę zaproponował S t e p h a n o s[110]). Wśród form dwójkowych istnieje dziedzina, w której takie związki można przejrzyście grupować; jest to dziedzina wyznaczników funkcyjnych (pierwszych nasunięć). Jeżeli utworzymy je dla każdych dwóch form szeregu danego $f, \varphi, \ldots$, to według C l e b s c h a[111]) nietylko pierwsze nasunięcia tych nowych form „$F$“ na formy $f, \varphi, \ldots$, ale i iloczyny każdych dwóch form $F$ dają się sprowadzić do utworów prostszych, t. j. do pierwszych i drugich nasunięć form pierwotnych $f, \varphi, \ldots$

Aby to zastosować do syzygij formy np. $f_6$, postępuje S t e p h a n o s w ten sposób. Układ zupełny form $f_6$ składa się z 4 niezmienników i 8 spółzmienników charakteru parzystego, oraz z 1 niezmiennika (ten w dalszym ciągu pozostawia się na uboczu) i 13 spółzmienników charakteru nieparzystego. Ostatnie 13 form można zastąpić trzynastoma z pomiędzy 28 wyznaczników funkcyjnych, do których dochodzi się z 8 spółzmienników parzystych; pozostałe zaś 15 można wyrazić łatwo, jako funkcye całkowite 25 form zasadniczych. Z tych 15 wzorów dochodzi się za pomocą twierdzeń C l e b s c h a do zbioru syzygij pomiędzy formami parzystemi, dalsze zaś można otrzymać za pomocą eliminacyi. Podobnież dochodzimy do syzygij pomiędzy prostemi i skośnemi formami zasadniczemi. v. G a l l[112]) rozwinął „zasadę wyznaczników funkcyjnych“ i związał ją z procesem A r o n h o l d a, przez co nietylko osiągnął znaczne skrócenia rachunku, lecz i pozyskał zarazem środek wydzielenia syzygij nieprzywiedlnych lub zasadniczych z bogatej rozmaitości związków. Opierając się na pracach przedwstępnych kierunku „liczącego“ badaczy angielskich, poddał on szczegółowemu badaniu formę $f_6$, dwie formy $f_3$ i dwie formy $f_4$.

Metodą bardziej bezpośrednią posługuje się P e r r i n[113]). Już C a y l e y dla wyprowadzenia syzygij wychodził z głównych wyrazów spółzmienników, pomiędzy któremi zachodzą ściśle te same związki, co i między samemi spółzmiennikami. P e r r i n poszedł nieco dalej, gdyż zakłada, że w wyrazach głównych pierwszy spółczynnik formy pierwotnej $f_n$ jest zerem i pokazuje, że wtedy residuum charakteryzuje jednoznacznie wyraz główny (i sam spółzmiennik). P e r r i n łączy tę zasadę z zasadą form stowarzyszonych i objaśnia płodność swego postępowania na przykładach form $f_5$ i $f_6$.

Ponieważ jedna syzygia (1-go rodzaju) jest związkiem pomiędzy formami zasadniczemi $A, B, \ldots$ układu, przeto jest ona z pewnością nieprzywiedlną, jeżeli pomiędzy jej wyrazami znajduje się iloczyn postaci $AB$.

H a m m o n d[114]) zwrócił uwagę na to, że istotnie wszystkie dotychczas znane syzygie (1-go rodzaju) wykazują przynajmniej jeden taki wyraz „dwójkowy“, tak że ten właśnie wyraz służyć może do scharakteryzowania syzygii. To twierdzenie doświadczalne pozwoliło już na znaczne uproszczenia przy tworzeniu nowych syzygij. Tymczasem v. G a l l[115]) napotkał przykład: — związek pomiędzy ośmiu niezmiennikami dwóch form $f_6$, — którego, mimo wszelkich usiłowań, nie udało się podciągnąć pod twierdzenie H a m-m o n d a. Za pomocą odpowiedniej specyalizacyi spółczynników S t r o h[116]) stwierdził bezpośrednio rezultat v. G a l l a, przez co ostatecznie obalono ogólną prawdziwość wyżej wzmiankowanego twierdzenia.

Uogólniając metodę wyznaczników funkcyjnych S t e p h a n o s a i v. G a l l a, znalazł S t r o h[117]) źródło wszystkich syzygij (1-go rodzaju) w związkach pomiędzy wyższemi nasunięciami pewnej liczby form. Wszystkie podobne związki są wypływem jednej zasady (l. c. § 3), pewnego rodzaju prawa „łącznościowego“, które jest ogólnie prawdziwem dla połączenia (działania), określonego przez proces nasunięcia. W dziedzinie dwójkowej można się przytem ograniczyć na czterech (lub trzech) formach, stanowiących punkt wyjścia $f_1, f_2, f_3, f_4$; otrzymujemy wtedy dla każdej (dodatniej) wartości „wagi“ $i$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$ tożsamość (względem spółczynników form $f$):

$$[f_1, f_2, f_3, f_4]_i = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1, f_2)^{\lambda} (f_3, f_4)^{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f_1, f_4)^{\lambda} (f_3, f_2)^{i-\lambda} = 0\,,$$

która przy wszystkich 24 przemianach form $f$ przedstawia tylko istotnie różne „typy“ (l. c., § 18). Przez odpowiednią specyalizacyę form $f$, już to skutkiem równości niektórych z nich, już to przez obniżenie ich rzędu, powstają typy dalsze. Mając więc układ zupełny form zasadniczych, dość przedstawić je kolejno, jako nasunięcia możliwie najmniejszej liczby z pomiędzy nich. Do każdej formy zasadniczej można tym sposobem dobrać oznaczoną syzygię. Konstrukcya możliwie zupełnego układu syzygij przedstawia się tedy w sposób taki. Jeżeli weźmiemy dla przykładu formę pierwotną $f_6$ z układem zupełnym 26 indywiduów, to otrzymamy przedewszystkiem zbiór 20 syzygij zasadniczych (lub stowarzyszonych), które zawierają już w sobie zupełny związek algebraiczny pomiędzy 26 formami zasadniczemi. Widzimy w nich w rzeczy samej istotnie rozwinięcie H e r m i t e'owskiego wyrażenia stowarzyszonego dla form zasadniczych (przez sześć z pomiędzy nich). Każdy dalszy syzygant, po za potęgą formy pierwotnej w mianowniku, można wyrazić całkowicie, a nawet liniowo, za pomocą rzeczonych 20 syzygantów z formami zasadniczemi jako spółczynnikami [118]). Tych dalszych syzygantów nieprzywiedlnych otrzymano 184, dzięki usiłowaniom Cayley'a, S y l v e s t e r a, H a m m o n d a, P e r r i n a, v. G a l l a.

Zbiór ogólny tych 204 syzygij, który zdaje się sprawiać zamieszanie swą mnogością, podporządkowuje się tedy pod 11 różnych typów [119]) $[f_1, f_2, f_3, f_4]_i = 0$. Odwrotnie, wyprowadzenie 204 syzygij z tych 11 typów udało się urządzić w ten sposób, że każdą z nich można było obliczyć niezależnie od każdej innej, co dało możliwie największą gwarancyę pewności rezultatów.

Z podziałem na typy związał S t r o h[120]) dogodną metodą sprawdzania syzygij.

Reasumując to wszystko i uwzględniając jeszcze rezultaty otrzymane, przy pomocy funkcyj tworzących, musimy, mimo całego bogactwa rachunkowego, uważać teoryę syzygij za będącą jeszcze w zaczątku swego rozwoju[121]).

Rozległe próby w przypadkach $f_5$, $f_6$, oraz w przypadku układów jednoczesnych $(f_2, \varphi_3)$, $(f_3, \varphi_3)$, $(f_3, \varphi_4)$, $(f_4, \varphi_4)$ dały pozornie bardzo dobre granice niższe na liczbę syzygantów zasadniczych, lecz — pomijając przypadki pospolite $f_2$, $f_3$ i dwóch form $f_2$[122])—zupełność układu syzygantów nie jest nawet dostatecznie stwierdzona dla rzędu 1-go. Do tej pory nie uwzględniono prawie dziedzin wyższych i nie przystąpiono też dotąd wcale w praktyce do zasadniczego badania, kiedy w danym przypadku przerywa się łańcuch syzygij.

### *e) Kierunek liczący.*
### *Funkcya tworząca. Oznaczenie przybliżone i dokładne liczb form zasadniczych, syzygij, perpetuantów i utworów liniowo-niezależnych.*

Omówione wyżej badania, odnoszące się do obszaru całkowitości utworów niezmienniczych, powstałe przeważnie w szkole Clebscha-Gordana, znajdują, teoretycznie biorąc, swe uwieńczenie w „dowodach skończoności“, praktycznie zaś w oznaczeniu granicy wyższej dla form zasadniczych układu zupełnego, związanem z każdorazową konstrukcyą tego układu.

Jeżeli prócz tego udaje się ustalenie granicy niższej, to w przypadkach, gdy obie granice zlewają się, otrzymujemy liczbę dokładną.

Znaczenie prac angielskich[123]), zainaugurowanych przez Cayley'a i Sylvestera, polega właśnie na wyznaczaniu tych granic niższych (i istotnej konstrukcyi odnośnych form), do czego posłużyły oryginalne metody, oparte na rozwinięciu „funkcyj tworzących.“

Usiłowania te rozpoczynają się od artykułów Cayley'a[124]) w roku 1856; podamy je tu w późniejszej postaci, nadanej im przez samego Cayley'a[125]), a głównie przez Sylvestera[126]), począwszy od roku 1877.

Niechaj będzie pojedyńcza forma dwójkowa[127]) $f_i$ o spółczynnikach $a_i$. Wyraz główny $\varphi$ jakiegokolwiek spółzmiennika forma $f_i$ stopnia $j$ rzędu $g$ i wagi $w = \frac{1}{2}(ij - g)$, czyni zadość charakterystycznemu równaniu różniczkowemu:

$$\delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + ia_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Zagadnienie zasadnicze brzmi: „Ile istnieje liniowo niezależnych spółzmienników (wraz z niezmiennikami) formy $f$, dla których stopień i waga (albo też stopień i rząd) mają wartości dane?"

Jeżeli liczbę spółczynników wyrazu głównego $\varphi$ oznaczymy przez $(w:i,j)$, to dla otrzymania odpowiedzi na powyższe pytanie, dość oczywiście zmniejszyć tą liczbę o liczbę związków liniowych i liniowo-niezależnych, którym czynią zadość spółczynniki wyrazu $\varphi$ skutkiem tożsamości $\delta\varphi = 0$.

Milczące założenie C a y l e y'a, że tych związków jest właśnie tyle, ile wyrazów w $\delta\varphi$, stwierdził jako ogólnie prawdziwe S y l v e s t e r[128]) w r. 1878. Ponieważ $\delta\varphi$ jest formą ilości $a$ wagi $a-1$ i stopnia $j$, przeto szukana liczba, którą odjąć należy, wynosi $(w-1:i,j)$, liczba zaś szukana jest dana za pomocą różnicy $\Delta\,(w:i,j)$[129]):

$$\Delta\,(w:i,j) = (w:i,j) - (w-1;i,j).$$

Liczbę $(w:i,j)$ napotykamy już w badaniach E u l e r a[130]), odnoszących się do zagadnień o „rozkładzie liczb". Jeżeli jakikolwiek wyraz formy $\varphi$ jest typu $C\,a_0^{\alpha_0}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_i^{\alpha_i}$, to wykładniki $\alpha$ są związane wyłącznie dwoma związkami diofantowemi:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = j;\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \alpha_i = w,$$

tj. „liczba $(w:i,j)$ wskazuje, ile razy liczba $w$ może być utworzona jako suma $j$ liczb szeregu $0, 1, 2, \ldots, i$ z powtórzeniami". Według E u l e r a liczba ta jest spółczynnikiem przy $a^j\,x^w$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej":

$$Z = \frac{1}{(1-a)(1-a\,x)(1-a\,x^2)\ldots(1-a\,x^i)},$$

według rosnących potęg ilości $a$. Podobnież liczbę $\Delta\,(\omega:i,j)$ otrzymać można z rozwinięcia iloczynu $Z\,(1-x)$. E u l e r rozwinięcia te otrzymuje wyraźnie, twierdzenia te wszakże przyjmują i inną postać przez to, że $(w:i,j)$ jest także spółczynnikiem przy $z^w$ w rozwinięciu funkcyi $Z'$:

$$Z' = \frac{(1-x^{j+1})(1-x^{j+2})\ldots(1-x^{j+i})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)},$$

z której przez opuszczenie w mianowniku czynnika $(1-x)$ wynika druga funkcya, tworząca dla liczby $\Delta\,(w:i,j)$.

Po tych przygotowaniach możemy wyjaśnić użytek funkcyj tworzących przy istotnem wypisywaniu form zasadniczych i syzygij; przyczem ograniczymy się na jednem z dwóch rozwinięć, np. na rozwinięciu funkcyi $Z$ lub $Z\,(1-x)$.

Najprzód jest dogodnem wprowadzenie jako danych zamiast $j$ i $w$ liczb $j$ i $g = ij - 2w$ (stopnia i rzędu spółzmiennika). Posługując się oznaczeniami $(i, j : g)$ i $\Delta\,(i, j : g)$, znajdziemy po łatwym rachunku drugą z tych liczb, jako spółczynnik przy $a^j x^g$ w rozwinięciu „funkcyi tworzącej pierwotnej“ (crude):

$$\varphi\,(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^i)\,(1-ax^{i-2})\,\ldots\,(1-ax^{-(i-2)})\,(1-ax^{-i})},$$

według rosnących potęg ilości $a$. Jeżeli uskutecznimy rozkład na ułamki cząstkowe, odpowiadające pojedyńczym czynnikom mianownika i przy redukcyi opuścimy wszystkie potęgi ilości $x$ z wykładnikami ujemnemi, które dla niniejszego pytania nie mają znaczenia, to pozostanie rozwinięcie, zawierające tylko wykładniki dodatnie ilości $a$ i dające się sprowadzić znowu do postaci ułamka skończonego nieprzywiedlnego:

$$\frac{C_0 + C_1\,x + C_2\,x^2 + \ldots}{(1-ax^i)\,(1-ax^{i-2})\,\ldots\,(1-a^k)\,(1-a^{k'})\,\ldots},$$

gdzie wykładniki $i, i-2, \ldots, k, k', \ldots$ w mianowniku są liczbami całkowitemi dodatniemi ($> 0$).

Tą „funkcyę tworzącą zredukowaną“ [131]) można znowu w każdym konkretnym przypadku, przez pomnożenie jej licznika i mianownika przez odpowiednio dobrane czynniki pomocnicze, — wprawdzie często dopiero po zmudnych rachunkach — przerobić na „funkcyę tworzącą reprezentującą“. Licznik, pozostający skończonym, daje się uporządkować według potęg rosnących i dodatnich ilości $a$ i $x$; trzy zaś rodzaje czynników w mianowniku są: $(1-a^k)$, $(1-ax^i)$ i $(1-a^2x^i)$ są tak dobrane, że przez swoje wykładniki przy $a$ i $x$ „reprezentują“ najprostsze, napewno nieprzywiedlne formy układu. T a  f u n k c y a  t w o r z ą c a  r e p r e z e n t u j ą c a [132]) j e s t  w s p ó l n e m  ź r ó d ł e m  l i c z b y (i t y p u) f o r m  z a s a d n i c z y c h  i  s y z y g i j  w s z e l k i c h  r o d z a j ó w.

Dla wyczerpania tego źródła, poczęto od stopnia 3-go względem $a$ stosować rodzaj „p o s t ę p o w a n i a  s i t o w e g o“ (tamisage) w ten sposób, że dla pewnego s t o p n i a-r z ę d u („degorder“) $j, g$, tworzy się najprzód wszystkie możliwe potęgi i iloczyny najniższych form zasadniczych (z wyłączeniem reprezentującej) i liczbę ich odejmuje się od spółczynnika przy $a^j x^g$ w liczniku funkcyi tw. repr. Różnica ta dla danego stopnia—rzędu daje liczbę form zasadniczych, zwiększoną o liczbę syzygij rodzaju parzystego, a przeciwnie, zmniejszoną o liczbę syzygij rzędu nieparzystego. Ponieważ licznik przerywa się, więc suma wszystkich spółczynników dodatnich, powiększona o liczbę form zasadniczych reprezentujących, daje we wszystkich przypadkach granicę niższą dla liczby form zasadniczych. Objaśnijmy to na przykładzie. Funkcya tw. repr. formy $f_5$ jest, podług F r a n k l i n a[133]):

Mianownik: $(1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)$.

Licznik: $1+a^3(x^3+x^5+x^9)+a^4(x^4+x^6)+a^5(x+x^3+x^7-x^{11})$
$+a^6(x^2+x^4)+a^7(x+x^5-x^9)+a^8(x^2+x^4)+\ldots-a^{23}x^{11}$.

Stąd czytamy najprzód, że kolejno dla stopni-rzędów (3, 3), (3, 5), (3, 9), (4, 4), (4, 6); (5, 1), (5, 3), (5, 7); (6, 2), (6, 4); (7, 1), (7, 5); (8, 2) i t. d. musi istnieć p r z y n a j m n i e j jedna forma zasadnicza. Formy zasadniczej (8, 4) niema, ponieważ można zbudować iloczyn dwóch niższych form zasadniczych (3, 3), (5, 1) i t. d. Wogóle dojdziemy przynajmniej do 23 form zasadniczych. Z drugiej strony, dawna metoda G o r d a n a daje najwyżej 23 formy zasadnicze (tych samych stopni-rzędów); tym sposobem pytanie, dotyczące liczby i typu form zasadniczych formy $f_5$ jest ostatecznie rozwiązane.

Przechodząc do syzygij 1-go rodzaju, zauważmy, że istnienie syzygii w przypadkach (5, 11), (7, 9) i t. d. jest widocznem wprost. Dla stopnia — rzędów (6, 6), (6, 8), (6, 10), (6, 12), (6, 14), (6, 18) ma $a^j x^g$ w liczniku spółczynnik zero; ponieważ wszakże dla trzech form zasadniczych (3, 3), (3, 5), (3, 9) iloczyn każdych dwóch daje właśnie jeden z poprzednich stopni-rzędów, więc istnienie 6 (i nie więcej) syzygij pierwszego rodzaju jest stwierdzone. Podobnież dla stopnia 7-go wyprowadza się 6 syzygij (7, 7), (7, 9), (7, 9), (7, 11), (7, 13), (7, 15) i t. d.

Pierwsza syzygia 2-go rodzaju występuje w przypadku (8, 14). Funkcya tw. repr. wraz z mianownikiem wskazuje tu na 5 form liniowo-niezależnych, gdy tymczasem proces sitowy daje 10 iloczynów form zasadniczych. Lecz wiadomo, że można bezpośrednio napisać sześć syzygij nieprzywiedlnych 1-go rodzaju, mnożąc otrzymane pierwej syzygie (5, 11), (6, 8), (6, 12), (7, 9), (7, 9), (7, 9) odpowiednio przez formy zasadnicze (3, 3); (2, 6), (2, 2), (1, 5), (1, 5), (1, 5). Liczba 5 jest większa od różnicy $10-6=4$ o jedność, a zatem „6 s y z y g i j 1-g o r o d z a j u ł ą c z y j e d n a i t y l k o j e d n a s y z y g i a 2-g o r o d z a j u[134]).

Na tej drodze S y l v e s t e r[135]), na podstawie starannych rachunków F r a n k l i n a, podał granice niższe liczby syzygij 1-go rodzaju dla szeregu pojedyńczych i jednoczesnych form pierwotnych.

Według C a y l e y'a[136]) funkcya tw. repr. wymaga tylko niewielkiej modyfikacyi, aby dała nietylko liczbę form zasadniczych i syzygij lecz i same utwory.

H a m m o n d[137]) uczynił jeszcze krok dalszy w teoryi syzygij. Jeżeli dla pewnej formy pierwotnej znamy dokładnie układ zupełny form zasadniczych, wtedy funkcya tw. repr. dla form zasadniczych daje się przerobić na takąż formę dla syzygij, mianowicie mnożąc licznik i mianownik przez takie czynniki, aby mianownik stał się właśnie iloczynem czynników $1-a^j x^g$, odpowiadających wszystkim formom zasadniczym. Stąd można już wyczytać granicę górną dla każdego dowolnego stopnia-rzędu przy syzygiach 1-go rodzaju; granicę tę należy porównać z granicą niższą Sylvestera. W przypadkach szczególnych ($f_5$ i $f_6$), z niewielkim wyjątkiem, w którym rozstrzyga rachunek bezpośredni, przekonano się o zgodności obu granic.

Zanim rozstaniemy się z funkcyą tw. repr. Sylvestera, wspomnijmy jeszcze o godnem uwagi zjawisku, występującem we wszystkich przypadkach, w których możliwem jest ostateczne oznaczenie form zasadniczych. Jest to tak nazwany „postulat zasadniczy"[138]) Sylvestera, według którego dla każdego stopnia-rzędu występowanie form zasadniczych i występowanie syzygij mają się wzajemnie wyłączać, co oczywiście uprościłoby znacznieteoryę form. Hommond[139]) napotkał wszakże przykład (przy stopniu-rzędzie (53) formy $f_7$), sprzeczny z postulatem, i poznał wkrótce potem, że powód tych wyjątków tkwi w pewnej tożsamości zwrotnej, bezpośrednio wypływającej z równania różniczkowego dla źródeł.

Wspomnijmy jeszcze w krótkości, że i dla szczególnych rodzajów utworów niezmienniczych zbudowano odpowiednie funkcye tworzące; tak np. „perpetuanty"[140]), wprowadzone przez Mac-Mahona. Tu funkcya tworząca pozwala wprost na wyznaczenie liczby utworów nieprzywiedlnych. Stroh[141]) podał nietylko przejrzysty dowód na to przy pomocy oryginalnego uogólnienia symboliki Aronholda-Clebscha, lecz wyprowadził nadto proste wyrażenie tych liczb i pokazał, ze odnośne perpetuanty można wprost przedstawić symbolicznie.

Jordan i Sylvester zajmowali się wyprowadzeniem wzorów teoretycznych dla granic wyższych stopnia i rzędu tworów niezmienniczych w dziedzinie dwójkowej. Jordan[142]) wychodzi ze związków pomiędzy spółzmiennikami 3-go stopnia, jakich użył był Gordan w swoim dowodzie skończoności i opiera się w dalszym ciągu w gruncie rzeczy na metodzie Gordana, przy pomocy której z dwóch układów zupełnych dla dwóch form dwójkowych wyprowadza ich układ jednoczesny. Nasunięcia, które należy pozostawić, są określone zapomocą rozwiązań najmniejszych (dodatnich) dwóch równań diofantowych. Jordan zbadał bliżej teoretycznieliczbowo te rozwiązania i otrzymał kolejno coraz niższe liczby jako granice wyższe. Aby wypowiedzieć rezultat ostateczny, do którego doszedł[142]), wyobraźmy sobie dowolny szereg form pierwotnych, których rzędy są $\leqq n$. Każdy spółzmiennik układu zupełnego składa się liniowo z iloczynów typów form trojakiego gatunku; w każdym z nich istnieją granice górne dla stopnia i rzędu. Te granice są prostemi funkcyami całkowitemi liczby $n$, ale zawierają wszystkie czynniki $3^{\varrho+1}$, gdzie $\varrho$ określa się przestępnie jako największa liczba całkowita, zawarta w ułamku $1 + \frac{\log \frac{1}{4} n}{\log \frac{4}{3}}$. Np. w przypadkach od $n = 1$ do 12 (z wyjątkiem 11) dla rzędu odnośnych spółzmienników otrzymujemy następujące granice wyższe: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, 34; granice te nawet mogą być faktycznie osiągnięte, jak to pokazują tablice Sylvestera i Franklina dla układów pojedyńczej formy $f_n$ [144]).

Sylvester [145]) podał bez dowodu podobne jeszcze prostsze wzory, zawierające tylko spółczynniki liczbowe wymierne, lecz za to prowadzące do liczb w istocie wyższych. Potem podał Sylvester [146]) metodę otrzymania granicy dostatecznie nizkiej na liczbę wszystkich utworów układu zupełnego formy pierwotnej rzędu parzystego. Granica ta zależy od sumy algebraicznej spółczynników jego funkcyi tw. repr.

Zamkniemy ten rozdział, podając uogólnienia twierdzenia Cayley'a-Sylvestera „dotyczącego liczby utworów liniowo-niezależnych (dziedziny dwójkowej) o danych stopniach-rzędach“ do form o większej liczbie szeregów $n$ zmiennych.

Podstawy przygotowawcze do rozwiązania tego ważnego i trudnego zagadnienia położył Capelli [147]). Twierdzenie, z którego wychodzi, uczy, jak rozwinąć formę $Fn$ szeregów o $n$ zmiennych:

$$x_i', \; x_i'', \; x_i''', \ldots, x_i^{(n)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

według potęg wyznacznika $\Delta$ ilości $x$, aby spółczynniki były biegunowemi form, zawierających o jeden szereg zmiennych mniej i powstających z formy $F$ przez proste zastosowanie procesu biegunowego. Procesy biegunowe odnoszą się do zmiennych i otrzymują się z samych procesów postaci $D_{xy} = \Sigma y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ za pomocą powtarzania i kombinacyi. Jeżeli to twierdzenie zasadnicze zastosujemy do pewnego utworu $\varphi$, zależnego niezmienniczo od szeregu form pierwotnych $f_1, f_2, \ldots$ z dowolną liczbą (spółpodstawieniowych) szeregów zmiennych, to $\varphi$ da się przedstawić jako agregat iloczynów „$\Omega\Phi$“ spółzmienników tożsamosciowych z utworami niezmienniczemi pewnych form (jednorodnych i izobarycznych) $\Phi$, które zawierają co najwyżej $n-1$ szeregów zmiennych i czynią zadość $n-1$ równaniom różniczkówym charakterystycznym:

$$\text{I.} \qquad D_{x'x''} \Phi = 0, \; D_{x'x'''} \Phi = 0, \; \ldots, \; D_{x'x^{(n)}} \Phi = 0$$

lub następującym [148]):

$$\text{I}'. \qquad D_{x'x''} \Phi = 0, \; D_{x''x'''} \Phi = 0, \; \ldots, \; D_{x^{(n-1)}x^{(n)}} \Phi = 0.$$

Zadanie pierwotne sprowadza się tedy do zadania prostszego: wyznaczyć liczbę liniowo-niezależnych form $\Phi$, którym można jeszcze przez pomnożenie przez odpowiednio dobraną potęgę wyznacznika $\Delta$ nadać wagę stałą, np. zero; mianowicie takich form, aby miały z góry dane stopnie względem spółczynników formy $f$ i z góry dane rzędy $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ w odnośnych szeregach zmiennych $x$.

Jeżeli $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ oznacza liczbę spółczynników dowolnych formy $\Phi$, to, jak dowodzi autor, warunki stawiane jej przez pojedyńcze z równań I', np. przez pierwsze, są od siebie liniowo-niezależne, a liczba ich wynosi $\varphi(\vartheta_1-1, \vartheta_2+1, \vartheta_3 \ldots \vartheta_n)$. Jest to właśnie bezpośrednie uogólnienie twierdzenia Cayleya-Sylvestera[149]).

Przeciwnie, warunki stawiane przez dwa lub więcej równań I' nie są już liniowo-niezależnemi i dlatego Capelli ogranicza się na podaniu granicy niższej dla rzeczonej liczby.

Rozwiązanie zupełne tego zadania, a zatem i poprzedzającego, zawdzięczamy Deruyts'owi[150]). Obchodzi on pytanie bezpośredniego użytku równań różniczkowych, sprowadzając pytanie o liczbie form $\Phi$ do pytania, dotyczącego „wyrazów głównych". Napisawszy te wyrazy symbolicznie, spostrzegamy, że odnośnie do niniejszego pytania, zastąpić je można przez „półniezmienniki" form pierwotnych liniowych; w takim zaś razie wystarcza zbadanie układu równań liniowych i diofantowych. Autor stwierdza, że rozwiązania tych równań w liczbie ogólnej „$\Pi$" są liniowo niezależne. Z drugiej strony dowodzi, że liczba pierwotnie szukanych form $\varphi$ zgadza się z liczbą wyżej wspomnianych form iloczynowych $\Omega\varphi$. Jeżeli wydzielimy jakąkolwiek pojedyńczą taką formę $\Phi$ z oznaczonemi liczbami wagowemi, to celem oznaczenia odpowiedniej liczby „$\Pi'$" form $\Omega\Phi$ stosować można postępowanie zupełnie analogiczne do użytego dla powyższej liczby $\Pi$. Jeżeli więc ostatecznie utworzymy sumę iloczynów biorąc po dwie z obliczonych liczb $\Pi$, $\Pi'$ dla wszelkich możliwych kombinacyj liczb wagowych form $\Phi$ — te ostatnie charakteryzują znowu rozwiązania równania diofantowego, t. z. „równania wagowego" — to będziemy mieli w ten sposób prawidło do wyznaczenia liczby utworów niezmienniczych liniowo niezależnych $\varphi$, posiadających stopnie dane co do spółczynników form pierwotnych i rzędy dane w dowolnej liczbie spółpodstawieniowych szeregów zmiennych. Ta ostatnia liczba może być mniejsza, równa lub większa, niż liczba szeregów zmiennych w formach pierwotnych.

## PRZYPISY.

[1]) Porówn. Kronecker „Festschrift" (1882), s. 14. Wyrazu „podstawa" („Basis"), użyto w tekście w znaczeniu zmienionem. Wyrażenie „(zupełny) układ form zasadniczych", lub krótko: „układ (zupełny)" pochodzi od Gordana, Journ. f. Math., LXXIX, s. 343 (1868); na str. 346 tamże mowa jest o układzie wzorów „zasadniczych" (System von

Fundamental formeln). Istnieją też obszary całkowitości bez podstawy skończonej (Porów. Hilbert, Göth. Nachr., 1891, s. 232, 233), te wszakże wyłączamy.

[2]) Collect. Papers, II, s. 250—275. Porówn. do tego uwagi Cayley'a w IX-ym „Memoir", Phil. Trans., LCXI, s. 17—50 (1870).

[3]) Journ. f. Math., LXIX, s. 323—354 (1868). Według ustnej relacyi Gordana do badania tej kwestyi pobudził go Jordan. Porówn. przedstawienie dowodu Gordana przez Cayley'a, IX Mem. Transach., Lon. 1870, zwł. s. 45—50.

[4]) l. c., s. 343 i 346.

[5]) l. c., s. 327. W tem tkwi postęp w porównaniu ze skomplikowaną symboliką angielską.

[6]) l. c., s. 328.

[7]) l. c., s. 333.

[8]) l. c., s. 339.

[9]) Math. Ann., II, s. 227—280 (1870); V, s. 595—601 (1872). O kombinantach patrz tamże V, s. 95—122 (1872).

[10]) O formie sześciennej Math. Ann., I, s. 90—128 (1869), o dwukwadratowej w dziele Clebscha-Lindemanna, I, s. 291 (1875). Porówn. szczegółowe wywody w Math. Ann., XIX, s. 529—551 (1882).

[11]) Math. Ann., V, s. 595. Zasadę „układów skombinowanych" zastosował później Mertens do pojedyńczych klas form trojkowych i czwórkowych, Wien. Ber., XCV (1887) i nast. Porówn. uwagi w „Programie" Gordana, s. 50.

[12]) Lipsk u Teubnera. Porówn. przejrzysty referat Nöthera w Fortschr. d. Math., VII, s. 50—52.

[13]) Do tego celu służą zwłaszcza zawarte w pojęciu procesu fałdowania pojęcia pomocnicze: Stufe (gatunek), Rang (porządek), Dimension (wymiar).

[14]) l. c., s. 7.

[15]) Math. Ann., XVII, (1880), XXXI, (1888). Porówn., II, A. b.

[16]) l. c., § 19.

[17]) Dowód w t. II, § 20, 21. Reducenty stosowane są z korzyścią już w „Programie" (§ 8).

[18]) Fałdowanie jest w istocie swej nasunięciem, zastosowanem do iloczynów symbolicznych.

[19]) Klasa $A_1$ dla wszystkich rzędów składa się z utworów $f$, $(f,f)^2$, $[f, (f,f)^2]$. Jeżeli warunek $(f,f)^n = 0$ spełnia się tożsamościowo, to $A_1$ — po za przybywającym jeszcze niezmiennikiem,—przedstawia układ zupełny form $f$. Ma to ważność dla teoryi ciał foremnych. Porównaj I, B, b.

[20]) Przy dowodzie tego twierdzenia geometrycznego ujawnia się wartość pojęcia układów „względnie zupełnych", gdyż układ $A_k$ według definicyi jest względnie zupełny mod. $(a\,b)^{2k+2}$, gdy tymczasem układ $B_k$ jest takim mod. $(a\,b)^{2k+4}$. Przez nasunięcie obu układów—i tu właśnie tkwią ukryte właściwe trudności—otrzymuje się układ spółzmienników form $f$ względnie zupełny mod. $(a\,b)^{2k+1}$, (który posiada jako moduł najniższy $(a\,b)^{2k+1}$), t. j. układ $A_{k+1}$.

[21]) Dla obu form jest $A_0 = f$, $B_0 = (f,f)^2$, $A_1 = f, (f,f)^2, [f, (f,f)^2]$. Dla $f_5$ jest $\varphi_1 = (f,f)^4$ formą kwadratową, a więc $B$ składa się z $\varphi_1$ i z wyróżnika. Nasunięcia formy $A_1$ na $B$ daje układ zupełny (porówn. l. c., s. 237).

Forma $\varphi_1$ formy $f_6$ jest dwukwadratową, a więc $B_1$ składa się z układu zupełnego $\varphi_1$. Nasunięcia formy $A_1$ na formę $B_1$ prowadzą do formy $A_2$, a ponieważ $\varphi_2 = (f,f)^6$ jest niezmiennikiem, przeto $A_2$ obok $\varphi_2$ jest zupełnym układem formy $f_6$ (porów. l. c., s. 275).

[22]) Torino Atti, XVI, t. 73—80.

[23]) Porówn. zwłaszcza pracę Peano w Giorn. Battag., XX, s. 79—101 (1882). Jeżeli przyrównamy do zera formę dwójkową o dwóch szeregach ilości zmiennych i określimy

odpowiedniość dwóch elementów geometrycznych, szeregi zmiennych poddają się tu podstawieniom niezależnym od siebie.

[24]) Erlanger Ber., 1887; Math. Ann., XXXIII, s. 372—389 (1888). Dla form kwadratowych twierdzenie to i należący do niego układ podał najprzód Study, pobudzony przez Gordana do zbadania pytania ogólnego (por. Study, Erlang. Ber., 1887, s. 385—388).

[25]) Torino Atti, XVII, s. 580—586.

[26]) Patrz np. Clebsch, Binäre Formen, § 58.

[27]) Batt. Giorn., XX, s. 293—301 (1882).

[28]) Zresztą najnowsze badania Hilberta (patrz niżej) mają na celu wysnucie z ogólnych twierdzeń procesów wymiernych i przejrzystych, służących do istotnego obliczania układów zupełnych; obecnie nie można przewidzieć trudności rachunkowych, jakie nasunie to obliczanie.

[29]) Journ. f. Math., C, 223—230 (1886), w Wien. Ber., XCVII, s. 1—6 (1889) uprościł on dowód o tyle, że nie potrzebuje już wnioskowania z $n$ na $n+1$

Należy tu wspomnieć o dwóch dowodach skończoności, pochodzących od Jordana i Sylvestera, a podających odrazu granicę wyższą dla stopnia i rzędu utworów układu formy dwójkowej; pierwszy z tych dowodów ma punkt wyjścia w diofantowych równaniach Gordana; drugi w modyfikacyi postępowania Cayley'owskiego. Porówn. Jordan, C. R., LXXXII (1876), LXXXVII (1878), Liouville J. (3), II, s. 177—233 (1876), V, str. 345—379 (1879); Sylvester, Proc. of London, XXVII, s. 11—13 (1878), C. R., LXXXVI, s. 1437—1441, 1491—1492, 1519—1522 (1878). Porówn. wyżej II, A.

Zasługuje jeszcze na wspomnienie oryginalny dowód (dla form dwójkowych) Cayley'a, oparty na użyciu niezmienników niewymiernych, gdzie wszakże zasadnicze twierdzenie pomocnicze pozostało bez dowodu (Quarterly Journ., XVII, s. 137—147, 1882).

[30]) Twierdzenie to pochodzi od Gordana, Math. Ann., VI, s. 23—28 (1875), Vorles. I, § 15.

[31]) Math. Ann., XXXIII (1884), s. 223—226. Do tego odnosi się nota Cayley'a, (Math. Ann., XXIV (1889), s. 319—320, w której zaproponowaną jest odmiana procesu Hilbertowskiego. Popełniony tu błąd w rozumowaniu sprostował Petersen w Math. Ann., XXXV (1890), s. 110—112.

Hilbert w referacie o obu ostatnich notach (Fortschr. d. Math., XXI, s. 104) wyraźnie zastrzega się przeciwko mniemaniu, jakoby dowód jego wymagał rozszerzenia lub dopełnienia przy stosowaniu go do spółzmienników.

[32]) Math. Ann., XXXVI, s. 473—534. Porówn. poprzednie komunikaty w Gött. Nachr., 1888, Nr. 16, s. 450—457; 1889, Nr. 2, s. 25—34 i Nr. 15, s. 423—430. W Math. Ann., XLI, s. 469—490, 1893 artykuł Story'ego o teoryi Hilberta. Dalej London M. S. Proc., XXIII, s. 265—277, 1892. Rozprawy Hilberta, Math. Ann., XLII, s. 313—373, 1893 i Gordana, tamże, 132—142.

[33]) Przyjęcie takiego „dowolnego“ prawa dla szeregu nieskończonego występuje często w zasadach matematyki, porówn. np. szeregi zasadnicze G. Cantora, wprowadzone celem uzasadnienia teoryi liczb niewymiernych. Jeżeli chcemy, to i szereg form Hilberta przedstawia właśnie pewien rodzaj niewymierności, lecz ugruntowany zresztą na istocie samego pytania. Dodać wprawdzie należy, że istnieje kierunek w nauce, odrzucający wogóle procesy nieskończone tego rodzaju.

[34]) Istotna zaleta nowszych metod Hilberta polega na tem, że wiążą one teoryę form najściślej z teoryą układów modułowych Kroneckera, oraz z teoryą ciał algebraicznych Dedekinda i Webera.

[35]) Porówn. przypisek 33-i.

[36]) Łatwo widzieć, że opisane wyżej procesy można wykonywać i w kierunku odwrotnym, mianowicie, gdy od spółczynników, wolnych od $x_n$, przechodzimy do spółczynników, pomnożonych przez pierwszą potęgę zmiennej $x_n$ i t. d. Lecz przytem można pominąć założenie, że najwyższą zachodzącą potęgą jest potęga $(r-1)$—a; można od tej

formy normalnej zupełnie odwrócić uwagę i pozwolić wykładnikowi zmiennej $x_n$ przybrać wartość dowolnie wielką. Wypadnie tu wprawdzie najprzód szereg nieprzerwany form, przez które wszystkie formy danego szeregu dają się wyrazić liniowo. Jeżeli jednak zużytkujemy założenie, że twierdzenie, w mowie będące, stosuje się już do form o $n$—1 zmiennych, to każdy szereg nieskończony da się zastąpić skończonym.

Mimo, że ta zmiana pierwotnego postępowania jest bardziej skomplikowaną, ma ona tę wyższość, że zamiast procesów wymiernych wprowadza się jedynie połączenie całkowite i całkowito-liczbowe danych spółczynników, co daje możność bezpośredniego zużytkowania tych wyników dla teoryi liczb. Takiem jest jądro dowodu, wyłożonego w drugim rozdziale pracy Hilberta.

[37]) Przy stosowaniu tej metody w przypadku konkretnym należy zważyć, że prawo, według którego postępują formy w pojedyńczych kolumnach spółczynników wogóle jest całkiem odmiennej natury niż pierwotne prawo szeregu.

[38]) Kronecker w swojem piśmie jubileuszowem (Festschrift), s. 18, rozwija podobne twierdzenie dla jednej zmiennej niejednorodnej. Gdybyśmy wszakże jego wzór uczynili jednorodnym, to funkcya całkowita po prawej ręce otrzymałaby mianownik, mianowicie potęgę zmiennej, sprawiającej jednorodność. U Kroneckera nie ma tedy obszaru całkowitości, lecz jest tylko obszar wymierności.

[39]) Uporządkowanie niezmienników na szereg daje się według Hilberta ominąć. Z układu niezmienników formy $f$ wyjmijmy dwie formy $i_1$, $i_2$, niepodzielne jedna przez drugą. Następnie wybierzmy trzecią formę $i_3$, która nie daje się wyrazić jako kombinacya liniowa $A_1 i_1 + A_2 i_2$ dwóch poprzednich, następnie czwartą, nie dającą się złożyć liniowo z form $i_1$, $i_2$, $i_3$, i t. d. Szereg tak powstających form $i$ musi się przerwać według pierwszego twierdzenia pomocniczego (l. c., s. 522).

Postępowanie to, dające się bezpośrednio stosować do jakichkolwiek układów form (porówn. s. 478), jest w istocie swej związane z założeniem, że formy układu należą do określonego obszaru wymierności.

Dowód symboliczny Hilbertowskiej metody otrzymywania utworów niezmienniczych (w dziedzinie trójkowej) podał H. White (Am. J., XIV, s 253—290, 1892).

[40]) Twierdzenie to dla $q = 0$ tkwi już implicite w dowodzie (drugim) twierdzenia głównego symboliki (Gordan, Vorlesungen, II, § 9), że każdy niezmiennik formy dwójkowej daje się przedstawić pod postacią iloczynu symbolicznego. Jest godnem uwagi, że jądro tego dowodu jest niesymbolicznem.

Mertens dowiódł tego samego twierdzenia w Wien. Ber., XCV, s. 942—991 (1887) i stosował je następnie systematycznie w szeregu prac w Wien. Ber., w celu otrzymania układów zupełnych na drodze niesymbolicznej, porówn. II, A, b.

Dla form pierwotnych nieliniowych twierdzenie w postaci podanej w tekście znajduje się już u Clebscha, Journ. f. Math., LIX, s. 7 i nast.

[41]) Porówn. II, A. d.

[42]) l. c., s. 492. Porówn. notę Schönfliesa, Gött. Nachr., 1891, str. 339—344.

[43]) Z punktu widzenia teoryi form nie można nic powiedzieć przeciwko orzeczeniu Hilberta; jeżeli wszakże punkt widzenia grupowy będziemy uważali za równouprawniony, to za równanie zasadnicze pytania przyszłości należy uważać następujące: wyznaczyć wszystkie zupełne „podukłady“ utworów niezmienniczych szeregu form pierwotnych, t. j. takich rozmaitości częściowych całego układu niezmienniczego, które same już mają charakter układu zupełnego. Porówn. II, A, b.

O dalszych rezultatach omawianej pracy Hilberta, a zwłaszcza o pojęciu zasadniczem „funkcyi charakterystycznej modułu“, patrz obszerne sprawozdanie referenta w Fortschr. d. Math., t. XXII.

[44]) Gött. Nachr., 1891, s. 232—242; 1892, s. 2—12. W dalszym ciągu (Gött. Nachr., 1892, Nr. 12, s. 11) Hilbert rozwiązuje ogólnie ważne zadanie, podane w tekście a doty-

czące wyznaczenia układu utworów niezmienniczych dla szeregu form pierwotnych, przez które to utwory dają się wyrazić wszystkie inne, jako funkcye całkowite algebraiczne. Zadanie sprowadza on do znalezienia wszystkich form zerowych $m$-go rzędu o $n$ zmiennych (t. j. form, których niezmienniki znikają tożsamościowo) i to się daje uskutecznić przy pomocy pewnej postaci kanonicznej tych form. (Przykładowo zostały obliczone wszystkie formy zerowe kanoniczne aż do rzędu szóstego).

Ustanowienie tedy „układów pełnych" nie przedstawia istotnych trudności.

[45]) Festschrift, § 6.

[46]) Wykład, miany w r. 1891 na zgromadzeniu przyrodników w Halli. Porówn. sprawozdanie urzędowe, str. 61—62.

[47]) Patrz II, B, b.

[48]) Dla ilustracyi Hilbert przytacza twierdzenie przygotowawcze: „Wszystkie niezmienniki zasadniczej formy trójkowej dają się przedstawić jako funkcye całkowite algebraiczne tych niezmienników, których waga nie przekracza liczby $9n(3n+1)^2$". (Gött. Nachr., 1892, s. 12). Z ustnych informacyj wiemy, że Gordan znalazł ogólne wyrażenie dla granic wyższych.

[49]) Najbardziej nauczające przykłady tego rodzaju dają układy jednoczesne, należące do $(f_3, \varphi_3)$, $(f_3, \varphi_4)$, $(f_4, \varphi_4)$ i układ formy $f_8$.

Dla przypadku $(f_3, \varphi_3)$ wypowiedział najprzód Sylvester, C. R., LXXXIX, s. 828, opierając się na metodzie liczącej (porów. II, A, e), że dwa spółzmienniki listy Salmona-Clebscha muszą być przywiedlnemi. Przy tem założeniu d'Ovidio podał w 1880 (Atti di Tor., XV, s. 267—270) ich zestawienie; wynik ten potwierdził Gerbaldi (tamże) za pomocą metody, niezależnej od powyższego założenia. Następnie znów Sylvester, C. R., LXXXVII, s. 445—448, 477—481 (1878) zmniejszył układ Gordana-Gundelfingera $(f_3, \varphi_4)$ o trzy formy. On także zapowiedział zmniejszenie układu Gordana-Bertini'ego $(f_4, \varphi_4)$ o dwie formy w C. R., LXXXIV, s. 1285—1289 (1877), Am. J., II, s. 324—329 (1879). Rachunek ten wykonał d'Ovidio, Atti di Tor., XV, s. 301—304 (1880). Potwierdzenie znaleść też można u Stroha, Math. Ann., XXII, s. 290—296 (1883).

Co się wreszcie tyczy przypadku $f_8$, to v. Gall w Math. Ann., XVI, s. 456 (1880) udowodnił, że liczba indywiduów układu tej formy zgadza się z podaną przez Sylvestera (C. R., LXXXIV, s. 240—244, 532, 534, (1877)), prócz jednej formy, której nie udało mu się sprowadzić do innych, lecz której przywiedlność za pomocą długich rachunków, C. R., XCIII, s. 192—196, 365—369, Am. J., s. 62—85 (1881), wykazał. Dopiero Stroh, l. c., bezpośrednio pytanie to rozstrzygnął; metodę swoją, opierającą się na związkach pomiędzy nasunięciami pewnego rzędu (porówn. II, A, d), później uzasadnił ogólnie. Math. Ann., XYXI, s. 444—454 (1888).

[50]) Porówn. II, A, e.

[51]) Journ. f. Math., LXIX, s. 323—354. Porównaj też Maisano: rozprawy w Rom. Acc., L. Mem. (3), XIV, 1883; XIX, 1884.

[52]) Math. Ann., XVII, s. 31—52, 139—152, 456 (1880)

[53]) Math. Ann., XXXI, s. 318—334 (1888). Porów. Krey. Rozprawa, Striegau, 1874.

[54]) Program, Stuttgart, 1869, s. 1—43. Według uwagi tu uczynionej układ wzmiankowany pochodzi od Gordana.

[55]) Program, Darmstadt, 1880.

[56]) Program, Lemgo, 1873.

[57]) Math. Ann., II, s. 217—281 (1870).

[58]) Batt. Giorn., XIV, s. 1—14 (1876); przedrukowane w Math. Ann., XI, s. 30—41 (1877).

[59]) Patrz przedstawienie ogółu tych badań w Clebscha „Theorie der binären Formen", Lipsk, 1872 i uproszczenia w Gordana „Vorlesungen", II, Lipsk, 1887.

[60]) S. M. F. Bull., XV, s. 45—61 (1887).

[61]) Math. Ann., I, s. 90—128 (1869). Co do teoryi patrz jeszcze Math. Ann., I, str. 359—400, XVII, s. 217—233 (1880); porówn. wyczerpujące przedstawienie u Clebscha i Gordana, Math. Ann., VI, s. 436—512 (1873). Prostszą konstrukcyę układu zawdzięczamy Gundelfingerowi, Math. Ann. IV, str. 144—168 (1871), porówn. tamże, I, s. 442—447 (1872).

Cayley w przypadku normalnej formy Hessego dla $C_3$: $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$ podał wyrażenie utworów przy pomocy spółczynników, Am. J., IV, s. 1—16 (1881); tu znajduje się także zupełny przegląd dawniejszej literatury.

Nakoniec Dingeldey, Math. Ann., XXXI, s. 157—176 (1888), podał analogiczny przegląd dla układu (stosowanego w teoryi funkcyj eliptycznych) formy kanonicznej $xy^2 - 4z^3 + g_2 x^2 y + g_3 x^3$, oraz formy specyalnej $axz^2 - 4by^3$. Znikanie tej ostatniej odpowiada krzywej $C_3$ z punktem zwrotu.

[62]) Wien Ber., XCVII, s. 437—518 (1888). Co do metody stosowanej patrz poprzednią pracę tegoż autora w Wien. Ber., XCV, s. 942—991 (1887).

[63]) Math. Ann., XVII, s. 217—233. W tablicy końcowej spisane są 54 formy układu zupełnego. Skończoność układu ogólnej krzywej $C_4$, według Gordana, wskazaną już jest w Clebscha-Lindemanna „Vorlesungen", I, s. 174, nota (1875).

[64]) Batt. G., XIX, s. 197—237 (1881). Znajdują się tu także formy 6-go stopnia z wyłączeniem form, zawierających jednocześnie $x$ i $u$. Porówn. artykuł tegoż autora w Pal. Rend., I, s. 54—56 (1886).

[65]) Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc.", I, s. 288 i nast. (1875). Tabelę 20 form układu znajdujemy na str. 291. Math. Ann., XIX, s. 529—552 (1880).

[66]) S. M. F. Bull., XVIII, s. 1—80 (1890). Zadanie o utworzeniu zupełnego układu dla dwóch $C_2$ sprowadza Perrin do zadania, poprzednio przez siebie rozwiązanego (patrz przypisek 60), mianowicie do utworzenia zupełnego układu czterech form dwójkowych, z których dwie są liniowe, dwie zaś kwadratowe.

Toż samo odnosi się do syzygij. Porówn. szczegółowe sprawozdanie referenta w Fortschr. d. Math., XXII. Zasadę tej metody zastosował najprzód Brioschi do formy $C_4$ (Annali di Mat. (2), VII, s. 202—216, 1876); występuje ona też jako podstawowa w badaniach Brilla i Forsytha. Można ją wprost sformułować w ten sposób, że gdy formę trójkową $C_n$ $(x_1, x_2, x_3)$ uporządkujemy według potęg ilości $x_3$, to utwory niezmiennicze formy $C_n$ są pewnemi agregatami utworów (dwójkowych) jednoczesnych niezmienniczych, należących do spółczynników rozwinięcia. Zresztą każdy z czterech wymienionych autorów przedstawia tę zasadę, niezależnie od innych.

Co do układu dwóch form $C_2$ patrz także Osgood, Am. J., XIV, s. 262—273 (1892).

Co do związków pomiędzy formami układu porówn. jeszcze Rosanes, Math. Ann., VI, s. 264 i nast. (1875), jako też Gerbaldi, Annali (2), XVII, s. 161—196 (1889); w ostatniej pracy dyskutowane jest szczegółowo związane z tem pytania o rzeczywistości.

[67]) Batt. G., XXIV, s. 141—157 (1886). Układ obejmuje 127 utworów.

[68]) Wien. Ber., XCVIII, s. 691—739 (1889). Mertens podał też wyraźnie zupełny układ (47 utworów), należący do trzech form $F_2$. Wien. Ber., 1896, s. 367—384.

[69]) Wien. Ber., XCVII, s. 519—536 (1888).

[70]) Math Ann., XXXIII, s. 372—389 (1889). Układ jest złożony z 38 form. Porówn. poprzednie noty Study'ego i Gordana w Erl. Ber., 1889. Metoda daje się rozciągnąć na formy wyższe. Układ zupełny niezmienników podał już wcześniej Capelli, Batt. G., XVIII, s. 69—148 (1879).

Le Paige badał formy trójliniowe i czworoliniowe z pomiędzy form dwójkowych ze zmiennemi spółpodstawieniowemi, C. R., XCII, s. 1048—49; 1103—5; XCIII, s. 264—265, 509—512 (1881); C. R., XCIV, s. 69—71; Torino Atti, XVII, s. 299—326 (1882). Badania te miały przeważnie na widoku cel geometryczny i nie dążyły do zupełności.

[71]) Math. Ann., I, s. 359—400 (1869). Po obliczeniu forma pośrednia tożsamościowa $u_x$ zawiera układ zupełny 7 form. (Patrz zwłaszcza str. 373). Metoda daje się zastosować do form wyższych.

[72]) Wien. Ber., XCVIII, s. 13—32 (1890).

[73]) Należą tu np. takie podukłady, których formy zawierają tylko część zmiennych odnośnej dziedziny, dalej klasy układów Gordanowskich $A_1$, $A_2$, ... („Vorlesungen, II, § 21) i inne. (Porówn. wyżej przypisek 43).

[74]) Math. Ann., V, s. 95—122 (1875). Według ustnej relacyi Gordan rozwinął w ostatnich czasach zupełny układ kombinantów dwu form $C_2$ („stożkowych"); liczba form okazała się względnie nieznaczną.

[75]) C. R., XCVII, s. 27—31 (1883). Otrzymano 26 form układu.

[76]) Math. Ann., XXXV, s. 433—456 (1889). Math. Ann., XXXVI, s. 134—153; XXXVII, s. 229—272 (1890).

[77]) Porówn. z tem równoległe pod pewnym względem grupowo-teoretyczne badania Lagrange'a, odnoszące się do wzajemnej zależności wymiernej funkcyj „podobnych". Dalsze rozwinięcia tych myśli u Königa, Math. Ann., XVIII, s. 69—77 (1881).

[78]) Porówn. podane we wstępie do tej pracy uwagi o badaniach Hermite'a. Igel (Wien. Gerold., 1889) uzasadnił innym sposobem teoryę form stowarzyszonych, mianowicie w związku bezpośrednim z rozwiązywaniem równań algebraicznych.

[79]) Gött. Nachr., 1870, s. 405—409, lub Math. Ann., III, s 265—267 (1871). Cayley szczegółowo badał przedstawienie typowe formy $f_5$ na podstawie form stowarzyszonych Clebscha, X. Mem. Phil. trans., 1878, s. 603—661.

[80]) Journ. f. Math., LXXIV, s. 87—91 (1861). Porów. przedstawienie uproszczone tegoż autora u „Salmona-Fiedlera", s. 459—463 (1877). Gordan w ostatnich czasach podał odwrócenie układu równań Clebscha-Gundelfingera, Math. Ann., s. 1—24 (1892), przedstawiwszy formy $\varphi$ Hermite'a, jako funkcye całkowite wymierne form $\psi$, $\chi$. Można z góry poznać, w jaki sposób pierwsze formy dają się wyrazić jako iloczyny ostatnich; zadanieześrodkowuje się w szukaniu spółczynników wymiernych $C$ tych iloczynów. Porówn. Bärthlein, Rozpr., Erlangen, 1887, gdzie obliczanie kolejne spółczynników $C$ poprowadzono dalej niż u Clebscha. Jest godnem uwagi, że zupełnie też same ilości $C$ służą do rozwiązania dwu następujących zagadnień podstawowych: 1) Wyrazić spółczynniki formy pierwotnej dwójkowej, jako funkcye wymierne dwu pierwszych spółczynników, oraz głównych wyrazów form $\psi$, $\chi$. 2) Wyrazić te spółczynniki jako funkcye wymierne dwu pierwszych z nich, oraz obu pierwszych spółczynników formy $\psi$.

Spółczynniki $C$ zależą najprzód od pewnego specyalnego układu równań kwadratowych; Gordanowi udało się układ ten zmienić na liniowy względem spółczynników $C$.

Tym sposobem rozwiązano także i zadanie dalsze, dotyczące wyrażenia wymiernego wszystkich całkowito-wymiernych rozwiązań równania różniczkowego dla dwójkowych „niezmienników różniczkowych" przez najprostsze z tych rozwiązań. (Porów. Forsyth, Mess., Nr. 202, 1888).

[81]) C. R., LXXXVI, s. 448—450 (1878), Am. J., I, s. 118—124 (1878).

[82]) Wien. Ber., lipiec, 1891, 29 s., Paźdz., 1891, 5 s. Zdaje się, że wyrażenie $\Phi_n = 0$ zgadza się z wyrażeniem, podanem przez Hermite'a dla przekształcenia Tchirnhausenowskiego (porów. wyżej uwagi wstępne w niniejszym referacie).

[83]) C. R., CIV, s. 108—111; 220—223; 280—283 (1888).

[84]) Am. J., XII, s. 1—60; 115—160 (1887), (ternaryanty). Cambr. Phil. Trans., XIV, s. 409—466 (1888), (kwaternanianty). W dziedzinie trójkowej rozpatruje autor przypadki formy kwadratowej sześciennej, dwukwadratowej oraz układ trzech form kwadratowych; nadto zaj-

muje się jeszcze formami, które, prócz ilości $x$, zawierają jeszcze ilości $u$: formę liniowo-liniową, dwie formy liniowo-liniowe, formę dwukwadratowo-liniową, sześcienno-liniową, wreszcie formę sześcienno-sześcienną. W dziedzinie czwórkowej stosuje autor swoją teoryę ogólną do jednej i do dwu form kwadratowych (względem ilości $x$), następnie do formy (względem $x$ i $u$) liniowo-liniowej, wreszcie do następnych kompleksów: liniowego, do układu dwu i trzech kompleksów liniowych, wreszcie do kompleksu kwadratowego.

[85]) Patrz pracę cytowaną poprzednio na drugiem miejscu.

[86]) Patrz początek niniejszego referatu.

Na innej drodze to uogólnienie uskutecznili Grassmann, Math. Ann., VII, s. 538—548 (1874) i Christoffel, Math. Ann, XIX, s. 280—290 (1892).

[87]) Math. Ann., I, s 57—89 (1869). Porównaj z tem poprzednio cytowaną metodę Forsytha.

[88]) Math. Ann., XVII, s. 359—379 (1880). Liczba form stowarzyszonych, włączając w nie formę pośrednią tożsamościową $u_x$ wynosi 8, jak to zresztą wynika już z pracy Clebscha-Gordana, Math. Ann., I, 57—89.

[89]) Porów. referat niniejszy, przyp. 24 do „Wstępu".

[90]) Annali (2), I, s. 23—79. Porównaj przedstawienie u Gordana: „Vorlesungen etc.", II, § 24, 29. Rezultaty wspomnianej na pierwszem miejscu rozprawy stosuje Gordan, Annali (2), I, s. 367—372 (1867), do równania modułowego 6-go rzędu Jacobi'ego.

[91]) S. M. F. Bull., V, s. 113—126 (1877); VI, 195—208 (1878).

[92]) Porów. niżej, II, D, b.

[93]) Math. Ann., I, s. 173—194 (1869).

[94]) Math. Ann., I, s. 210—224 (1869).

[95]) Journ. f. Math., LVII, s. 371—375 (1860).

[96]) Patrz Clebscha „Binäre Formen", § 101.

[97]) Journ. f. Math., LXVII, s. 371—380 (1867).

[98]) Math. Ann., VII, s. 452—456 (1874). Tamże, VIII, s. 444—452 (1875), Wiederhold podaje w postaci znikającego niezmiennika warunek na to, aby dwie formy $f_n$ były biegunowemi formy $f_{n+1}$.

[99]) Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc.", I, s. 900. Porówn. rozprawę Friedricha, Giessen (1886) i E. Meyera, Królewiec (1888). Trzy formy $f_5$, jako drugie pochodne formy $f_5$, badał Igel, Wien. Ber., LIII, s. 155—184 (1887) i zasosował to badanie do Jerrardowskiego przekształcenia równania rzędu 5-go.

[100]) Journ. f. Math., LVII, s. 371—375 (1860).

[101]) Patrz referat niniejszy, przyp. 18 do „Wstępu".

[102]) Journ. f. Math., LXXX, s. 73—85 (1875).

[103]) Math. Ann., VII, s. 449—451 (1874).

[104]) Math. Ann., XX, s. 529—552 (1882). Rozwiązanie wskazanego zadania (§ 14) wymaga uprzedniego rozwiązania szeregu zadań pomocniczych, mianowicie przedstawienia typowego: 1) dwu form $C_2$ i jednej $C_1$; 2) jednej formy $C_2$ przez pęki form $C_2$ i formę $C_1$; 3) trzech $C_2$. Patrz §§ 11, 12, 13.

[105]) Math. Ann., XXXIV, s. 321—331 (1889). O innym rodzaju przedstawienia typowego formy $f$ wspomniał Klein w wykładach o równaniach algebraicznych (półrocze zimowe 1891/2); mianowicie forma $f$, po pomnożeniu jej przez wyróżnik, daje się przedstawić pod postacią $| a_{ik} + \lambda b_{ik} |$.

Nadmieniamy wreszcie o typowem przedstawieniu całek eliptycznych (i abelowych), wprowadzonem praez Weierstrassa i rozwiniętem w ostatnich czasach zwłaszcza przez Kleina i jego uczniów. Porów. zasadnicze pracę Kleina w Math. Ann., XVII, s. 133—138 (1880) i Leipzig. Abh., 1885. Dalej Bruno, Am. J., V s. 1—25 (1882). Burkhardt, Rozprawa, Monachium, 1887, White, Nova Acta, LXII, Nr. 2, s. 43—128, dalej tekst późniejszy w niniejszej rozprawie w II, B, b i wykład całości tej rzeczy w Halphena Traité des fonctions elliptiques, T. II, Paryz. 1888.

[106]) Math. Ann., XXXVI, s. 473—534 (1890), zwłaszcza na str. 534.

[107]) Rozprawy, III, IV, V zawierają syzygie (pierwszego rodzaju) formy $f_5$ aż do stopnia piątego co do spółczynników; w rozprawie, VIII, Memoir, 1867, formy szóstego stopnia; w X (1878) wreszcie na podstawie funkcyi tworzącej „realnej" rozwija metodę, za pomocą której dla każdego danego stopnia i rzędu otrzymuje się najmniejszy układ syzygantów, z którego powstają inne przez kombinacye liniowe. Jako zastosowanie podaje listę syzygij aż do stopnia 14-go.

[108]) Annali (2), XI, s. 291—304 (1883). Dla dziedziny trójkowej, Annali (2), XV 235—252 (1887) tenże autor stosuje swoje syzygie do wyprowadzenia pewnych form kanonicznych, ważnych przy rozwiązywaniu równań stopnia piątego (i szóstego).

[109]) Sylvester, Am. J., IV, 41—42 (1881), zwłaszcza s. 19—25. Hammond, tamże, VIII, s. 10—26 (1885).

[110]) C. R., XCVI, s. 232—235, 1564—1567 (1883).

[111]) Clebsch, „Binäre Formen", § 54. Porówn. Gordan, „Vorlesungen", II, § 4. W §§ 11 i 12 szerokie zastosowanie do syzygij układu form kwadratowych (dwójkowych).

[112]) Math. Ann., XXXI, s. 424—440—dwie formy $f_3$ (1888). Ib., XXXIII, s. 197—223, dwie $f_4$ (1888); Ib., XXXIV, s. 332—353—dwie $f_4$ (1880); Ib., XXXV, s. 63—81,—forma $f_6$ (1889).

[113]) S. M. F. Bull., XI, s. 88—107 (1883); C. R., XCVI, s. 426—430, 479—482, 563—565, 1717—1721, 1776—1779, 1842—185 (1883). Tąż samą metodą redukcyjną posługiwał się wcześniej Sylvester dla znalezienia wspólnych własności spółzmienników formy dwójkowej dowolnie wysokiego rzędu, Am. J., V, s. 79—137 (1882—1883). Formy $f_5$ i $f_6$ badał niedawno d'Ovidio, Palermo Rend., VI, s. 225—233; VII, s. 1—4 (1893) i Torino Atti, XXVII, s. 535—563 (1892); XXVIII, s. 118—133, 447—451 (1893).

[114]) Am. J., VII, s. 327—344; $f_6$ (1884); Ib., VIII, s. 19—25; $f_5$ (1885).

[115]) Math. Ann., XXXIV; patrz s. 332 (1889).

[116]) Tamże, XXXVI, s. 154—156 (1890).

[117]) Tamże, XXXIII, s. 61—108 (1888); forma $f_5$, jako przykład. Porów. tamże, XXXIV, s. 354—370 (1890). Jądro metody w Math. Ann., XXVI, s. 444—454 (1888); zastosowanie do $f_6$, tamże, XXXIV, s. 306—318 (1889) i XXXVI, s. 262—303.

[118]) Patrz twierdz. ogólne w Math. Ann, XXXIII, § 22.

[119]) Patrz Math. Ann., XXXVI, s. 262.

[120]) Porów. II, C, a.

[121]) Mac-Mahon poświęcił oddzielną rozprawę syzygiom pomiędzy perpetuantami, Am. J., X, s. 149—168 (1887).

[122]) Według relacyi prywatnej Hilbert utworzył układ 14 syzygij dla układu trzech form kwadratowych i wykazał, że pierwszy z nich jest układem zupełnym. Porów. Math. Ann., XXXVI, s. 534.

[123]) Porów. notę Sylvestera w Am. J., IV, s. 62, (1881).

[124]) Patrz „Wstęp" do pracy niniejszej.

[125]) Nowa teorya Cayle'a w IX, Mem. Phil. Trans., 1870, s. 17—50, X, Mem., ib. 1878, s. 603—661.

[126]) 1877. C. R., LXXXXIV, s. 240—244, 522—534, 974—975, 1113—16, 1207—11, 1285—89, 1350—62, 1427—30. C. R., LXXXV, s. 991—995, 1035—39, 1091—3.

1878. Phil. Mag., s. 1—12 i Lond. Proc.; Journ. f. Math., LXXXV, s. 89—114; C. R., LXXXVI, str. 1437—41, 1491—2, tamże LXXXVII, str. 242—4, 287—9, 445—8, 505—9, 899—903; Am. J., I, s. 370—378.

1879. Am. J., II, s. 71—84, 98—9; C. R., LXXXIX, s. 395—6.

1883. A. J., V, s. 241—250.

Obszerne tablice funkcyj tworzących, form zasadniczych i syzygij, opracowane przez Franklina na podstawie metod Sylvestera w Am. J., II, s. 223—251, 293—306 (1879), tamże, III, s. 221—329 (1880), V, s. 241—250 (1882). Franklin ogłosił też zwięzły wykład głównych twierdzeń Sylvestera i Cayley'a w Am. J., III, s. 128—154 (1880).

[127]) Porównaj przedstawienie w „Bruno", § 12, według metod Cayley'a.

[128]) Phil. Mag., 1878, s. 1—12; Journ. f. Math., s. 89—114 (1878).

Tegoż twierdzenia dowiedli różnemi metodami: Capelli, Rom. Acc. L. Mem., XII, s. 1—62 (1881), Hilbert, Math. Ann., XXX, s. 15—29 (1887), zwłaszcza s. 20, Stroh, ib. XXXI, s. 441—443 (1888). Study, „Methoden", § 9 (1887), Elliot rozszerzył granice twierdzenia w Lond. M. S. Proc., XXXIII, s. 298—304 (1892) i XXXIV, s. 21—36 (1893).

[129]) W Mess. (2), VIII, s. 1—8 (1878) Sylvester podał dogodne prawidło do obliczania liczby $\Delta$. Por. Franklin, Am. J., II, s. 187—188 (1879).

[130]) „Introductio in Analysin.", I, § 304.

[131]) Cayley na przykładzie formy $f_7$ pokazał, jak najdogodniej sprawić, aby funkcya tworząca miała możliwie mało wyrazów. Am. J., II, s. 71—84 (1879). Liczniki funkcyi tworzącej reprezentacyjnej dla formy $f_7$ Sylvester i Franklin nie mogli zrazu przedstawić pod postacią skończoną; tę trudność rozwiązał Hammond (Math. Ann., XXXVI, s. 225—261, 1890), gdy przedtem v. Gall znalazł był niektóre nieprzywiedlne niezmienniki tej formy $f_7$, nie zauważone przez Sylvestera.

[132]) Anglicy używają skrócenia „Repr. G. F.".

[133]) Am. J., II, s. 224.

[134]) Cayley nie spostrzegł tych syzygij drugiego rodzaju z powodu błędnego wniosku (II, Mem., 1856), że forma $f_5$ nie posiada skończonego zupełnego układu form zasadniczych. Patrz Cayley, VIII, Mem. Phil. Trans., 1870, s. 513.

[135]) Am. J., IV, 41—61.

[136]) Toż samo zdziałać można za pomocą „realnej" funkcyi tworzącej Cayley'a (X, Mem.), powstającej z Repr. G. F., gdy występujące w niej formy zasadnicze zastąpimy literami $a, b, c; \ldots$ Porów. Sylvester, Am. J., IV, s. 57.

[137]) Am. J., VIII, s. 19—25 (1885); Hammond dla $f_6$, Am. J., VII, s. 327—344 (1885) i dla $(f_2, \varphi_2)$, tamże, VIII, s. 138—155 (1886).

[138]) Patrz wykład Franklina w Am. J., VII, s. 130—132.

[139]) Lond. Proc., XIV, s. 85—88; Am. J., V, s. 218—228 (1883). Uwagi Cayley'a w Lond. Proc., XIV, s. 88—91. Hopk. Circ., II, s. 85—86—150, III, s. 13 (1883—1884).

[140]) Patrz pracę cytowaną na drugiem miejscu.

[141]) Am. J., VII, s. 26—47 (1884). Por. II, C, a. Dalej Hammond, Am. J., VIII, s. 104—126. Stroh rozwinął te badania za pomocą metody symbolicznej; jego wyniki są bardzo prostej postaci, Math. Ann., XXXVI, l. c., § 10, 11.

[142]) J. Liouville'a (3), II, s. 177—233 (1876); V, s. 345—79 (1879). Noty w C. R., LXXXI, s. 495—8 (1875); LXXXII, s. 269—70 (1876); LXXXVII, s. 202—4 (1878). W pierwszej rozprawie przegląd ogólny teoryi Gordana.

[143]) Patrz rozprawę cytowaną na drugiem miejscu.

[144]) Am J., II, s. 223—51.

[145]) Lon. Proc., XYVII, s. 11—13 (1878).

[146]) C. R., LXXXVI, s. 1437—41, 1491—2, 1519—22.

[147]) „Fondamenti di une teoria generale dello forme algebraiche", Mem. Rom. Acc. L., XII, s. 1—72 (1882); szersze rozwinięcie w Batt. G., XX, s. 293—301 (1882); pewne formy specyalne, np. niezmienniki jednego rzędu we wszystkich szeregach zmiennych, badał już wcześniej, Batt. G., XIX, s. 87—116 (1881). Rozszerzenie zagadnienia na formy o więk-

szej liczbie zmiennych spółpodstawieniowych, poddanych niezależnym od siebie podstawieniom, w Mem. Rom. Acc. L., XV (1883). I tu zadanie sprawdza się do znalezienia wszystkich rozwiązań całkowitych układów równań przy rozkładzie liczb. Twierdzenie pomocnicze są zebrane w Batt. G., XXI, s. 343 (1883).

[148]) Patrz pracę cyt. na drugiem miejscu.

[149]) Rozszerzenie tego twierdzenia także w Stu y'ego „Methoden", s. 100. Jeżeli mamy $r$ form pierwotnych dwójkowych rzędów $n_1, n_2, \ldots, n_r$, to liczba wszystkich niezależnych spółczynników o stopniach $p_1, \ldots, p_r$ jest: $\binom{n_1+p_1}{p_1}\binom{n_2+p_2}{p_2}\ldots\binom{n_r+p_r}{p_r}$.

W dziedzinach wyższych istnieje odpowiednia liczba dla „spółzmienników normalnych". Por. Stroh, Math. Ann., XXII, zwłaszcza s. 405 (1883).

[150]) „Théorie générale etc.", 1891, Rozdz. VII. Tu liczenie uskutecznia się dla pewnego gatunku spółzmienników; ogólnie zaś w Bull. Belg. (3), XXI, s. 437—51 (1891). Por. II. D, a.

## B. Pytania, odnoszące się do niewymierności.

W badaniach, o których dotychczas była mowa, szło przedewszystkiem o „wymierność" lub „całkowitość". Wprawdzie już od samego początku, zwłaszcza pod wpływem geometryi, nasuwały się pytania „niewymierne", lecz dopiero w ostatnich czasach zaczęto systematycznie wprowadzać niezmienniki i spółzmienniki niewymierne. Wyrobionej zupełnie teoryi tego przedmiotu dotąd nie mamy.

Historycznie można wyróżnić dwa prądy. Z jednej strony (jak przy formach kwadratowych) wysuwa się wywołane względami praktycznemi pytanie o pewnych postaciach niezmienniczych „kanonicznych" form danych. Do rozstrzygnięcia tego pytania potrzebnem jest rozwiązanie równań algebraicznych pomocniczych. Z drugiej strony, wśród teoryi utworów niezmienniczych występuje pewien rodzaj „zadania odwrotnego", polegającego na tem, że pomyśliwszy jeden albo więcej utworów, powstałych z form pierwotnych,—przy milczącem założeniu, że spełniają się zachodzące pomiędzy niemi ewentualnie związki — staramy się znaleść należące do nich formy pierwotne. Zadanie to jest w ogóle wieloznacznem i dlatego przedewszystkiem idzie w niem o wyznaczenie za każdym razem liczby form pierwotnych, a następnie o wyznaczenie równań, od których rozwiązania formy te zależą. Ten drugi rodzaj zagadnień, jako dopełnienie konieczne teoryi niezmienników wymiernych i ich syzygij, ma przyszłość przed sobą; lecz badano go dotąd tylko w kilku pojedyńczych przypadkach.

---

*a) Formy kanoniczne.*

Zasady tej teoryi [1]) należą do okresu najwcześniejszego. Dla form dwójkowych Sylvester i Cayley pokazali, w jaki sposób dają się one przedstawić przez kombinacye linijowe potęg wyrażeń liniowych $x-\alpha$. Istnieją spółczynniki proste („kanonizanty"), których pierwiastki są szukanemi wartościami $\alpha$; w przypadkach pojedyńczych można też było poznać, jakie występują modyfikacye, jeżeli niektóre z ilości $\alpha$ stają się równemi. Zaokrąglenie tej teoryi, obejmujące wszystkie przypadki wyjątkowe, pochodzi od Gundelfingera [2]), który posługiwał się środkami analitycznemi. Przerobiwszy odpowiednio wyrażenie różniczkowe $k$-tego nasunięcia dwóch form dwójkowych, rozciągnął on na niezmienniki w sposób odpowiedni szereg znanych twierdzeń z teoryi równań różniczkowych liniowych [3]). Rezultat ostateczny, do którego doszedł, można wypowiedzieć w ten sposób. Niechaj $a_0, a_1 \ldots .$ będą spółczynniki formy pierwotnej $f_n$. Utworzmy łańcuch spółzmienników „kanonicznych" $C, C', C'' \ldots$ z wyrazami głównemi

$$a_0, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1 \\ a_1, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix}, \ldots .$$

Jeżeli forma $f_n$ ma być przedstawiona jako suma $k$ potęg $n$-tych, to musi najprzód $C^{(k)}$ (nie zaś $C^{(k-1)}$) znikać tożsamościowo. Wtedy istnieje forma $\Gamma_k$, której $k$-te nasunięcie na formę $f$ jest tożsamościowo zerem, równanie $\Gamma_k = 0$ musi nadto posiadać same pierwiastki nierówne $\alpha$. Odwrotnie te dwa warunki wystarczają do tego, by forma $f_n$ dała się przedstawić jako suma potęg $(x-\alpha)^n$. Jeżeli niektóre z pierwiastków równania $\Gamma_k = 0$ są sobie równe, to przy pomocy rozkładu na ułamki cząstkowe otrzymujemy na formę $f_n$ wyrażenie pod postacią sumy $k_i$ ($k_i \leq n$) potęg, z których każda pomnożona jest przez formę dopełniającą rzędu $n - k_i$.

Odpowiednie twierdzenie istnieje dla jednoczesnego przedstawienia $n$ form $n$-tego rzędu.

Jeżeli odwrócimy uwagę od przypadków wyjątkowych (w których wartości $a$ zlewają się częściowo), to jądro powyższego kryteryum, t. j. wprowadzenie formy $\Gamma_k$ znajdujemy już u Rosanesa [4]), który tę formę nazywa sprzężoną z formą $f_n$. Rosanes rozciągnął także swoje badania na $n$ form dwójkowych oraz na formy dziedzin wyższych, Mówiąc geometrycznie, każda krzywa (powierzchnia) $n$-tego rzędu jest sprzężona z każdym z jej punktów liczonych $n$-krotnie. Przedstawienia potęgowe form pozostają tedy w najściślejszym związku z teoryą tak zwanych wielokątów lub wielościanów „biegunowych", która przez to istotnie się zbogaca.

Na innej zupełnie drodze doszedł do tego związku Reye [5]), który pierwotnie postawił pytanie, jaką możliwie najmniejszą liczbę osobnych punktów masowych można można zastąpić dane ciało ze względu na jego momenty $n$-te, odniesione do płaszczyzny dowolnej. Przedstawienie równania $F_n = 0$ powierzchni przez sumę $R$ zupełnych potęg nazywa się tedy przedstawieniem powierzchni jako „powierzchni $n$-tych momentów" ciała, dającego się zastąpić $k$ punktami, t. j. taką powierzchnią, że znika $n$-ty moment ciała odnośnie do jej płaszczyzn stycznych.

Przy pomocy tych środków Reye [6]) nietylko podał prosty dowód geometryczny dla tak nazwanego „pięciościanu" powierzchni 3-go rzędu, t. j. dla przedstawienia jednoznacznego [7]) formy sześciennej czwórkowej przez sumę pięciu sześcianów, co zauważył był już poprzednio Sylvester, lecz pokazał nadto, w jakim kierunku twierdzenie to nadaje się do uogólnienia [8]). Piszący te słowa wyłożył obszernie [9]), jakie zachodzi pokrewieństwo między punktami widzenia Rosanesa a Reye'go, w szczególności zaś pokazał, że przedstawienia kanoniczne w dziedzinach wyższych, dzięki teoryi funkcyj symetrycznych, sprowadzić można do takichże przedstawień w dziedzinach niższych.

Wracając do form dwójkowych wspomnimy o tem, że w ostatnich czasach Bauer [10]), nawiązując badanie swe do prac Rosanesa, wyprowadził dla form dwójkowych $f_{2n}$ rzędu parzystego, piękne wyrażenie pod postacią sumy $n+1$ potęg; wszystkie funkcye, występujące w tem wyrażeniu, są prostemi spółzmiennikami formy $f$.

Hilbert [11]), dzięki pewnemu procesowi różniczkowemu, mógł podać przejrzyste kryteryum na to, aby dana forma dwójkowa była zupełną potęgą samej takiej formy. Hilbertowi [12]) również zawdzięczamy podporządkowanie najróżnorodniejszych przedstawień kanonicznych pod jednę zasadę ogólną z wyraźniejszem niż dotąd uwydatnieniem jądra niewymiernego całej teoryi. Hilbert poszukuje wszystkich form $\varphi_\nu$ (rzędu $\nu$), których odpowiednio wysokie nasunięcie na formę pierwotną $f$ (rzędu parzystego) różni się od tej formy tylko czynnikiem stałym $\lambda$. Ten czynnik $\lambda$, będący niezmiennikiem niewymiernym formy $f$, zależy od równania pomocniczego rzędu $(\nu+1)$-go z niezmiennikami wymiernemi, jako spółczynnikami. Równanie to daje się sprowadzić do charakterystycznej postaci wyznacznikowej. Dalej autor ten znajduje wszystkie zniekształcenia formy pierwotnej $f$, powstające wtedy, gdy powyższe równanie ma pierwiastki $\lambda$ równe. Formy $\varphi$ są spółzmiennikami niewymiernemi.

Możemy tylko wspomnieć o rozmaitych formach kanonicznych, które ustanowiono w teoryi równań przy tworzeniu rozwiązującej za pomocą przekształcenia Tschirnhausena, oraz o dwóch formach dla $f_6$, otrzymanych przez Brilla [13], a wynikających z pewnego specyficznego zagadnienia niezmienniczego.

Wspomnijmy wreszcie o charakterystycznem przedstawieniu pod postacią „sumy kwadratów“ tak nazwanych form „określonych“ $n$-tego rzędu o $m$ zmiennych, t. j. takich form ze spółczynnikami rzeczywistemi, które są jednego tylko znaku dla wszystkich układów rzeczywistych wartości zmiennych. Do znanych przypadków $n=2$ przy $m$ dowolnem i $m=2$ przy $n$ dowolnem, Hilbert [14]) dodał jeszcze trzeci: $n=4$, $m=3$, w którym istnieje przedstawienie (z trzema dowolnemi parametrami) w postaci sumy trzech kwadratów. Znaczenie tego rezultatu ujawniło się w prawdziwem świetle dopiero wtedy, gdy Hilbertowi udało się wykazać, że przy wszystkich pozostałych kombinacyach liczb $n$ i $m$ istnieją formy określone, których nie można przedstawić pod postacią sumy kwadratów.

### *b) Powrót od spółzmienników do form pierwotnych. Niezmienniki i spółzmienniki niewymierne. Kanoniczne przedstawienie całek eliptycznych i abelowych.*

Na początkowy rozwój teoryi niezmienników wywarło niemały wpływ sławne zagadnienie o oznaczeniu liczby wszystkich nierównoważnych, t. j. nie dających się wzajemnie na siebie przekształcać za pomocą podstawień liniowych (całkowito-liczbowych), typów form kwadratowych dwójkowych o danym wyznaczniku. Hermite [15]), przystępując do uogólnienia tego zadania dla form dwójkowych rzędu wyższego, był zmuszony wydoskonalić metody teoryi form.

Z drugiej strony do takich „pytań powrotnych,“ prowadziła geometrya.

Przykład pierwszy i najbardziej godny uwagi stanowi krzywa płaska trzeciego rzędu $C_3=0$, do której należy krzywa spółzmienna $H_3=0$, (wycinająca z pierwszej punkty zwrotne). Hesse odkrył tę ostatnią i znalazł nadto, że, odwrotnie, do danej krzywej $H_3$ należą trzy krzywe $C_3$: odnośne równanie 3-go rzędu stanowi węzeł całej teoryi.

Traktowanie systematyczne tych zagadnień w teoryi form nastąpiło dopiero później.

W dziedzinie dwójkowej, zwłaszcza ze względu na liczne zastosowania geometryczne, wystąpiło przedewszystkiem zadanie o odnalezieniu wszystkich nierównoważnych typów pęku form $f_n + k\varphi_n$, których wyznacznik funkcyjny $(f, \varphi)$ jest daną formą $f_{2(n-1)}$ rzędu $2(n-1)$. Brill [16]) pierwszy wykazał, że zagadnienie to ma istotnie skończoną liczbą rozwiązań, t. j. że pomiędzy spółczynnikami form $f_{2(n-1)}$ żadne związki nie zachodzą.

W badaniu najprostszego przypadku $n=3$ o dwóch rozwiązaniach nie napotkano wielkich trudności [17]). Inaczej wszakże rzecz się ma już w przypadku najbliższym $n=4$, prowadzącym do pięciu rozwiązań [18]). Równanie stopnia 5-go, od którego te rozwiązania zależą, przedstawił Stephanos [19]) w postaci, właściwej teoryi niezmienników. Brill [20]) badał związek wewnętrzny pięciu pęków $f+k\varphi$ pomiędzy sobą oraz z teoryą form kwadratowych i równań stopnia 6-go. Następnie piszący te słowa [21]) badał związek tych utworów z teoryą krzywych wymiernych $C_4$ i $C_6$ oraz z teoryą krzywych sześciennych w przestrzeni. Dla dowolnej liczby $n$ oznaczył on liczbę rozwiązań (za pomocą „metody rzutu") [22]), którą wkrótce potem stwierdził Stephanos [23]) bezpośrednio, Schubert [24]) zaś przy pomocy geometryi liczącej. Lecz dopiero Hilbert [25]), opierając się na zasadzie przytoczonej w rozdziale poprzedzającym, otrzymał w postaci gotowej równanie dla rozwiązań zagadnienia i rozwiązał zarazem zadanie pokrewne o pękach form z danym wyznacznikiem [26]).

W dziedzinie bezpośrednio wyższej dwóch zmiennych niezależnych pokonał Hurwitz [27]) za pomocą środków teoryi funkcyj trudne zadanie znalezienia form pierwotnych, ze znanego wyróżnika, lub, ściślej mówiąc, jego dzielników istotnych, lub jeszcze inaczej— że użyjemy słów autora—rozwiązał zadanie o wyznaczeniu powierzchni Riemannowskic,h które mają dane punkty rozgałęzienia. Rezultat ten obejmuje w sobie poprzednie, jako przypadki szczególne.

Zwracamy w dalszym ciągu uwagę na szczególne zadanie odwrotne, charakteryzujące nowe metody rozwiązań wyższych [28]). Idzie tu o to, aby pomyśliwszy stałe (niesprzeczne ze sobą) wartości liczbowe dla form układu zupełnego, można było zbudować równanie, od którego zależy wyznaczenie odnośnej formy pierwotnej.

W końcu wspomnimy jeszcze o postępie w teoryi funkcyj eliptycznych i abelowych skutkiem systematycznego wprowadzenia form niewymiernych.

Co się tyczy najprzód teoryi funkcyj eliptycznych, to Klein [29]) zaznaczył już, że całka eliptyczna pierwszego gatunku może przyjmować nieskończenie wiele postaci kanonicznych, stosownie do rozległości przestrzeni, w której przyjmujemy za podstawę „krzywą normalną“ eliptyczną, wzdłuż której całka ma być rozciągnięta. „Moduł“ całki jest wtedy niezmiennikiem bezwzględnym niewymiernym tej krzywej. Daleko bardziej urozmaiconą jest teorya dla rodzaju $p=2$ i dla $p=3$ [30]). Jeżeli w ostatnim przypadku ograniczymy się na najprostszej „krzywej normalnej“, t. j. na krzywej płaskiej $C_4$, to charakter odnośnych całek i funkcyj $\Theta$, oraz ich równań różniczkowych, modyfikuje się odpowiednio do przyjętego za podstawę obszaru wymierności. Do takiego obszaru dojdzie się, jeżeli dołączymy odpowiednio za każdym razem dobraną składową niewymierną układów „krzywych stycznych“, związanych niezmienniczo z krzywą $C_4$. Spółrzędne punktu płaszczyzny krzywej $C_4$ zlewają się tu z (trzema) funkcyami „$\varphi$“ tak, że przekształcenie liniowe pierwszych jest równoważne z najogólniejszem (jednoznacznem) przekształceniem wymiernem funkcyj algebraicznych rodzaju 3.

W szczególności Klein [31]) zauważył, że zachodzące tu utwory niezmiennicze posiadają w ogóle naturę „kombinantów“, t. j. odnoszą się do form o różnie rozciągłych szeregach zmiennych, podległych podstawieniom niezależnym.

Jest jasnem, że badania tego rodzaju przyczyniły się zarazem do postępu czysto-geometrycznej teoryi krzywej $C_4$ [32]).

---

## PRZYPISY.

---

[1]) Teks nasz jest zwięzły, ponieważ ten przedmiot jest obszernie traktowany w podręcznikach Clebscha, Salmona, Bruno, Cayley'a. Le Paige pokazał szczegółowo, w jaki sposób przedstawienia Sylvestera i Cayley'a rozciągnąć na formy wielokrotnie liniowe. Belg B. (3) II, s. 40—53. C. K. XCII, s. 1048—1049, 1103—1105; XCIII s. 264—265, 569—512 (1812); C. K. XCIV s. 31—32, 69—71, 424—426. Tor. Atti, XVII, s. 299—320 (1882). Rom. Acc. P. N., XXXV. s. 54—84, 140—141. Lisboa Jor. de sciencias math. . . IX. 1883.

[2]) Gött Nachr., 1883, s 115—121; obszerniej w Journ. f. Math. C., s. 413—424.

[3]) Tożsamością tą dla $k$-tego nasunięcia dwu form $f_n$ i $\varphi_m$ o zmiennych niejednorodnych $x$ jest:

$$\frac{1}{k!}(f, \varphi)^k = \binom{n}{k} f \frac{d^k \varphi}{dx^k} - \binom{n-1}{k-1}\binom{m-k+1}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots (-1)^k \binom{m}{k}\frac{d^k f}{dx^k}\varphi.$$

[4]) Journ. f. Math. LXXV, s. 172—176 (1873), LXXXVI, s. 312—330 (1873). Math. Ann., s. 264—312 (1873). Związek form kanonicznych i teoryi apolarności przedstawiamy bliżej w rozdziale o kombinantach II, D. 6.

[5]) Journ. f. Math. LXXII, s. 293—326 (1870).

[6]) Journ f. Math. LXXVIII, s. 114—122 (1874).

[7]) Patrz uwagi historyczne w biografii Clebscha. Math. Ann., VII, s. 17.

[8]) Journ. f. Math., LXXXVII, s. 123—129 (1874).

[9]) „Apolarität und rationale Curven", Tybinga, 1883.

[10]) Münch. Ber., 1892, s. 3—20.

[11]) Math. Ann., XXVII, s. 158—160 (1886). O metodzie, patrz II. C. $b$. $\delta$.

Dla przypadków prostych Maisano podał (1883) spółzmienniki, których znikanie tożsamościowe stanowi kryteryum będącego w mowie przedstawienia potęgowego; Rom. Acc. L (3), VII, s. 231—233. Tak, dla $f_n$ jako potęgi $n$-tej mamy:

$$H_x^{2n-4} = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \equiv 0,$$

dla $f$ jako potęgi $\frac{n}{2}$-ej:

$$T = (a\,H)\, a_x^{n-1} H_x^{2n-5} \equiv 0, \text{ i t. d.}$$

[12]) Leipz. Ber., 1885, s. 427—438; Math. Ann., XXVIII, s. 381—446 (1887). Co do związku z normowaniem równań różniczkowych liniowych patrz II, $Cb\beta$. Jeżeli rząd formy $f$ jest $n = 2i$, to w badaniu równania pomocniczego należy koniecznie odróżnić cztery przypadki główne, stosownie do tego, czy liczby $c$ i $\nu$ są parzyste lub nieparzyste. W trzech z tych przypadków równanie pomocnicze posiada w ogóle $\nu + 1$ różnych pierwiastków $\lambda$, w ostatnim zaś ($i$ parzyste, $\nu$ nieparzyste) $\frac{\nu+1}{2}$ par równych pierwiastków $\lambda$. Należące tu formy $\varphi$, których jest $\nu + 1$ liniowo-niezależnych we wszystkich czterech przypadkach dają się otrzymać za pomocą wyznaczników obrzeżonych. Odwrotnie, dla danego układu $\nu + 1$ form liniowo-niezależnych rzędu $\nu$-go można ustanowić kryterya tego, że stanowią układ form $\varphi$; kryterya te polegają na istnieniu pewnej liczby związków liniowych pomiędzy niezmiennikami kwadratowemi i spółzmiennikami dawnych układów form. Hilbert w Journ. de Math. (4) IV, s. 249—256 (1886) pokazał na odpowiednich przykładach (form trzeciego rzędu), że zasada jego daje się z powodzeniem stosować do dziedziny trójkowej i dwójkowej.

[13]) Math. Ann., XX, s. 330—357 (1882). Temi formami kanonicznemi są: $x^6 + 2px + 3qx^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2px + q$ i $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1$. Dochodzimy do nich w sposób następujący:

Pomiędzy formami, powstającemi przez kombinacye liniowe trzech form dwójkowych dwukwadratowych, znajdują się trzy iloczyny form kwadratowych gatunku. $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi_3$, $\varphi_3\varphi_1$, dalej cztery kwadraty $\psi_1^2, \ldots \varphi_4^2$. Jeżeli $x_i$, $y_i$ są wartościami, przy których znika $\varphi_i$, $\xi_k$ i $\eta_k$ takiemiż wartościami dla $\psi_k$, $f_i$ „wyznacznik funkcyjny" $W_6$, t. j. wyznacznik drugich pochodnych trzech form danych za pomocą podstawień $x' = \frac{x - x_i}{y - y_i}$ i odpowiednio

$x' = \frac{x - \varepsilon k}{x - \eta k}$ przechodzi na tamte postacie kanoniczne (patrz cytow. w przypisku 9-ym pracę referenta s. 312). Brill stosuje formę kanoniczną między innemi do przejrzystej dyskusyi pytania o rzeczywistości pierwiastków równania rzędu 6-go. Inna forma kanoniczna („typowa“) form $f_6$ znajduje się u Maschkego i Brioschi'ego, mianowicie $x^6 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są czterema niezmiennikami formy $f_6$. Pierwiastki równania $f_6 = 0$ wyrażają się wtedy za pomocą prostych funkcyj całkowitych czterech funkcyj $\Theta$, należących do $f_6$ (p. Maschke, Gött. Nachr. 1887, s. 421—424, Math. Ann. XXX, s. 496—515, 1887, Rom. Acc. L. Rend. (4), IV, s. 181—184 (1888), i Brioschi'ego uwagi do ostatniej pracy o obszerniej w Acta Math. XII, s 88—101 (1888). Inny kształt typowy form $f_6$, w którym znikają spółczynniki potęgi 5-ej i 6-ej niewiadomej, rozważał już wcześniej Brioschi przy pomocy syzygij: Annali du Matem. (2), XI, s. 291—304 (1883).

W przypadku szczególnym, gdy $f_6$ jest spółzmiennikiem Hessego formy $f_5$, można pierwszą z nich za pomocą podstawienia liniowego sprowadzić do formy kanonicznej rzędu 6-go, nie zaś do formy odpowiedniego równania modułowego (Lindemann, Math. Ann. XXI, s. 71—109, 1883). Niezmienniki formy $f_6$ wyraził Bolza za pomocą wartości zerowych funkcyj $\Theta$ tu należących (Math. Ann. XXX, str. 478—495.)

[14]) Math. Ann. XXXII, s. 332—350 (1888).

[15]) Patrz Wstęp do niniejszego referatu.

[16]) Math. Ann. XX, s. 330—357 (1882) i dzieło referenta, cytow. w przypisku 9-ym s. 320.

[17]) N. p. Caporali Nap. Rend. XXII, s. 95—114 (1883).

18) W szczególnym przypadku, gdy pęk form $f_4$ staje pękiem biegunowym formy $f_6$, istnieje jedno tylko rozwiązanie. Wyznacznik funkcyjny w tym razie zlewa się ze spółzmiennikami Hessego formy $f_6$ (Lindemann, Math. Ann. XXI. s. 71—109, 1883).

[19]) C. R. XCIII, s. 994—997 (1881). Jest to wyciąg z większej pracy premiowanej, ogłoszonej w 1883 w Sav. étr.

[20]) Math. Ann. XX, s. 330—357 (1882).

[21]) „Apolarität“ etc. (1883).

[22]) l. c. 391. Istnieje $\frac{2 . (2n-1)!}{(n+1)! (n-1)!}$ pękom form $f_{n+1}$ przy danym wyznaczniku funkcyjnym $2n$-tego rzędu.

[23]) Thèse, 1884.

[24]) Acta Math. VIII, s. 97—117 (1886). To zagadnienie, o którem mowa w tekście występuje jako przypadek daleka ogólniejszego zagadnienia, należącego do teoryi wyższych przestrzeni liniowych.

[25]) Leipz. Ber. s. 112—122 (1887), Math An. XXXIII, s. 217—236 (1888).

[26]) Math. Ann. XXXI, s. 482—492 (1888). Dla $n = 4$ zadanie sprowadza się do innego o przekształceniu formy $f_6$ na formę kanoniczną $\varphi_2^3 - \varphi_3^2$, zależy przeto od tego samego równania pomocniczego rzędu 40-go, które podał Clebsch w zadaniu dzielenia na 3 równe części funkcyj hypereliptycznych (Gött. Abh. XV, 1869, Math. Ann. II, s. 193—197 (1870)).

[27]) Math. Ann, XXXIX, s. 1—61 (1891). Tu zebrana jest też odnośna literatura. Inne uogólnienie, odnoszące się do form kwadratowych o dwu szeregach ilości zmiynnych podał Frobenius (Journ. f. Math. CVI, s. 125—189, 1890). Forma $f$ posiada dwa wyróżniki (t. j. formy dwukwadratowe dwójkowe o równych niezmiennikach; odwrotnie szuka się formy $f$, gdy te wyróżniki są dane. Otrzymujemy w ogóle $\infty^2$ rozwiązań tego zagadnienia.

[28]) Patrz Klein „Vorlesuugen über das Ikosaeder etc“ oraz poprzednio cytowane prace Kleina i Gordana o równaniach rzędu 5-go i 6-go (I, B. 5). O innym rodzaju

zagadnień odwrotnych, postawionych przez Gordana i dopuszczających tylko jedno jedyne rozwiązanie, mowa jest wyżej w przypiskach do II, A c.

[29]) Math. Ann. XVII, s. 133—138 (1880): Leipz Abh. 1885, s. 339—399. Porówn. Pick, Math. Ann. XXVIII, s. 309—318 (1887). Wien. Ber., czerwiec 1888, Marzec 1889.

[30]) Co do rodzaju $p=2$ patrz prace Kleina, Burkhardta i Wiltheissa w Math. Ann. począwszy od t. 27. Co do $p=3$ patrz Pick, Math. Ann. XXIX, s. 259—271 (1887), notę Kleina w Gött. Nachr. 1888, s. 191—194, Math. Ann. XXXVI, s. 1—83, (1880), Wiltheiss tamże XXXXIII, s. 1—23 (1890). Pascal cztery rozprawy w Annali di Matem. (2), XVII, XVIII (1889, 1890).

[31]) Gött. Nach. 1888, s. 191—194. Dalsze rozwinięcie u Wirtingera, Math. Ann. XL, s. 361—412 (1892)

[32]) Porów. Frobenius Journ. f. Math. IC, s, 275—314 (1886), CIII, s. 139—183 (1888).

## C. Metodyka. Symbolika i procesy niezmiennicze.

Przychodzimy do ściślejszej dziedziny teoryi niezmienników, do procesów w niej stosowanych. Dzielą się one naturalnie na dwie klasy główne: na procesy symboliczne i realne; te składają się z procesów różniczkowych, wykonywanych na formach, tamte zaś są właściwie algebraicznemi. W rzeczy samej widać od razu, że zasada symboliki teoryi form co do swej istoty zgadza się [1]) z zasadą „liczb idealnych" Kummera, polegającą na tem że algebraiczne liczby i formy nieprzywiedlne w danym obszarze wymierności rozkładamy przy pomocy „dołączenia" odpowiednich niewymierności na czynniki idealne (pierwsze) prostsze w ten sposób, że te czynniki czynią zadość zwykłym prawom działań arytmetyki.

Dopiero w pewnych połączeniach (mnożnościowych) te elementy idealne stają się wielkościami obszaru pierwotnego.

### a) *Symbolika i przedstawienie graficzne*.

#### $\alpha$) Kierunek niemiecki.

Metoda symboliczna, wprowadzona przez Clebscha i Aronholda [2]), doprowadzona do pewnego zakończenia przez Gordana i jego szkołę, ma na celu sprowadzenie teoryi niezmienników form dowolnego rzędu do teoryi form liniowych i wyrobienie odpowiedniego, łatwego w manipulacyi algorytmu. Algorytm taki, jak to odrazu zaznaczamy, ma wyłącznie odtwarzać zależności lub niezależności liniowe pomiędzy spółczynnikami form danych.

Niechaj $J$ będzie niezmiennikiem pojedyńczej formy pierwotnej $f$, którego stopień względem spółczynników formy $f$ jest $p$; do tego niezmiennika $J$ dobierzmy[3]) jednoznacznie inny niezmiennik $J_1$, liniowy względem $p$ szeregów form $f_2, f_1, \ldots f_p$, analogicznych z formą $f$. Stosując tę samą zasadę do spółczynników $p$ formy pierwotnej $f$ (lub jej równoważnych przedstawicielek $f_1, f_2, \ldots f_p$), która niechaj będzie rzędu $\nu$-go względem pojedyńczego szeregu zmiennych $x$, rozłożymy formę $f$ na $\nu$ form liniowych idealnych:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,\ b_1y_1+b_2y_2+\ldots b_ny_n, \ldots,\ n_1\omega_1+n_2\omega_2+\ldots+n_n\omega_n.$$

Pokazuje się wszakże, że bez utraty możności powrotu jednoznacznego do form realnych, można utożsamić pomiędzy sobą tak $n$ szeregów spółczynników, jak i szeregi zmiennych $x, y, \ldots \omega$, w ten sposób, że $p$ form $f_i$ przechodzi na $p$ analogicznych potęg form liniowych $a'_x, a''_x \ldots$

Skutek bezpośredni i niezmiernie ważny tego przedstawienia jest następujący. Jeżeli zmienne $x$ poddamy przedstawieniu liniowemu, przez które przechodzą one na nowe zmienne $y$, formy zaś $f_i$ na nowe formy $F_i$, i jeżeli formy przekształcone $F$ napiszemy znowu symbolicznie jako potęgi $n$-te form liniowych $A_1y_1+A_2y_2+\ldots A_ny_n$ i t. d., to i grupa podstawień spółczynników $f_i$, powstała dzięki grupie podstawień zmiennych $x$, przyjmuje postać prostą tak, że ilości $A$ zależą od $a$ i t. d. zupełnie w ten sam sposób, w jaki ilości $x$ zależą od $y$, z możliwem tylko przestawieniem spółczynników podstawienia.

Stąd wynika wprost, że można napisać ilekolwiek niezmienników formy $f$; w tym celu dość z $n$ szeregowych wyznaczników ilości $a', a''\ldots$ utworzyć takie iloczyny, aby każdy z szeregów symbolicznych zachodził wszystkiego $\nu$ razy. Węzłem całej teoryi jest, jak to pierwszy wykazał Clebsch[4]), odwrócenie twierdzenia, „że każdy niezmiennik (całkowito-wymierny) formy $f$ może być wyrażony jako funkcya (całkowito-wymierna) tych iloczynów.

To twierdzenie zasadnicze można bez trudności zastosować do szeregu form pierwotnych, pomiędzy któremi w szczególności może się znajdować pewna liczba form liniowych[5]). Udało się wprawdzie Clebschowi[6]) scharakteryzować symbolicznie i takie niezmienniki jednoczesne, w których zachodzą realiter spółczynniki form liniowych, tylko w zupełnie określonych połączeniach wyznacznikowych (mianowicie dwu, trój i $n-2$ szeregowych); lecz już dla $n > 3$ nie można przejrzeć wszystkich możliwych utworów. Przeciwnie formy pierwotne mogą zawierać więcej szeregów zmiennych spółpodstawieniowych $(x), (x'), \ldots$ jakoteż przeciwpodstawieniowych

$(u)$, $(u')$... Przy pomocy procesu i „rozwinięcia szeregowego“ będzie można ostatecznie dojść do form pierwotnych o jednym tylko szeregu ilości $x$ i jednym tylko szeregu ilości $u$; dla tych form powyższe twierdzenie zasadnicze utrzymuje się z niewielką tylko zmianą.

Uzasadnienie naukowe [8]) w mowie będącej symboliki opiera się głównie na jednej jej własności, którą dopiero niedawno [9]) podali: G o r d a n dla form dwójkowych, S t u d y dla trójkowych, P a s c a l dla form o $n$ zmiennych. Wyżej wspomniane wyznaczniki $n$-szeregowe symbolów $a'$, $a''$... są sobą połączone układem związków algebraicznych $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, ...

Okazuje się również odwrotnie, że jakakolwiek tożsamość, zachodząca pomiędzy niezmiennikami, $F$ o ile nie sprawdza się przez to, że jej niezmienniki wzajemnie same się znoszą, lecz przez to, że wyobrażamy je sobie obliczone przy pomocy realnych spółczynników form pierwotnych— że tożsamość ta daje sprowadzić do takiej postaci, iż strona lewa jej staje się agregatem wyrazów symbolicznych, z których każdy zawiera przynajmniej jedno z wyrażeń $R$ jako czynnik. Do tego wystarcza w zupełności pięć takich czynników $R$.

Zresztą stosuje się tu to samo ograniczenie, co wyżej. Tak np. w dziedzinie czwórkowej [10]) nie posiadamy dotąd przeglądu tych związków, w których zachodzą nietylko spółrzędne punktu i płaszczyzny, ale i spółrzędne prostej.

Mówiliśmy już o symbolice G o r d a n a [11]), związanej z pojęciami „reducentu“, układów zupełnych, względnie zupełnych“, „układów rozszerzonych“; o innych punktach widzenia, a mianowicie o „fałdowaniu“, będzie mowa w rozdziale o procesach niesymbolicznych.

Tu wspomnimy jeszcze o pewnej symbolicznej „zasadzie przeniesienia“ [12]), którą stosował G o r d a n przy konstrukcyi zupełnych układów form. Aby pokazać to zaraz na dziedzinie trójkowej, weźmy układ form niezmienniczych $\varphi$ forny pierwotnej $f = a_x^n = \sigma_n^x = \ldots$ $(m-1)$-go stopnia względem spółczynników; za pomocą tego układu można wyrazić liniowo wszystkie inne utwory tego samego stopnia. I d z i e o z n a l e z i e n i e o d p o w i e d n i e g o u k ł a d u, a l e s t o p n i a b e z p o ś r e d n i o w y ż s z e g o $m$. Czynniki symboliczne formy $\varphi$ są trojakiego typu: $b_x$, $c_x$, $d_x$, ..., $(bcu)$, $(bdu)$, $(cdu)$, ...; $(bcd)$, $(bce)$, ... Zastąpmy $\lambda$ czynników $b_x$, $c_x$ ... odpowiednio przez $(bau)$, $cau)$, ... i równocześnie $k$ czynników $(bcu)$, $(bdu)$, ... odpowiednio przez $(bca)$, $(bda)$ ..., dołączmy wreszcie czynnik $a_x^{n-(k+\lambda)}$ $(\lambda + k \leqq n)$. Dla danej pary „modułów“ $\lambda$, $k$ można otrzymać zupełnie oznaczony szereg nowych form $\psi$ (stopnia $m$). Rozważmy kolejno wszystkie możliwe kombinacye, biorąc $\lambda + k = 1, 2, \ldots$, a następnie w każdej pojedyńczej grupie $k = 0, 1, 2 \ldots$ Jeżeli wyłączymy wszystkie formy $\psi$, znikające i przywiedlne, dojdziemy do rezultatu głównego, że w s z y s t k i e formy $\psi$ s t o p n i a $m$, p o z y s k a n e za pomocą powyższego procesu z układu „liniowo-zupełnego“ form $\psi$ stopnia $m-1$, tworzą również układ liniowo-zupełny.“

Zwracamy się teraz do godnego uwagi uogólnienia lub uproszczenia symboliki Clebscha-Aronholda, które zapoczątkował w najnowszym czasie Stroh [13]. Idzie tu praktycznie o możliwe zmniejszenie liczby czynników symbolicznych, z jakich buduje się niezmiennik. Ograniczymy się tu na przeprowadzonym istotnie przez autora przypadku dziedziny dwójkowej [14].

Jeżeli $f_n = (a_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$, $(\lambda = 1, 2 \ldots)$ jest formą pierwotną $n$-go rzędu w transkrypcyi symbolicznej, to wolno najprzód uczynić symbole $a$ równemi sobie, np. równemi jedności, bez obawy wieloznaczności przy rekonstrukcyi utworów realnych. Jeżeli przez $C$ rozumieć będziemy spółzmiennik formy $f$ stopnia $i$-tego względem spółczynników i wagi $g$ (o jednym tylko szeregu zmiennych), to wyraz główny $C_0$ formy $C$, jako forma $g$-tego rzędu wielkości jednorodnych $a_1, a_2 \ldots a_i$, czyni zadość jeszcze tylko równaniu różniczkowemu charakterystycznemu:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0,$$

Szukamy rozwiązania całkowito-wymiernego $C_0$ tego równania; znajdziemy je, według Hessego [15], jako najogólniejszą formę $i-1$ argumentów:

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_1, \ldots .\ a_i - a_1 \quad [16]$$

rzędu $g \leq n \ldots$ Jeżeli $\gamma$ jest liczbą stałych dowolnych takiej formy, to można $C_0$ napisać w postaci funkcyi $\gamma$ (liniowo-niezależnych) $g$-tych potęg w ten sposób:

$$C_0\,(a_1, a_2 \ldots a_i) = \sum_{k=1}^{k=\gamma} c_k\,(\lambda_{1k} a_1 + \lambda_{2k} a_2 \ldots + \lambda_{ik} a_i)^g,$$

gdzie

$$\lambda_{1k} + \lambda_{2k} + \ldots + \lambda_{ik} = 0.$$

Ten wynik można przedstawić jeszcze symetryczniej. Rozważanie najprostsze naszego równania, owe $i-1$ różnic $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1 \ldots a_i - a_1$, można zastąpić tyluż „symbolami zasadniczemi“ $A_2 - \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_i + . + \lambda_1 a_i$ $(\Sigma\lambda = 0)$. Aby więc mieć przedstawienie symboliczne wyrazu głównego spółzmiennika formy $f$, dość z $g$ symbolów zasadniczych utworzyć iloczyn, w którym każdy symbol $a$ zachodzi najwyżej w potędze $n$-tej“.

Oczywiście czynniki klamrowe Clebscha $a_r a_s - a_r a_s$ są właśnie najprostszemi takiemi symbolami zasadniczemi; łatwo więc przejść od jednej symboliki do drugiej i odwrotnie.

Tak np. spółzmiennik

$$(ab)^2\,(ac)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-3}\,c_x^{n-1}$$

można napisać w postaci prostszej $(a+b-2c)^3$, zawierającej tylko jeden symbol zasadniczy.

Jeżeli rząd $n$ formy pierwotnej jest dowolnie wysoki, tak że $n > g$, wtedy wielkości $C_0$ przechodzą na tak nazwane „półniezmienniki“ i mamy wtedy płodne twierdzenie: „wszystkie półniezmienniki stopnia $i$ i wagi $g$ dają się wyrazić *liniowo* za pomocą potęg symbolicznych $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_i a_i)^g$ [17]).

I w innym kierunku nasuwa się uogólnienie symboliki, jeżeli mamy do czynienia z formami szeregów ilości zmiennych, podlegających różnym podstawieniom. Pomiędzy niemi grają rolę szczególną „kombinanty“, t. j. takie utwory $p$ form pierwotnych $f$ równego rzędu o $r$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_r$, pozostające niezmiennemi przy przekształceniu liniowem tak ilości $x$ jak i form $f$. Tu wprowadza Stroh [18]) pary symbolów $a$ i $\alpha$ ($b$ i $\beta$ i t. d.), tak że iloczyn $n$ symbolów $a$ i jednego symbolu $\alpha$ ma znaczenie realne. Jeżeli zbudujemy formę

$$F = (\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + . + \alpha_p\xi_p)\,(a_1x_1 + a_2x_2 + . + a_rx_r)^n$$

to ta jedna forma pierwotna zastępuje poprzednie formy $f$, co rozumieć należy w ten sposób, że kombinantem formy $f$ jest każda forma, mająca własność niezmienniczą względem $F$ dla obu szeregów zmiennych $\xi$, $x$ i nie zawierająca przytem zmiennych $\xi$.

Study [19]) rozciągnął tę symbolikę na kombinanty takich form $f$, które, oprócz od zmiennych $x$, zależą jeszcze od przeciwpodstawieniowych zmiennych $u$.

Zupełnie podobną zasadę stosować można, jak to łatwo widzieć, i do bardziej skomplikowanych utworów niezmienniczych form pierwotnych rodzaju $a_\xi^m a_x^n$ i t. d., które w istocie zawierają różne szeregi zmiennych $x, \xi, \ldots$

W przypadku, gdy te ostatnie należą do dziedziny dwójkowej, Gordan [20]) podał symbolikę prostszą, zawierającą tylko jeden rodzaj symbolów, o czem była już mowa.

Nakoniec powiedzmy jeszcze, że oba symbole główne Liego teoryi grup przekształceń, mianowicie symbol $Xf$ przekształcenia nieskończenie małego i symbol $(X_iX_k)$ wyrażenia klamrowego z powodzeniem zastosował

Study [20]) do naszej specyalnej dziedziny przekształceń rzutowych, tak że już zewnętrznie poznać w nich można procesy niezmiennicze.

β. Kierunek angielski. Półniezmienniki i funkcye symetryczne.

Omówione dotąd dążenia miały charakter jednolity, gdy tymczasem zjawiska pokrewne, tu i owdzie rozproszone, zwłaszcza u autorów angielskich późniejszego okresu [21]), składają się z momentów różnorodnych. Można tu rozróżnić trzy główne punkty widzenia. Po pierwsze, próby uzmysłowienia wyrażeń teoryi form za pomocą odpowiednich przedstawień graficznych; następnie scharakteryzowanie w odwrotnym kierunku dziedziny naszej, jako gałęzi abstrakcyjnej (powszechnej) algebry „macierzy" (matrye); wreszcie związanie (symboliczne) „półniezmienników" z nauką o funkcyach symetrycznych.

Sylvester [22]) w r. 1878 wychodzi ze spostrzeżenia, że istnieje analogia głębsza pomiędzy wzorami konstrukcyjnemi nowej teoryi atomistycznej, a używaną zwykle symboliką niezmienników i spółzmienników dwójkowych. Jeżeli elementy chemiczne przedstawimy w postaci form dwójkowych:

$$H = h_x = h'_x = \ldots; \quad O = o_x^2 = o'^2_x = \ldots; \quad C = c_x^4 = c'^4_x = , \ldots;$$

$$N = n_x^5 = n'^5_x = \ldots \text{ i t. d.}$$

gdzie „wartościowość" elementu odpowiada „rzędowi" formy, to związki „nasycone" wyrażą nam niezmienniki, „nienasycone" zaś spółzmienniki. Przykładami pierwszych są np.:

$$2O = (oo')^2; \; HO = (ho)\,(h'o); \; NO_5H = (no)^2\,(no')^2)\,(no'')\,(o''h).$$

Jeżeli więc, jak w chemii, elementom odpowiadać będą punkty, związkom zaś ($ho$ i t. d.) kreski łączące te punkty, będziemy mieli obraz naoczny symboliki niezmienników form dwójkowych. Liczba kresek między punktami (t. j. liczba związanych jednostek wartościowych), będzie wagą odnośnej formy: związek niezmienniczy jest równoważny z możliwością przekształcenia jednych na drugie obrazów rozmaitych form.

Sylvester [23]) podał zastosowanie powyższej metody do procesu wzajemności Hermite'a, do form stowarzyszonych Clebscha i t. p.

Clifford [24]) w 1879 r. zastosował tę metodę do form pierwotnych dwójkowych, liniowych względem pewnej liczby szeregów ilości zmiennych. Jeżeli np. $(x, y, z)$ jest taką formą, to obrazem niezmiennika $(xyz)\,(xyu)\,(zvw)$

($uvw$) będzie kwadrat, w którym dwa boki przeciwległe są podwójnie nakreślone.

Oczywiście możliwe są różne modyfikacye tej grafiki. Podamy jednę z nich dla niezmiennika dwójkowego, wyrażonego przez różnice pierwiastków form pierwotnych. Wyrażenie to jest sumą (symetryczną) iloczynów takich:

$$(x_1 - x_2)^\alpha \, (x_1 - x_3)^\beta \, (x_2 - x_3)^\gamma \ldots . (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon$$

gdzie wykładniki są $\geqq 0$, a stopnie względem $x_1, x_2 \ldots x_n$ są wszystkie równe. Każde $x$ zastąpmy punktem, każdą różnicę $x_i - x_k$ linią dowolną od $x_1$ do $x_k$; wtedy w każdym z $n$ punktów zbiega się jednakowa liczba linij. Tak np.

$$(x_1 - x_2)^2 \, (x_3 - x_4)^2 \, (x_1 - x_3) \, (x_2 - x_4) \, (x_1 - x_4) \, (x_2 - x_3)$$

prowadzi do kwadratu z przekątnemi, którego dwa boki przeciwległe są podwójnie nakreślone.

W tej metodzie ważne znaczenie ma pytanie o „przywiedlności“ [25]) obrazu, t. j. czy obraz nie daje się utworzyć przez nałożenie na siebie obrazów „stopnia niższego“.

Petersen [26]) na tej podstawie nietylko udowodnił twierdzenie Gordana [27]), że (przy danem $n$) można utworzyć skończoną liczbę takich iloczynów, z których wszystkie dają się utworzyć przy pomocy mnożenia, lecz pokazał nadto, jak tamte iloczyny istotnie wyznaczyć można.

W jaki sposób teoryę niezmienników można podporządkować pod algebrę wielkości rozciągłych, pokażemy na przykładzie nasunięcia.

Niechaj będą dane dwie formy dwójkowe dwuliniowe:

$$f = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2,$$
$$\varphi = b_{11} x_1 y_1 + b_{12} x_1 y_2 + b_{21} x_2 y_1 + b_{22} x_2 y_2,$$

i dajmy, że mamy utworzyć ich nasunięcie drugie, pozostające niezmiennem przy podstawieniach niezależnych obu szeregów zmiennych. Pomnóżmy $f$ przez $\varphi$, a iloczyny dwójkowe jedności $x_1, x_2, y_1, y_2$ poddajmy prawom:

$$x_1^2 = x_2^2 = y_1^2 = y_2^2 = 0; \; x_1 x_2 = - x_2 x_1 = y_1 y_2 = - y_2 y_1 = 1;$$

wtedy będzie:

$$(f\varphi)^2 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12} + a_{22} b_{11}.$$

Uogólnienie nie przedstawia istotnych trudności. Rachunki takie napotykamy u Clifforda [28]), jakkolwiek jądro teoryi znajduje się już u Grassmanna [29]).

Przechodzimy wreszcie do symboliki w teoryi niezmienników dwójkowych, opartej na teoryi funkcyj symetrycznych.

Wyraz główny $C_0$ niezmiennika formy pierwotnej $f_2$ jest funkcyą izobaryczną spółczynników $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$, czyniącą zadość równaniu różniczkowemu:

$$\Omega = a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial C_0}{\partial a_4} + \ldots = 0;$$

$C_0$ pozostaje przeto takim wyrazem głównym dla każdej formy pierwotnej rzędu wyższego $f_{n+1}, \ldots f_{n+2} \ldots$ W tym sensie $C_0$ jest „półniezmiennikiem“ (podniezmiennikiem) dowolnie przedłużonego szeregu $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$

Aby uwidocznić niezależność półniezmienników od rzędu $n$ formy pierwotnej, wyobrażamy sobie rozwinięcie tej ostatniej według potęg rosnących zmiennych $x$ i wprowadzamy pierwiastki „odwrotne“

$$1 + \frac{b}{1} x + \frac{c}{1 \,.\, 2} x^2 + \ldots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) \ldots$$

Wtedy stosuje się następujące twierdzenie zasadnicze Mac-Mahona [30]):

„Każda funkcya symetryczna (całkowita) ilości $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, która jest „nieunitarną“, t. j. zawiera te zmienne w stopniu wyższym od pierwszego, przedstawia półniezmiennik ze względu na spółczynniki $a = 1, b, c, d \ldots$“.

Można np. łatwo sprawdzić, że dla jakkolwiek przedłużonego szeregu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$. zachodzą zawsze związki:

$$\Sigma\alpha^2 = -(c - b^2); \; \Sigma\alpha^3 = \frac{1}{2}(d - 2bc + 2b^3) \ldots$$

gdzie wyrażenia klamrowe po stronie prawej są znanemi wyrazami głównemi spółzmienników. Mac-Mahon i Cayley posługują się przeto „symboliką rozkładu‘, [31]), pisząc:

$$2 = \Sigma\alpha^2; \; 3 = \Sigma\alpha^3; \; 6\,5\,5\,2 = \Sigma\alpha^6\beta^5\gamma^5\delta^2$$

i stosują bezpośrednio do teoryi półniezmienników znane prawa połączeń funkcyj symetrycznych [32]), które brzmią teraz wprost:

$$l, m = (l + m) + (lm) \qquad (l \lesseqgtr m)$$
$$l, l = (21) + 2\,.\,(11) \; (l = m) \text{ i t. d.}$$

Algorytm na tem oparty pozwala głębiej wniknąć w związek pomiędzy syzygiami. Każda taka syzygia między spółzmiennikami, albo równoważna jej syzygia pomiędzy powyższemi symbolami, jest zarodkiem nieograniczonej liczby dalszych syzygij; tak np. symbol *552* można kolejno przekształcić na: *5552*, *6552*, *7552* i t. d.

Przy pomocy tej symboliki Cayley [33]) wyprowadził dla niezmienników „funkcyę tworzącą“

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^j)}$$

Gdy rozwiniemy tę funkcyę według potęg rosnących zmiennej $x$, to spółczynnik przy $x^w$ wyznaczy liczbę półzmienników liniowo-niezależnych stopnia $j$ i wagi $w$.

Trudniejsze pytanie o funkcyj tworzącej dla „perpetuantów“, t. j. takich półniezmienników, których nie można złożyć w sposób całkowity i wymierny z półzmienników stopnia niższego rozwiązał Mac Mahon za pomocą tej samej symboliki; ta funkcya tworząca ma postać:

$$\frac{x^{2^{j-1}-1}}{2.3.4\ldots j}$$

Na tej podstawie Cayley i Mac-Mahon ułożyli obszerne tablice półzmienników, perpetuantów i ich syzygij.

## PRZYPISY.

[1]) Inny obraz istoty symboliki daje nam chemia, gdyż pojęcie cząsteczki odpowiada pojęciu formy algebraicznej, pojęcie zaś atomu—pojęciu elementu formy. Mówimy o tem dalej w tekście.

[2]) Odsyłamy czytelnika, pragnącego poznać tę symbolikę, do pierwszego rozdziału wielokrotnego cytowanego dzieła Gordana-Kerschensteina. Szereg zastosowań symboliki wyjaśnią zresztą następne rozdziały, gdzie mówić będziemy o niej w połączeniu z procesami realnemi.

[3]) Patrz Study w „Methoden etc“ I § 5, II §§2, 5, 6, gdzie szczegółowo wyjaśniono istotę symboliki.

[4]) Journ. f. Math. LIX, s. 1—62 (1861), „Binäre Formen“ § 12. Twierdzenia te i konsekwencye z niego zapewniły symbolice niemieckiej wyższość nad angielską Cayley'a.

Inne dowody twierdzenia u Dahla (Zeuthen, Tiddskr. (4), IV, s. 154—158), dwa u Gordana („Vorlesungen etc.“ § 9) i u Study'ego („Methoden etc“ § 5).

[5]) N. p. niezmiennik jednoczesny formy dwójkowej $a_x^n = (a_1x_1+a_2x_2)^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$ i formy dwójkowej $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \alpha_x$ zestawia się z „czynników klamrowych“ obu typów $(ab)$, $(ac)$, $(bc)$, ...; $(a\alpha)$, $(b\alpha)$, $(c\alpha)$ ... Ponieważ $\alpha_1$, $\alpha_2$ są spółpodstawieniowemi z $-y_2$, $y_1$ (t. j.

przekształcają się tak samo liniowo jak te ostatnie), to czynniki klamrowe drugiego gatunku zastąpić można czynnikami liniowemi $a_y$, $b_y$, $c_y \ldots$ Pojęcie zaś niezmiennika jednoczesnego form $a^2_x$ i $x_1 y_2 - x_2 y_1$ zlewa się z pojęciem „spółzmiennika" pojedyńczej formy $a_y{}^n$.

[6]) Gött. Abh. XVII, s. 1—62 (1872). Jeżeli $f$ jest formą pierwotną, zawierającą różne szeregi nietylko pojedyńczych zmiennych $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, $(z_1, z_2 \ldots z_n)$, lecz i ich wyznaczników dwu, trój, i t. d. szeregowych $p_{ik}, p_{ikl}, \ldots$, to rozkłada się ona symbolicznie na czynniki, z których każdy podporządkowuje się pod **jeden** tylko szereg jednego typu zmiennych, np. $p_{ikl}$. Czynnik taki można wtedy przedstawić jako **potęgę formy liniowej** ilości $p_{ikl}, \ldots$; z powodu tożsamości zachodzących pomiędzy ilościami $p$ i ze względów dualistycznych tamto przedstawienie może podlegać modyfikacyom.

Dla „kompleksów liniowych" te przedstawienia podał Clebsch w Math. Ann. II, s. 1—8 (1868). Waelsch uprościł tę rzecz i rozwinął przy pomocy symbolów Grassmanna (Math. Ann. XXXVII, s. 141—152, 1890). Na tem opiera się odpowiednia zasada przeniesienia.

[7]) Patrz uwagi Gordana, Program, 1875, Dodatek.

Trudności stosowania rachunku symbolicznego w dziedzinach wyższych ilustruje dostatecznie takie zadanie: „Podać w spółrzędnych punktowych równanie hyperboloidy, wspólnej trzem kompleksom liniowym." Patrz Waelsch l. c.

[8]) O wartości praktycznej i pedagogicznej rachunku symbolicznego matematycy różnego są zdania. Nie można zaprzeczyć, że pod tym względem teorya form w okresie najnowszym bywała nieraz rodzajem sportu, w którym pod nawałem mnogości form znikała myśl kierownicza. Na szczęście, temu kierunkowi przeciwdziała prąd zdrowy, w którym występuje coraz bardziej rachunek myślowy procesów niezmienniczych.

[9]) Gordan, „Vorlesungen etc" II. (1887), N° 117. Study, Math. Ann. XXX s. 120—126 (1887), „Methoden etc." (1889), § 6. Pascal (1888), Giorn. di Mat. XXVI s. 33—38, 102—103, Rom. Acc. L. Rend. (4), IV, s. 119—124. Rom. Acc. L. Mem. (4), V s. 375—387. Tożsamości, do których u Pascala sprowadzają się wszystkie pozostałe, są

$$\sum \pm (a_1 a_2 \ldots a_n)\,(a_{n+1} b_1 b_2 \ldots b_{n-1}) = 0.$$

$$\sum \pm (a_1 a \ \ldots a_n)\, a_{n+1,\,x} = 0.$$

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)\,(x_1 x_2 \ldots x_n) - \sum \pm a_{1x_1} a_{2x_2} \ldots a_{nx_n} = 0.$$

$$\sum \pm (x_1 x_2 \ldots x_x)\, a_{n+1,\,x} = 0$$

$$\sum \pm (x_1 x_2 \ldots x_n)\,(x_{n+1}\, y_1 y_2 \ldots y_{n-1}) = 0.$$

Sumy tworzymy, przestawiając symbole $a$ i $x$ na wszelkie możliwe sposoby i zmieniając znak jak w zwykłem prawidle o wyznacznikach.

W dziedzinie dwójkowej jest jedna tylko tożsamość zasadnicza:

$$a_x b_y - a_y b_x - (ab)\,(xy) = 0.$$

[10]) Patrz Study „Methoden etc." s. 204.

[11]) Patrz wyżej II, A. a.

[12]) Math. Ann. I, s. 90—101 (1869); XVII, s. 217—234 (1880). Rozdz. I.

Tej zasady przeniesienia nie należy mieszać ze znaną zasadą przeniesienia Clebscha, która w zastosowaniu do form dziedziny dwójkowej i w szacie geometrycznej brzmi tak: **Jeżeli prosta ma przecinać krzywą $n$-tego rzędu w grupie punktów, mających pewną własność rzutową, to równanie krzywej, której ta prosta jest obwiednią, otrzymujemy w ten spo-**

sób: przedstawmy symbolicznie niezmiennik formy $f^n$, którego znikanie wyraża tę własność, i zastąpmy zachodzący w nim wyznacznik $(ab)$ wyznacznikiem $(abu)$, gdzie $u$ są spółrzędne liniowe, zaś $a$, $b$, ..... oznaczają symbole danej formy trójkowej. (Porów. Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen etc." I, s. 274 i dalsze).

Tak np. równanie krzywej trzeciego rzędu $a_x^3 = 0$, otrzymujemy bezpośrednio w spółrzędnych liniowych w postaci:

$$(a\,b\,u)^2\ (c\,du)^2\ (a\,a\,u)\ (b\,cu) = 0.$$

Dalej: „Proste przecinające krzywą czwartego rzędu $a_x^4 = 0$ w dwustosunku harmonicznym są obwiedniemi krzywej klasy szóstej:

$$(a\,b\,u)^2\ (b\,c\,u)^2\ (c\,a\,u)^2 = 0, \text{ i t. d.}$$

Patrz rozwinięcia dalsze u Gundelfingera Math. Ann. VI, s. 16—22 (1872) i „Study'ego „Methoden etc." II, § 19.

O innych zasadach przeniesieniach patrz w tekście II, D. b.

[13]) Math. Ann. XXXVI, s. 262—303 (1890), § 7 i nast.

[14]) Co do dziedziny trójkowej patrz l. c. § 12

[15]) Journ. f. Math. XLII, s. 117—124 (1851).

[16]) Tu poznać wyraźnie związek z syzygiami, od których autor doszedł do symboliki, opisanej w tekście. Aby mianowicie sprawdzić syzygię $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$, bierzemy 4 formy $f$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$, jako cztery realne potęgi form liniowych, np. $f=(x-a)^{n_1}$, $\varphi=(x-b)^{n_2}$, $\psi=(x-c)^{n_3}$, $\chi=(x-d)^{n_4}$ i w każdem nasunięciu ograniczamy się do wyrazu głównego. Tak np. zamiast $(f,\varphi)^\lambda)$ $(f_\varphi)^4)$, $\varphi)$ należy wziąść $(a-b)^\lambda$, $(a-c)^4$ $(a-b)$. Lewa strona syzygii $[f,\varphi,\psi,x]_i$ staje się funkcyą $F(a, b, c, d)$, czyniącą zadość równaniu $\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$: $F$ zależy przeto od trzech spółrzędnych: $a - b = -b'$, $a - c = -c'$, $a - d = -d'$. Ponieważ wszakże równocześnie $b - c = b' - c'$, $b - d = b' - d'$, $c - d = c' - d'$, dość przeto wziąć $a = 0$ w $F$, aby widzieć z łatwością znikanie tożsamościowe funkcyi $F$. Odwrotnie, można otrzymać syzygie z każdej takiej tożsamościowo znikającej funkcyi trzech zmiennych.

[17]) § 10. Wynikiem bezpośrednim jest wyznaczenie półniezmienników nieprzywiedlnych danego stopnia $i$ i danej wagi $g$: liczba ich jest równa liczbie rozwiązań całkowito-liczbowych równania

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1,$$

a same utwory można napisać symbolicznie.

Odpowiednią symboliką posługiwali się przedtem Capelli i Le Paige dla prostych form o kilku szeregach ilości zmiennych, podległych różnym podstawieniom:, pierwszy z nich dla formy kwadratowej o dwu szeregach dwójkowych (Giorn di Mat. XVII, s. 69—148. 1879), drugi dla form wielokrotnie liniowych (Belg. Bull. (3), II, s. 40—53. 1881).

[18]) „Methoden etc." II, § 13.

[19]) Math. Ann. XXXIII, s. 372—389 (1889).

[20]) „Methoden etc." II § 15.

[21]) Sam Cayley, twórca symboliki, w poźniejszych pracach innych dawał pierwszeństwo rachunkowi na istotnych wyrazach głównych i na funkcyach tworzących.

[22]) Am. J. I. s. 63—125 (1878). Porównaj uwagi Clifforda tamże s. 126—129 Malet tamże s. 277—282 Clifford pierwszy wykazał wzajemną odpowiedniość obu sposobów przedstawienia.

[23]) Patrz dodatki do wymienionej wyżej rozprawy Sylvestera.

[24]) Lond. M. S. Proc. X, s. 124—129, 214—221 cf. Spottiswoode tamże str. 204—214.

[25]) Porówn. Buchheim London M. S. Proc. XVII, s. 80—106 (1886). Tak zwane „twierdzenie o rozkładzie“ Clebscha: „każdy niezmiennik formy dwójkowej można rozłożyć na dwie części, u których jedna jest utworem przejętym z formy $f_{n-1}$, druga zaś zawiera czynnik symboliczny $(ab)^{\lambda}$ $\left(\lambda \geqq \frac{n}{2}\right)$“ wynika tu stąd, że każdy obraz geometryczny może być sprowadzony do sumy najprostszych wielokątów. Kempe (tamże s. 107—121) wykazuje, że odpowiednia interpretacya związków tożsamościowych pomiędzy symbolami umożliwia rachunek istotny na geometrycznych obrazach niezmienników.

[26]) Acta math. XV, s. 193—220 (1891). Porów. wyżej II, A. a.

[27]) Porów. II, A, a.

[28]) l. c.

[29]) Porówn. biografię Grassmanna w Math. Ann. XIV, s. 9 i nast.

[30]) Am. J. VII, s. 26—47 (1887). Porówn. Cayley, tamże s. 1—25, 59—73, Quart. J. XX, s. 212—213 (1884).

[31]) Aby otrzymać półniezmiennik stopnia $l$, dość liczbę $l$ przedstawić wszelkiemi możliwemi sposobami jako sumę liczb mniejszych. Sylvester tę symbolikę rozkładu zestawił z zasadami swojej „algebry powszechnej“ (Universal Algebra). Am. J. V. s. 79—137 (1883). Porówn. Am. J. VI, s. 270—280 (1883), oraz Peirce tamże IV, s. 97—229 (1881).

[32]) Mac-Mahon później odwrotnie oparł na tem teoryę funkcyj symetrycznych. Nadto zastosował on symbolikę, o której mowa w tekście, do teoryi perpetuantów i pierwszych operatorów różniczkowych liniowych cząstkowych.

[33]) l. c.

[34]) l. c.

### *b) Procesy niezmiennicze i niesymboliczne*

Rozpatrzymy najważniejsze procesy różniczkowe, stosowane do utworów niezmienniczych w celu otrzymania z nich utworów nowych. Przypadek szczególnie ważny, w którym przy stosowaniu takiego działania wynika wartość zero, omówimy niżej w rozdziale o równaniach różniczkowych; w odpowiednich też rozdziałach rozpatrzymy działania różniczkowe na „recyprokantach“ i „półniezmiennikach.“ Procesy te same przez się, a przynajmniej w pewnej modyfikacyi [1]), mają własność niezmienniczą, t. j. że otrzymujemy ten sam rezultat, jeżeli wykonamy najprzód proces, a następnie przekształcenie liniowe, czy też odwrotnie.

Zgodnie z rozwojem historycznym należy procesy te podzielić na odnoszące się: do zmiennych, do spółczynników form pierwotnych, wreszcie do spółczynników podstawień. Zresztą te trzy rodzaje wielkości można rozważać wspólnie jako spółczynniki form liniowych.

Zakres pracy niniejszej nie pozwala nam zająć się głębszem zbadaniem znaczenia abstrakcyjnego oraz pokrewieństwa wewnętrznego oddzielnych działań, i dla tego w tym względzie odsyłamy czytelnika do „Metod" Study'ego i do I-ej części tomu II dzieła Gordana.

## *a.* Proces Aronholda [2].

Pod tę nazwę podciągamy wszystkie procesy postaci

$$D_{pq} = \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

gdzie $p_i$, $q_i$ są dwoma spółpodstawieniowemi szeregami wielkości, t. j. szeregami, poddanemi tym samym podstawieniom.

Rozważmy najprzód przypadek, w którym $p$ i $q$ są zwyczajnemi (punktowemi) zmiennemi i używaną jest pospoliciej nazwa procesu biegunowego.

W geometryi rzutowej proces biegunowy wystąpił dość wcześnie i następnie z biegiem czasu stał się jej podstawą [3]; w teoryi form, przeciwnie, dopiero w ostatnich czasach udało się procesowi temu nadać rolę kierowniczą w tem znaczeniu, że wszystkie stosowane tu działania różniczkowe nietylko do tego procesu biegunowego się sprowadzają, lecz zarazem dają się one przezeń wyrazić algebraicznie za pomocą wzorów wyraźnych.

Rozpatrzmy najprzód tak zwane „rozwinięcia szeregowe" [4], służące do sprowadzania form o większej liczbie spółpodstawieniowych szeregów zmiennych do form o mniejszej liczbie szeregów. Pojedyńcze wyrazy takich rozwinięć są iloczynami spółzmienników „tożsamościowych" (t. j. zależnych jedynie od zmiennych) przez biegunowe owych form prostszych.

Dla form dwójkowych przeprowadzili podobne redukcye Gordan i Clebsch [5]; Clebsch i Capelli [6] uogólnili to zagadnienie w dwu różnych kierunkach, Capelli'emu [7] atoli należy się zasługa postawienia procesu biegunowego w punkcie środkowym całej teoryi form. Stało się to już w traktowaniu zagadnienia zasadniczego o wyznaczeniu liczby wszystkich spółzmienników liniowo-niezależnych (układu form pierwotnych) danych stopni i rzędów. W późniejszych pracach [8] wychodzi Capelli ogólnie z $n$ szeregów o $\nu$ zmiennych jednorodnych $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$, ..... i szuka praw, łączących $N=n^2$ działań „elementarnych" $D_{xx}$, $D_{xy}$, $D_{xz}$, ..., $D_{yx}$, $D_{yy}$, $D_{yz}$, ....

Przedewszystkiem mamy tu znane prawo (podane przez Clebscha) według którego „wyrażenie klamrowe" $D_{ik}D_{lm} - D_{lm}D_{ik}$ jest zawsze prostą formą liniową wielkości $D$. W szczególności, przy czterech różnych skaźnikach, $D_{ik}$ i $D_{lm}$ są wzajem przemienne, a także $D_{ik}$ i $D_{il}$, $D_{im}$ i $D_{lm}$ [9]). Jeżeli $N$

procesów $D$ w jakimkolwiek porządku oznaczymy przez $D_1, D_2, \ldots, D_N$, to będziemy mieli twierdzenie zasadnicze: „Każda forma $F$ wielkości $D$ (uwarunkowana nietylko swym składem algebraicznym, ale i szeregiem czynników operacyjnych $D$ w każdym wyrazie) daje się przedstawić pod postacią

$$F = \Sigma \, C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}, \ldots, D_N^{\alpha_N}.$$

Polega to na tem, że różnica dwóch iloczynów, utworzonych z tych samych $\lambda$ czynników $D$, wziętych w różnym porządku, jest funkcyą liniową iloczynów, złożonych z $\lambda - 1$ czynników $D$. Następnie zwraca się autor do ogólnego zagadnienia o wyznaczeniu n a j o g ó l n i e j s z e m działania $F$, przemiennego z każdem innem działaniem tego samego gatunku, a więc w szczególności i z każdem działaniem elementarnem. Rozwiązanie tego zagadnienia leży w tem, że $F$ jest funkcyą s y m e t r y c z n ą $n$ szeregów ilości zmiennych, dającą się przedstawić jako forma dowolna pewnych najprostszych, liniowo niezależnych działań, które są przemienne. Np. w przypadku $n=2$ takiemi działaniami są:

$$D_{xx} + D_{yy}, \quad D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy}.$$

Na tej podstawie wyjaśnia C a p e l l i, w jaki sposób inne procesy niezmiennicze sprowadzają się do działań $D$. Dość rozwiązać to zadanie dla przypadku działania C a y l e y'owskiego $\Omega$ [10]), na którem polegają wszystkie procesy nasunięć. Symbolicznie proces $\Omega$ przedstawia się tak:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \frac{\partial}{\partial v_i}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots \frac{\partial}{\partial v_n}$$

gdzie następnie po stronie prawej należy każdy wyraz $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}, \ldots\ldots \frac{\partial}{\partial v_n}$ zastąpić $n$-tą pochodną $\frac{\partial^n}{\partial x_i \partial y_k, \ldots \partial v_s}$.

Działanie $\Omega$ jest przemienne z każdem działaniem elementarnem $D_{pq}$, póki $p$ i $q$ są różnemi; iloczyn zaś

$$\Delta^h \Omega^h = (x\, y. \ldots\, v)^h \Omega^h \qquad (h > 0)$$

posiada własność prostszą, mianowicie przemienność z każdem działaniem $D_{pq}$ dla równych i różnych skaźników $p$ i $q$.

Szukany związek pomiędzy działaniem $\Omega$ i procesami biegunowemi przedstawia piękny wzór

$$\Omega\Delta = \begin{vmatrix} D_{xx}, & D_{xy}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , D_{xv} \\ D_{yx}, & 1+D_{yy}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , D_{yn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{vx}, & D_{vy}, & \cdot & \cdot & \cdot & & & , n-1+D_{vv} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , x_n \\ y_1, & y_2, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1, & v_2, & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & , v_n \end{vmatrix}.$$

Wyżej wspomniane działanie $F$ można złożyć w sposób przejrzysty z procesów typu $\Delta\Omega$.

Wspomnijmy jeszcze, że z $N=n^2$ działań elementarnych można wybrać układ takich $n+1$ działań, aby wszystkie inne działania dały się przez nie wyrazić całkowicie i wymiernie.

Nie wchodzimy w bliższy rozbiór badań Capelli'ego nad niezależnością liniową niektórych z pomiędzy omawianych tu procesów (np. nie może nigdy zachodzić związek liniowy pomiędzy potęgami jednego i tego samego działania $D$).

Proces biegunowy odgrywa rolę zasadniczą w innym kierunku w symbolice Gordana [12]). Dla prostoty ograniczymy się na rozważaniu przypadku typowego formy dwójkowej o jednym szeregu zmiennych $x_1$, $x_2$. Forma $f$, która niechaj będzie rzędu $m+n$, może być uważana za iloczyn dwóch czynników symbolicznych $a_x^m$, $b_x^n$. Biegunowa $k$-ta $f_{yk}$ szeregu $(y)=y_1, y_2$, odpowiednio $f$, tylko czynnikiem liczbowym różni się od spółczynnika przy $\lambda^k$ w rozwinięciu dwumianowem $(a_x+\lambda a_y)^m$ $(b_x+\lambda b_y)^n$, jest więc sumą $k+1$ „wyrazów" $c_\varrho G_\varrho$, gdzie $c_\varrho$ jest liczbą wymierną, $G_\varrho$ zaś powstaje z $a_x^m$ $b_y^n$, gdy $\varrho$ dowolnych czynników $a_x$ oraz $(k-\varrho)$ czynników $b_x$ zastąpimy odpowiednio przez $a_y$, $b_y$. Mamy wtedy ważne twierdzenie [13]): Nietylko różnica dwóch wyrazów, ale i różnica między biegunową a jednym z jej wyrazów posiada zawsze czynnik $(a_1b_2-a_2b_1)$ $(x_1y_2-x_2y_1)$. Stosując pewną liczbę razy to twierdzenie, zarazem w jego uogólnieniu do liczby czynników większej od 2, dochodzimy do zasadniczego rezultatu [14]): „że każdy wyraz biegunowej, a więc i każdy iloczyn symboliczny o dwóch szeregach zmiennych $(x)$, $(y)$ daje się rozwinąć na sumę biegunowych, postępującą według potęg ilości $(x_1y_2-x_2y_1)$".

Twierdzenie to stosuje się do form o większej liczbie, szeregów zmiennych dwójkowych, do dziedziny trójkowej i t. d.

Przechodzimy do procesu Aronholda, stosowanego do kolumn spółczynników $(p_i)$, $(q_i)$, $(r_i)$, . . . przekształcenia liniowego (punktowego), t. j. do działania, będącego w najślejszszym związku z działaniami biegunowemi. W samej rzeczy już u Aronholda znajdujemy twierdzenie ogólne, że spółczynniki rozwiniętej formy pierwotnej przekształconej w nowych zmiennych są biegunami formy pierwotnej, napisanemi tylko według „kolumn podstawień" ilości $(p)$, $(q)$, $(r)$.....

Ważny stąd wynik znajdujemy u Grama [15], mianowicie: dla niezmiennika jednorodnego $J$ (szeregu form pierwotnych o $n$ zmiennych) otrzymujemy $n(n-1)$ równań różniczkowych charakterystycznych[16]), gdy piszemy go w spółczynnikach przekształconych, przez co $J$ przechodzi na $J_1$, rezultat zaś działań biegunowych $D_{pq}$, wykonanych na $J_1$ ($p$ nierówne $q$), uczynimy równym zeru. Dla form dwójkowych pokazał Bruno [17]) w jaki sposób przez bezpośrednie przekształcenie zwykłych równań różniczkowych dla niezmienników dochodzimy do postaci powyższej.

Przechodzimy nakoniec do tej modyfikacyi procesu Aronholdowego $D_{ba} = \Sigma\, a_i \dfrac{\partial}{\partial b_i}$, gdzie $a_i$, $b_i$ są odpowiedniemi spółczynnikami dwóch form $f_n$, $\varphi_n$. Już dość wcześnie [18]) posługiwano się tem działaniem w celu rozciągnięcia pojęcia i tworzenia niezmiennika $J$ formy pierwotnej $f_n$ na większą liczbę form $f_n$, $\varphi_n$ i t. d. W zastosowaniu do form liniowych służy ono u Clebscha [19]) jako fundament symboliki, gdyż wskazuje bezpośrednio, w jaki sposób niezmiennik (formy pierwotnej) stopnia $n$ można napisać jako niezmiennik jednoczesny $n$ form pierwotnych liniowych. Dopoki spółczynniki $b$ są zupełnie niezależne od spółczynników $a$, łatwo wielokrotnie wykonać proces $D_{ba}J = DJ$; potrzeba do tego tylko prostej „iteracyi, t. j. $D^2J$ powstaje w ten sposób z $DJ$, w jaki $DJ$ powstaje z $J$ i t. d. Lecz nie ma to miejsca[20]), gdy ilości $b$ zależą w pewien sposób (spółzmienniczo) od ilości $a$; wtedy, jak to pokazał Gordan, należy uciec się do wzorów zwrotnych, albo też, co teoretycznie jest właściwszem, zastosować pewne rozwinięcia szeregowe.

Proces Aronholdowy służy u Gordana i do uzasadnienia „kombinantów" [21]), $J$ staje się kombinantem form $f$, $\varphi$, jeżeli $DJ$ znika tożsamościowo lub odwrotnie. Łatwo to ugólnić dla przypadku większej liczby form. Przypadek, w którym zachodzi zależność pomiędzy formami pierwotnemi $f$, $\varphi$, . . . , nie jest dotąd jeszcze ogólnie zbadany. Zbadano tylko ważny dla geometryi przypadek szczególny w dziedzinie dwójkowej i trójkowej, mianowicie przypadek formy pierwotnej $f$ i takiego spółzmiennika $\varphi$, że $Df = \varphi$, $D\varphi = Mf$, gdzie $M$ jest czynnikiem stałym (niezmienniczym) [22]).

Specyalny przypadek procesu Aronholdowego, „proces ewektantowy" pozyskał znaczenie dla budowy układów niezmienniczych. Otrzymujemy „pierwszy" ewektant formy $\varphi$, jeżeli przyjmiemy, że forma $f$ jest realną potęgą $\mu$-ą formy liniowej, gdy $\varphi$ w największej liczbie przypadków przedstawia niezmiennik $J$ stopnia $\mu$-go (formy pierwotnej $F$). Symbolicznie wykonywamy to w ten sposób, że kolejno każdy z $\mu$ szeregów symbolów niezmiennika $J$ zastępujemy szeregiem zmiennych $x$, a potem bierzemy sumę wszystkich wyrazów [23]).

Gordan [24]) zastosował to do równań różniczkowych niezmiennika dwójkowego $J$; zastosowanie to nadaje bezpośrednio niezmiennikowi znaczenie dla teoryi form. Mianowicie równania można tak przekształcić, że wyrażają następujące twierdzenie: „Nasunięcie $(n-1)$-e formy pierwotnej na pierwszy ewektant niezmiennika $J$ znika tożsamościowo; $n$-te zaś przesunięcie odtwarza niezmiennik (bez uwagi na czynnik liczbowy).

Odwrotnie, na podstawie tego twierdzenia można równania różniczkowe bezpośrednio napisać.

### $\beta$. Proces nasunięcia i proces $\Omega$.

Na procesie nasunięcia polega w zasadzie praktyczne upostaciowanie dzisiejszej teoryi form. Ogólnie nasunięcie określić można jako utwory jednoczesno-niezmiennicze dwóch lub więcej form pierwotnych o dowolnych szeregach zmiennych, liniowych względem pojedyńczych szeregów spółczynników. Przedstawienie poniższe dla wyrazistości ograniczamy do przypadków prostych.

Niechaj będą dwie formy $F_n(x)$ i $\Phi_\nu(u)$ dualistycznie przeciwstawne; utwórzmy $k$-te biegunowe form $F$ i $\Phi$ względem nowych szeregów zmiennych $(y)$ i $(v)$ i wyobraźmy je sobie rozwinięte według potęg i iloczynów ilości zmiennych. „Nasunięcie $k$-te formy $F$ na $\Phi$ otrzymamy, jeżeli dwa odpowiadające spółczynniki rozwinięć pomnożymy przez siebie i przez właściwy spółczynnik wielomianowy [25]), a następnie utworzymy sumę tych iloczynów". Symbolika pozwala w sposób bardzo treściwy przedstawić to postępowanie. Jeżeli $F_n(x) = a_x^n$, $\Phi_n(u) = u_\alpha^\nu$ są formy dane, a więc $a_x^{n-k} a_y^k$, $u_\alpha^{\nu-k} v_\alpha^k$ ich $k$-te biegunowe, to $k$-te nasunięcie formy $F$ na $\Phi$ ma wyrażenie następujące:

$$(F, \Phi)^k = a_x^{n-k} u_\alpha^{\nu-k} (a\alpha)^k .$$

Można to wyrażenie otrzymać symbolicznie w ten sposób, że w iloczynie $F\Phi = a_x^n u_\alpha^\nu$ zastępujemy kolejno $k$ razy po sobie parę czynników $a_x u_\alpha$ przez „wyrażenie klamrowe" $(a\alpha)$, co daje się wyrazić według Gordana [26]) tak:

„Nasunięcie $k$-te dwóch form

$$F(x)=a_x^n, \quad \Phi(u)=u_\alpha^\nu$$

powstaje przez $k$-krotne fałdowanie iloczynu $F\Phi$".

Dla pewnych badań dobrze jest uogólnić w mowie będące nasunięcie. Aby rzecz tę wyjaśnić dla dziedziny np. trójkowej, weźmy trzy formy ze zmiennemi spółpodstawienionemi $(x)$, $(y)$, $(z)$:

$$F_n=a_x^n, \quad G_p=b_y^p, \quad H_q=c_z^q;$$

do iloczynu $FGH$ zastosujmy $k$ razy proces „fałdowania", zastępując za każdym razem iloczyn $a_x b_y c_z$ „czynnikiem klamrowym" $(abc)$; wynik działania

$$(F,G,H)^k=(abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}$$

nazywa się także „$k$-tem nasunięciem" trzech form. W rzeczy samej przez odpowiednią specyalizacyę można stąd powrócić do poprzedniego pojęcia $(F,\Phi)^k$. Niechaj najprzód rzędy $p$ i $q$ będą równemi oba $\nu$ i poddajmy szereg symbolów $b$, $c$ warunkom, aby iloczyn $b_y c_z$ był funkcyą znakozmienną, t. j aby połączenia ilości $b$, $c$, prócz $(b_i c_k - b_k c_i) = \alpha_i$ znikały. Wtedy $y$, $z$ występują tylko w analogicznych połączeniach $(y_i z_k - y\ z_i) = u_i$, iloczyn $b_y c_z$ przechodzi na formę liniową $u_\alpha$ (a więc $b_z^\nu c_z^\nu$ na $u_\alpha^\nu$), czynnik klamrowy $(abc)$ na $(a\alpha)$ i nakoniec $(F,G,H)^k$ na $(F,\Phi)^k$.

Przedstawione depiero co uogólnienie wykazuje łatwo nam ścisłą zależność pomiędzy procesem nasunięcia i procesem $\Omega$. Dla dziedziny np. trójkowej proces $\Omega$ ma postać:

$$\Omega=\frac{\partial^3}{\partial x_1\,\partial y_2\,\partial z_3}+\frac{\partial^3}{\partial x_2\,\partial y_3\,\partial z_1}+\frac{\partial^3}{\partial x_3\,\partial y_1\,\partial z_2}-\frac{\partial^3}{\partial x_1\,\partial y_3\,\partial z_2}$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial y_2\,\partial z_1}-\frac{\partial^3}{\partial x_2\,\partial y_1\,\partial z_3}.$$

Wykonanie procesu $\Omega$ na iloczynie (symbolicznym lub realnym $a_x^n b_y^p c_z^q$ daje odrazu *np.* $q\,.\,a_x^{n-1} b_y^{p-1} c_z^{q-1}$, a $k$-krotne jego stosowanie:

$$\frac{n!}{(n-k)!},\frac{p!}{(p-k)!},\frac{q!}{(q-k)!}(abc)^k a_\mu^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

stąd twierdzenie zasadnicze [27]):

„Proces $\Omega$, stosowany do iloczynu $a_x^n b_y^p c_z^q \ldots$, jest — jeżeli pominiemy czynnik liczbowy — równoważny z procesem fałdowania; $k$-krotna zaś iteracya procesu $\Omega$ jest w ten sam sposób równoważne z $k$-tem nasunięciem.“

Tak więc związek między nasunięciem i procesem biegunowym jest ustalony.

Do procesu nasunięcia można, według Gordana [28]) nawiązać analogiczne rozwinięcie jak do procesu biegunowego; zasadą kierowniczą jest znowu wykonanie nasunięcia na dwóch iloczynach czynników symbolicznych; rezultat układa się przez to sam jako suma wyrazów. Różnica dwóch wyrazów oraz różnica pomiędzy nasunięciem a jednym z jej wyrazów jest podzielna przez pewne czynniki klamrowe. Stąd następnie wyprowadza się twierdzenie, że „każdy wyraz nasunięcia daje się przedstawić jako suma nasunięć“ i także, że „każdy iloczyn symboliczny daje się przedstawić jako suma nasunięć prostych (t. j. zawierających tylko po dwa symbole).

Wybornym przykładem nasunięć są: wyznacznik funkcyjny [29]) $m$ form (z $m$ jednorodnemi zmiennemi) i jako szczególny jego przypadek wyznacznik Hessego [30]), gdy te $m$ form stanowią cały układ pierwszych pochodnych jednej i tej samej formy.

O podciągnięciu nasunięcia pod pojęcie „połączenia“ dwóch wielkości, jak to uczynił Stroh, a zwłaszcza o spożytkowaniu prawa łącznościowości dla teoryi syzygij (w dziedzinie dwójkowej) wspominaliśmy już poprzednio. Mówiliśmy także o zasadniczej własności procesu $\Omega$, badanego przez Gordana, Mertensa i Hilberta, według której przez odpowiednie wielokrotne tegoż powtarzanie z dowolnej formy jednorodnej i izobarycznej przekształconych spółczynników otrzymujemy niezmiennik formy pierwotnej.

Badanie znaczenia, jakie ma znikanie nasunięcia, stało się źródłem teoryi apolarności, która znów jest najściślej związana z teoryą kombinantów [31]). W innym znów kierunku znikanie tego nasunięcia (dwójkowego) nabrało niedawno znaczenia dla teoryi równań różniczkowych liniowych. Równanie $(f, \varphi)^k = 0$ przy oznaczonem stale $\varphi$ przedstawia równanie różniczkowe liniowe (o czynnikach, które są funkcyami całkowitemi, wymiernemi) dla formy $f(x_1, x_2)$. Ale i odwrotnie jest rzeczą możliwą stronę lewą każdego danego równania różniczkowego liniowego rzędu $k$ z jedną zmienną niezależną o spółczynnikach wymiernych przekształcić za pomocą ujednorodnienia na agregat pewnej liczby nasunięć funkcyi $f$ z szeregiem funkcyj $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots\ldots$ “

Daje się to, jak to niedawno pokazał Waelsch [32]), okazać w sposób następujący: W danem równaniu różniczkowem

$$Py^{(k)} + Qy^{(k-1)} + \ldots = 0$$

położmy $x = \frac{x_1}{x_2}$; stosując twierdzenie Eulera o funkcyach jednorodnych, nadajemy równaniu postać:

$$\sum_{r=0}^{r=k} A_\nu^{(r)} \frac{\partial^k y}{\partial x_1^r \partial x_2^{k-r}} = 0,$$

gdzie ilości $A$ są formami jednego i tego samego rzędu $\nu$. Jeżeli przyjmiemy symbolicznie niewiadomą $y$, jako formę $a_x^\pi$ $(\pi \geqq n)$, to strona lewa staje się najogólniejszą formą dwóch szeregów spółpodstawieniowych $x$, $x_2$; $-a_2$, $a_1$. Rozwijając ją według Clebscha i Gordana na szereg, postępujący według potęg formy $a_x$, i kładąc $n+\nu=m$, nadamy pierwotnemu równaniu różniczkowemu postać:

$$c_0 (\varphi_m, f)^n + c_1 (\varphi_{m-2}, f)^{n-1} + c_2 (\varphi_{m-4}, f)^{n-2} + \ldots = 0,$$

gdzie $\varphi$ są formy dowolne rzędów oznaczonych przez skaźnik, $c$ zaś spółczynniki liczbowe, któremi możemy rozporządzić w sposób odpowiedni. Jeżeli podstawimy teraz wyrażenia niesymboliczne za pojedyńcze nasunięcie i uczynimy w końcu $x_2 = 1$, to wrócimy do pierwotnego równania różniczkowego.

Opisane „normowanie" równań różniczkowych liniowych służy przedewszystkiem do przejrzystego scharakteryzowania specyalnych ich typów, a zwłaszcza jest ono pożytecznem, jak to w pojedyńczych przypadkach wykazał Hilbert [33]) wtedy, gdy idzie o wyznaczenie rozwiązań całkowitych wymiernych takiego równania.

Tak np. już Pick [34]) nadał był zwyczajnemu równaniu różniczkowemu Lamego postać:

$$(\varphi_4 f)^2 = \varphi_0 f,$$

gdzie $\varphi_0$ jest stałą, a iloczyn $\varphi_0 f$ jest równoważny z zerowem nasunięciem $(\varphi_0 f)^0$.

Jeżeli zamiast form $\varphi_4$, $\varphi_0$ napiszemy $\varphi_m$, $\varphi_{m-4}$ (formy rzędów $m$, $m-4$), to będziemy mieli, według Kleina [35]) „ogólne" równanie różniczkowe Lamégo. To ostatnie staje się ogólnem równaniem różniczkowem drugiego rzędu, jeżeli w formie $\varphi_m$ zrównamy pewne czynniki liniowe (realne). Jeżeli zaś w powyższej postaci równania różniczkowego $f$ oznacza rzeczywistą formę $f_\pi$ rzędu $\pi(\geqq n)$, to jego strona lewa staje się formą $F_\mu$ rzędu $\mu = n + \nu + \pi - 2n = \nu + \pi - n$. Wtedy nietylko każdej formie $f_\pi$ odpowiada forma $F_\mu$, lecz i każdemu układowi liniowemu form $f_\pi$ odpowiada układ liniowy form $F_\mu$". Waelsch [36]) opiera na tem specyficzną teoryę odwzorowań geometrycznych.

### $\gamma$. Podstawienie pochodnych niejednorodnych.

Jeżeli dogodnem jest sprowadzanie równania różniczkowego do postaci normalnej niezmienniczo-teoretycznej (jednorodnej), to i odwrotnie dla pewnych celów, np. dla tworzenia równań różniczkowych utworów niezmienniczych jest rzeczą pożyteczną przedstawianie form pierwotnych i ich pochodnych w postaci niejednorodnej.

Niechaj $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ będzie forma dwójkowa; utwórzmy szereg wielkości:

$$f_0 = f,\quad f_1 = \frac{1}{n}\,\frac{df}{dx},\quad f_2 = \frac{1}{n\,(n-1)}\,\frac{d^2 f}{dx^2},\ \ldots,\ f_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n f}{dx^n}.$$

Bruno [37]) w r. 1880 podał ważne twierdzenie:

Jeżeli w wyrazie głównym $C_0$ spółzmiennika $C$ formy $f$ spółczynniki $a_i$ zastąpimy przez $f_i$, to $C_0$ przejdzie na $C''$.

Uogólnienie tego twierdzenia na układ form pierwotnych nie przedstawia trudności.

Zjawisko to, jak zauważył Hilbert [38]), który rozwinął je w dalszym ciągu, jest wspólnem źródłem szeregu pojedynczych metod dawniejszych badaczy: metody Cayleyowskiej wyprowadzania spółczynników formy $C$ z wyrazu głównego $C_0$, rachunku wyrazów głównych Robertsa, oraz równań różniczkowych Cayley'a dla niezmienników i spółzmienników. Te ostatnie przyjmują obecnie postać prostszą, ponieważ sprowadzają się do jednego, na podstawie twierdzenia:

„Każda funkcya całkowita, izobaryczna $C_0$ jednostronnych pochodnych $f_i, \varphi_k, \ldots$, wagi $p$, jednorodna co do tych wielkości w stopniach odpowiednio $g, \gamma \ldots$, jest niezmiennikiem lub spółzmiennikiem jednoczesnym form $f, \varphi \ldots$ rzędu $m = ng + \nu\gamma + \ldots - 2p$, skoro czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$f_0 \frac{\partial C_0}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial C_0}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial C_0}{\partial f_3} + \dots\dots$$

$$+ \varphi_0 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_1} + \varphi_1 \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_2} + \dots\dots = 0\text{“}.$$

Jednym z najważniejszych wyników z tego sposobu przedstawienia jest oczywiście ten, że każdy związek pomiędzy niezmiennikami i spółzmiennikami układu form przechodzi na równanie różniczkowe. Hilbert [39]) podał godne uwagi zastosowanie tego twierdzenia.

Dziś, daleko lepiej niż dawniej, można już obliczać niezmienniki i spółzmienniki dla danych specyalnych form pierwotnych.

Dalszego udoskonalenia doznaje teorya ta według Hilberta, jeżeli obok procesu $D$ wprowadzimy proces nowy $\Delta$:

$$\Delta = \left(n f_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + \dots\dots\right)$$

$$+ \left(\nu \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_0} + (\nu - 1) \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \dots\dots\right).$$

Wykonanie procesu $\Delta$ na formie (izobarycznej) form $f_i$ jest równoważne z różniczkowaniem względem zmiennych $x$ [40]).

Pomiędzy działaniami $D$ i $\Delta$ oraz ich powtórzeniami, zachodzą proste prawa zwrotne, takie jak:

$$D^k \Delta^l = \Delta^l D^k + c_1 \Delta^{l-1} D^{k-1} + c_2 \Delta^{l-2} D^{k-2} + \dots$$

$$\Delta^l D^k = D^k \Delta^l + d_1 D^{k-1} \Delta^{l-1} + d_2 D^{k-2} \Delta^{l-2} + \dots$$

gdzie $c$, $d$ są czynnikami liczbowemi.

Na tem opiera się rozszerzenie pojęcia spółzmiennika (i nasunięcia). Forma (izobaryczna) $F$ form $f_i$, $\varphi_k$ ... nazywa się półspółzmiennikiem (Semicovariante) klasy (Rang) $r$, gdy w szeregu utworów $DF$, $D^2F$..., pierwszym znikającym tożsamościowo jest utwór $(r+1)$-y. Według powyższych wzorów $F$ jest tedy rzędu $m+r$ względem $x$. Półspółzmiennik klasy 0 jest zwykłym spółzmiennikiem (i odwrotnie).

Należy zauważyć, że taka forma $F$ może być otrzymana przy pomocy procesów $D$ i $\Delta$ ze spółzmienników. Jeżeli, mianowicie zbudujemy proces

$$[\,] = 1 - \frac{1}{1.(m+2)} \Delta D + \frac{1}{1.2.(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - \dots$$

to w utworach $[F]$, $[DF]$, ..., $[D^r F]$ otrzymamy $r+1$ spółzmienników $F^{(0)}$, $F^{(1)}, \ldots, F^{(r)}$. Wtedy półspółzmiennik $F$ klasy $r$ daje się przedstawić jako agregat liniowy [41]).

$$F = \sum_{k=0}^{k=r} l_k \Delta^k F^{(k)}; \quad l_k = \frac{(m+k)!}{(m+2k)!\, k!}.$$

Proces [ ] odgrywa przytem rolę uogólnionego nasunięcia i przechodzi na to ostatnie, mianowicie na $(f,\varphi)^p$, jeżeli zamiast $F$ podstawimy iloczyn $f_0 \varphi_p$.

Perrin [42]) rozciągnął twierdzenia tego rodzaju na dziedziny trójkową i wyższe i powiązał je ze swojem przedstawieniem układów stowarzyszonych.

## δ. Rozwinięcia szeregowe.

Jeżeli wyspecyalizujemy wzór Capelli'ego, wyrażający związek pomiędzy procesem $\Omega$ i biegunowym, biorąc za podstawę dwa dwójkowe szeregi zmiennych $x_1, x_2; y_1, y_2;$ i stosując go do formy $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y})$, to otrzymamy związek, na którym Clebsch i Gordan [43]) oparli swoje rozwinięcia szeregowe formy $f(x; y)$ według potęg ilości $(xy) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)$, mianowicie:

I. $$f = \Delta D f + \frac{m}{m+1} (xy)\, \Omega f$$

gdzie trzy procesy $\Delta$, $D$, $\Omega$ mają następujące znaczenie:

$$\Delta f = \frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad Df = \frac{1}{n}\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}\right)$$

$$\Omega f = \frac{1}{mn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\, \partial x_2}\right).$$

Ponieważ formy $Df$ i $\Omega f$ zawierają $y$ w rzędzie niższym niż forma $f$, to wielokrotne stosowanie wzoru I. sprowadza wszystko ostatecznie do form o zmiennych $x_1$ i $x_2$, albowiem po należytej redukcyi otrzymujemy:

II. $$f = \Delta^n D^n f + a_1 (xy)\, \Delta^{n-1} D^{n-1} \Omega f + a_2 (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2} \Omega^2 f + \ldots$$

Szereg przerywa się przy wyrazie $\Omega^m f$, ponieważ $\Omega^{m+1} f$ znika tożsamościowo; formy $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f$ zależą jedynie od $x$. To rozwinięcie formy $f$ według potęg ilości $(xy)$, gdzie spółczyuniki są biegunowemi funkcyami ilości $x$, jest jednoznaczne [44]).

Za pośrednictwem przedstawienia symbolicznego można wyrazy po prawej napisać jako proste nasunięcia. Jeżeli położymy:

$$E_0 = D^n f = a_x^{m+n}, \quad F_1 = D^{n-1} \Omega f = b_x^{m+n-2},$$
$$E_2 = D^{n+2} \Omega^2 f = c_x^{m+n-4} \text{ i t. d.},$$

to wtedy pojedyńcze wyrazy po prawej przechodzą bezpośrednio na $n$-te, $(n-1)$-e, $(n-2)$ e,... nasunięcia form $E_0$, $E_1$, $E_2$ . . . na formę $(xy)^n$.

Lecz jest rzeczą nierównie odpowiedniejszą formę pierwotną $f$ odrazu wziąć w postaci symbolicznej: $f = r_x^m s_y^n$, a dopiero potem odpowiednim iloczynom symboli $r$ i $s$ nadać znaczenie realne. Wtedy formy $E$ otrzymujemy bezpośrednio [45]) za pomocą procesu fałdowania (ze zrównaniem następnem ilości $x$ i $y$), mianowicie

$$E_0 = r_x^m s_x^n, \quad E_1 = (rs) r_x^{m-1} s_x^{n-1}, \quad E_2 = (rs)^2 r_x^{m-2} s_x^{n-2}, \ . \ . \ .$$

Teoretyczne znaczenie rozwinięcia szeregowego jest bezpośrednio widoczne, albowiem wynika z niego, że formę $f$ z dwoma szeregami zmiennych spółpodstawieniowych można ze względu na układ jej utworów niezmienniczych zastąpić zupełnie szeregiem $n+1$ form pierwotnych $E$ (spółzmienników elementarnych według Gordana), zależnych tylko od jednego szeregu zmiennych. Toż samo odnosi się do formy $f$ więcej niż z dwoma szeregami zmiennych, jeżeli tylko opisane postępowanie powtórzymy odpowiednią liczbę razy.

Można także dojść bezpośrednio do wzoru analogicznego dla formy $f$ z dwoma trójkowemi szeregami zmiennych $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Jeżeli wraz z Clebschem [46]) za $f$ weźmiemy specyalnie $x_1^m y_2^n$ i wprowadzimy symbolicznie wyrażenia liniowe

$$x_1 = r_\xi, \quad y_1 = r_\eta; \qquad x_2 = s_\xi, \quad y_2 = s_\eta;$$

to różnica $(xy)$ przejdzie na $(r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi)$, a spółzmienniki elementarne można będzie zastąpić szeregiem

$$\psi_0 = r_\xi^m s_\xi^n, \quad \psi_1 = r_\xi^{m-1} s_\xi^{n-1} (r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi), \ . \ . \ . \ . \ .$$

Na podstawie tego rozwinięcia formy $r_\xi^m r_\eta^n$ Clebsch [47]) udowodnił zasadnicze twierdzenie, że przy budowaniu układu utworów niezmienniczych, należącego do szeregu form pierwotnych o szeregach zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$,

$(z_1, \ldots, s_n)$ można ograniczyć się na prostszym szeregu form pierwotnych, który z każdego „typu zmiennych“

$$x_i, \quad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i, & x_k \\ y_i, & y_k \end{vmatrix}, \quad p_{ikl} = \begin{vmatrix} x_i, & x_k, & x_l \\ y_i, & y_k, & y_l \\ z_i, & z_k, & z_l \end{vmatrix}, \ldots\ldots$$

zawiera najwyżej po jednym szeregu.

W samej rzeczy wspomniane rozwinięcie szeregowe zachodzi i wtedy, gdy $\xi$, $\eta$ przedstawiają dwa szeregi jednego i tego samego „typu“.

Prostsze formy pierwotne, zastępujące zupełnie poprzednie, mogą prócz tego być tak dobrane [48]), aby czyniły zadość równaniom różniczkowym $\sum \frac{\partial^2}{d_{p\,i\,k\,l\ldots}\,\partial_{p'\,i'\,k'\,l'\ldots}} = 0$, gdzie $p_{i\,k\,l\ldots}$, $p_{i'\,k'\,l'\ldots}$ są zmienne dualistycznie przeciwstawne, suma zaś rozciąga się na wszystkie pary tego rodzaju. Jeżeli mamy jednę tylko zmienną punktową i spółpodstawieniową $u$, to suma to jest wprost $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$.

U Gordana [49]) proces rozwinięcia szeregowego jest doniosłym środkiem rachunku symbolicznego. Wspomnijmy np. o metodzie obliczania spółzmienników liniowo-niezależnych („syzygetycznych“) danej formy pierwotnej; o przedstawianiu spółzmienników za pomocą pierwiastków formy pierwotnej; o dowodzie prawa wzajemności Hermite'a, oraz zasadniczego twierdzenia symboliki, że każdy spółzmiennik może być napisany jako agregat iloczynów symbolicznych postaci z góry przepisanej.

Rozciągnięciem rozwinięcia szeregowego Clebscha-Gordana na formy o większej liczbie spółpodstawieniowych szeregów o $n$ zmiennych zajmował się najwięcej Capelli.

Dla formy np. trójkowej [50]) z trzema szeregami $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y}; \overset{l}{z})$ — jeżeli $(x\,y\,z)$ oznacza wyznacznik zmiennych $x$, $y$, $z$ — jest:

$$f = \sum_\nu \sum_\mu (x\,y\,z)^\varrho D^\nu_{yz} D^\mu_{xz}\, \varphi_{\mu\nu}(\overset{m+\mu-\varrho}{x}; \overset{n+\nu-\varrho}{y};) \qquad (\pi+\nu+\varrho)=1$$

Tu $\varphi_{\mu\nu}$ są spółzmienniki, zawierające tylko $x$, $y$; powstają one z formy $f$ w ten sposób, że

$$\varphi_{\mu\nu} = \sum_\sigma k_\sigma D^\tau_{zx} D^{\tau'}_{zy} D^{\tau''}_{xy} D^\sigma \ \Omega \ f,$$

gdzie $k$ są czynniki liczbowe, $\sigma$ zmienia się wewnątrz pewnych granic, a wykładniki $\tau$ są związane w sposób określony z liczbą $\sigma$.

W pierwszym dowodzie swoim posługuje się Capelli symboliką Aronholda. Wyszedłszy z przypadku specyalnego $l=1$, bierze najprzód rozkład

$$f(\overset{m}{x};\ \overset{n}{y};\ \overset{l}{z}) = a^{u}_{m} b^{u}_{y} z = D_{xz}\varphi + D_{yz}\psi + (xyz)(abc)H,$$

w którym formy $\varphi$, $\psi$, $H$ nie zawierają zmiennych $z$. Badanie równań diofantowych pomiędzy wykładnikami czynników symbolicznych $a_x$, $a_y$, $b_x$, $b_y$, $c_x$, $c_y$ w formach $\varphi$ i $\psi$ pokazuje, że ostatnie dwie formy składają się z pewnej liczby form liniowo-niezależnych, powstających wprost z formy $a^m_x b^n_x c_z$ przez biegunowanie względem $y$. Stąd zaś kolejno otrzymuje się podany wzór ogólny, mnożąc obie strony przedstawienia dla $a^m_x b^n_y c_z$ przez dalsze czynniki $c_z$.

Odtąd autor pracował wciąż nad uproszczeniem dowodzenia. Powoli doszedł do tego, że twierdzenie to należy raczej nie tyle do teoryi form, ile do teoryi abstrakcyjnej procesów biegunowych $D$. Momentami głównemi najnowszego dowodu są: po pierwsze — różnica pomiędzy dwoma iloczynami tych samych $\lambda$ działań $D$, różniących się tylko porządkiem, daje się utworzyć liniowo z iloczynów mniejszej liczby działań $D$; dalej niezależność liniowa pomiędzy pewnemi takiemi procesami, wreszcie sprowadzenie procesu $\Omega$ do procesów $D$.

Często stosowanym przypadkiem szczególnym rozwinięcia formy $f(\overset{m}{x};\ \overset{n}{y};\ \overset{l}{z})$ — jeżeli pozostajemy przy typie trójkowym—jest ten, który powstaje gdy $n=l$, $y$ zaś i $z$ występują tylko w połączeniach $u_i = \begin{vmatrix} y_k, & z_k \\ y_i, & z_i \end{vmatrix}$, t. j. gdy forma pierwotna $f$ zależy tylko od zmiennych $x$ i przeciwpodstawieniowych $u$. Clebsch nazywa wtedy formę $f$ „konekseml“ [51]. Już w r. 1872 wykazał Gordan [52]), że koneksy nadają się do bardziej bezpośredniego badania; forma $f$ daje się rozwinąć na szereg skończony według potęg ilości $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_0$ w ten sposób, że spółczynniki stają się „koneksami normalnemi“, t. j. takiemi, dla których znika tożsamościowo pewna forma pośrednia. Aby to jasno pokazać, pójdziemy za wykładem Study'ego [53]).

Jeżeli forma $f$ jest dana symbolicznie przez $a^m_x u^n_\alpha$, to przez fałdowanie otrzymujemy:

$$\Delta_k f = (\alpha a)\, a^{m-k}_x u^{n-k}_\alpha; \qquad (k=1, 2 \ldots\ldots)$$

t. j. najprostsze nasunięcia formy $f$; jeżeli w szczególności $\Delta f$ znika tożsamościowo, $f$ nazywa się „koneksem normalnym“. Dowodzi się najprzód:

Że każdy koneks o liczbach rzędowych $m$, $n$ (względem spółczynników formy $f$) posiada spółzmiennik liniowy o tych samych liczbach rzędowych, będący koneksem normalnym.

W samej rzeczy, agregat

I. $$G_0 = f + a_1 u_x \Delta f + a_2 u_x^2 \Delta^2 f + \ldots\ldots$$

przedstawia przy jakichkolwiek czynnikach liczbowych (wymiernych) $a$ spółzmiennik liniowy formy $f$ z liczbami rzędowemi $m, n$. Tu możemy spółczynniki $a$ za pomocą zwrotu wyznaczyć jednoznacznie w ten sposób, aby było $\Delta G_0 = 0$, t. j. aby $G_0$ było koneksem normalnym.

Dowiedzione w ten sposób twierdzenie I stosuje się tak do samej formy $f$, jak i kolejno do utworów $\Delta f$, $\Delta^2 f$, ..., przez co powstają koneksy elementarne $G_0$, $G_1$, $G_2$, .....

W takiż sam sposób bierzemy agregat

II. $$G_0 + b_1 u_x G_1 + b_2 u_x^2 G_2 + \ldots\ldots$$

i staramy się go przez odpowiedni wybór spółczynników liczbowych $b$ utożsamić z formą $f$. To można uskutecznić jednym tylko sposobem, gdyż ilości $b_i$ otrzymują się przez rozwiązanie układu równań liniowych. „Tak więc każdy koneks $f(x, u)$ daje się według potęg formy $u_x$ rozwinąć na szereg, którego spółczynnikami są koneksy normalne.“

Równocześnie z tego dowodu wynika ważny wniosek, że spółczynniki koneksów elementarnych $G_i$ — prócz ograniczenia, jakie nakłada na nie zachodzenie warunków $\Delta G_i = 0$ — są od siebie niezależne.

Study uczynił teoryę takich rozwinięć szeregowych jeszcze bardziej przejrzystą przez wciągnięcie dualizmu do rozważań. Jeżeli z Rosanesem nazwiemy dwa koneksy $f = a_x^m u_a^n$, $g = b_x^n u_\beta^m$ „sprzężonemi“, wtedy gdy znika niezmiennik równoczesny

$$[f, g] = a_\beta^m b_a^n,$$

to rozwinięcia szeregowe (według koneksów elementarnych) dwóch koneksów o liczbach rzędowych $m, n$ lub $n, m$ wiąże godny uwagi związek, mianowicie „każdy wyraz $u_i^x G_i$ jednego szeregu jest sprzężony z każdym wyrazem $u_k^x G'_k$ drugiego, wyjąwszy przypadek, w którym skaźniki $i$, $k$ są równe.

Zupełnie analogiczne twierdzenia zachodzą dla form z dwoma spółpodstawieniowemi szeregami zmiennych.

Study dowiódł w dalszym ciągu, że omówione własności pozostają w swej mocy, gdy koneks dany $f$ nie jest już ogólnym, lecz jest normalnym [54])

Tenże sam autor, na podstawie starannego zbadania rozmaitości przedstawionej przez spółczynniki podstawienia oraz pewnych niższych dziedzin niezmienniczych w nich zawartych, wyjaśnił znaczenie geometryczne lub raczej pojęciowe rozwinięć szeregowych [55]).

### ε. Podstawienie pochodnych jednorodnych.

Jak już powiedziano we Wstępie, Sylvester przez podstawienie pierwszej pochodnej formy $G(u)$ zamiast spółpodstawieniowych z nią zmiennych $x$ w formie $F(x)$, otrzymał utwór jednocześnie-niezmienniczy. Gdy w szczególności forma $F(x)$ była już spółzmiennikiem, forma zaś $G(u)$ przeciwzmiennikiem danych form pierwotnych, to proces ten prowadził do nowego przeciwzmiennika. W nowszym czasie Sylvester podał jeszcze inną zasadę [56]) w celu otrzymania z dwóch utworów niezmienniczych trzeciego. Zasługuje ona na uwagę przedewszystkiem ze względu na źródło, z którego pochodzi, gdyż wynika z prostego związku pomiędzy grupą podstawień spółczynników $a$ formy pierwotnej.

Aby ten związek uwydatnić, forma pierwotna najprzód „preparuje się“ [57]), t. j. spółczynniki $a$ mnoży się przez pierwiastki kwadratowe odnośnych spółczynników wielomianowych. Wtedy „dwa wzajemne podstawienia zmiennych $x$ dają zawsze przez indukcyę dwa wzajemne podstawienia spółczynników“. Jeżeli więc mamy znowu spółzmiennik $F(x)$ i przeciwzmiennik $G(u)$, to zastąpmy ilości $a$ wewnątrz formy $F(x)$ przez pochodną $\dfrac{\partial G(u)}{\partial a}$ i zarazem ilości $x$ przez ilości $u$, a dojdziemy także do nowego przeciwzmiennika.

W sposób podobny z dwóch spółzmienników można otrzymać nowy spółzmiennik.

Opisany proces podstawienia daje się przenieść na wyrazy główne form $F(x)$, $G(u)$. Jeżeli w jednym z tych wyrazów zamiast ilości $a$ napiszemy odpowiednio pochodne drugiego, otrzymamy nowy wyraz główny spółzmiennika lub przeciwzmiennika.

Sylvester okazał to twierdzenie zasadnicze kolejno dla dziedziny dwójkowej, trójkowej i t. d, Lipschitz [58]) zaś dał dowód tegoż bezpośredni. Wiąże on to twierdzenie z innem podobnem, uzupełniającem z innej strony pokrewieństwo pomiędzy grupą zmiennych i grupą spółczynników. Okazuje się mianowicie, że „dwa podstawienia „transponowane“ jednego rodzaju warunkują takież dwa podstawienia innego.“

Study [59]) rozciągnął to ostatnie twierdzonie na koneksy i wyprowadził stąd niektóre wnioski, z których widać, że źródło tych zjawisk tkwi w zasadzie wzajemności (dualizmu).

Jeżeli obok koneksu pierwszego $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{u})$ wyobrazimy sobie koneks drugi $\varphi(\overset{n}{x}, \overset{m}{y})$ z przestawionemi liczbami rzędowemi i także w postaci „preparowanej", to wtedy obie grupy spółczynników będą wzajemnie transponowanemi".

W rzeczy samej, jeżeli obustronne spółczynniki oznaczymy przed $a$, $b$, przekształcone przez $a'$, $b'$, to agregat $\Sigma ab = \Sigma a'b'$, t. j. $\Sigma ab$ jest spółzmiennikiem tożsamościowym, podobnie jak $\Sigma xu$ [60]).

Stąd dalej wynika, że jeżeli $F$ jest funkcyą ilości $a$, to wielkości $\frac{\partial F}{\partial a}$ są spółpodstawieniowemi z ilościami $b$.

Na tem opiera się wprowadzenie pojęcia ewektantu przy koneksach; dość bowiem zamiast $\frac{\partial F}{\partial a}$ napisać $b$. Ewektant jest znów formą preparowaną. Proces ewektantowy można dowolnie powtarzać, spółczynniki $k$-go ewektantu są pochodnemi cząstkowemi $k$-tego rzędu koneksu $F$.

## ζ. Równania różniczkowe.

Już we wstępie mówiliśmy o udziale Aronholda, Sylvestera, Cayley'a, Brioschi'ego, Betti'ego w ustanowieniu równań różniczkowych, którym czynią zadość niezmienniki jednej lub więcej form pierwotnych. Postęp, dokonany pod tym względem w okresie nowszym, sprowadza się do poznania istotnego znaczenia wzajemnego związku oraz wynikającej stąd redukcyi tych równań.

Już Clebsch stwierdził, że dla tworzenia niezmienników układu form pierwotnych z większą liczbą zmiennych koniecznem jest wprowadzenie podwyznaczników $p_{ik}$, $p_{ikl}$,..., należących do wyznaczników, utworzonych z $n$ takich szeregów, jako zmiennych samodzielnych. Powstało skutkiem tego zadanie zmodyfikowania równań różniczkowych dla niezmienników formy pierwotnej $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ w ten sposób, aby równania te stosowały się do utworu niezmiennego formy $f$, który, oprócz ilości $x$ i spółpodstawieniowych ilości $u$, zawiera zawsze po jednym szeregu z każdego typu pośredniego $p_{ik}$, $p_{ikl}$, , . . . . Ogólnie to zadanie rozwiązał dopiero niedawno Forsyth [61]).

Idąc za Liem, wychodzi on z podstawienia nieskończenie małego ilości $x$, t. j. z takiego podstawienia, którego spółczynniki rożnią się od „podstawienia jednostkowego" $x_i = X_i$ tylko o ilości nieskończenie małe $\delta$; oblicza następnie zmiany, jakich doznają przez to powyższe podwyznaczniki $p_{ik}$, $p_{ikl}$, . . . , $u$, jakoteż spółczynniki $a$ formy pierwotnej. Wystarcza do tego uwzględnienie tylko pierwszych potęg ilości $\delta$ Tak np. dla utworu niezmienniczego $J$ formy czwórkowej $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ o spółczynnikach $a_{iklm}$ dostajemy sześć równań cząstkowych liniowych typu

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, i\, a_{i-1,k+1,l,m} \frac{\partial J}{\partial a_{iklm}} = x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} + p_{14} \frac{\partial J}{\partial p_{24}} - p_{31} \frac{\partial J}{\partial p_{21}} - u_2 \frac{\partial J}{\partial u_1}.$$

Nie przedstawia też zasadniczej trudności uwzględnienie na tej drodze form pierwotnych, w których zachodzą wszystkie lub niektóre z ilości $x$, $p_{ik}$, $p_{ikl}$, . . . , $u$.

Fakt, ustalony przez Clebscha, że równania różniczkowe Aronholda w liczbie $n^2$ dla niezmiennika bezwzględnego tworzą układ zupełny, t. j. że stosowanie procesu klamrowego prowadzi zawsze tylko do kombinacyj liniowych równań dawniejszych, staje się niezwykle przejrzystym z punktu widzenia ogólniejszej teoryi Liego. Gdy bowiem równania różniczkowe niezmiennika wprost wyrażają, że niezmiennik ten dopuszcza wszystkie nieskończenie małe podstawienia zmiennych (albo też i spółczynników), to własność układu zupełnego oznacza, że podstawienia tworzą grupę.

Study [62]) bliżej badał ten związek dla niezmienników rzutowych, a w szczególności wykazał, że pewne układy równań różniczkowych mają bezpośrednie znaczenie w teoryi form, tak w kierunku symbolicznym jak i niesymbolicznym. Gordan, jak to już wspomniano, wykazał to samo dla dziedziny dwójkowej. Study [63]) przedstawia najprzód przekształcenie liniowe ilości $x$ ze pomocą formy $T$, dwuliniowej względem $x$ i $u$. Następnie—w dziedzinie trójkowej—odwzorowuje rozmaitość form $T$ w przestrzeni liniowej $R$ o $9-1=8$ wymiarach; przestrzeń ta przekształca się przeto za pomocą grupy ośmioparametrowej. Przekształceniu tożsamościowemu $u_x$ odpowiada punkt niezmienny—jednostkowy; podobnież ogółowi przekształceń $T'$ o znikającym wyznaczniku rozmaitość siedmiowymiarowa liniowa $R'$. Każde przekształcenie nieskończenie małe odwzorowuje się na „prostej“ w przestrzeni $R$, przechodzącej przez punkt jednostkowy. Jeżeli oznaczymy tę prostą przez jej przecięcie z $R'$, to przez to przyporządkujemy jednoznacznie i odwracalnie każdemu przekształceniu nieskończenie małemu określone przekształcenie ***skończone*** $T'$ o znikającym wyznaczniku, a skutkiem tego forma dwuliniowa $T'$ jest ***symbolem*** przekształcenia nieskończenie małego. Na tej drodze dochodzimy do przejrzystego symbolicznego przedstawienia równań różniczkowych niezmienników $J$ formy pierwotnej $f$.

Znaczenie niesymboliczne równań wyraża się w ten sposób, że ewektant $J'$ niezmiennika $J$ pozwala na utworzenie pewnego spółzmiennika jednoczesnego form $J$ i $f$, który różni się tylko czynnikiem liczbowym od iloczynu $Fu_x$. W twierdzeniach tego rodzaju niezmienniki całkowite wymierne nie wyróżniają się zresztą od innych; zamiast nich, można brać niezmienniki wymierne, algebraiczne lub analityczne.

Nasuwa się teraz pytanie inne, mianowicie do jakiej liczby minimalnej równań niezależnych daje się zredukować układ całkowity $n^2$ równań różniczkowych. Tu liczba minimalna musi posiadać tę własność, że przez wielokrotne powtórzenie procesu klamrowego otrzymuje się wszystkie pozostałe równania układu. Z powyżej omówionego przedstawienia podstawień nieskończenie małych za pomocą form dwuliniowych ze znikającym wyznacznikiem wypływa, że szukana liczba minimalna jest równa 2 [64]).

Inną metodę redukcyi podał Kronecker [65]). Zestawia on ogólne podstawienie liniowe o $n$ zmiennych z szeregu podstawień prostszych w ten sposób, że kolejne wykonywanie tych ostatnich podstawień jest równoważne z wykonaniem pierwszych. Za takie prostsze podstawienie przyjmuje się te, w których podstawienie rozciąga się tylko na dwie zmienne, a w szczególności te, w których zmienne zmieniają się tylko o czynniki stałe. W ten sposób dochodzimy n. p. do $n-2$ prostych „układów zestawienia“ (Decompositionsysteme) ze spółczynnikami liczbowemi; odpowiadające $2n-2$ równań różniczkowych, które kolejno wyrażają, że niezmiennik pozostaje niezmiennym przy każdem z $2n-2$ podstawień, zastępują zupełnie układ $n^2$ równań różniczkowych Aronholda. Dla niezmienników bezwzględnych do każdego z $2n-2$ równań przybywa jeszcze jedno. Kronecker sam zwraca uwagę na to [66]), że jego równania zostały otrzymane bez wszelkiej symboliki; dalej, że przy charakteryzowaniu niezmienników nie można pominąć żadnego z tych $2n-2$ lub $2n-1$ równań, że wreszcie przeprowadzona przez niego redukcya $n^2$ równań pierwotnych do $2n-1$ równań daje zupełne pojęcie o związkach pomiędzy $n^2$ równaniami, warunkujących istnienie tychże.

Na zakończenie wspomnijmy jeszcze o tem, że znaczenie równań różniczkowych, którym czynią zadość niezmienniki, oprócz ułatwienia praktycznego przy ich obliczaniu, polega przedewszystkiem na tem, że aż do ostatnich czasów dawały one jedyną ogólną metodę niesymboliczną traktowania większej liczby zagadnień teoryi form. Gdyż i niesymboliczna metoda „form kanonicznych“ daje się całkowicie uzasadnić jedynie przy pomocy tych równań różniczkowych [67]).

## PRZYPISY.

[1]) Tak np. lewa strona pojedyńczego z pomiędzy $n^2$ rownań różniczkowych Aronholda nie posiada jeszcze własności niezmienniczej, lecz posiadają ją odpowiednie kombinacye tych stron. Por. Study „Methoden i t. d.,“ str. 175.

[2]) O stosowaniu tego procesu do tworzenia pewnych „zupełnych podukładów“ mówiliśmy już poprzednio. Niedawno Wiltheiss zwrócił uwagę na znaczenie, jakie posiada ten proces przy postaciowaniu niezmienniczem równań różniczkowych dla funkcyj $\Theta$

(por. Math. Ann. XXXVIII, zwł. s. 23, 1890); H i l b e r t zaś pokazał, w jaki sposób przy pomocy tego procesu dojść można ogólnie do zupełnego układu form zasadniczych (Gött Nachr. 1892, zwł. str. 6).

[3]) Por. np. T h i e m e, Math. Ann. XXVIII, s. 133—151 (1887).

[4]) Por. II, C. b. δ.

[5]) G o r d a n, Math. Ann. V, str. 595—122 (1872); C l e b s c h, Binäre Formen, § 7 (1872).

[6]) G ö t t. Abh. XVII, s. 1—62 (1872); patrz cytaty w II C. b. δ; C l e b s c h wprowadza zmienne różnostopniowe (wyznaczniki utworzone ze spółpodstawieniowych szeregów ilości zmiennych), C a p e l l i zaś zachowuje szeregi zmiennych jednego gatunku; jego wzory są, przeto bardziej przejrzyste, gdy wzory C l e b s c h a nadają się lepiej do zastosowań geometrycznych. Por. uwagi C a p e l l i'ego w jego „Fondamenti" (1882) str. 3. O analogicznych badaniach D e r u y t s'a patrz II D. a.

[7]) Podstawowe znaczenie ma tu praca „Fondamenti" (1882).

[8]) C a p e l l i zebrał rozproszone po różnych pismach swe badania w rozprawie ogłoszonej w Math. Ann. XXXVII, s. 1—37 (1891). Porów. Nap. Rend. XXV, s. 134—141 (1886) tamże (2) I, s. 110—115, 236—242 (1887); Atti R. Acc. Nap. (2), I (1887). Math. Ann. XXIX, s. 331—338 (1887).

[9]) Do mniejszej liczby tożsamości charakterystycznych tego rodzaju sprowadzić można i pozostałe zależności pomiędzy procesami biegunowemi. S ą t o w ł a ś n i e r ó w n a n i a c h a r a k t e r y s t y c z n e d l a b i e g u n o w y c h. Porówn. Math. Ann. XXXVII, str. 4.

[10]) Odpowiedni wzór dla dwu szeregów zmiennych dwójkowych znajdujemy u C l e b s c h a, Binäre Formen § 7.

[11]) Dalsze wzory w Atti d. R. Acc. di Napoli (2) I, (1882).

[12]) Vorlesungen et. d. II, § 2. Dla dziedziny trójkowej Math. Ann. XVI, s. 217—234 (1880).

[13]) Vorlesungen i t. d. II, s. 26. Twierdzenie to opiera się na własnościach dwóch wyrazów „sąsiednich", które powstają jeden z drugiego w ten sposób, że w parze czynników $a_x b_y$ przestawimy symbole $a$, $b$. E. P a s c a l zbadał szczegółowiej działanie tego procesu, dla którego wprowadził symbol osobny. Napoli Rend. (2), 1, s. 210—207 (1887).

[14]) l. c. s. 32.

[15]) Math. Ann. VII s. 230—240 (1874). Twierdzenie to wypływa zresztą b e z p o ś r e d n i o z definicyi niezmienników, według której niezmiennik przekształcony różni się tylko o potęgę wyznacznika podstawienia od niezmiennika pierwotnego.

[16]) Dalsze równania w liczbie $n$, występujące u A r o n h o l d a, orzekają tylko, że niezmienniki są jednorodnemi i izobarycznemi względem szeregów spółczynników form pierwotnych.

[17]) Binäre Formen, s. 152.

[18]) Porówn. uwagi we Wstępie do tej pracy.

[19]) Porówn. n. p. wykład przejrzysty tej rzeczy w odczytach C l e b s c h a - L i n d e m a n n a I, s. 183 i nast.

[20]) G o r d a n, Vorlesungen i t. d., II, § 5.

[21]) l, c. § 6.

[22]) l. c. s. 74. Por. art. G u n d e l f i n g e r a, Math. Ann. IV, str. 164—168 (1871).

[23]) l. c. str. 128. Porówn S t u d y, Methoden i t. d., str. 41.

[24]) l. c. str. 129 i nast. Co do form trójkowych parrz S t u d y, Methoden i t. d., str 170 i nast.

[25]) Jeżeli wraz z C l e b s c h e m i S y l v e s t e r e m wprowadzimy formy pierwotne „preparowane", w których zachodzą pierwiastki kwadratowe ze spółczynników wielomianów jako czynniki liczkowe, wtedy nasunięcie staje się w p r o s t sumą iloczynów dwóch.

spółczynników homologicznych. Własność niezmiennicza nasunięcia wychodzi na to, że oba szeregi spółczynników są spółpodstawieniowemi.

[26]) Vorlesungen, II, s. 33. Jeżeli w dziedzinie trójkowej mamy dwie formy, które obok ilości $x$ zawierają ilości $u$:

$$f_{r,s} = a_x^r u_\alpha^s, \quad \varphi_{\varrho,\sigma} = b_x^\varrho u_\beta^\sigma,$$

wtedy każde nasunięcie form $f$ i $\varphi$ daje się symbolicznie przedstawić tak:

$$a_\beta^{r_1} b_\alpha^{r_2} (a\, b\, u)^{r_3} (\alpha\, \beta\, x)^{r_4} a_x^{r_5} b_u^{r_6} u_\alpha^{r_7} u_\beta^{r_8},$$

gdzie $r_1 + r_2 + r_3 = r$, i t. d. Tu oznacza

$$a\beta = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3,$$

$$(a\, b\, u) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ u, & u_2, & u_3 \end{vmatrix}, \text{ i t. d.}$$

Nasunięcia te wszystkie można wyprowadzić przy pomocy „fałdowania" z iloczynu $f\varphi$, jeżeli pary czynników $a_\alpha u_\beta$, $b_\beta u_\alpha$, $a_x b_x$, $u_\alpha u_\beta$ zastąpimy odpowiednią liczbę razy przez pary czynników $a_\beta$, $b_\alpha$, $(a\, b\, u)$, $(\alpha\, \beta\, x)$. Patrz Gordan, Math. Ann. XVIII, s. 217—233 (1881).

[27]) Porów. dające się łatwo uogólnić przedstawienie u Gordana,, Vorlesungen II s. 22—23; Vivanti Pal. Rend. IV, s. 261—268 (1890).

[28]) Vorlesungen II, § 3. Math. Ann. XVII, s. 217—239 (1881).

[29]) O związkach pomiędzy wyznacznikami funkcyjnemi patrz II D. b. Zastosowanie ich ujawniło się już przy wyprowadzeniu syzygij.

[30]) O formach, których hesyan znika tożsamościowo, porów. II D. d.

[31]) Porów. II, D, b.

[32]) Prag. Abh. 1892, s. 78—99.

[33]) Disser. Królewiec (1885); Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887), XXVIII t. 381—446 (1887); Perrin S. M. F. XVI, s. 82—100 (1888); Hirsch, Diss., Królewiec, 1892.

[34]) Wien: Ber. lipiec 1887; Math. Ann. XXXVIII, s. 139—143 (1891); Halphen Traité des fonct. ellipt. II, 1888; Bôcher, Gött, Preisarbeit 1851, rozdz. II.

[35]) Gött. Nachr., marzec 1890, s. 85—95; Math. Ann. XXXVIII, s. 144—152 (1891).

[36]) l. c.

[37]) C. R. XC., s. 1203—1205; Journ. f. Math. XC, s. 186—188; Am. J. III, s. 154—164 Math. Ann. XVIII, s. 280—288 (1881). Myśl zasadnicza dowodu, podanego przez Bruno, jest następująca: Jeżeli $\varphi$ jest jedną z pomiędzy form $f_1$, to szereg Maclaurina daje:

$$\varphi = [\varphi] + x[\delta\varphi] + \frac{x^2}{1 \cdot 2}[\delta^2\varphi] + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

gdzie $\delta$ przedstawia znany proces różniczkowania

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

klamry zaś oznaczają, że po wykonaniu działania należy podstawić zero zamiast $x$. Dla spółzmienników formy dwójkowej $f$ zachodzi, według Cayley'a, zupełnie podobne rozwinięcie, tak że

$$\varphi = c_m + \delta c_m + \frac{\nu^2}{1.2}\delta^2 c_m + \ldots\ldots$$

Porównanie tych dwóch rozwinięć prowadzi do twierdzenia, podanego w tekście. Sylvester znalazł to twierdzenie niezależnie od Bruna, ale uznał pierwszeństwo tego ostatniego w Am. J. II, s. 357. Porów. też Stroh, Math. Ann. XXII, s. 402 (1885).

[38]) Diss., Królewiec 1885; Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887). Jeżeli w twierdzeniu, wymienionem w tekście, dowolnej zmiennej $x$ nadamy wartość pierwiastka równania $f=0$, otrzymamy twierdzenie, które Brioschi zastosował z powodzeniem do przekształcenia równania (Math. Ann. XXIX, s. 327—330. (1887).

[39]) Math. Ann. XXX, l. c. s. 21 i nast. Por. II D, d.

[40]) Twierdzenie to wiąże się bezpośrednio ze znanem twierdzeniem, według którego forma izabaryczna spółczynników $a_i$, czyniąca zadość dwom równaniom różniczkowym $D=0$, $\Delta=0$, jest niezmiennikiem jednoczesnym form $f, \varphi \ldots\ldots$ Według twierdzenia głównego w tekście forma ta nie może się zmieniać, jeżeli spółczynniki $a_i$ zastąpimy formami $f_i$, i dla tego jako forma tych ilości $f_i$ nie może ona zawierać zmiennej $x$. Odpowiednie twierdzenie stosuje się zresztą, według Mac Mahona, i do wzajemników. Patrz II C, c, $\beta$.

[41]) Na tem polega dowód Hilberta, dotyczący liczby utworów niezmienniczych liniowo-niezależnych.

[42]) Bull. S. M. F., XVI s. 82—100 (1888).

[43]) Clebsch, Binäre Formen, § 7; Gordan, Vorlesungen II, s. 23.

[44]) Jednoznaczność należy rozumieć w ten sposób, że nie istnieje drugie rozwinięcie według potęg ilości $(xy)$, którego spółczynniki są biegunowemi form jednej zmiennej.

[45]) Gordan, Vorlesungen, II, § 7.

[46]) Gött. Abh., XVII, zwł. s. 22. Por. Gordan, Math. Ann. V, s. 95—122 (1872) gdzie podane są zarazem rozwinięcia dla biegunowych „spółzmienników elementarnych".

[47]) l. c. § 12.

[48]) Forsyth podał w Quart. J. XXIII, s. 102—138 (1888), szereg przykładów takich „układów zredukowanych" i trzymając się drogi Clebscha, stwierdził, że liczba spółczynników dowolnych, występujących w formach zredukowanych, zgadza się ściśle z liczbą form pierwotnych. Mertens zastosował formy zredukowane dziedziny czwórkowej do ustanowienia układów zupełnych form zasadniczych (Wien. Ber. XCVIII, s. 691—730, 1889 i prace późniejsze, tamże). Gordan w programie swoim (Dodatek, 1875) rozwinął w dalszym ciągu pojęcie zredukowanej. W wyznaczniku wielkości

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots$$

uważajmy niektóre szeregi za zmienne dowolne, inne zaś, jak przy procesie $\Omega$, zastąpmy symbolicznie przez odpowiednie pochodne. Wszystkie takie agregaty niezmiennicze, przyrównane do zera, dają nam równania różniczkowe, którym poddać można „formy zredukowane". Mertens w badaniach swych korzysta wiele z takich procesów. Capelli w swoich „Fondamenti" (1882) zamiast tych procesów wprowadza układ prostych działań biegunowych; podobnież Deruyts w swojej pracy: „Théorie générale des formes algébriques" (1891).

[49]) Tożsamo stosuje się do rozwinięć trójkowych Study'ego. Oryginalne przedstawienie rozwinięcia Gordana podał Baker, Mess (2), XIX, 2. 91—96 (1889).

[50]) Capelli, Batt. G. XVIII, s. 17—34 (1880), Fondamenti, 1882, Rend. Pal, I, s. 6 (1886). Math. Ann. XXXVII, s. 1—37 (1891); Rend. Acc. L. VII, s. 161—167 (1891): tamże s. 3—9 (1892).

51) Gött. N. 1872, s. 429—449; Math. Ann. VI, s. 205—215 (1872). Por. Clebsch u Gordan Math. Ann. I, s. 359—400 (1869).

52) Math. Ann. V, s. 95—122, zwłaszcza §§ 4 i 5.

53) „Methoden etc." II, § 3.

54) l. c. II, § 8.

55) l. c. II, § 12.

56) Journ. f. Math. LXXXV, s. 89—114 (1878).

57) Te spółczynniki „preparowane" występują zresztą już u Clebscha, Gött. Abh XVII, s. 14 (1872).

58) Am J. I, s. 336—346 (1878): porów. uwagi Sylvestera, tamże s. 341—343. La Paige podał prosty dowód symboliczny twierdzenia o podstawieniach „transponowanych", Math. Ann. XV, s. 206—210 (1879), Sharp (Proc. L. M. S. XIII, s. 216—239, 1882) podał interesujące zastosowanie dawniejszych twierdzeń Sylvestera o podstawieniach pochodnych jednorodnych; wykazał bowiem, że niezmienniczość, odnośnie do podstawień ortogonalnych, większej części wyrażeń różniczkowych fizyki matematycznej podlega zasadzie Sylvestera. Study zastosował różniczkowanie względem spółczynników podstawienia ortogonalnego do tworzenia niezmienników grup skończonych (Leipz. Ber. 1892, s. 122—164).

59) „Methoden etc." str. 36 i nast.

60) Tak dawne jak i nowe twierdzenia Sylvestera o zamianie zmiennych lub spółczynników przez pochodne dają się oczywiście rozciągnąć i na przypadek jakichkolwiek dwóch dualistycznie przeciwstawnych szeregów zmiennych $p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$, gdyż suma $\sum p_{ikl}, \ldots, p_{i'k'l'}, \ldots$ jest oczywiście spółzmiennikiem tożsamożściowym i t. d.
O odkrytym przez Clebscha związku koneksów z równaniami różniczkowemi i o wynikającej stąd możliwości traktowania tych ostatnich według zasad algebraicznych, patrz Clebscha-Lindemanna, Odczyty o geometryi, I, 2, dział 7.

61) Proceed. L. M. S. XIX, s, 24—46 (1888).

62) „Methoden etc." II, § 18.

63) l. c. § 15.

64) Patrz uwagi Kroneckera (Berl. Ber. 1889, s. 504), który zjawisko to sprowadza do twierdzenia z dziedziny teoryi podstawień.

65) Berl. Berl. 1889, s. 349—362, 479—505, 603—614. Pokrewne badania Derynytsa przedstawiliśmy w rozdziale o półzmiennikach, II, D. a.

66) Tożsamo stosuje się zresztą do wspomnianych równań różniczkowych Forsytha jak i do nowszych wywodów równań dla wzajemników. Patrz II, C. c. β.

67) Inne postępowanie niesymboliczne, oparte na użyciu procesu Ω, związał Mertens bezpośrednio z równaniami różniczkowemi dla form „zredukowanych" (Wien. Ber. XCVIII, s. 691—739 1889). Najnowsze badania Hilberta przybierają coraz bardziej charakter czysto-arytmetyczny.

# DOPEŁNIENIA.

## Do II. C. c. α.

## Uogólnienia.

### *Przekształcenia wyższe.*

Na zakończenie tego rozdziału głównego, rozpatrzymy jeszcze dwa uogólnienia, z których jedno odnosi się do grup przekształceń nieliniowych, wymiernych ilości zmiennych, drugie do grupy t. z. „rozszerzonej“ albo, co na jedno wychodzi, należy do teoryi „niezmienników różniczkowych“.

Przekształcenia wyższe wymierne z punktu widzenia teoryi form zbadano całkowicie tylko w dziedzinie dwójkowej

Już mówiliśmy o postaci, nadanej przekształceniu Tschirnhausowskiemu przez Hermite'a, w której nowa zmienna jest funkcyą całkowitą dawnej [1]). Gordan [2]) wykazał, że i w jaki sposób teorya niezmienników dwójkowych przekształcenia wymiernego daje się sprowadzić do teoryi rzutowej. Idzie tu tylko o niezmienniki względne, gdyż, jak łatwo widzieć, możliwość niezmiennika bezwzględnego jest tu wyłączona.

Na formie dwójkowej $f(x_1, x_2)$ wykonywa się podstawienie

$$z_1 = \varphi_m(x_1, x_2), \qquad z_2 = \psi_n(x_1, x_2)$$

w ten sposób, że tworzymy wypadkową (rugownik) $F$ (odnośnie do $x$) obu form $f$ i $z_1\psi - z_2\varphi$. Wtedy $F$ nazywa się formą przekształconą, a zadanie sprowadza się do wyrażenia niezmienników formy $F$ za pomocą najprostszych jednoczesnych niezmienników form $f$, $\varphi$, $\psi$; przytem można dwie ostatnie formy $\varphi$, $\psi$ zastąpić przez ich „kombinant“ [3]):

$$(1) \qquad \vartheta(x; y) = \varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x).$$

Odwrotność wszakże niezawsze zachodzi: nie każdy niezmiennik jednoczesny form $f$, $\varphi$, $\psi$ lub $f, \vartheta$ jest niezmiennikiem formy $F$; aby to miało miejsce, muszą jeszcze spełniać się pewne równania różniczkowe. Clebsch [4]) podał te równania i dowiódł zarazem, że stanowią one układ zupełny. W przypadku $m=2$ można je zcałkować.

Przekształcenia wyższe stosowano w celu nadania równaniom pewnych własności niezmienniczych [5]). W przypadkach szczególnych można, według Clebscha [6]), przekształcenia wyższe sprowadzić bezpośrednio do liniowego, jak np. przekształcenie sześcienne formy $f_3$. Torelli wykrył [7]) właściwe źródło tego zjawiska w pewnej tożsamości o spółczynnikach, które są spółzmiennikami liniowemi, zachodzącej pomiędzy trzema dowolnemi formami sześciennemi. Dwie nawzajem przekształcalne formy różnią się tylko czynnikiem stałym, który jest iloczynem dwóch niezmienników.

Clebsch [8]) związał przekształcenia wyższe form dwójkowych z przekształceniami liniowemi przestrzeni wielowymiarowej i nadał im, skutkiem tego, pierwszym przejrzystą interpretacyę geometryczną. Gdy mamy np. przekształcenie kwadratowe równania rzędu 5-go $f(\lambda)=0$ z pierwiastkami $\lambda_i$:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3},$$

i gdy $(y)$, $(x)$ przedstawiają spółrzędne dwóch punktów płaszczyzny, to pierwiastki $\xi_i$ równania przekształconego są dane przez punkty przecięcia linii, łączącej punkty

$$z_k = y_k - \xi x_k, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

z pięciu prostemi

$$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0.$$

Te ostatnie zaś są pięcioma stycznemi stożkowej

$$z_2^2 - 4 z_1 z_3 = 0 \text{ [9])}.$$

Skąd zaś wynika wprost, dlaczego przy badaniu tych równań wystarczają przekształcenia kwadratowe. Rozmaite sposoby, jakiemi można jeszcze wybrać punkty $(x)$, $(y)$ na prostej $(z)$, odpowiadają różnym przekształceniom liniowym, jakie dopuszcza jeszcze równanie przekształcone; albowiem zastąpienie tych dwóch punktów przez jakiekolwiek dwa inne punkty linii je łączącej jest równoważne podstawieniu liniowemu zmiennej $\xi$. Clebsch zwraca uwagę na to, że właśnie skutkiem tego elementy właściwe, tkwiące w przekształceniach wyższych, występują niezależnie od wpływu, jaki może wywrzeć jeszcze późniejsze przekształcenie liniowe. Ujawnia się też tu cała oczywistość twierdzenia Gordana, że niezmienniki równania przekształconego zależą tylko od kombinantów form $\varphi$ i $\psi$. Dla równań rzędu szóstego [10]) i siódmego wystarczą podobne przekształcenia sześcienne, do których interpretacyi trzeba wziąć krzywą sześcienną w przestrzeni.

Jako zastosowanie opisanej zasady Clebsch rozwinął całkowicie przejrzysty przegląd związków, zachodzących pomiędzy równaniami rzędu piątego i ich rozwiązującemi, a w szczególności z formą Jerrarda i równaniem modułowem.

Niedawno ukazała się praca Maurera [11]) o przekształceniach wyższych jednoznacznych w dziedzinie $n$ zmiennych; celem jej jest ustanowienie równań różniczkowych dla istniejących wtedy niezmienników obok nowych $n^2$ równań różniczkowych Aronholda. Autor wychodzi z uwagi, że dotąd z punktu widzenia teoryi niezmienników badano tylko w pojedyńczych przypadkach[12]) takie własności form specyalnych, które mają swą podstawę w związkach (algebraicznych), zachodzących pomiędzy spółczynnikami. Dzieli on formy oznaczonego rzędu $p$ o $n$ zmiennych $x$ na klasy: ogół form tworzy klasę $\Omega_0$; te formy zaś, których spółczynniki należą do oznaczonego (nieprzywiedlnego) układu równań algebraicznych, stanowią klasę $\Omega_1$. Jeżeli spółczynniki czynią zadość dalszemu takiemu układowi równań algebraicznych, to z klasy $\Omega_1$ wydziela się klasa $\Omega_2$ i t. d. Pozorna dowolność tego podziału na klasy znika, jeżeli, celem dojścia do niezmienników, wykonywamy przekształcenia, tworzące „grupę". Pomyślmy w samej rzeczy, że przy pomocy równań, charakteryzujących klasę $\Omega_i$, wyraziliśmy niektóre z pomiędzy spółczynników formy jako funkcye jednorodne algebraiczne $t$ pozostałych, za zupełnie dowolnie uważanych wielkości $u_1, u_2, \ldots, u_t$; formę oznaczymy przeto przez $f(x, u)$. Poddajmy oba szeregi zmiennych $x$, $u$ pasmu przekształceń

$$(S) \qquad x_i = \varphi_i(y|p), \quad u_k = \psi_k(v|p)$$

następującej natury: Funkcye $\varphi$ są funkcyami wymiernemi [13]) jednorodnemi zmiennych $x$, w których zachodzi algebraicznie $m$ parametrów $p$; funkcye $\psi$ są funkcyami algebraicznemi ilości $v$, $p$, jednorodnemi względem $v$. Równania (S) mają tworzyć prócz tego „grupę" przekształceń, zawierających przekształcenie tożsamościowe; odwrócenie ma znowu tedy prowadzić do równań tej samej natury: $y = \varphi'(x|p')$, $v = \psi'(v|p')$, gdzie parametry nowe $p'$ zależą algebraicznie od parametrów dawnych $p$. Jeżeli jest rzeczą możliwą, by dla wszystkich wartości parametrów $p$ forma $f(x, u)$ przekształcała się na $f(y, v)$, to grupa (S) nazywa się „przyporządkowaną" do klasy $\Omega_i$. I odwrotnie, takie układy grup (S) istnieją; te wszystkie [14]) układy prowadzą do zupełnie oznaczonego podziału na klasy $\Omega_i$, a także do jednego i tego samego układu niezmienników klasy $\Omega_i$.

Dowód polega na wspomnianem już twierdzeniu Christoffela [15]), według którego — prócz pewnych przypadków wyjątkowych — równoważność cechuje się równością niezmienników bezwzględnych, następnie na zasadach teoryi grup Liego, które należy tylko w pewien sposób zmodyfikować, a to ze względu na właściwość używanych tu przekształceń. Autor dochodzi na tej drodze do wyniku, że $n$ funkcyj $\varphi'$, $t$ funkcyj $\psi'$

i sama funkcya $f$ czynią zadość $m$ równaniom różniczkowym charakterystycznym. Równania te są postaci:

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \sum^{m} Q_i \frac{\partial \varphi'}{\partial p_i} - \sum_1^{n} X_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} = 0,$$

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \sum_1^{m} Q_i \frac{\partial \psi'}{\partial p_i} - \sum_1^{t} U_i \frac{\partial \psi'}{\partial u_i} = 0,$$

$$(\mathrm{E}) \qquad \sum_1^{n} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^{t} U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0,$$

gdzie ilości $Q$ zależą wyłącznie od parametrów $p$, ilości $U$ od zmiennych $u$, wreszcie ilości $X$ tylko od ilości $x$. Niezmienniki $J$ klasy form są określone za pomocą $m$ równań różniczkowych:

$$(\mathrm{J}) \qquad \sum_1^{t} U_i \frac{\partial J}{\partial u_i} = 0.$$

Jeżeli $m'$ jest liczbą równań różniczkowych istotnie różnych, to klasa form posiada $t-m'$ niezmienników wzajemnie niezależnych. Każde rozwiązanie równań (E), różne od $f(x, u)$, jest spółzmiennikiem formy $f$. Z własności przekształceń (S) wynika, że cztery układy ($\mathrm{D}_1$), ($\mathrm{D}_2$), (E), (J) są „zupełnemi". Że podział form $f$ na klasy odbywa się w sposób oznaczony, poznajemy w ten sposób: Niechaj forma $f(x, u)$ klasy $\Omega_i$ przechodzi na formę klasy $\Omega_{i+1}$ przez poddanie ilości $u$ układowi nieprzywiedlnemu równań

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \Pi_\nu = 0,$$

Niechaj klasa $\Omega_{i+1}$ będzie ustalona w ten sposób, że przez przekształcenie, przyporządkowane do klasy $\Omega_i$, każda forma klasy $\Omega_{i+1}$ przechodzi na inną formę tejże klasy. Stąd można wyprowadzić, że i funkcye $\Pi$ czynią zadość równaniom różniczkowym ($\mathrm{D}_2$) dla funkcyj $\psi'$. Z równań różniczkowych (E), którym czyni zadość ogólna forma klasy $\Omega_i$, wynika tym sposobem zupełnie analogiczny układ równań, którym czyni zadość forma klasy $\Omega_{i+1}$ i tożsamo stosuje się do równań różniczkowych dla niezmienników. Równania różniczkowe Aronholda w liczbie $n^2$ dla form ogólnych klasy $\Omega_0$ utrzymują się tedy co do istotnego swego charakteru dla klas następnych; tylko w przypadkach szczególnych [16]) dla ostatnich klas występują jeszcze dalsze równania różniczkowe.

## Do II *C. c. β.*

# Niezmienniki rozszerzonej grupy rzutowej. [17])

### *Wzajemniki i niezmienniki różniczkowe.*

Teoryę „wzajemników“ uzasadnił Sylvester [18]) w r. 1885; on sam oraz jego przyjaciele i uczniowie: Hammond, Mac-Mahon, Leudesdorf, Eliott, Forsyth, Rogers, Berry, a także Perrin rozwinęli ją następnie. Ważną część tej nauki [19]), t. j. naukę o niezmiennikach różniczkowych podjął już był z powodzeniem w 1878 i 1880 Halphen [20]); z drugiej zaś strony dalej sięgające badania Liego [21]) traktują ten przedmiot w takiej ogólności, że szereg twierdzeń i metod wyżej wymienionych autorów wypływa jako przypadek szczególny z tej ogólnej teoryi Liego. Nie zmniejsza to wszakże bynajmniej zasługi jego poprzedników, którzy systematycznie opracowywali takież zjawiska ogólne dla najważniejszego przypadku funkcyj całkowitych ze stanowiska teoryi niezmienników i umożliwili przez to badania geometryczno-rzutowe krzywych i powierzchni. Winniśmy jeszcze dodać, że postęp istotnej nauki byłby bezporównania szybszy, gdyby Halphen i badacze angielscy więcej uwzględniali głębokie pomysły Liego, ten ostatni zaś więcej poświęcił był uwagi tamtym teoryom specyalnym [22]). Sylvester wychodzi z uważania prostej własności tak nazwanego „wyrażenia Schwarza“ (szwarzyanu) [23]):

$$(y, x) = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \frac{2y_1y_3 - 3y_2^2}{2y_1^2}$$

gdzie $y_1, y_2, y_3$ oznaczają pochodne pierwszą, drugą i trzecią względem $x$ zmiennej zależnej $y$. Jeżeli przestawimy tu $y$ i $x$, to wyrażenie $(y, x)$—pomijając potęgę całkowitą ilości $y_1$ oraz znak—przechodzi na wyrażenie „wzajemne“ $(x, y)$: tożsamo stosuje się także do licznika $y_1y_3—y_2^2$. Takie funkcye wymierne ilości $y_1, y_2, y_3, \ldots$, które po przestawieniu ilości $y$ i $x$, zmieniają się tylko o czynnik wymierny tych samych elementów, są „wzajemnikami“ dwójkowemi najprostszemi. Jeżeli ograniczymy się przytem do funkcyj całkowitych wymiernych albo do form $F$ ilości $y_1, y_2, y_3, \ldots$ to łatwo okazać, że przybywający czynnik ma postać $\pm y_1^\mu$, gdzie $\mu$ jest liczbą całkowitą. Stosownie do znaku tego czynnika, wzajemniki dzielą się na dwie klasy: „charakteru“ parzystego i nieparzystego; $\mu$ nazywa się „charakterystyką“. Dla $\mu=0$ mamy wzajemnik „bezwzględny“.

Jeżeli, prócz tego, forma $F$ jest jednorodną co do swych elementów, to wynika stąd samo przez się, że jest izobaryczną, przyczem jest rzeczą dogodną nadać iłościom $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$ wagi: $-1, 0, +1, +2 \ldots\ldots$ Jeżeli $i$ jest stopień, $w$—waga formy $F$, to $\mu$ musi mieć wartość $3i+w$.

Ponieważ formy $F$ nie zawierają wyraźnie zmiennych $x, y$, to, jak łatwo widzieć, i przy podstawieniach „grupy przesunięć“ $x'=x+a$, $y'=y+b$ zmieniają się tylko o czynnik, zależący liniowo od $y_1$. Jeżeli skombinujemy dwa twierdzenia, mianowicie, że wzajemnik przez różniczkowanie względem $x$ przechodzi na wzajemnik (tego samego charakteru) i że jakikolwiek wzajemnik przez podzielenie przez $t^{\frac{\mu}{2}}$ staje się „bezwzględnym“, to pozyskamy operator różniczkowy liniowy $\xi$, który pozwala z danej formy $F$ otrzymać nieskończony szereg takich samych form dalszych.

Następuje teraz przejście do obszerniejszej grupy podstawień liniowych, mianowicie do grupy podstawień „ortogonalnych“. Zachodzi wtedy piękne twierdzenie: „Jeżeli $F$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ są wzajemnikami, to $F$ jest wzajemnikiem ortogonalnym“. Najprostszą taką formą jest strona lewa równania różniczkowego koła. Jeszcze ważniejszym jest krok następny do grupy „powinowatej“

$$x' = ax + by + c, \qquad y = dx + ey + f.$$

Za pomocą zestawienia tej grupy z pojedyńczych podstawień zasadniczych dowodzi się, że wzajemnik po za jednorodnością i izobaryzmem, powinien być tylko niezależny jeszcze od $y$, aby pozostał niezmiennym w odniesieniu do grupy. Takie wzajemniki „powinowate“ nazywają się „czystemi“, w przeciwstawieniu do mieszanych, zawierających także i $y_1$.

Czyste wzajemniki $R$ mają uderzające podobieństwo do półzmienników (porów. II D. a), jakkolwiek bliższe badanie wykrywa i pojedyńcze uderzające różnice. Oba rodzaje wielkości czynią zadość charakterystycznym równaniom różniczkowym analogicznej budowy. Dla obu istnieje analogiczny „generator“, który tu przetwarza półzmienniki na półzmienniki, tam zaś czyste wzajemniki na czyste wzajemniki. Wzorowi liczącemu Cayley'a $(w:i,j)-(w-1:i,j)$ [24] na liczbę źródeł liniowo-niezależnych stopnia $i$ i wagi $w$ formy zasadniczej rzędu $j$ odpowiada dla wzajemników czystych wzór $(w:i,j)-(w-1:i+1,j)$, jeżeli $R$ zależy od pochodnych $y_2, y_3, \ldots, y_{j+2}$. Do tej pory nie znaleziono wystarczającego dowodu na ten wzór ostatni.

Dla obu rodzajów utworów niezmienniczych można utworzyć podobne układy stowarzyszone lub „protomorfy“, t. j. takie najprostsze układy, że każdy następny (przy nieograniczonej liczbie liter),—jeżeli pominiemy całkowitą potęgę pierwszej litery w mianowniku—jest ich funkcyą całkowitą wymierną. Gdy jednak dla półzmienników istnieją protomorfy kolejno stopnia drugiego i trzeciego, to stopień ich dla czystych wzajemników może być dowolnie wysoki. Inne jeszcze głębsze różnice są następujące: Jeżeli niezmiennik całkowity wymierny rozkłada się na czynniki wymierne, to te ostatnie mają też własność niezmienniczą; do wzajemników w ogóle własność ta nie stosuje się. Dla oznaczonego stopnia i nieograniczonej liczby liter, liczba wzajemników czystych jest skończona, gdy tymczasem odpowiedni szereg niezmienników nie przerywa się. Stąd i „funkcye tworzące" obustronne, mimo podobnej budowy, wykazują głębokie różnice.

Wielce interesujące wyniki otrzymujemy, wznosząc się wreszcie do ogólnej klasy „wzajemników rzutowych", należących do ogólnej grupy kolinernej:

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + k}; \quad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + k}.$$

Są to „niezmienniki różniczkowe" odnośnie do zmiennej $x$; podstawę ich nauki założył Halphen [25]).

Według Sylvestera taki niezmiennik różniczkowy można wprost scharakteryzować w ten sposób, że jest to forma ilości $y_2, y_3, y_4, \dots$, jednocząca w sobie własność wzajemnika z własnością zwykłego półzmiennika. Płodność tego związku ujawnia się wyraźnie, gdy mamy uczynić istotny przegląd układu równań różniczkowych. Istnieje mianowicie łańcuch czystych wzajemników $A, B, C, D, \dots$, dający się przedstawić według prostego wyraźnego prawa i prowadzący bezpośrednio do tworzenia wszystkich niezmienników różniczkowych — dość w tym celu $A, B, C, D, \dots$ uważać za spółczynniki formy dwójkowej (kolejno wznoszącego się rzędu) i utworzyć odnośną protomorfę dla półzmienników; jakakolwiek funkcya całkowita wymierna tej protomorfy, podzielona przez odpowiednią potęgę ilości $y_2$, daje niezmiennik różniczkowy; i odwrotnie. Zamiast łańcucha ilości $A, B, C, D, \dots$ można wziąć wprost za podstawę podobny łańcuch półzmienników względem ilości $y_2, y_3, y_4, \dots$ Jeżeli dołączymy do tego jeszcze własność szczególną niezmiennika różniczkowego wymiernego stopnia i rzędu zero, mianowicie, że przez różniczkowanie względem $x$ wytwarza wyrażenie tego samego rodzaju, to łatwo już będzie można zrozumieć, że na tej drodze systematycznej da się przeprowadzić w sposób naturalny zupełne całkowanie przyrównanych do zera niezmienników różniczkowych; u Halphena zaś rozwiązanie tych ważnych dla geometryi zagadnień odbywa się przez stosowanie pośrednich metod całkowania [26]).

Pozostaje nam jeszcze przedstawić ważniejsze przyczynki i rozwinięcia tej teoryi, które zawdzięczamy wspomnianym już spółpracownikom Sylvestera [27]). Jest zasługą MacMahona uporządkowanie sprawiającej zamieszanie rozmaitości liniowo-cząstkowych różniczkowań, przenikających naukę o niezmiennikach dwójkowych i o wzajemnikach. Jedyny proces tego rodzaju, w którym zachodzą cztery dowolne liczby całkowite, obejmuje przy odpowiedniem ich specyalizowaniu znane operatory [28]) Jeszcze ważniejszem jest stwierdzenie, że ta czterokrotna rozmaitość procesów stanowi układ zupełny o tyle, o ile wykonanie działania klamrowego Poissona na dwóch z pomiędzy tych procesów prowadzi zawsze do procesu, należącego do układu. Perrin [29]) przeniósł swoją teoryę reszt prawie wprost z półzmienników na wzajemniki. Jeżeli mamy przeto szereg form wzajemnikowych, zawierających każda wyrażenie $y_n$ jako pochodną najwyższą, i jeżeli tę pochodną uważać będziemy za zmienną dwójkową, to każdy półzmiennik szeregu będzie również wzajemnikiem. Rozszerzenie teoryi Sylvestera na $n$ zmiennych, (z których jedna uważa się za zależną) przeprowadził Elliott [30]) dla przypadku niezmienności przy kołowej przemianie zmiennych; w szczególności zaś zbudował on układ zupełny równań różniczkowych charakterystycznych przy trzech zmiennych. Dalej rozważał Elliott [31]) wzajemniki ogólnej grupy liniowej o trzech zmiennych, Forsyth [32]) zaś zbadał przypadek, w którym tylko dwie zmienne zależne są poddane ogólnemu przekształceniu liniowemu, Hammond [33]) zbadał niektóre całkowalne wzajemniki i ich zastosowania w geometryi.

MacMahon [34]) za pomocą prostej funkcyi tworzącej wyznaczył dla pierwszych sześciu stopni liczby wzajemników czystych (perpetuantów), t. j. takich wzajemników, które nie dają się przedstawić jako funkcye liniowe całkowite innych wzajemników niższego stopnia i rzędu, ale o nieograniczonej liczbie liter. Leudesdorf [35]), oprócz nowych dowodów twierdzeń Sylvestera, podał zupełne kryteryum na to, aby dana funkcya ilości $y_1, y_2, \ldots$ była wzajemnikiem (mieszanym) oraz tablicę odnośnych protomorf.

Godne uwagi uogólnienie pojęcia wzajemnika zawdzięczamy Rogersowi [36]). Wiadomo, że pokrewieństwo jedno-jednoznaczne pomiędzy dwiema parami zmiennych $(x, y)$ i $(x', y')$ można sprowadzić do dwóch podstawień niekongruentnych liniowo-ułamkowych oddzielonych zmiennych $x$ i $y$. Rogers pokazał, w jaki sposób tworzymy niezmienniki różniczkowe takiego przekształcenia. W szczególności otrzymuje on niezmienniki różniczkowe przekształcenia za pomocą promieni odwrotnych. Berry [37]) badał wzajemniki spółczesne (odnoszące się do większej liczby szeregów ilości zmiennych). Ułatwienie w tym razie (jak u Elliotta przy utworach trójkowych) stanowi przyjęcie za podstawę takich wzajemników, które wyraźne zawierają zmienne.

Forsyth [38]), nawiązując badania swoje do prac Rogersa „o wzajemnikach homograficznych“, szukał układu zupełnego dla tych ostatnich.

Osiągnął on swój cel za pomocą podstawienia liniowo-ułamkowego dla każdej zmiennej, a następnie przez skombinowanie obustronnych wyników.

Ważną dla teoryi równań różniczkowych liniowych jest szczególnie klasa wzajemników zwanych „pochodnemi ilorazowemi" [39]). Jeżeli przez $y$ rozumiemy iloraz dwóch rozwiązań szczególnych $u_1$, $u_2$ równania różniczkowego liniowego $n$-tego rzędu i jeżeli zróżniczkujemy $2n-1$ razy równanie $yu_1=u_2$, to przez wyrugowanie pochodnych ilości $u_2$ otrzymamy układ $n$ związków liniowych jednorodnych względem $u_1, u'_1, \ldots, u_1^{(n-1)}$. Wypadkowa tego układu nazywa się „pochodną ilorazową" i zachowuje się niezmiennie względem podstawienia

$$X = \frac{ex+f}{gx+h}, \quad Y = \frac{ay+b}{cy+d},$$

gdyż zmienia się tylko o czynnik $\left(\frac{dY}{dy}\right)^n \left(\frac{dX}{dx}\right)^{-n}$. Tak np. z równania $\frac{d^2y}{dx^3}=0$ wynika wzajemnik Schwarza $3y_2^2 - 2y_1y_2$. Rozległe rozwinięcie tego przedmiotu, t. j. „teoryi niezmienników równań różniczkowych liniowych" dał Forsyth w innej pracy [40]). Jeżeli mamy układ takich równań, to poddajemy go podstawieniom, nie zmieniającym rzędu i charakteru liniowego, t. j. przekształceniu liniowemu zmiennej zależnej oraz przekształceniu dowolnemu zmiennej niezależnej $x$. Można wtedy szukać funkcyj całkowitych (i w ogóle algebraicznych) ilości $y$ i jej pochodnych oraz spółczynników, które, utworzone dla układu równań przekształconych, zmieniają się tylko o czynnik (potęgę ilości $\frac{dX}{dx}$). Forsyth stwierdza, że układ (set) tych funkcyj jest w znaczeniu szerszem układem zupełnym, gdyż z ograniczonej liczby funkcyj powstają inne za pomocą procesów czysto-algebraicznych. Przypadki szczególne tych funkcyj napotkali Cocle, Laguerre, Brioschi, Malet i Halphen [41]).

---

Do II C c. $\gamma$.

## Niezmienniki różniczkowe rzutowe, występujące w teoryi krzywizny.

Mało badano dotychczas teoryę rzutową własności krzywiznowych powierzchni. Po za rozproszonemi uwagami, jakie znajdujemy w wielkiem dziele Darboux'a [42]); niektórych twierdzeń, wyprowadzonych metodą Grassmannowską przez Mehmkego [43]), pojedyńczych zastosowań nauki o wzajemnikach, poczynionych przez Sylvestera i jego uczniów [44]), mamy tu tylko do zanotowania obszerną pracę Vossa [45]) z najnowszego czasu.

Pogląd rzutowy na własności metryczne powierzchni otrzymamy, jeżeli jej cechę, że cztery punkty powierzchni, nie leżą na jednej płaszczyźnie, skombinujemy z faktem, że objętość czworościanu przy dowolnej kolineacyi zmienia się tylko o czynnik, łatwo spostrzedz się dający. Jeżeli obierzemy na powierzchni układ spółrzędnych krzywokreślnych $u$, $v$, to dwie sąsiednie linie $u_0$, $u_0+h$; $v_0, v_0+k$ przecinają się w czterech wierzchołkach $P, P_1, P_2, P_3$ czworościanu $T$. Niechaj $P$ oznacza punkt $(u_0, v_0)$, $P_3$ punkt $(u_0+h, \ v_0+k)$. Niechaj punkt $P_3$ posuwa się ku punktowi $P_3$ (na powierzchni) wzdłuż krzywej analitycznej o parametrze $t$:

$$u = u_0 + h't + \ldots \, ; \quad v = v_0 + k't + \ldots \ldots$$

Jeżeli objętość $T$ podzielimy przez kwadrat powierzchni $\Omega$ równoległoboku, oznaczonego przez wierzchołki $P, P_1, P_3$, otrzymamy w pierwszem przybliżeniu wyrażenie bardzo proste, mianowicie:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2} = \frac{1}{6} \frac{F}{\sqrt{H}} \, ;$$

$H$ jest tu wyróżnikiem $eg-f^2$ kwadratu elementu liniowego

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2;$$

$F$ jest drugą z tak nazwanych „wielkości zasadniczych 2-go rzędu“ $E, F, G$. Powyższa granica nie ma jeszcze w ogóle związku ze stosunkami krzywiznowemi powierzchni. Ale inaczej rzecz się ma, jeżeli przejdziemy do układów wyróżnionych $u, v$. Jeżeli np. pasmo krzywych $u$, $v$ jest utworzone przez krzywe asymptotyczne (Hauptangentencurven) i jeżeli $K$ oznacza miarę krzywizny powierzchni w punkcie $P$, iloraz $\frac{F}{\sqrt{H}}$ zamienia się wprost na $\sqrt{-K}$. Jeszcze ciekawsze wyniki otrzymujemy dla układu „sprzężonego“ ilości $u, v$, dla którego $F$ znika tożsamościowo, co w dalszym ciągu przyjmujemy. Aby dojść teraz do wyznaczenia granicy, podzielmy $\frac{T}{\Omega^2}$ przez kwadrat elementu liniowego $S = \overline{PP_3}$, wtedy:

$$\lim_{t=0} \frac{T}{\Omega^2 S^2} = \frac{1}{72\sqrt{H}} \frac{E\alpha k'^2 + G\beta k'^2}{eh'^2 + 2fh'k'^2 + gk'^2} \, ,$$

gdzie $\alpha$, $\beta$ [46]) zależą tylko od $e, f, g$, a więc zachowują się niezmiennie przy zginaniu powierzchni. Właśnie wyrażenia te $\alpha$, $\beta$ pozostają niezmiennemi przy jakiejkolwiek kolineacyi powierzchni (odniesionej do układu krzywych spółrzędnych sprzężonych), są więc w tem pojmowaniu niezmiennikami bezwzględnemi rzutowemi. Wtedy i tylko wtedy, gdy one zlewają się ze sobą powyższa wartość graniczna, t. j. „krzywizna parametrowa“ zlewa się z „krzywizną normalną“ (w kierunku $PP_3$). Ta okoliczność pobudziła V o s s a do systematycznego badania najważniejszych wielkości krzywiznowych co do ich niezmienniczości rzutowej. Niechaj $x$, $y$, $z$ będą spółrzędne pierwotne kartezyańskie punktu $P$ powierzchni; $x'$, $y'$, $z'$ — spółrzędne liniowo przekształcone; $t=t\,(x, y, z)$ — wspólny mianownik tych ostatnich; $D$ — wyznacznik podstawienia. Wtedy trzy wielkości zasadnicze 2-go rzędu odtwarzają się, przybierając ten sam czynnik, mianowicie:

$$E' = \frac{\lambda}{t} E, \quad F' = \frac{\lambda}{t} F, \quad G' = \frac{\lambda}{t} G,$$

gdzie $\lambda$ oznacza proste wyrażenie algebraiczne, zależne tylko od spółczynników podstawienia i od dostaw kierunkowych normalnej w punkcie $P$ (a więc tylko od „pierwszych pochodnych“ powierzchni). Podobnież otrzymujemy:

$$H' = H \frac{D^2}{\lambda^2 t^6},$$

a stąd dla miary krzywizny $K$:

$$K' = K \frac{(\lambda t)^4}{D^2}.$$

Z tych równań wynikają liczne zastosowania geometryczne; bezpośrednio zaś mamy twierdzenie, podane przez M e h m k e g o [47]: „Jeżeli dwie powierzchnie dotykają się w pewnym punkcie, to iloraz ich miar krzywiznowych w tym punkcie jest niezmiennikiem bezwzględnym rzutowym.“ Ze związku dla $K$ wyprowadził w szczególności V o s s rezultat następujący: „Dla każdej kolineacyi (z wyłączeniem „powinowatej“) istnieją powierzchnie takie, że przy wykonaniu kolineacyi powierzchnia dana przechodzi w ten sposób na inną, iż miara krzywiznowa w odpowiednich punktach zmienia się tylko o czynnik stały“. V o s s wypisuje równania tych powierzchni.

---

Do II C. c. $\delta$.

## Przekształcenia wyższe form różniczkowych w teoryi powierzchni. Parametry różniczkowe.

Teorya powierzchni jest podległa przekształceniom pewnych dwójkowych form różniczkowych [48]. Na pierwszem miejscu stają tu dwie takie formy kwadratowe; kwadrat elementu liniowego powierzchni

$$A = ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

i wielkość $A$ podzielona przez promień krzywizny $\varrho$, t. j.

$$B = \frac{ds^2}{\varrho} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Powierzchnia jest wtedy odniesiona do układu spółrzędnych krzywokreślnych $(u, v)$. Sześć wielkości $e, f, g$; $E, F, G$, t. j. wielkości zasadnicze 1-go i 2-go rzędu" są związane ze sobą trzema „równaniami zasadniczemi". Przekształcenie polega na przejściu od układu pierwotnego $u, v$ do nowego $u, v'$ w ten sposób, że te $u', v'$ uważamy za funkcye jednoznaczne i jednoznacznie odwracalne, zresztą d o w o l n e [49]) ilości $u, v$. Jeżeli położymy:

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial v'}{\partial u} = \gamma. \quad \frac{\partial v'}{\partial v} = \delta,$$

$$du = \xi, \quad dv = \eta, \quad du' = \xi', \quad dv' - \eta',$$

to $\xi, \eta$ przekształcają się l i n i o w o na $\xi', \eta'$ w ten sposób, że

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \qquad \eta' = \gamma\xi + \delta n:$$

odwrócenie zaś tych wzorów daje bezpośrednio :

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\delta, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\beta, \quad \frac{\partial u}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}\alpha,$$

$$\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}.$$

Jeżeli przez podane przekształcenie jakakolwiek forma dwójkowa różniczkowa $A = a_{11}\,du^2 + 2\,a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$ przechodzi na odpowiednią $A' = a'_{11}\,du'^2 + 2\,a'_{12}\,du'\,dv' + a'_{22}\,dv^2$, to podobnie rzecz ma się z formą dwuliniową:

$$A_1 = a_{11}\,du\,\delta u + a_{12}\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + a_{22}\,dv\,\delta v.$$

T u $du$, $dv$ jak i $\delta u$, $\delta v$ n i e p o t r z e b u j ą b y ć k o n i e c z n i e r ó ż n i c z k a m i; w y s t a r c z a, j e ż e l i s ą w i e l k o ś c i a m i s p ó ł p o d s t a w i e n i o w e m i z i l o ś c i a m i $\xi, \eta$. Z tej uwagi, podobnie jak w algebraicznej teoryi niezmienników, wynika ważne zastosowanie co do pochodnych funkcyi. Jeżeli mianowicie $\chi(u, v)$ jest funkcyą dowolną ilości $u$, $v$; $\overline{\chi}(u', v')$ funkcyą przekształconą, to z łatwością dochodzimy do związków:

$$\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}.$$

Ponieważ wyróżnik $a = a_{11}a_{22} - a^2_{22}$ ilości $A$ jest niezmiennikiem względnym, stąd zaś

$$a = \Delta^2 a', \qquad \sqrt{a} = \Delta\sqrt{a'},$$

widzimy przeto odrazu, że wielkości $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\chi}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\chi}{\partial u}$ są spółpodstawieniowemi z $\xi, \eta$, t. j. mogą być podstawione zamiast $\delta u$, $\delta v$ w tożsamości $A_1 = A'_1$, przez co ta ostatnia przyjmuje postać:

$$Udu + Vdv = U'du' + V'dv'$$

tak, że strona lewa jest spółzmiennikiem liniowym ilości $A$. Stąd przy pomocy prostego różniczkowania wynika istnienie niezmiennika:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

a przez podstawienie istotnych wartości niezmiennika:

$$\Delta_a{}^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}\frac{d\chi}{\partial u} - a_{12}\frac{\partial\chi}{\partial v}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u}}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Gdybyśmy w formie liniowej $Udu + Vdv$ zamiast $du$, $dv$ podstawili utworzone dla drugiej funkcyi dowolnej $\omega(u, v)$, podobnie jak dla $\chi$ utworzone, wartości $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\omega}{\partial v}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\omega}{\partial u}$, otrzymalibyśmy niezmiennik $\Delta_a(\chi, \omega)$, mianowicie:

$$\Delta_a(\chi, \omega) = \frac{1}{a}\left\{a_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v} - a_{12}\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) + a_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right\},$$

z którego, gdy $\chi$ i $\omega$ zlewają się, wynika specyalniejszy niezmiennik $\Delta'_a(\chi)$.

Jeżeli zamiast $A$ napiszemy tu formę

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

przez co trzy niezmienniki $\Delta_a^1(\chi)$, $\Delta_a^2(\chi_1)$ $\Delta_a(\chi, \omega)$ niechaj przechodzą na $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$, $\Delta(\chi, \omega)$, to te ostatnie będą właśnie „parametrami różniczkowemi 1-go i 2-go rzędu ilości $\chi$" oraz „parametrami pośredniemi" ilości $\chi$ i $\omega$, przez Beltrami'ego z takiem powodzeniem wprowadzonemi do nauki.

Funkcya $\Delta^2$ pozwala wniknąć głębiej w istotę niezmienniczą miary krzywiznowej Gaussa $K$. Jeżeli $n$ jest mnożnikiem formy $A$, tak że

$$n\,A = dp\,dq,$$

to $K$ zlewa się z wyrażeniem $\frac{1}{2}\Delta^2 \log n$.

Inne wyniki tego samego rodzaju otrzymujemy przez jednoczesne przekształcenie dwóch form różniczkowych, takich jak $A$ i $B$:

$$A = edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv; \quad B = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2.$$

Algebra daje odrazu dwa niezmienniki bezwzględne, mianowicie:

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{eg - f^2}, \quad K = \frac{\varepsilon G - F^2}{eg - f^2},$$

$H$ oznacza tu średnią arytmetyczną dwóch miar krzywiznowych, $K$ ich iloczyn, t. j.

$$H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \quad K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Jeżeli utworzymy jeszcze wyznacznik funkcyjny ilości $A$, $B$ i podzielimy go przez $4\sqrt{a} = 4\sqrt{eg - f^2}$, to dojdziemy do „formy linij krzywiznowych" $\Gamma$ Z algebry otrzymujemy:

$$\Gamma^2 = -KA^2 + HAB - B^2.$$

Nakoniec kwadrat elementu liniowego $d\sigma$ na kuli Gaussowskiej przedstawia się jako spółzmiennik form $A$, $B$, mianowicie:

$$ds^2 = -KA + HB.$$

Dla uzupełnienia znaczenia geometrycznego tych wzorów, dodajmy jeszcze, że forma dwuliniowa $A_1 = \Sigma\, dx\, \delta x$ przedstawia iloczyn dwóch elementów liniowych $ds$, $\delta s$ przez dostawę kąta pomiędzy niemi zawartego. Nakoniec mamy:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,dv + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v$$
$$= dr\,\delta s\left(\frac{\cos\psi\cos\psi'}{\varrho_1} + \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\varrho_2}\right),$$

gdzie $\psi$, $\psi'$ są kąty, jakie elementy $ds$, $\delta s$ tworzą z jedną z przechodzących przez ich punkt przecięcia stycznych głównych.

## PRZYPISY.

[1]) Dodajmy, że Brioschi, nawiązując rzecz bezpośrednio do badań Hermite'a, otrzymał równania różniczkowe, którym czynić mają zadość spółczynniki równania przekształconego (Att. Ist. Lomb. I. s. 231, 1858). Twierdzenie Hermite'a wyraził później w dobitniejszej postaci Klein, odniósłszy przekształcenie Tschirnhausenowskie do „typowego" układu spółrzędnych (Vorlesungen über d. Ikosaeder, 1884, dział II, rozdz. II, §§ 5, 5) Wspomnijmy o jednem jeszcze zastosowaniu przekształcenia wyższego. Jeżeli $f_1(x, 1)$ jest formą dwójkową, napisaną w postaci niejednorodnej, to przez podstawienie $z = \frac{g\,(x, 1)}{f\,(x, 1)}$ przechodzi $f$ na formę $F_n(z, 1)$, której spółczynniki są wszystkie niezmiennikami, w założeniu, że $g$ jest spółzmiennikiem rzędu $n-2$ (Hermite C. R. 1861, por. Rahts, Math. Ann. XXVIII s. 34—60, 1866. Bruno-Walter s. 191 rozszerzają to twierdzenie, zakładając, że $f$ jest spółzmiennikiem rzędu $n$-tego. Junker (Diss. Freiburg 1887) dowiódł, że ostatnie twierdzenie podlega pewnym ograniczeniom. Brioschi w szeregu artykułów, znów nawiązanych do badań Hermite'a, wykazał, jak prostym sposobem dają się przedstawić przekształcone niezmienniki przy podstawieniu pierwiastka formy pierwotnej. Math. Ann, XXIX, s. 327—330 (1887); Annali di Mat. (2) XVI, s. 181—189, 329—334 (1888): London M. S. Proc. XX, s. 127—131 (1889). Rend. Acc. Lin. (5), IV s. 363—369 (1865).

[2]) Journ. f. Math. LXXI, s. 16?—194 (1870).

[3]) Funkcya $\vartheta(x, y)$ jest tem, czem wprowadzona później przez Gordana „funkcya tworząca" $R$ kombinantów $\varphi$ i $\psi$ (porów. II D. b.). Już i tu występuje rozwinięcie tworzącej $R$ według „spółzmienników elementarnych". Przykład wyrachowany, mianowicie przekształcenie kwadratowe formy dwukwadratowej, znajdujemy u Cayleya, Math Ann. III s. 359—361 (1871).

[4]) Gött. Abh. XV, s. 65—99 (1870).

[5]) W szczególności, według postępowania Hermite'a, na podstawie przekształcenia wyższego formę typową uczynimy „typową" o spółczynnikach, które są niezmiennikami Nie zbadano dotąd w ogólności, jakim wtedy warunkom czynić muszą zadość przekształcenia

[6]) l. c.

[7]) Atti. dell'Acc. P. Nap. XVIII, s. 215—225 (1880). Pal. Rend. II, s. 165—171 (1888).

[8]) Gött. Nach. 1871, s. 335—345; Math. Ann. IV, s. 284—345 (1871). Co do równań rzędu 5-go patrz przedstawienie u Clebscha-Lindemanna II. 1, dział 3, N. XI.

[9]) Można stąd odczytać wprost działanie tego przekształcenia kwadratowego, powstającego z poprzedniego przez zamianę ilości $\xi$ i $\lambda$. Niechaj $F(\xi) = 0$ będzie danem

ównaniem rzędu 5-go: pięć pierwiastków $\xi_i$ tego równania przedstawia pięć punktów $(y)-\xi_1(x)$ prostej $(y)(x)$. Jeżeli z tych punktów poprowadzimy pięć możliwych stycznych do stożkowej

$$z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda^2_r z_3 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 10),$$

to 10 argumentów $\lambda$ da nam pierwiastki równania przekształconego. Utwory niezmiennicze formy przekształconej są jednoczesno-niezmiennicze dla trzech form

$$F(\xi), \quad x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3, \quad y_1 + \xi y_2 + \xi^2 y_3 .$$

Szereg wzorów wyrażnych tej postaci podał Spottiswoode (Rom. Acc. Linc. (3), VII, s. 218—223, 1883; Lond. Proc. XVI, s. 148—171, 1885). Pitarelli dał dowód ich zupełny przy pomocy rachunku symbolicznego (Rom. Acc. L. Rend (4), I, s. 327—331, 374—381, 1885).

[10]) Byłoby do życzenia przeprowadzić podobne badanie dla równań rzędu 6-go i 7-go tak mianowicie, aby wyraźnie ujawnić zależności grupowe.

[11]) Journ. f. Math, CVII, s. 89—116 (1890). Zwracamy uwagę na to, że przekształcenia, stosowane przez Maurera, muszą zawierać jeden parametr dowolny. Zresztą praca ta jest uogólnieniem badań tegoż autora, wspomnianych tu na końcu Części I-ej. O teoryi algebraiczno-geometrycznej przekształcenia jednoznacznego dwu zmiennych, rozwiniętej przez Riemanna, Cremonę, Clifforda, Noethera, Rosanesa, Brilla i innych, patrz dzieło Clebscha-Lindemanna I, 4, dział IX, a zwłaszcza Noether, Math. Ann. XXIII, s. 311—358 (1887). Liczbę niezmienników bezwzględnych (modulów) „powierzchni" wyznaczył Noether w r. 1888 (Berl, Ber., s. 1—5).

[12]) Porówn. badania Deruytsa (II D. a), który doszedł do rezultatów równoważnych z rezultatami Maurera.

[13]) Dalszy przebieg badania pokazuje, że funkcye $\varphi$ są jednorodnemi pierwszego stopnia względem zmiennych $x$.

[14]) Tu zarazem milcząco zawiera się uogólnienie, polegające na tem, że funkcye $\varphi$ zależą w pewien sposób algebraiczny i od zmiennych $u$. Układów (S), nie zawierających ilości $u$, istnieje faktycznie tylko jeden, Inaczej zupełnie rzecz się ma u Liego, u którego charakter funkcyonalny ilości $\varphi$ i $\psi$ nie ulega żadnym ograniczeniom.

[15]) Math. Ann. XIX, s. 280—290 (1882).

[16]) Aby to miało miejsce, musi znikać wyróżnik formy $f$—przypadek ten już Aronhold uważał za wyjątkowy.

[17]) Jesteśmy świadomi tego, że temat ten opracowaliśmy bardzo niezupełnie, lecz konieczną było rzeczą ograniczyć się do tych działów, które poddane są metodom zwykłej teoryi niezmienników. Z tego powodu nie mówimy wcale w tekście o teoryi „niezmienników równań rożniczkowych", rozwiniętej przez Liego, Halphena, Vessiota i innych; niezmienniki te tak się mają do niezmienników różniczkowych, jak zwyczajne teorye niezmiennicze algebry do tworów „tożsamościowych" (zawierających tylko zmienne).

[18]) Mess. XV, s. 74—76, 88—92; C. R. CI, s. 1042—1046, 1110—1111, 1225—1229, 1460—1464. Opracowanie teoryi Sylvestera znajdujemy w jego odczytach, wydanych przez Hammonda, Am. J. VIII, s. 196—260; IX, s. 1—37, 113—161, 297—352 (1886); X, s. 1—6 (1887).

[19]) „Niezmienniki różniczkowe" należą do ogólnej grupy rzutowej, „wzajemniki" mogą się też odnosić do jednej z podgrup. Według pierwotnej terminologii Sylvestera, wyraz „wzajemnik" wskazywał tylko przemianę zmiennych. U innych znów autorów, odwrotnie pojęcie niezmiennika różniczkowego jest ogólniejsze.

[20]) Rozprawa doktorska, Éc. Pol. Mém. prés. (2), XXVIII (1878—1884). Porówn też komunikaty C. R. LXXX, 1, 1053 (1875); Journ. de Math. (3), II (1876). Halphen

korzysta tu z twierdzenia, że niezmiennik różniczkowy przez różniczkowanie względem zmiennej niezależnej przechodzi na takiż niezmiennik. Por. Sylvester, Am. 7, IX, s. 297—352 (2887); Elliot Mess. (2) XIX, s. 7—14 (1889).

[21]) Math. Ann. XXIV, s 337—388; Lie-Engel. I, rozdz. 25.

[22]) Przedstawienie szczegółowe wzajemnego związku tych badań stanowić może temat do wdzięcznej pracy. Lie dotyka w różnych miejscach związku swych badań z pracami innych autorów, a zwłaszcza Halphena. Math. Ann. XXXII, s. 212—281; XXIV, s. 537—578 (1884); Math. Ann. XXV, s. 71—151 (1885); Leipz. Ber. 1887, s, 83—88; Am. J. XI, s. 182—186 (1888). Lie-Engel I, s. 552—543; Leipz. Ber. 1891, s. 253—270, zwłaszcza str. 267. Stöckert, Progr. Chemnitz 1895.

[23]) Wyrażenie to występuje już u Lagrange'a.

[24]) Sylvester daje tu nowy dowód wzoru, oparty na tem, że dwie formy izobaryczne, należące do „typów dopełniających się“ $w, i, j$ i $ij-w, i, j$ mają jednakową liczbę wyrazów. Por. Elliot, Lond. Proc. XXIII s. 298—309 (1892), XXIV s. 21—36 (1893).

[25]) l. c. Halphen w pracy, cytowanej na drugiem miejscu rozważał „niezmienniki różniczkowe trójkowe“, w których wyrażeniu występują pochodne dwu zmiennych zależnych względem trzeciej niezależnej. Badacze zaś angielscy, Elliot, Forsyth i inni badali głównie takie niezmienniki i wzajemniki trójkowe, w których jedna zmienna jest zależna, dwie inne niezależne.

[26]) Okazuje się to wyraźnie n.p. przy traktowaniu zagadnienia o wyznaczeniu takiego niezmiennika różniczkowego, którego znikanie daje „równanie różniczkowe krzywej płaskiej rzędu 3-go ($n$-tego“, któremu zatem czyni zadość $y$, jako funkcya zmiennej $x$, gdy $y$ i $x$ są związane równaniem rzędu 3-go ($n$-tego).

[27]) Nie należy zapominać o tem, że obszerność zewnętrzna tych rozwinięć uwarunkowana jest w części przez szereg pojedyńczych wydzielonych pytań (wyznaczenie pojedyńczych klas niezmienników różniczkowych pojedyńczych podgrup grupy liniowej). Tu czuć wyraźnie dotkliwy brak znajomości zasad kierowniczych teoryi Liego.

[28]) Lond. Proc. XVIII s. 61—88 (1887).

[31]) Proces ten przedstawia wzór:

$$(\mu, \nu; m, n) = \sum_{s=0}^{\infty} (\mu + s n)\, A_{sm} \frac{\partial}{\partial a_{n+s}},$$

$$A_{sm} = \sum_k \frac{(m-1)!}{k_0!\, k_1!\, k_2! \dots\dots}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots\dots$$

gdzie

$$k_0 + k_1 + k_2 + \dots\dots = m,$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots\dots = s,$$

cztery zaś paramesry $\mu, \nu, m, n$ są liczbami całkowitemi $\geq 0$. Np.

$$(1, 1; 1, 1) = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial}{\partial a_3} + \dots = 0$$

jest: równaniem różniczkowem półniezmienników;

$$(4, 1; 2, 1) = 4\frac{a_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial a_1} + 5a_0a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 6\left(a_0a_1 + \frac{a_1^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial a_3} + \dots = 0$$

równaniem różniczkowem wzajemników. To ostatnie, według relacyi Sylvestera, podał Hammond. Mac-Mahon dla procesów tych utworzył symbolikę, wiążącą je bezpośrednio z funkcyami symetrycznemi (Lond. Proc. XIX, s. 112—128, 1888). Utwory w dziedzinie trójkowej analogiczne do procesu $(\mu, \kappa; m, n)$ badał Mac Mahon, a później szczegółowo Elliot, Lond. Phil. Tr. CLXXXI, s. 19—51 (1890).

[29]) C. R. C. II, str. 351—353 (1886).

[30]) Lon. Proc. XVII, s. 172—196, (1886); XVIII, s. 142—164 (1887); XIX, s. 6—23, 377—405 (1888); Mess. (2) XIX, s. 7—14; Lond. Proc. XX, s. 131—160 (1889). Druga z wymienionych prac zawiera wywód sześciu równań charakterystycznych dla „wzajemników trójkowych czystych". Jeżeli pomyślimy sobie $z$ jako funkcyę zmiennych $x$ i $y$ i oznaczymy $\frac{1}{r!\, s!} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$ przez $z_{rs}$, to dwa z tych równań orzekają tylko, że wzajemnik jest jednorodny i izobaryczny odnośnie do każdego ze skaźników $r$ i $s$. Dalsze dwa równania wyrażają, że wzajemnik jest niezmiennikiem jednoczesnym form dwójkowych:

$$z_{20}\lambda^3 + 2z_{11}\lambda\mu + z_{02}\mu^2,$$

$$z_{00}\lambda^3 + 3z_{21}\lambda^2\mu + 3z_{12}\lambda\mu^2 + z_{00}\mu^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Porówn. zjawisko analogiczne dla półniezmienników wyższych u Forsytha, o czem wyżej była już mowa. Dwa ostatnie równania stanowią wreszcie uogólnienie równania różniczkowego Hammonda dla wzajemników dwójkowych. Układ wszystkich sześciu równań jest „zupełny", jak to wykazano w trzeciej pracy.

[31]) Lond. Proc. XX, s. 131—160 (1889).

[32]) Lond. Phil. Tr. CLXXX, s. 71—118 (1889).

[33]) Lond. Proc. XVII. s. 128—138 (1886). W szczególności bada autor te równania różniczkowe $(y', y'' . y''' \dots) = 0$, które posiadają całkę postaci $y'' = F(y')$. Prosty przykład geometryczny dają krzywe wymierne płaskie, które dają się przedstawić przez znikający wzajemnik.

[34]) Lond. Proc. XVII s. 139—151 (1886). (Porówn. Griffiths, Ed. Times, LI, s. 137—149, 1889). Jeżeli $w$ oznacza wagę, $\vartheta$—stopień, to należy liczbę $w$ rozłożyć wszelkiemi możliwemi sposobami najprzód na $\vartheta$, potem na $\vartheta+1$ liczb składowych; różnica obu liczb daje liczbę liniowo niezależnych „perpetuantów" stopnia — wagi $(\vartheta, w)$ Np. dla $\vartheta=3$ liczba ta jest spółczynnikiem przy $x^w$ w rozwinięcia funkcyi tworzącej

$$\frac{1 - x - x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots\dots$$

Wzoru ogólnego dotąd nie znaleziono

[35]) Lond. Proc. XVII s. 197—219, 329—343 (1886); tamże XVIII, s. 235—262 (1887). W drugiej pracy bada autor warunki konieczne i dostateczne na to, aby dana funkcya ilości $y_1, y_2, \dots$, była wzajemnikiem mieszanym.

[36]) Lond. Proc. XVII, s. 220—231, 344 - 354 (1886); XVIII, s. 130—141 (1887). XX, s. 161—179 (1889; Mess. (2) XVIII., s. 153—158 (1889).

[37]) Quart. J. XXII, s. 260—288 (1888); XXIII, s. 289—316 (1889).

[38]) Mess. (2) XVII, s. 154—192 (1888).

[39]) Lond. Phil. Trans. 188-, s. 377—489.

[40]) Lond. Phil. Trans. 1889, s. 71—118. Por. Platts. Quart J. XXV s. 00—315(1891).

[41]) Patrz cyt [37]).

[42]) „Leçons sur la théorie générale des surfaces". Paryż, 1870. I, ks. 2.

[43]) Schlöm. Z., XXXVI, s. 56—60, 206—213 (1891). Autor bada tu, o ile jego twierdzenia stosują się do dowolnych przekształceń punktowych. Porówn. też Böklena Mittheil. 1892 i Schlöm. Z. XXXVII, s. 186—189 (1892).

[44]) Elliot, Lond. Proc. XVII, s. 172—196 (1886).

[45]) Math. Ann. XXXIX, s. 179—256 (1891). Voss rozważa też ogólniejsze niezmienniki różniczkowe, przechodzące przy dowolnem przekształceniu na analogiczne zbudowane wyrażenia (za pominięciem czynnika). W tekście ograniczamy się na przekształceniach rzutowych.

[46]) $\alpha$ i $\beta$ są zarazem dwoma niezmiennikami t. z. równania Laplace'owego: por. Darboux, l. c. II, § 23 i dalsze.

[47]) Ponieważ treść tego rozdziału luźnie tylko wiąże się z przedmiotem głównym, więc zamiast cytat szczegółowych wymieniamy tylko nazwiska: Riemanna, Beltrami'ego, Christoffela, Weingartena, Halphena, Ricci'ego, Knoblaucha Frobeniusa.

[48]) Dalsze rozwinięcie u Knoblaucha „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen", Lipsk 1888, rozdz. III. Tenże autor badał i sześcienne formy różniczkowe w związku z teoryą powierzchni. Journ. f. Math. CIII, s. 25—39 (1888). Stäckel tamże CXIII, s. 58—60 (1894).

[49]) Grupa przekształcenia jest t. z. grupą „nieskończoną", co do której patrz badanie Liego w Leipz. Ber. 1891, s. 316—352, 353—393.

---

Do II D. a.

## Specyalne grupy podstawień i formy.

***Półniezmienniki i funkcye półniezmiennicze.***

Dotąd rozpatrywaliśmy ogólne własności form niezmienniczych; obecnie zajmiemy się zjawiskami charakteru bardziej specyalnego, zależnemi od ograniczenia już to grupy wykonywanych podstawień, już to przyjętych za podstawę form pierwotnych, już to od jednego i drugiego zarazem.

Pomiędzy utworami niezmienniczemi, należącemi do podgrup [1]) ogólnej grupy podstawienia liniowego, najogólniej badano tak nazwane półniezmienniki [2]), t. j. wyrazy główne spółzmienników, przeciwzmienników, form pośrednich i t. d. i ich uogólnień.

Zacznijmy od dziedziny dwójkowej. Załóżmy, że rozpatrywane wyrażenia całkowite wymierne $C_0$ są jednorodne i izobaryczne względem szeregów spółczynników $(a)$, $(b)$.... form pierwotnych, lub co wychodzi na to jedno, że przy podstawieniach grupy

(A) $$x_1 = ax_1', \qquad x_2 = dx_2'$$

wyrażenia te zmieniają się o potęgę wyznacznika podstawienia $ad$.

Jeżeli to samo żądanie postawimy dla grupy, powstającej z połączenia grupy (A) z grupą

(B) $$x_1 = x_1' + bx'_2, \qquad x = x'_2,$$

to $C_0$ staje się półniezmiennikiem i czyni zadość charakterystycznemu równaniu różniczkówemu:

$$(D) \qquad \Omega \equiv a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \dots$$
$$+ b_0 \frac{\partial C_0}{\partial b_1} + 2b_1 \frac{\partial C_0}{\partial b_2} + 3b_2 \frac{\partial C_0}{\partial b_3} + \dots$$
$$+ \dots \dots \dots = 0.$$

Jeżeli $C_0$ zawiera $n+1$ argumentów $a$, $m+1$ argumentów $b$ i t. d., to $C_0$ jest zawsze wyrazem głównym, t. j. spółczynnikiem najwyższej potęgi ilości $x_1$ oznaczonego spółzmiennika form $f_n$, $g_m^m \dots$ ze spółczynnikami $a, b \dots$

Sylvester [4]) wychodzi z prostego spostrzeżenia, że $C_0$ staje się zarazem wyrazem głównym spółzmiennika form

$$f_{n'}, g_{m'} \dots (n' \geqq n, m' \geqq m \dots),$$

którego pierwsze $n+1$, $m+1 \dots$ spółczynników zlewa się odpowiednio z $a, b \dots$. Teorya półniezmienników staje się przeto niezależną od form szczególnych $f_n, g_m \dots$ i ich rzędów i pozostaje tylko atrybutem dowolnie przedłużonych szeregów elementów $(a), (b) \dots$. Dla prostoty weźmy tylko pojedyńczy szereg elementów $(a)$. Jeżeli ilości $a$ zastąpimy ich wielokrotnościami liczbowemi, to wyrazy wyrażenia $\Omega$ zmieniają się tylko o czynniki liczbowe, i odwrotnie. Jeżeli więc w $C_0$ uczynimy pierwszy element $a_0$ zerem, to „reszta" będzie półniezmiennikiem odnośnie do nowego szeregu elementów $a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots$ Sylvester i Perrin [5]) pokazali, w jaki sposób na podstawie powyższego upraszcza się znacznie wyprowadzenie nie tylko „form zasadniczych" ale i odpowiednich syzygij. Objaśnia to pomiędzy innemi twierdzenie Perrina, że do wyrazów głównych układu zupełnego form zasadniczych formy $f_n$ potrzeba tylko dołączyć jednę „formę resztową" ilości $a_0, a_1, \dots, a_n$, aby otrzymać układ zupełny form resztowych, należących do formy pierwotnej $f_{n+1}$. Postęp w innym kierunku dało uważanie wyrazu $C_0$ za formę dwójkową zmiennych niejednorodnych $a_n$ [6]). Jeżeli mamy szereg wyrazów głównych $C_0, C'_0, C''_0 \dots$ formy pierwotnej $f_n$, to, według Sylvestera, każdy spółzmiennik ilości $C$, uważanych za formy ilości $a_n$, jest znowu wyrazem głównym spółzmiennika formy $f_n$. W tem znaczeniu każdy półniezmiennik $C_0$ posiada znowu wyraz pierwotny, którym jest spółczynnik najwyższej potęgi ilości $a_n$. Te „zarodki" (germs) spółzmienników formy $f_n$ pozwalają, jak to wykazał Sylvester na przykładach form $f_5$ i $f_6$, wniknąć bliżej w budowę zupełnego układu formy $f_n$.

Wspominaliśmy już o stosowaniu półniezmienników stopnia drugiego i trzeciego względem ilości $a$ do otrzymywania „układów stowarzyszonych“ oraz o zadaniu podstawowem wydzielania z pomiędzy półniezmienników (dla nieograniczonego $n$) tak zwanych „perpetuantów“, t. j. półniezmienników „nieprzywiedlnych“, które nie dają się wyrazić jako funkcye całkowite półniezmienników stopnia niższego względem elementów; wreszcie była już mowa o ścisłym związku pomiędzy półniezmiennikami a funkcyami symetrycznemi. D'Ocagne[7]) w r. 1886 doszedł sposobem bardzo prostym do nowego układu półniezmienników stowarzyszonych formy $f_n$. Uważajmy na chwilę $a_0$ jako funkcyę zmiennych $\xi$, zaś $a_1$, $a_2$, . . . jako jej pierwszą, drugą . . . pochodną względem $\xi$. Wtedy kolejno pochodne ilości $\log a_0$ względem $\xi$ od pierwszej do $(n-1)$-ej dają układ żądany: wszystkie inne półniezmienniki formy $f_n$ dają się wyrazić za pomocą indywiduów tego układu wymiernie z potęgą ilości $a_0$ w mianowniku. D'Ocagne[8]) i Cesàro[9]) zbadali związek tego układu z układem Hermite'a. Różniczkowanie względem $\xi$ jest oczywiście tylko symbolicznem skróceniem procesu

$$\frac{d}{d\xi} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\ldots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

a postępowanie powyższe pozwala z dwóch danych półniezmienników, np. z $a_0a_2-a_1^2$ i $a_0^2$ otrzymać nowy. W ten sposób d'Ocagne[10]), Perrin[11]), Deruyts[12] i Roberts[13]) zbudowali cały szereg podobnych procesów („generatorów różniczkowych“). Deruyts przyjął za podstawę cały szereg grup elementarnych $(a)$, $(b)$ . . . i zbadał bliżej ścisłe pokrewieństwo procesu

$$\frac{d}{d\xi} = \sum \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\ldots\right)$$

z poprzedniemi procesami Cayleya $D$ i $\Delta$ (w ich działaniach na półniezmienniki). Dla objaśnienia przytoczmy twierdzenie, według którego podstawienie

$$x_1 = X_1 - X_2 \frac{\lambda}{S}, \quad x_2 = X_2.$$

w którem wyrażenie $\lambda$ posiada własność, że $D\lambda$ równa się półniezmiennikowi $S$, przekształca każdy spółzmiennik tak, że nowe spółczynniki mają w licznikach półniezmienniki. Biorąc tu w szczególności $S=a_0$, $\lambda=a_1$ otrzymujemy znane twierdzenie Hermite'a.

Deruyts rozciągnął naukę o półniezmiennikach na formy pierwotne z większą liczbą szeregów o $n$ zmiennych i posunął przez to teoryę niezmienników takich ogólnych form pierwotnych. Rozprawy w tym przedmiocie, rozproszone w czasopismach, a przeto nie łatwo dostępne [14]), zebrał Deruyts w r. 1891 w monografii [15]), którą tu przyjmiemy za podstawę sprawozdania. Abstrakcyjność przedmiotu zmusza nas do zwrócenia uwagi tylko na niektóre punkty główne.

Deruyts [16]), podobnie jak Kronecker [17]), zestawia ogólne przekształcenie liniowe o $n$ zmiennych $x$ z dwóch odpowiednio dobranych przekształceń prostszych. Są to najprzód przekształcenia, przy których pojedyńcza zmienna przybiera czynnik stały

$$(\mathrm{S}_h) \qquad x_h = \varepsilon X_h, \quad x_k = X_k, \qquad (k \lesseqgtr h)$$

z drugiej strony takie, przy których pojedyńcza zmienna powiększa się o drugą, pomnożoną przez czynnik stały

$$(\mathrm{S}_{h,l}) \qquad x_l = X_l + \eta X_h, \quad x_k = X_k. \qquad (k \lesseqgtr l)$$

Rozpatrzmy funkcye całkowite $F$ spółczynników form pierwotnych, które, prócz tego, zależeć mogą sposobem całkowitym od jednego lub kilku szeregów ilości zmiennych $(x)$, $(y)$, $z)$ . . . , które to funkcye, po wykonaniu podstawień $\mathrm{S}_h$, $\mathrm{S}_{h,l}$, mają się zmieniać tylko o potęgę wyznacznika podstawienia ($\varepsilon$ lub 1).

Pierwsze żądanie odnośnie podstawień $\mathrm{S}_h$ orzeka tylko, że $F$ „względem pojedyńczych skaźników 1, 2,..., $n$" jest izobaryczne [18]); jest tedy $F$ oraz jednorodnem co do pojedyńczych spółczynników i szeregów ilości zmiennych. Jeżeli $F$ przy stosowaniu podstawienia $\mathrm{S}_h$ zmienia się o potęgę $\varepsilon^{\pi_h}$, to $\pi_h$ nazywa się wagą formy $F$ względom skaźnika $h$; istnieje więc $n$ takich wag:: $\pi_1$, $\pi_2$, . . . , $\pi_n$. Z podstawień $\mathrm{S}_{h,l}$ można przeto wydzielić $n-1$ takich, że liczby $h$, $l$ ograniczają się do $n-1$ par wartości

$$h, l = (1, 2), (2, 3) \; . \; . \; . \; (n-1, n).$$

Dla następnego badania wystarcza stosowanie $n-1$ podstawień $\mathrm{S}_{n+l}$. Warunek, by $F$ było niezmienne przy podstawieniach $\mathrm{S}_{l,h}$, jest równoważny równaniu różniczkowemu liniowemu $[h, l] = 0$.

„Funkcyą półniezmienniczą" nazywa się każda funkcya izobaryczna $F$ spółczynników i zmiennych,która czyni zadość $n-1$ równaniom$(i,i+1]F=0$[19]). Jeżeli $F$ nie zawiera zmiennych,to nazywa się „półniezmiennikiem." Jeżeli zaś dołączymy jeszcze żądanie, by $n$ wag $\pi_1$, $\pi_2$, . . . , $\pi_n$ formy $F$ miały"wszystkie wartość równą $(=\pi)$, to $F$ przechodzi na zwykłą „funkcyę niezmienniczą" (utwór niezmienniczy) lub na zwykły niezmiennik. Tak np. wyznacznik jedno, dwu, trzyszeregowy [20]), wzięty ze schematu szeregów ilości zmiennych, jest funkcyą półniezmienniczą.

Dla dalszego rozwinięcia swojej teoryi Deruyts stosuje i do funkcyj półniezmienniczych symbolikę Clebscha-Aronholda, która była dotychczas stosowaną tylko do funkcyj niezmienniczych, [21]). Przytem okazuje się dogodnem nadanie wyrażeniom symbolicznym postaci kanonicznej [22]) symetrycznej co do pojedyńczych równoważnych elementów symbolicznych; przynosi to, między innemi, tę korzyść, że każdemu nieznikającemu utworowi symbolicznemu odpowiada nieznikający także utwór realny i odwrotnie. Przy takich założeniach nietrudno okazać, że funkcya niezmiennicza $\psi$ ma za wyrażenie symboliczne, odnoszącą się do form liniowych funkcyę półniezmienniczą $\psi'$ tych samych wag. Te formy liniowe powinny być liniowemi nietylko co do spółczynników symbolicznych, lecz i co do szeregów ilości zmiennych; są więc wszystkie typu $a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Jeżeli z $n$ pierwszych kolum schematu spółczynników symbolicznych utworzymy kolejno wszystkie możliwe wyznaczniki $\delta_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \delta_1$ rzędów $1, 2, \ldots, n$; z drugiej zaś strony z $n$ ostatnich kolumn schematu zmiennych utworzymy odpowiednio wyznaczniki $\delta'_n, \delta'_{n-1}, \ldots, \delta'_1$ rzędów $n, n-1, \ldots, 1$, to zachodzić będzie twierdzenie zasadnicze [24]).

„Wyrażenie symboliczne $\psi'$ funkcyi półniezmienniczej $\psi$ daje się przedstawić jako suma iloczynów z trzech grup czynników $\delta$, $\delta'$, $(a_k, b_x, \ldots)$".

W szczególności przy funkcyi niezmienniczej występują tylko $n$-szeregowe wyznaczniki $\delta_n$, $\delta'_n$ i tym sposobem dochodzimy do zasadniczego twierdzenia symboliki Clebscha.

Dalsze uproszczenie teoryi osiągamy, stosując z Capellim, proces Aronholda; Deruyts posługuje się tu jednocześnie spółczynnikami (symbolicznemi) i szeregami zmiennych. Stąd ze wspomnianego przedstawienia symbolicznego funkcyj półniezmienniczych otrzymujemy z jednej strony wyrażenie symboliczne dla jakiegokolwiek półniezmiennika o wagach $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, a to poddając iloczyn

$$a_1^{\pi_1-\pi_2}(a_1b_2)^{\pi_2-\pi_3}\ldots\ldots(a_1b_2c_3\ldots k_{n-1})^{\pi_{n-1}-\pi_n}(a_1b_2c_3\ldots k_{n-1}l_n)^{\pi_n}$$

utworzony z głównych podwyznaczników schematu spółczynników, dostateczną liczbę razy procesom takim, jak $D_{ab}$, $D_{ac}$, $D_{bc}\ldots$ [25]). Z drugiej strony [26]), zastępując wszędzie szeregi spółczynników $a, b\ldots$ szeregami zmiennych, dochodzimy do nowego rodzaju funkcyj niezmienniczych, do „półniezmienników tożsamościowych drugiego gatunku".

Nie trudno widzieć, że wyraz główny [27]) funkcyi niezmienniczej o $n$ szeregach ilości zmiennych rzędów $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ jest półniezmiennikiem o wagach $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ i że ten związek może być jednoznacznie odwrócony. W samej rzeczy [28]) dość w wyrażeniu symbolicznem półniezmiennika $\psi$ zastąpić elementy symboliczne $(a), (b)\ldots$ tylomaż szeregami form symbolicznych liniowych, aby mieć funkcyę półniezmienniczą $\psi$ z wyrazem głównym $\psi$. Funkcya $\psi$ ma jako czynnik $\pi_n - a_n$ potęgę wyznacznika $\delta'_n$. Jeżeli drugi czynnik oznaczymy przez $\chi$, to $\chi$ będzie funkcyą niezmienniczą, zawierającą tylko $n$—1 pierwszych szeregów ilości zmiennych w rzędach $\pi_1 - \pi_n, \pi_2 - \pi_n, \ldots, \pi_{n-1} - \pi_n$, będącą wagi $\pi_n$ i mającą $\psi$ za wyraz główny. Te funkcye $\chi$, które Deruyts nazywa „spółzmiennikami pierwotnemi", są, jak to okazał Capelli[29]), właściwym fundamentem teoryi niezmienników form o dowolnej liczbie spółpodstawieniowych szeregów $n$ zmiennych". W samej rzeczy można je także określić jako funkcye wszędzie izobaryczne o $n$—1 szeregach ilości zmiennych, sprawdzające $n$—2 równań różniczkowych liniowych częściowych

$$D_{12} = 0, \quad D_{23} = 0, \; \ldots\ldots, \; D_{n-2, n-1} = 0.$$

Deruyts nietylko otrzymuje rezultaty Capellie'go, mianowicie twierdzenie zasadnicze o rozwinięciu szeregowem [30]), lecz odkrywa także szereg nowych własności funkcyj $\chi$, a to przy pomocy swojego przejrzystego symbolicznego przedstawienia półniezmienników. Tu należy przedewszystkiem przeprowadzony według metody Hilberta[32])dowód, że funkcye $\chi$ tworzą dziedzinę całkowalności o podstawie skończonej. Przy pomocy funkcyj $\chi$ Deruyts mógł znacznie rozszerzyć twierdzenie Sylvestera (II. C. b. c), tworząc z dwu funkcyj półniezmienniczych trzecią przez zastąpienie spółczynników jednej z nich pochodnemi pierwszemi drugiej funkcyi względem jej spółczynników.

Funkcye $\chi$ można sprawdzić do szeregu najprostszych typów[32]) z których wyprowadzają się inne przy pomocy uogólnionych procesów $\Omega$. W końcu dodajmy, że funkcye $\chi$ pozwalają badać przy pomocy teoryi form takie specyalne [33]) formy pierwotne, pomiędzy spółczynnikami których zachodzą pewne związki algebraiczne. Zakłada się tylko, że i te związki są same natury niezmienniczej, t. j. że postać ich nie zmienia się przy liniowem przekształceniu zmiennych.

Zdawałoby się na pozór, jakoby do takich form pierwotnych należały funkcye, które przyjmują własność niezmienniczą dopiero skutkiem tych związków. Jest wszakże inaczej, gdyż można dowieść, że wszystkie funkcye $\chi$ dają się otrzymać z takich funkcyj „foremnych", które istnieją niezależnie od tych związków.

Do II D. b

## Kombinanty i apolarność.

Pomiędzy formami o większej liczbie szeregów ilości zmiennych, poddanych [34]) różnym przekształceniom liniowym, wielokrotnie już wymienialiśmy [35]) kombinanty jako najczęściej zachodzące.

Związek kombinatów z „teoryą apolarności" jest tak ścisły, że nadaje się z nią do wspólnego omówienia. Nie będziemy wprawdzie mogli dać dokładnego wyobrażenia o znaczeniu tej gałęzi teoryi form, ponieważ jej najważniejsze zastosowania należą do geometryi; tu właśnie występuje zjawisko, że twierdzenia, w algebrze prawie oczywiste lub mające znaczenie drugorzędne, są w geometryi źródłem deleko sięgających badań.

Niechaj $f_1, f_2, \ldots, f_p$ będą funkcye jednorodne $n$-tego stopnia zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pomiędzy utworami niezmienniczemi jednoczesnemi form $f$ nazywamy te kombinantami, które przy podstawieniu liniowem form $f$ zmieniają się tylko o potęgę wyznacznika podstawienia. Jeżeli przy pomocy nowych zmiennych $u_1, u_2, \ldots, u_p$ utworzymy formę liniową

$$F = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \quad . \quad . \quad . \quad + u_p f_p,$$

to kombinanty form $f$ będzie można określić, jako funkcye spółczynników i zmiennych form $f$, nie zawierające $u$ i nie zmieniające się przy dowolnych przekształceniach liniowych ilości $u$ i $x$. Ta definicya jest o tyle odpowiedniejszą, że nietylko daje bezpośredni powód do specyficznej poprzednio już wspomnianej symboliki, lecz prowadzi i do ważnego uogólnienia; dochodzimy mianowicie do „kombinantów form $f$ w znaczeniu rozleglejszem" jeżeli usuniemy podane ograniczenie co do ilości $u$.

Gordan [36]) położył podwaliny dzisiejszego rozwoju teoryi przy pomocy twierdzenia: każdy kombinant form $f$ daje się przedstawić jako utwór niezmienniczy kombinantu wyróżnionego $R$, a mianowicie tego wyznacznika, którego elementy powstają jeżeli formy $f$ wypiszemy tyle razy z różnemi spółpodstawieniowemi zmiennemi, ile wykazuje ich liczba.

Gordan dochodzi do tego, łącząc w pewien sposób właściwy twierdzenie zasadnicze symboliki—„każdy niezmiennik układu form liniowych jest formą wyznaczników, utworzonych ze spółczynników form"—z rozwinięciem szeregowem formy, zawierającej dwa szeregi zmiennych spółpodstawieniowych. Kombinanty stanowią przeto układ zamknięty form, mający, według Hilberta, własność skończoności, ponieważ wyprowadzić one się dają z jedynej formy pierwotnej ze spółpodstawieniowemi szeregami zmiennych.

Daleko przejrzyściej układa się nauka o kombinantach, jeżeli uwzględnimy zasadę dualizmu. Jeżeli ze Strohem [37]) zbudujemy nowy wyznacznik $Q$, dopełniając $p$ szeregów spółczynników formy $f$ odpowiedniemi iloczynami potęg dostatecznej liczby szeregów ilości zmiennych $(v)$, $(w)$... spółpodstawieniowych z pierwotnemi zmiennemi, to $Q$ może w zupełności zastąpić formę $R$, gdyż $Q$ jest kombinantem form $f$, $R$ zaś utworem niezmienniczym wyznacznika $Q$. Jeżeli $N$ jest liczbą spółczynników ogólnej formy $f$, to $N-p$ jest liczbą nowych szeregów ilości zmiennych. Z podanego twierdzenia wynika przeciwstawienie $p$ „formom rzędowym" $f$ (napisanych ze spółczynnikami wielomianowemi) $N-p$ „form klasowych" $\varphi$ (napisanych bez spółczynników wielominowych) w zmiennych przeciwpodstawieniowych. Wtedy kombinanty jednego układu przechodzą na kombinanty drugiego wprost w ten sposób, że we wszystkich formach, zamiast wyznaczników pierwszego układu spółczynników, piszemy wyznaczniki dołączone drugiego.

Tu jest punkt, o której zaczepia teorya apolarności.

Nazywamy dwie formy, takie jak $f$ i $\varphi$ (gdzie więc rząd formy $f$ jest klasą formy $\varphi$), „sprzężonemi" (Rosanes) lub „apolarnemi" (Reye [38]) jeżeli znika ich niezmiennik dwuliniowy.

Układowi $p$ form $f$ liniowo-niezależnych odpowiada właśnie układ $N-p$ form $\varphi$ także liniowo-niezależnych, i odwrotnie tak, że każda forma $f$ jest apolarna względem każdej formy $\varphi$. Dwa takie układy nazywają się „wzajemnie apolarnemi". Jeżeli obierzemy układ $\varphi$ apolarny względem układu $f$, to według twierdzenia, które pierwszy Brill udowodnił zupełnie [39]), każde dwa wyznaczniki dołączone obu układów spółczynników są proporcyonalne, albo też są równe, jeżeli nie mający istotnego znaczenia spółczynnik proporcyonalności uczynimy równym jedności.

Wynika stąd podstawowa „zasada kombinantów": „kombinanty dwóch apolarnych układów form zgadzają się tak co do liczby jak i postaci [40]). Tak np. można według tego trzy formy dwukwadratowe dwójkowe, jeżeli idzie o ich kombinanty, zastąpić tylko dwiema takiemi formami; jeżeli pierwsze były formami ogólnemi, to i ostatnie będą takiemi [41]).

Szczególny interes przedstawiają kombinanty najprostsze układów form dwójkowych, ponieważ na ich podstawie budują się kombinanty wyższe. Dowód, jaki dla tego przypadku podał Brill [42]), jest tem godniejszy uwagi, że występuje w nim istotnie nowy punkt widzenia. Z wyznacznika Gordana $R$, napisanego w postaci niejednorodnej, wydziela Brill $\frac{p(p-1)}{2}$ różnic $p$ zmiennych $y$, które są czynnikami wyznacznika, a potem zakłada, że wszy-

*

stkie ilości $y$ są równe. Powstający w ten sposób prostszy kombinant $W(y)$ [43]) rzędu $p(n-p+1)$ co do zmiennej $y$ może zastąpić formę Gordanowską $R$ o tyle, o ile nie wymagamy wymiernego przedstawienia utworów niezmienniczych; i w samej rzeczy dowodzi Brill, że każdy kombinant form $f$ daje się przedstawić jako niezmiennik lub spółzmiennik formy dwójkowej $W$ (porówn. II B. b.).

Z „ogólności" form $f$ wypływa znów ogólność formy $W$, t. j. te spółczynniki tej ostatniej są od siebie niezależne.

Jeżeli, odwrotnie, chcemy ogólnej formie dwójkowej rzędu $p(n-p+1)$ nadać postać formy $W$, musimy dołączyć do niej funkcyę niewymierną spółczynników. Tak np. ta ostatnia funkcya dla formy szóstego rzędu jest pierwiastkiem równania rzędu piątego [44]); to dołączenie wystarcza do sprowadzenia formy danej za pomocą przekształcenia liniowego do dwóch pewnych postaci kanonicznych.

Do ugruntowania zasady kombinantów użyto pojęcia układów apolarnych. Pojęcie to występowało już dawniej; źródło jego tkwi w rozciągnięciu na układy przedstawienia kanonicznego Sylvestera form dwójkowych przez sumy potęg. Pierwszy krok w tym kierunku uczynił w r. 1872 Rosanes [45]) dowiódłszy za pomocą symboliki prostego lecz doniosłego twierdzenia, że znikanie niezmiennika dwuliniowego dwóch form dwójkowych równego rzędu jest koniecznem i wystarczającem na to, aby każda z nich dała się przedstawić jako suma potęg czynników liniowych drugiej." Jeszcze dogodniej można wyrazić to w ten sposób: „jeżeli forma dwójkowa $n$-tego rzędu posiada czynnik $\lambda-\alpha$, to jest apolarną względem $n$-ej potęgi tego czynnika, i odwrotnie". Stąd wynika w szczególności, że $n$ danych form dwójkowych $n$-tego rzędu można przedstawić jako połączenia liniowe potęg zupełnych tychże $n$ form liniowych. Iloczyn tych ostatnich jest właśnie formą apolarną do form danych.

Wkrótce potem Rosanes rozciągnął w mowie będącą zasadę odpowiedniość apolarnych na formy wyższe [46]). Mamy tu analogicznie: „Jeżeli $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ jest formą $n$-tego rzędu $r$ zmiennych i jeżeli $u_1, u_2, \ldots, u_r$ oznaczają zmienne spółpodstawieniowe, to forma $f$ jest wtedy i tylko wtedy apolarną względem $n$-ej potęgi formy liniowej $u_1y_1+u_2y_2+\ldots+u_ry_r$, jeżeli spełnia się równanie $f(y_1, y_2, \ldots, y_r)=0$ [47]). Na tem opiera się możliwość przedstawienia formy liniowej $f$ za pomocą pewnej liczby potęg form liniowych; zadanie to poprzednio już było podjęte z powodzeniem przez Reyego [48]) przy pomocy interpretacyi mechanicznej. Lecz obecnie przybywa nowy moment, prowadzący do związku z własnościami biegunowemi formy $f$. Utwórzmy pierwszą biegunową formę $f$ względem układu wartości („punktu") $(y)$; tej formy znowu pierwszą biegunową względem drugiego punktu $(z)$ i t. d., póki nie dojdziemy do formy liniowej w $n$ punktach $(x), (y), (z), \ldots, (w)$. Jeżeli ten ostatni utwór znika, to mówimy, że $n$ punktów tworzy „$n$-kąt biegunowy" formy $f$[49]). Wtedy łatwo widzieć, że $n$-kąt biegunowy formy $f$, t. j. iloczyn $n$ form liniowych $u_u, u_y, \ldots, u_w$ jest formą klasową apolarną względem $f$, i odwrotnie. Pojęcie $n$-kąta biegunowego można rozszerzyć, tworząc pojęcie zupełnego $(n+1)$ kąta biegunowego, jeżeli każde $n$ wierzchołków tego ostatniego tworzy $n$-kąt biegunowy. Stąd, w połączeniu z poprzedzającem, wynikają twierdzenia, takie jak następujące, w którem ograniczamy się do przypadku trzech zmiennych, i dla krótkości wybieramy wysłowienie geometryczne:

„Krzywa ogólna $C_n$ daje się za pomocą „boków" zupełnego $(n+1)$ kąta biegunowego przedstawić jako suma $n$-tych potęg $\frac{n(n+1}{2}$ form liniowych".

Jest rzeczą godną uwagi, iż doniosłość tych twierdzeń polega w istocie rzeczy na uczynionem założeniu, że z dwóch apolarnych form $f, \varphi$ jedna jest przywiedlną t. j. jest iloczynem samych form liniowych.

Z kolei rzeczy pytać należy o znaczenie apolarności dwóch form nieprzywiedlnych. Faktycznie to ogólniejsze zadanie jest dawniejszem, tylko— że wtedy ograniczano się na przypadku rzędu drugiego oraz na przypadkach, dających się do tegoż sprowadzić [50]). Tymczasem odpowiedź na to pytanie, tak ważna dla geometrów, była natury tak specyalno-algebraicznej, że mogła wywrzeć wpływ skuteczny na rozwój teoryi form. H e s s e [51]) dowiódł był już dawniej, że apolarność dwóch form drugiego rzędu lub klasy stanowi kryteryum na to, aby przy pomocy przekształcenia liniowego (a wtedy i nieskończenie wielu sposobami) można było obie formy sprowadzić do postaci normalnej, tak by w jednej z nich zachodziły wyłącznie kwadraty, w drugiej wyłącznie iloczyny zmiennych. Stąd R o s a n e s i R e y e, opierając się nadto na zasadzie wyżej wyłożonej, wyprowadzili daleko sięgające wnioski dla układów stożkowych, dla powierzchni 2-go rzędu (oraz dla krzywych przestrzennych 3-go rzędu).

Z zadaniem o sprowadzeniu w mowie będącego, zupełnie inaczej zbudowanego przedstawienia kanonicznego, do przedstawień dawniejszych łączy się zagadnienie charakteru ogólniejszego, dotyczące wyprowadzenia zjawisk apolarności w dziedzinie trzech, czterech zmiennych ze źródła czysto dwójkowego. Zagadnieniem tem zajmował się szczegółowo autor niniejszej pracy[52]) i dowiódł, że należy dać odpowiedź twierdzącą na oba pytania, mianowicie: t e o r y a a p o l a r n o ś c i i w ł a s n o ś c i k o m b i n a n t o w e d z i e d z i n w y ż s z y c h p o d p o r z ą d k o w u j ą s i ę p o d t e o r y ę k o m b i n a n t ó w d w ó j k o w y c h. Można to osiągnąć za pomocą łańcucha zasad przeniesienia (lub jeżeli kto chce, odwrotnie, za pomocą łańcucha zasad redukcyi). J ą d r o p o s t ę p o w a n i a t k w i w t e m, ż e g d y p r z y j m i e m y z a p o d s t a w ę k a n o n i c z n ą „u k ł a d s p ó ł r z ę d n y c h", t o w y m a g a n e p r o c e s y b i e g u n o w e p r z e c h o d z ą n a p r o s t e p r z e k s z t a ł c e n i a f u n k c y j e l e m e n t a r n y c h s y m e t r y c z n y c h."

Ponieważ przy utworach w mowie będących nie ma znaczenia okoliczność, czy formy te przyrównywamy do zera czy też nie, to przyjmiemy przypadek pierwszy i zarazem dogodny geometryczny sposób wyrażenia. By nie wdawać się w objaśnienia bardziej skomplikowanych pojęć, wystarczy rozpatrzenie, dla przykładu, najprostszego przypadku dwóch stróżkowych [54]). Niechaj będą stożkowa rzędowa i klasowa:

$$\begin{aligned} f &\equiv a_x^2 = \Sigma\,\Sigma a_{ik}\, x_i x_k = 0, \\ \varphi &\equiv u_x^2 = \Sigma\,\Sigma a_{ik}\, u_i u_k = 0. \end{aligned} \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

Drugą z nich sprowadźmy do „postaci normalnej“ [55])

$$\varphi \equiv u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

lub, przez wprowadzenie parametru dowolnego $\lambda$, do postaci

$$u_0 : u_1 : u_2 = \lambda^2 : -\lambda : 1 .$$

Związek apolarności między $f$ i $\varphi$ wyraża się teraz w ten sposób:

$$a_{02} = a_{11}$$

tak, że gdy ten związek się spełnia, można napisać:

$$a_{00} = a_0, \quad a_{01} = a_1, \quad a_{02} = a_1, \quad a_{02} = a_2, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{12} = a_4 .$$

Z punktu $(x)$ przeprowadźmy styczne $\alpha$, $\beta$ do „stożkowej normalnej“ $\varphi$, wtedy $x_0$, $x_1$, $x_2$ będą związane z $\alpha$ i $\beta$ za pomocą związków prostych:

$$x_0 : x_1 : x_2 = 1 : \alpha + \beta : \alpha\beta.$$

Twierdzenie zasadnicze brzmi:

„Warunek na to, by dwa punkty $(x) = (\alpha, \beta)$, $y = (\gamma, \delta)$ były sprzężonemi ze względu na stożkową, wyraża się w postaci symetrycznej względem $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, następującej:

$$a_{xy} = a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0,$$

gdzie $\frac{s_1}{s_0}$, $\frac{s_2}{s_0}$, $\frac{s_3}{s_0}$, $\frac{s_4}{s_0}$ oznaczają funkcye elementarne sytryczne ilości $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Stąd bezpośrednio wynikają wnioski:

„Wszystkie rozwiązania równania $a_s = 0$ przedstawiają pasmo (potrójnie nieskończone) opisanych na $\varphi$ czworoboków biegunowych stożkowej $f$ apolarnej względem $\varphi$“.

Jeżeli w $a_s$ położymy $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\lambda$, otrzymamy równanie $a_\lambda^4=0$ czterech punktów przecięć stożkowych $\varphi$ i $f$.

Stąd i z określenia apolarności dwójkowej wynika: „czworoboki biegunowe poprzedniego twierdzenia przedstawia na stożkowej $f$ grupa apolarna względem dwójkowej czwórki $a_\lambda^4$ punktów przecięcia stożkowych $\varphi$ i $f$.

Od czworoboków biegunowych stożkowej $f$ można przejść do trójboków biegunowych, pozostawiając jeden ich bok nieoznaczonym. Jeżeli jednocześnie boki trójboku biegunowego mają być stycznemi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ do $\varphi$, to równanie $a_s=0$ rozpada się na dwa następujące:

$$a_0\sigma_0+a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3=0,\quad a_1\sigma_0+a_2\sigma_1+a_3\sigma_2+a_4\sigma_3=0,$$

gdzie

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0}=\alpha+\beta+\gamma,\qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_0}=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma,\qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_0}=\alpha\beta\gamma.$$

W tem zawiera się całkowite wyjaśnienie twierdzenia Hessego, „gdyż opisane na $\varphi$ trójboki biegunowe stożkowej $f$ przedstawione są na $\varphi$ przez grupę apolarną do grupy pierwszych biegunowych czwórki ($f$ i $\varphi$) punktów przecięcia."

Połączenie dziedziny dwójkowej i trójkowej staje się jeszcze ściślejszem przez dalszą zasadę przeniesienia, uzasadnioną przez pierwszy za pomocą rachunku symbolicznego przez O. Schlesingera [59]), a polegającą na tem, że jedną i tę samą stożkową można uważać raz za utwór rzędowy, drugi raz za utwór klasowy. Niechaj na stożkowej $K$ dana będzie czwórka punktów $a_\lambda^4$ oraz czwórka stycznych $b_\lambda^4$. Istnieje jedna tylko stożkowa rzędowa $f$ apolarna do $K$, mająca z $K$ wspólną czwórkę punktów $a_\lambda^4$ i podobnież istnieje jedna tylko stożkowa klasowa $\Phi$, apolarna względem $K$ i mająca z $K$ wspólną czwórkę stycznych $b_\lambda^4$. Wtedy—pomijając czynnik nieistotny—niezmiennik dwójkowy dwuliniowy obu czwórek $a_\lambda^4$, $b_\lambda^4$ jest identyczny z niezmiennikiem trójkowym dwuliniowym obu stożkowych $f$, $\varphi$.

Przerywamy tu dalsze wyjaśnienia i ograniczamy się na charakterystyce uogólnienia dla dziedzin wyższych, polegającej na tem, że rząd $n$ formy dwójkowej $f_n=a_\lambda^n$ rozkłada się na dwa czynniki $n_1, n_2$ [60]) pierwiastki zaś formy $f_n=0$ uważa się za punkty rozmaitości jednowymiarowej w przestrzeni o $n_1$ wymiarach; spółrzędnemi tych punktów są potęgi $1, \lambda_1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n_1}$ zmiennej $\lambda$.

Jako zastosowanie omawianych tu zasad przeniesienia niechaj służą dwa następujące twierdzenia, rzucające nowe światło na naturę przedstawień kanonicznych potęgowych. Pierwsze twierdzenie [61]) orzeka naprzykład, że dwa zadania: przedstawienie formy dwójkowej rzędu dziewiątego pod postacią sumy pięciu potęg dziewiątych, oraz przedstawienie formy czwórkowej sześciennej, jako sumy pięciu sześcianów — że zadania te są równoważne; jedno sprowadza się do drugiego za pomocą procesów niezmienniczych.

Drugie twierdzenie [62]) orzeka znów równoważność dwóch zagadnień: kanonicznego przedstawienia układów form przez sumy potęgowe oraz szukania największego wspólnego dzielnika takich układów. Niechaj będą mianowicie dwie apolarne dwójkowe grupy form; wtedy każdej podgrupie jednej, której wszystkie indywidua dają się przedstawić jako sumy tych samych potęg zupełnych, odpowiada oznaczona podgrupa drugiej, której wszystkie indywidua mają jednę i tę samą formę jako czynnik wspólny, i odwrotnie.

W ostatnich czasach badano także wspomniane wyżej „rozszerzone kombinanty“ układu form dwójkowych $f_1, f_2, \ldots, f_n$, które przeto, oprócz zmiennych $\lambda$, zawierają jeszcze jeden lub więcej szeregów wielkości $u$, przeciwpodstawieniowych z formami $f$. Okazuje się przytem dogodnem wprowadzenie, zamiast ilości $u$, szeregów zmiennych $(x)$, $(y)$..., spółpodstawieniowych z formami $f$. Do kombinantu tworzącego $R$ Gordana (wyznacznika ilości $f$, napisanych w rozmaitych zmiennych $\lambda, \mu, \nu \ldots$), można, według Brilla[63]) dodać kilka dalszych, powstających przez to, że jeden, dwa trzy ... $p$ szeregów ilości $f$ zastępujemy odpowiednio zmiennemi $(x)$; $(x)$, $(y)$; $(x)$, $(y)$, $(z)$ i t. d. Te rozszerzone kombinanty służą geometrycznie do poznania niezmienniczych własności rozmaitości pojedyńczej, którą przedstawiają formy $f$ wewnątrz rozmaitości o $p-1$ wymiarach.

Zadaniem najważniejszem jest tworzenie rzutowe tej rozmaitości form $f$ z innych rozmaitości rzędu niższego. Algebraicznie brzmi ono tak: „Znaleść $p-1$ szeregów form rzędów $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ $(n=n_1+n_2+\ldots n_{p-1})$, aby $p$ zupełnych wyznaczników, utworzonych z $p-1$ szeregów, zlewało się z $p$ danemi formami $f$ rzędu $n$-go.“

Autor niniejszego [64]) rozwiązał to zadanie przy pomocy postulatu dowiedzionego, następnie ogólnie przez Hilberta [65]), traktując je jako przypadek szczególny zadania o podzielności [66]): „Znaleść dla funkcyi całkowitej $F(\lambda, \mu)$ dwóch zmiennych niejednorodnych kryteryum na to, aby ta funkcya dała się podzielić przez inną funkcyę ilości $\lambda$, $\mu$, zawierającą jednę ze zmiennych tylko w stopniu pierwszym“.

Rozwiązanie tego zadania uskutecznia się przy pomocy procesów nasunięcia i biegunowego. W. Stahl dał bezpośrednie rozwiązanie tego zadania dla szeregu przypadków $r = 3$, $r = 4$ przez wyraźne wzory wyznacznikowe.

---

Do II D. c.

## Wypadkowe i wyróżniki.

Pomiędzy specyalnemi niezmiennikami wypadkowe (rugowniki) i wyróżniki zasługują na szczególną uwagę ze względu na liczne zastosowania. Naukę o wypadkowych i o wyróżnikach form algebraicznych możemy tu tylko o tyle uwzględnić, o ile natura niezmiennicza tych utworów występuje na plan pierwszy, choćby formalnie [68]). W tym kierunku rozwój historyczny teoryi form parł przedewszystkiem ku rozwiązaniu zadania, polegającego na otrzymaniu wyrażenia symbolicznego dla tych utworów w przypadkach najprostszych. Nie przedstawiało to trudności dla wypadkowej formy dwójkowej $f_n$ rzędu $n$-tego i dwójkowej liniowej $f_1$. Rozwiązanie w przypadku form dwójkowych $f_n$, $f_2$ podał Salmon [69]) za pomocą rachunku nadwyznaczników i to w sposób, pozwalający na uogólnienie w przypadkach wyższych. Clebsch [70]) uczynił krok dalszy, gdy na podstawie symboliki Aronholdowej przerobił wyrażenie wypadkowej form $f_n$ i $f_2$ o tyle, że możliwem się stało sprowadzenie istotne tego wyrażenia do szeregu niezmienników i społzmienników pośrednich. Mniej przejrzyście wypadło u Clebscha uogólnienie w przypadku większej liczby zmiennych dla wypadkowej formy dowolnego rzędu, formy kwadratowej i szeregu form liniowych. Postępowanie Clebscha zastosował Gordan [71]) do wypadkowej $R$ dwóch dowolnych form dwójkowych $f_m$ i $f_n$. Przedewszystkiem udało się w przypadku wyróżnionym $m = n$, przez wprowadzenie symboli na pojedyńcze „spółzmienniki elementarne“ Cayleyowsko-Bézoutowskiej formy rugownika i przy pomocy zasady rozwinięcia szeregowego, wyprowadzić rugownik form danych przez zastosowanie samego tylko procesu nasunięcia. Dalej analogicznie buduje się spółzmiennik, którego spółczynniki dla $R=0$ są równe potęgom wspólnych pierwiastków form $f_m$ i $f_n$, potem spółzmiennik, którego znikanie tożsamościowe jest kryteryum wspólności pierwiastku podwójnego i t. d. Jezeli $f_m$ i $f_n$ są rzędów nierównych, to w symbolicznej swojej budowie rugownik występuje jako iloraz dwóch stosunkowo prostych utworów. Zresztą w każdym szczególnym przypadku dzielenie jest wykonalne i otrzymujemy wynik podobny do poprzedzającego. Przykłady wyrachowane obejmują wszystkie przypadki, w których żaden z rzędów $m$, $n$ nie przekracza liczby 5. Dla przypadku $n$ dowolnego oraz $m=3$ napisał Pascal [72]) wypadkową w postaci symbolicznej tak, że i faktyczne przeprowadzenie na agregat nasunięć nie przedstawia istotnych trudności

Na teraz ogólne rozwiązanie tego zadania wydaje się niemożliwem [73]) i należy zadowolić się tem, by udoskonalić przedstawienie niezmiennicze wypadkowej w przypadkach niższych w ten sposób, aby w przedstawieniu występowały tylko formy odnośnego układu zupełnego. Por. np. u Brioschi'ego [74]) przypadek $m=3$, $n=4$, u d'Ovidio [75]) $m=4$, $n=4$ oraz $m=5$, $n\leq 5$.

Jeszcze mniej udoskonalonem jest odpowiednie przedstawienie wyróżnika. Gordan [76]) podał dla form dwójkowych $f_n$ postępowanie systematyczne dla dojścia do wyrażenia wyróżnika przez niezmienniki zasadnicze; przy wzrastającym rzędzie trudności rachunku (symbolicznego) piętrzą się do takiego stopnia, że zwalczono je dopiero dla przypadku $n=7$ [77]).

Jeżeli daną jest pewna forma $f_7$, to metoda Bézout-Cayley'a wyznaczania czynnika podwójnego $a_x=a_1x_1+a_2x_2$ formy $f$ daje sześć równań jednorodnych stopnia piątego względem ilości $a$. Za pomocą odpowiedniego nasunięcia stron lewych i następnego dzielenia przez $a_x$ otrzymujemy równania stopnia czwartego względem $a$. Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do równań kwadratowych, z których można wyrugować ilości $a$; strona lewa rugownika jest wtedy wprost szukanym wyróżnikiem.

Na drodze pośredniej załatwił Maisano [76]) przypadek następny $n=8$, badając najprzód specyalną funkcyę $f_8$, która jest hesyanem formy $f_6$ i wykazując następnie, że wyróżnik ogólnej formy $f_8$ ma budowę analogiczną.

Warunki istnienia czynnika wielokrotnego formy $f_n$ otrzymano niedawno dla przypadku $n=6$. Odpowiednie spółzmienniki, które muszą wtedy znikać tożsamościowo, wyrazili Maisano [79]) i d'Ovidio [80]) przy pomocy form układu, jako wyróżniki biegunowych formy pierwotnej.

O utworach trójkowych można powiedzieć niewiele. Wypadkowa trzech form kwadratowych jest u Gundelfingera [81]) i Mertensa [82]) funkcyą całkowitą dwóch kombinantów zasadniczych. Gordan [83]) przy pomocy spółzmiennika, występującego już u Derscha, wyraził wyróżnik formy trójkowej $C_n$ w postaci wyznacznika, jako funkcyę całkowitą spółczynników.

Przejdźmy teraz do pojedyńczych własności rugowników i wyróżników form dwójkowych. Utwory te, jako funkcye spółczynników, czynią zadość pewnym specyficznym równaniom różniczkowym obok tych, którym czynią zadość niezmienniki. Pierwszy Brioschi [84] podał układ zupełny równań liniowo-niezależnych, Noether [85]) zaś wykazał, że już jedno z tych równań, dowolnie wybrane, wystarcza do scharakteryzowania tych utworów. Godne uwagi zastosowanie równań wyróżnikowych Brioschi'ego wskazał Wiltheiss [86]), nadając równaniu różniczkowemu funkcyj hypereliptycznych $\theta$ taką postać, że wypływają one przez odpowiednią kombinacyę liniową z równań Brioschi'ego; odnośna forma dwójkowa jest tu właśnie pierwiastnikiem, znajdującym się pod znakiem całkowym.

Gordan [87]) pierwszy wskazał ścisłe związki wzajemne tak rugowników jak i wyróżników oraz związki pomiędzy jednemi i drugiemi. Prosty rachunek wykazał, że rugowniki pewnych wybitnych spółzmienników formy pierwotnej zawierały wyróżnik tej formy jako czynnik. Istotną przyczynę tego zjawiska odkrył niedawno Kohn [88]). Jeżeli mianowicie wprowadzimy pierwiastki przedstawienia wyróżnionego typowego formy $f$, (pochodzącego od Hermite'a) jako wielkości samodzielne, to dojdziemy prawie bezpośrednio do twierdzenia, że wszystkie spółzmienniki formy $f$, których wagi leżą poniżej pewnych granic, mają tę własność, że ich wypadkowe z formą $f$, a także ich wyróżniki zawierają wyróżnik formy $f$ w pewnej potędze. Odpowiednie twierdzenia stosują się do układów form pierwotnych. Autor niniejszego ustanowił [89]) dla formy dwójkowej $f$ rzędu nieparzystego $n=2l+1$ szereg zamknięty spółzmienników $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$, których wyróżniki prócz, pierwszego i ostatniego, rozpadają się na dwa czynniki i są związane pomiędzy sobą łańcuchowo w ten sposób, że dwa następujące po sobie wyróżniki mają czynnik wspólny. Dla pewnych układów szczególnych form dwójkowych związek rugowników i wyróżników zbadano jeszcze dokładniej. Są to formy, które, przyrównane do zera, wyznaczają osobliwości (rzędowe) krzywej wymiernej na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Rugowniki i wyróżniki tych form rozpadają się, jak to widzieć można z rozwiązań geometrycznych, na pewną liczbę czynników nieprzywiedlnych, te ostatnie zaś są w części, lubo w różnej wielokrotności, wspólnemi. Odnośne rozkłady wykonali w zupełności: Brill [90]) dla płaszczyzny i dla pewnego kanonicznego układu równań, autor zaś niniejszego dla płaszczyzny i przestrzeni ogólnie [91]). W szczególności wyróżnik wyznacznika funkcyjnego trzech lub więcej form dwójkowych równego rzędu rozkłada się na dwa czynniki; wynik ten już dadawniej uogólnił był Brill [92]) dla dowolnej liczby takich form.

Poznanie innego, należącego tu zjawiska przywiedlności, zawdzięczamy Cayley'owi [93]). Jeżeli utworzymy wyróżnik pęku form dwójkowych $k_1f+k_2\varphi$, a następnie wyróżnik tej formy zmiennych $k_1$, $k_2$, to rozłoży się on na iloczyn postaci $AB^2C^3$, gdzie znikanie niezmienników $A$, $B$, $C$ ma łatwo określić się dające znaczenie dla danego pęku.

W dziedzinie większej liczby zmiennych istnieje w tym kierunku twierdzenie Brilla [94]). Jeżeli z $n$ równanań $f_i=0$ o $n$ (niejednorodnych) zmiennych wyrugujemy $n-1$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, to wypadkowa form $f$ będzie formą dwójkową pozostałej zmiennej $x_n$. Jej wyróżnik względem $x_n$ jest podzielny przez wypadkową form $f$ i ich wyznacznika funkcyjnego.

Wspomnijmy jeszcze o innej własności zasadniczej wyróżnika $D$ formy $F$. Można oczekiwać, że i wszystkie zniekształcenia formy $F$ dadzą się określić jedynie z wyróżnika. Dla form dwójkowych $F$ rozwiązał odnośne zadanie najogólniej Hilbert [95]) za pomocą rozwinięcia potęgowego. Jeżeli dla pewnego układu wartości spółczynników $a_i$ formy $F_n$ znika tożsamościowo nie tylko forma $D(a_i)$, lecz znikają też i wszystkie pierwsze biegunowe w liczbie $n-k-1$, wtedy następna $(n-k)$-ta biegunowa rozpada się na $n-k$ czynników liniowych. Jeżeli pomiędzy temi czynnikami jest np. $\mu_i-1$ $(i=1, 2, 3, \ldots, k)$ równych, to i forma pierwotna $F$ rozpada się w ten sposób, że jej czynniki liniowe jednoczą się po $\mu_i$, i odwrotnie.

Dla specyalnego gatunku biegunowych, zwanych „ewektantami“ rezultat ten już znacznie dawniej otrzymał był Sylvester [96]).

Metoda Hilberta pozwala zawsze na wyznaczenie tak postaci jak i liczby wszystkich osobliwości utworu $D(a_i)=0$.

Kończymy ten rozdział przytoczeniem niektórych postępów w rozważanej dziedzinie, jakkolwiek poglądom tym brak dotąd wyrobienia w duchu teoryi niezmienników.

Aż do ostatnich czasów przez wypadkową $n$ form $F_i$ rozumiano stronę lewą równania (pozbawionego czynników zbytecznych), powstałego przez eliminacyę $n-1$ zmiennych. Wprawdzie już faktycznie Bézout utworzył wypadkową przez to, że przy pomocy odpowiednio dobranych „polyonômes multiplicateurs“ kombinował formy $F_i$ liniowo w ten sposób, że powstałe wyrażenie redukowało się do stałej, mianowicie do rugownika. Mertens [95]) ma tę zasługę, że przez odwrócenie tego postępowania oddzielił pojęcie wypadkowej od procesu eliminacyi: w założeniu, że równania $F_i=0$ nie mają wspólnego układu rozwiązań, dowodzi on, że istnieje kombinacya liniowa form $F$ przepisanego rzędu względem spółczynników i niezależna od zmiennych. Z drugiej strony, odpowiednio do najprostszych zniekształceń form zasadniczych $F$, wprowadzono pojęcie wypadkowej „zredukowanej“ $R'$. Jeżeli równania $F_i=0$ posiadają już pewną liczbę układów wspólnych rozwiązań, to istnieje zawsze funkcya całkowita $R'$ spółczynników, której znikanie daje kryteryum na to, aby te równania miały jeszcze wspólne rozwiązania dalsze. Cayley pierwszy podał [96]) przykład tego rodzaju, Perrin [97]) i Brill [98]) przeprowadzili nad tem badania ogólniejsze.

Perrin wychodzi z zasady, według której wypadkowa pierwotna $R$ ma być uważana jako funkcya wyrazów form $F$, które nie zawierają zmiennych, i dochodzi w ten sposób do wyrażenia formy $R$, jako funkcyi całkowitej formy $F$, o spółczynnikach niezależnych już od zmiennych. Przez skombinowanie tej zasady z metodą eluminacyjną Poissona [99]), Brill [100]) doprowadził to pytanie do zadawalającego algebraicznie zakończenia, tak że wypadkowa zredukowana występuje wyraźnie jako czynnik wspólny pewnych wyrazów rozwinięcia, dającego się obliczyć przy pomocy przejrzystego algorytmu.

Na końcu wspomnijmy jeszcze o tem, że teorya kombinantów i apolarności może być z powodzeniem stosowana do tworzenia wypadkowych w przypadkach bardziej złożonych.

Do II. D. d.

## Dalsze formy specyalne [101]).

### II. D. d. $\alpha$. *Formy ze znikającym wyznacznikiem Hessego* [102]).

Jednem z najważniejszych pytań w teoryi form jest pytanie, dotyczące kryteryum, pozwalającego przekonać się, kiedy dana forma $F$ o $n$ zmiennych może być za pomocą podstawienia liniowego przekształcona na formę o mniejszej liczbie zmiennych i—w razie jeżeli to zachodzi—pozwalającego wyznaczyć istotnie odpowiednie podstawienia.

Ogólne wywiązanie tego zadania zawdzięczamy Gordanowi [103]) i Noetherowi. Oni to sprostowali zarazem twierdzenie Hessego [104]), według którego wzmiankowane kryteryum miało wyrażać się tożsamościowo znikaniem spółzmiennika $H$ (Hessego), t. j. wyznacznika funkcyjnego pierwszych biegunowych formy $F$. Okazało się, że twierdzenie Hessego nie jest ogólnie prawdziwem: że stosuje się ono tylko do form dwójkowych, trójkowych i czwórkowych oraz do ogólnych kwadratowych, gdyż już w dziedzinie pięciu zmiennych jednorodnych istnieją całe klasy form, których hesyan znika tożsamościowo, pomiędzy zaś ich biegunowemi nie zachodzą wcale związki liniowe. Badanie Gordana i Noethera opiera się na równaniu różniczkowem cząstkowem liniowem, któremu czynią zadość forma $F$ i jego biegunowe, i którego spółczynniki zależą znowu od pewnego układu równań różniczkowych cząstkowych. Z liczby rozwiązań tego układu należy wydzielić te, które są funkcyami całkowitemi zmiennych. Staje się to przez to, że te ostatnie przekształcają się „niewłaściwie" wymiernie, t. j. w ten sposób, że znika tożsamościowo wyznacznik podstawienia wraz z pewnym szeregiem jego minorów.

---

Do II D. d. $\beta$.

### *Formy specyalne, których natura określa się za pomocą równań różniczkowych algebraicznych.*

Ponieważ nasunięcie dwóch form można zastąpić procesem różniczkowym, wszystkie zaś utwory niezmiennicze sprowadzają się do nasunięć, przeto jest teoretycznie jasnem, że gdy zniekształcenie niezmiennicze formy lub układu form jest dane przez znikanie niezmienników lub tożsamościowe znikanie spółzmienników, to i sama forma musi czynić zadość jednemu lub kilku równaniom różniczkowym algebraicznym. Otrzymanie tych równań na tej drodze jest wszakże połączone w praktyce z wielkiemi trudnościami. Jeszcze trudniejszem byłoby zadanie odwrotne: z danych równań różniczkowych dla form specyalnych wyprowadzić równoważne kryterya niezmiennicze.

Dla omawianego zadania ma znaczenie twierdzenie, dowiedzione najprzód przez Faà di Bruno dla form dwójkowych, które, według Hilberta i Perrina, daje się łatwo rozciągnąć na formy wyższe; twierdzenie to daje nam możność wykonania wzajemnego przeprowadzenia, o którem mowa.

Jeżeli $f(x) = f_0$ jest formą dwójkową w spółrzędnych niejednorodnych $x$:

$$f_0 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n,$$

i jeżeli $f_1, f_2, \ldots\ldots$ są pochodnemi formy $f$ względem $x$, podzielonemi przez proste czynniki liczbowe, t. j.

$$f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f''(x), \ldots\ldots,$$

to każdy spółzmiennik formy $f_0$ można otrzymać bezpośrednio z jego wyrazu głównego (źródła), zastępując spółczynniki $a_i$ formami $f_i$. Stąd wynika odrazu, że każda funkcya jednorodna i izobaryczna $F$ form $f_i$ jest spółzmiennikiem formy $f(x)$, czyniącym zadość równaniu źródła:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \ldots\ldots = 0.$$

Za pomocą tego środka pomocniczego pokazał Hilbert [105]), jak ze stanowiska teoryi niezmienników badać można n.p. funkcye kuliste i ogólniej te funkcye hypergeometryczne $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, które są funkcyami całkowitemi wymiernemi względem $x$. Jeżeli $F$ ma być formą dwójkową ilości $x$, to $\alpha$ (lub $\beta$), należy przyjąć za równe liczbie całkowitej ujemnej $-n$; wtedy $n$ wyraża rząd formy $f$.

Jeżeli $\varphi$ i $\psi$ są funkcye sześcienne lub liniowe w postaci jednorodnej

$$\varphi = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \quad \psi = \frac{3\gamma + 2(n-1)}{3(n-1)} x_1 + \frac{3\beta + n - 1}{3(u-1)} x_2,$$

to równanie liniowe na $F$ przerabia się wprost na równanie między nasunięciami

$$(\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0$$

i odwrotnie. Znajomość form $\varphi$ i $\psi$ pozwala odrazu znaleść te przekształcenia liniowe, które sprowadzają formę $f$ do postaci szeregu hypergeometrycznego $F$. Są to właśnie te sześć przekształceń, przez które forma sześcienna $\varphi$ przyjmuje powyższy typ kanoniczny. Bardziej szczegółowe badanie pozwala jeszcze na wyeliminowanie form $\varphi$ i $\psi$. Wypada mianowicie, że dla scharakteryzowania formy specyalnej koniecznem i dostatecznem jest znikanie pewnego niezmiennika, który znów prostym sposobem wyrazić się daje za pomocą czterech znanych spółzmienników zasadniczych.

---

Do II D. e.

## Pytania, odnoszące się do rzeczywistości.

Istnieją liczne, co do istoty swej bardzo odmienne, zastosowania teoryi niezmienników, zwłaszcza dwójkowych, do pytań o rzetelności pierwiastków równań algebraicznych i układów takich równań.

Do okresu dawniejszego należą tu badania klasyczne [106]) Hermite'a i Sylvestera, w których wszystkie różnice, jakie co do rzeczywistości mogą przedstawiać pierwiastki równania rzędu 5-go, scharakteryzowane są za pomocą kryteryów niezmienniczych. Poprzednio już Cayley zbadał był przypadek równań rzędu 3-go i 4-go [107]). Wspomnieliśmy już także o „prawie bezwładności“ Sylvestera-Jacobi'ego [108]). Na początku nowego okresu wystąpił Schramm [109]) z dwiema godnemi uwagi pracami Stare, rozstrzygnięte zupełnie przez Sturma pytanie o liczbie pierwiastków rzeczywistych pomiędzy danemi granicami, weszło w nowe stadyum z punktu widzenia teoryi form. Funkcye Sturma, których zmiana znaku stanowi tu rzecz główną, zastąpić można szeregiem jużto spółzmienników, już to niezmienników. W szczególności zachodzi twierdzenie, że gdy wszystkie pierwiastki równania $f=0$ są rzeczywiste, to pierwiastek spółzmiennika Hessego, przyrównanego do zera, są urojone; i odwrotnie. Sylvester [110]), dowiódł w inny sposób tego twierdzenia i zarazem rozszerzył je na wszystkie spółzmienniki stopnia 2-go (co do spółczynników formy $f$). Z drugiej strony Laguerre [111]) znacznie uogólnił znane procesy oddzielania i przybliżonego obliczania pierwiastków przez wprowadzenie środków pomocniczych z teoryi form (spółzmiennika Hessego itp.). W ostatnim czasie Fr. Meyer [112]) podał pewne prawo bezwładności dla równań algebraicznych $f_{2n+1}=0$ stopnia nieparzystego. Istnieje szereg zamknięty spółzmienników $f_1, f_2, \ldots, f_n$ taki, że układ tych $n+1$ równań $f=0$—jeżeli odwrócimy uwagę od przypadków przejściowych—posiada liczbę pierwiastków rzeczywistych, niezawisłą od wyboru spółczynników.

Wspomnimy jeszcze krótko o pewnych pytaniach, tego rodzaju dla szczególnych utworów algebraicznych; wzięły one początek z pytań geometrycznych. Te wypadki zachodzą zawsze z konieczności, jeżeli dziedzinę zmiennych danej formy przeniesiemy do dziedziny zespolonej. Należy tu przedewszystkiem interpretacya zmiennej zespolonej $z=x+iy$ na powierzchni kuli, wprowadzona przez Kleina [113]) na podstawie faktu, że przekształcenie liniowe zmiennej $z$ znajduje swe wyrażenie w rzutowej geometryi miarowej na kuli. Jeżeli utworzymy grupę przekształceń liniowych zmiennej $z$, które bryłę foremną przekształcają na samą siebie, i jeżeli poddamy temu przekształceniu dowolny punkt $z$ kuli, to łatwo poznać, które z tych wartości $z$ są rzeczywiste; np. w przypadku dwudziestościanu takich pierwiastków jest ich zawsze cztery [114]).

Wedekind badał w tym sensie dwustosunek czterech punktów na kuli: okazuje się znowu, że dwustosunek ten wtedy tylko może być rzeczywisty, gdy te cztery punkty leżą jednocześnie na płaszczyźnie [115]).

Szczególną ważność dla geometryi krzywych płaskich i przestrzennych mają równania (dwójkowe), od których zależą miejsca osobliwe krzywych. Brill [116]) rozłożył wyróżnik takich równań na czynniki nieprzywiedlne, i stosownie do tego, czy wielokrotność tych ostatnich jest parzysta lub nieparzysta, podał zmiany rzeczywistości pierwiastków przy przejściu wyróżnika przez zero; tym sposobem na drodze czysto algebraicznej sprawdził pewien związek algebraiczny pomiędzy liczbami osobliwości, znaleziony poprzednio przez Kleina [117]) za pomocą rozważań geometrycznych. Fr. Meyer uogólnił to twierdzenie do krzywych w przestrzeni [118]).

---

Do II D. f.

## O zastosowaniu teoryi form do teoryi grup przekształceń skończonych ciągłych.

Teorya niezmienników pozostaje w licznych związkach z teoryą grup przekształceń ciągłych i skończonych, jak to wielokrotnie okazał Lie. Typowy przypadek tego rodzaju zbadał Engel [119]). Idzie w nim o wyznaczenie wszystkich „zestawień“ grup $r$-parametrowych, Taka grupa określa się przy pomocy związku:

$$(X_i X_k) = X_i (X_k f) - X_k (X_i f) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f,$$

gdzie stałe $c$ mają wyłącznie czynić zadość warunkom:

$$c_{jks} = - c_{kjs}, \quad C_{ijks} \equiv \sum_1^r{}^\nu (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0,$$

$$(i, k, j, s = 1, \ldots, r)$$

$X_s = X_s f$ są (liniowo-niezależnem $i$) nieskończenie małemi przekształceniami grupy, mogącemi się przekształcać dowolnie liniowo, bez zmiany zestawienia grupy.

Jeżeli napiszemy równania, określające zestawienie grupy dla dwóch dowolnych kombinacyj liniowych ilości $X$:

$$F(x, y; X) = (\sum_1^r x_i X_i, \sum_1^k y_k X_k) = \sum_{iks}^{1, r} c_{iks} x_i y_k X_s,$$

to forma trójliniowa $F$ lub równanie $F=0$ przedstawia zestawienie grupy w tem znaczeniu, że wszystkie formy, powstające z formy $F$ przez przekształcenie liniowe ilości $x, y; X$ (gdzie ilości $X$ są przeciwpodstawieniowe względem spółpodstawieniowych $x, y$) dają to samo zestawienie. Dość tedy zbadać formę $F$ ze stanowiska teoryi form, aby otrzymać jej układ zupełny i t. d.

Na podstawie związków pomiędzy ilościami $c$, forma $F$ charakteryzuje się jako najogólniejsza trójliniowa, dla której znikają tożsamościowo oba spółzmienniki:

$$\sum_{iks}^{1 \ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) x_i y_k X_s, \quad \sum_{ikjs}^{1 \ldots r} C_{ijks} x_i y_k z_j X_s.$$

Pierwszy warunek orzeka wprost, że $F$ względem ilości $x$ i $y$ jest funkcyą naprzemienną dwuliniową. Aby zrozumieć znaczenie warunku drugiego, uważajmy na chwilę $F=0$ jako „symbol“ nieskończenie małej kolineacyi:

$$\sum_1^r (x_i X_i) + \delta t F = 0.$$

Wtedy te ostatnie tworzą tak nazwaną grupę „dołączoną“, t. j. grupę rzutową, izomorficzną z daną. Znikanie drugiego spółzmiennika pozyskuje obecnie treść taką, że przy każdem nieskończenie małem przekształceniu grupy dołączonej forma $F$ pozostaje niezmienną. Najważniejsze zastosowanie tej interpretacyi jest to, że każda rozmaitość liniowa ilości $x$, będąca spółzmiennikiem formy $F$, przedstawia podgrupę „niezmienną“ grupy pierwotnej.

Dalsze wnioski ze stanowiska teoryi grup znajdzie czytelnik w cytowanej nocie Engela.

## PRZYPISY.

[1]) W dziele Liego-Scheffersa „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen“ t. III, wyznaczone wszystkie podgrupy skończone ciągłe grupy rzutowej o 2, 3, 4 zmiennych. Do każdej z tych podgrup należy osobna teorya niezmienników, wymagająca oddzielnego opracowania. Phr. Knothe, Dissert, Lipsk 1892.

W tekście — oprócz kilku wzmianek o wyznacznikach ortogonalnych — mowa jest o półniezmiennikach.

[2]) Niektóre własności półniezmienników rozpatrzyliśmy już wyżej.

[3]) Niechaj dla prostoty będzie pojedyńcza forma pierwotna $f_n$ ze spółczynnikami $a_0, a_1, \ldots, a_n$, i niechaj $a_0^{\alpha_0}, a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_n^{\alpha_n}$ będzie jednym z wyrazów należących do $C_0$, to, w istocie, przy wykonaniu podstawienia $(A)$ wynika bezpośrednio, że tak suma $0 . \alpha_0 + 1 . \alpha_1 + 2_1\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n$ jak i suma $n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + \ldots$, musi posiadać wartość stałą. Dodając obie sumy, widzimy, że także $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ jest stałe, że więc $C_0$ jest jednorodne. Toż samo stosuje się do form trójkowych i t. d.

[4]) Am. J. V s. 79—96 (1882) s. 97—137 (1883). W drugiej części pracy autor zajmuje się wyznaczeniem półniezmienników (perpetuantów) „nieprzywiedlnych", t. j. takich które dają się przedstawić jako funkcye wymierne całkowite półniezmienników niższych. Tu także otrzymuje dla pojedyńczych przypadków funkcyę tworzącą, która daje nam liczbę perpetuantów liniowo-niezależnych danego stopnia i wagi; rząd należącej tu formy pierwotnej nie ma znaczenia. Odnośny wzór ogólny podał M a c-M a h o n. Por. też tablice C a y l e y'a, Quart. J. XIX, s. 131—138 (1883).

[5]) S. M. F. Bull. XI, s. 88—107 (1883).

[6]) Dalsze rozwinięcie obu zasad zawdzięczamy P e t e r s e n o w i, Zeuthen Tidsskr. (4), IV, s. 177—190 (1880), V s. 33—40 (1881), (5), VI s. 152—156 (1888). W ostatniej pracy są zastosowania do tworzenia układów zupełnych.

[7]) C. R. CII s. 916—917, Brux. S. sc. X s. 75—78, XI s. 314—319 (1887). Byłoby pożądanem zbadać związek ścisły pomiędzy metodą d'O c a g n e'a a metodą B r u n a i M a c-M a h o n a.

[8]) S. M. F. Bull. XVI s. 183—187 (1888), Brux. S. sc. XII s. 185—189.

[9]) Nouv. Ann. (3), VII s. 464—467 (1888).

[10]) C. R. CIV s. 961—964, 1364—1365 (1887). Por. C a y l e y, Quart. J. XXI, s. 212—213 (1885). M a c M a h o n tamże s. 362—365. Tenże podał także generatory dla klasy „specyalnej" półniezmienników „asyzygetycznych", Am J. VIII s. 1—18 (1885).

[11]) C. R. CIV s. 1097—1099, 1258—1260 (1887).

[12]) Belg. Bull. (3) XIII s. 226—236 (1887).

[13]) Lond. M. S. Proc. XXI s. 219—233 (1889).

[14]) Belg. Bull. (3) XIV s. 53—79 (1887), tamże XV, s. 951—980 (1888), XVI s. 207—215, 576—589 (1889). Liège Mém. (2) XV, dwie noty (1888), Belg. Mém. S. E. LI, trzy rozprawy, LII. Le P a i g e rozciągnął pojęcie półniezmiennika na formy dwójkowe o większej liczbie szeregów ilości zmiennych, które mogą być też poddane różnym przekształceniom. Belg. Bull. (3), II s. 40—53 (1881).

[15]) Essai d'une théorie générale etc. Dalszy ciąg badań w Belg. Bull. od 1892 r

[16]) l. c. Chap. II.

[17]) R ó ż n i c a zasadnicza pomiędzy obu przedstawieniami jest ta. K r o n e c k e r zestawia ogólne podstawienia liniowe z pewnej liczby specyalnych, które razem wzięte zastąpić mogą pierwsze, a odpowiednio do każdej z nich otrzymuje r ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e dla utworów niezmienniczych. D e r u y t s korzysta tylko z części specyalnych przedstawicielek, aby utworzyć równania różniczkowe dla funkcyj półniezmienniczych: zamiast reszty występuje szereg r ó w n o ś c i arytmetycznych (mianowicie wag $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$) prowadzący do utworu niezmienniczego.

[13]) Aby wyjaśnić to pojęcie, pomyślmy formę trójkową $C_n$ z szeregiem zmiennych $x_0, x_1, x_2$; spółczynnik wyrazu $x_0^i x_1^k x_2^l$ $(i+k+l=n)$ niechaj będzie $a_{ikl}$. Niechaj będzie dana funkcya całkowita $F$ ilości $a$ jako aregat wyrazów $\Pi a_{ikl}^{\alpha_{ikl}}$, gdzie znak iloczynu rozciąga się na wszystkie ilości $a$, a wykładniki są $\geqslant 0$. Wtedy funkcya $F$ nazywa się względem

skaźnika 0 izobaryczną, jeżeli suma $\sum_i i\alpha_{ikl}$, rozciągnięta na wszystkie spółczynniki $a$ posiada wartość stałą (t. j. wagę $\pi_\alpha$); podobnież nazywa się izobaryczną względem skaźnika 1, 2, ..., gdy to samo stosuje się do $\sum_k k\alpha_{ikl}$, $\sum_l l\alpha_{ikl}$, .... Różnica pomiędzy tem znakowaniem, używanem w geometryi analitycznej, okazuje się wyraźnie na przykładzie. Krzywą $C_4$ według pierwszej reguły przedstawiamy w ten sposób:

$$x_0^4 a_{0000} + x_1^4 a_{1111} + x_2^4 a_{2222} + 4x_0^3 x_1 a_{0001} + \ldots;$$

według drugiej zaś prościej:

$$x_0^4 a_{400} + x_1^4 a_{040} + x_2^4 a_{004} + 4x_0^3 x_1 a_{310} + \ldots,$$

gdzie suma skaźników każdego spółczynnika jest ta sama, co suma wykładników.

[19]) Dowodzi się, że gdy spełnia się $n-1$ równań $[i, i+1] = 0$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$) dla funkcyi izobarycznej, wtedy zarazem spełniają się równania $[h, l] = 0$, w których skaźnik $h$ jest mniejszy od skaźnika $l$.

[20]) Są to te same „zmienne pośrednie" $p_{ik}, p_{ikl}, \ldots$, które występują w ogólnych badaniach Clebscha.

[21]) Postęp u Deruytsa polega właśnie na tem, że operuje się na daleko ogólniejszych funkcyach półniezmienniczych, zamiast na specyalnych wielkościach $p$. l. c. Cap. III.

[22]) l. c. s. 13—14.

[23]) l. c. s. 55.

[24]) l. c. s. 57.

[25]) l. c. s. 64.

[26]) l. c. s. 65.

[27]) Jeżeli $x_{ik}$ ($i, k=1, 2, \ldots, n$) oznacza $n$ szeregów po $n$ zmiennych; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ odpowiednie rzędy form, to przez wyraz główny należy rozumieć spółczynnik przy $x_{11}^{m_1} x_{22}^{m_2}, \ldots x_{nn}^{m_n}$.

[28]) l. c. s. 71.

[29]) Patrz wyżej II C. b. $\alpha$.

[30]) l. c. Chap. IV. Wyżej już omawiano zastosowanie do wyznaczenia liczby utworów niezmienniczych liniowo-niezależnych danych rzędów i stopni.

[31]) l. c. s. 116 i nast. Uogólnienie przy funkcyach niezmienniczych znajduje się już na str. 23 i nast.

[32]) l. c, Chap. VI.

[33]) l. c. Chap. VIII; Bull. Belg. (3) XVIII, s. 152—167 (1892). Porówn. wyżej badania Mauera. Study (Methoden etc; § 10) stosuje też takie ogólne „układy niezmiennicze równań" w celu rozwiązania zagadnienia o równoważności; znajdujemy już tu twierdzenie, że niezmienniczy układ równań można zastąpić szeregiem znikających niezmienników oraz tożsamościowo znikających spółzmienników.

[34]) Szczególnie ważnemi (także dla teoryi funkcyj eliptycznych) są funkcye dwójkowe kwadratowo-kwadratowe. Oba jej wyróżniki posiadają równe niezmienniki (Cayley, Quart. J. XI, s. 83—91, 1870; Capelli, Batt G. XVII, s. 69—148, 1879; Zeuthen, Proc. L. M. S. X, s. 196—204, 1879. Frobenius (Journ. f. M. CVI, s. 125—138, 1890) bada szczegółowo równość takich form. Le Paige zbadał, że własność powyższa występuje także w odpowiedni sposób w formach wielokrotnie liniowych o trzech i czterech szeregach zmiennych dwójkowych.

[35]) Kombinantami w znaczeniu najogólniejszem są takie utwory niezmiennicze pomiędzy wymienionemi formami, w których jeden ze szeregów ilości zmiennych występuje tylko liniowo. Literaturę tego przedmiotu aż do r. 1833 znaleść można w dziele Fr. Meyera „Apolarität etc." Dodać tu należy: Clifford, Proc. L. M. S. II, s. 116—117 (1869);

Darboux, Bull. I (1870). Jednym z najważniejszych kombinantów jest wyznacznik funkcyjny $n$ funkcyj o $n$ zmiennych, zbadany już szczegółowo przez Jacobi'ego (patrz Gordan, Vorlesungen I). Wyznaczniki funkcyjne wyznaczników funkcyjnych są proporcyonalne do form pierwotnych (Clebsch, Journ. f. Math. LXIX, s 355—358 (1868); LXX, s. 175—181 (1869), Rosanes, tamże LXXV, s. 166—172 (1872); Pasch, tamże LXXX Przedstawienie wyznacznika funkcyjnego dwójkowego, a także iloczynu dwóch takich wyznaczników przez formy pierwotne, (które zawdzięczamy Clebschowi) uogólnili: d'Ovidio, Att. Tor. XIV, s. 963—972 (1889): Le Paige, Bull. Belg. (2) XLIX, s. 113—135 (1880), (3) I, s. 480—499 (1881); C. R. XCII, s. 688—690 (1881); Torelli, Nap. Rend. XXV, s. 125—144 (1886).

[36]) Math. Ann. V, s. 95—122 (1872), zwłaszcza str. 116. Por. też Voss, Münch Ber. 1888, s. 15—19. W § 11 kombinanty $R$ dla form dwójkowych redukują się do utworów prostszych.

[37]) Math. Ann. XXII, s. 393—405 (1883). W przypadku form dwójkowych autor otrzymuje bardzo przejrzyste wyrażenie symboliczne na wszystkie kombinanty stopnia pierwszego, należące do $p$ form $n$-tego stopnia (l. c. str. 403). Dalsze badanie w Progr. Münches 1864. Por. White, Ann. J. XVII, s. 235—265 (1895).

[38]) Patrz II B. a., II C. b. δ.

[39]) Math. Ann. IV, zwł. s. 530 (1871). Porówn. Grassmann Ausdehnungslehre, 1862 Nr. 112. Toż samo twierdzenie stanowi też podstawę badań Clebscha nad niezmiennikami form o $n$ zmiennych (Gött. Abh. XVII, s. 1—62, 1872) i badań Gordana nad największym wspólnym czynnikiem (Math. Ann. VII, s. 433—448, 1874), oraz cytowanych wyżej prac W. Stahla.

[40]) Stéphanos, Sav. étr. 1883 (przedstawione w grudniu 1881, patrz referat Gordana z grudnia 1881). Brill prowadzi dowód tego twierdzenia w ten sposób, że można je wprost rozszerzyć na układ form o dowolnej liczbie zmiennych (Math. Ann, XX, zwł. s 335, 1882, z datą kwiecień 1882) Por. co do form dwójkowych przedstawienie w dziele referenta „Apolarität etc." § 11.

[41]) Porówn. Stéphanos (l. c.), Brill l. c; Fr. Meyer (l. c. Rozdz. II) rozprawy Friedricha (Giessen 1886), Grossa (Tybinga 1887, także Math. Ann. XXXI, s 136—150, 1888), E Meyera (Królewiec 1888); Berzolari Ann. di mat. 1892; Rend. di Pal. (1893).

[42]) l. c.

[43]) Ten „wyznacznik funkcyjny" form $f$, albo „kombinant główny", badał Igel co do zależności jego od form $f$ (w pismach Akad. Wiedeńskiej) i podał metody tworzenia kombinantów.

[44]) Co do związków pomiędzy pierwiastkami równań rzędu szóstego i piątego porów Stéphanos (l. a.), Fr. Meyer l. c.

[45]) Journ f. M. LXXV, s. 172—176. Dalsze zastosowania Fr. Meyer „Apolarität etc." W. Stahl jeszcze głębiej wniknął w związki pomiędzy układami dwójkowemi apolarnemi i poczynił interesujące zastosowania do teoryi powierzchni rozwijalnych: Journ. f. Math. CI s. 73—98 (1886), s. 300—315 (1887); CIV s 38—61 (1888), s. 302—320 (1889). Por. Study, Leipz. Ber. 1886, t. 3—9. Czysto-geometryczną teoryę apolarności dwójkowej zawdzięczamy H. Wienerowi (Rozprawa habilatacyjna, Darmstadt 1885). Porów. Thieme, Schlöm Zeitsch XXIV, s 221—229, 276—284 (1879); Math. Ann. XXIII, str. 596—598 (1884).

[46]) Journ f. Math. LXXV, s. 312—330 (1873).

[47]) P. Serret w r. 1869 zbadał już szczegółowo znaczenie geometryczne związków liniowych pomiędzy jednakowemi potęgami form liniowych (Géométrie de direction, Paryż).

[48]) Journ. f. Math. LXXII, 293—326 (1870).

[49]) Porówn. Grassmann, Gött. Nachr., grud. 1872, s. 567—577.

[50]) Przypadek rzędu 3-go badał niedawno O. Schlesinger dla dziedziny trójkowej. Rezultat główny tego badania brzmi geometrycznie w ten sposób: jeżeli krzywa trzeciego rzędu jest sprzężona z krzywą klasy trzeciej, wtedy pierwsza zawiera nieskończenie wiele pięciokątów biegunowych drugiej. (Por. też de Paolis, Acc. L, 1886). Dla tych pięciokątów biegunowych istnieje prosta konstrukcya (Math. Ann. XXX, s. 453 477, 1881). Ogólniejsze pojęcie apolarności rozwija tenże autor (Math. Ann. XXXI, s. 183—219, 1888), na tej zasadzie, że na krzywych eliptycznych można rachować z agregatami liniowemi pewnych iloczynów funkcyj $\vartheta$, podobnie jak na krzywych wymiernych z funkcyami algebraicznemi. W szczególności wynika stąd, że wyżej podany warunek sprzężoności nie tylko jest konieczny ale jest i dostateczny. London (Math. Ann. XXXVI, s. 525—584) na tej podstawie przedstawił jednę lub więcej form trójkowych sześciennych pod postacią sześcianów form liniowych $F$. Co się tyczy redukcyi, wspomnianej w tekscie, to krzywa klasy 2-ej $k_2$ jest apolarną do krzywej rzędu trzeciego $C_3$, t. j. do wszystkich stożkowych biegunowych krzywej $C_3$, lub jeżeli powierzchnia klasy 2-ej $\Phi_2$ jest apolarną do krzywej przestrzennej vzędu 3-go $\varphi_3$. t. j. do wszystkich powierzchni rzędu 2-go, przechodzących przez $\varphi_3$.

[51]) Jour. f. Math. XLV, s. 82—00 (1853).

[52]) Rosanes badał w dalszym ciągu zastosowania do układów punktowych liniowo-zależnych. Journ. f. M. LXXXVIII, s. 241—273 (1880), XC s. 303—321 (1881), XCV s. 248—255 (1883), C. s. 311—316 (1887). Niedawno Reye wzbogacił geometryę nową gałęzią, mającą wiele punktów styczności z apolarnością, mianowicie teoryą rozmaitości liniowych pęków rzutowych płaszczyzn oraz kolinearnych wiązek i przestrzeni, oraz stosujących się tu zasad dualistycznych. Berl. Ber. 1889, s. 833—839; Journ. f Math. CIV s. 211—340 (1889), CVI s 30—47, 315—329, CVII s. 262—178 (1890), CVIII, str. 89—124 (1891). Por. W. Stahl, Journ. f. Math. CVII, s. 179—188 (1890).

[53]) Fr. Meyer, „Apalarität i t. d.“, Tybinga 1883. Te zasady przeniesienia (także dla utworów nieapolarnych) podał dalej Study, Leips. Ber. 1890, s. 172 i nast.

[54]) l. c. § 18.

[55]) Stosowanie tej postaci normalnej ma znaczenie zasadnicze dla przejrzystości całego postępowania. Oczywiście, pewne pojedyńcze czynniki można też wyprowadzić i dalej rozwijać przy przyjęciu za podstawę ogólnych form pierwotnych, jak to za pomocą rachunku symbolicznego okazali: Schlesinger dla dziedziny trójkowej, Lindemann dla czwórkowej. Por. O. Schlesinger, rozprawa ogłoszona we Wrocławiu 1882 lub Math. Ann. XXII s. 520—568; Lindemann, Math. Ann. XXIII, s. 111—142 (1884); tenże wychodził dawniej z „typowego“ przedstawienia form dwójkowych.

[56]) Rozprawa z r. 1882 lub Math. Ann. XXII, s. 520—568 (1883). Niezależnie doszedł do tej samej zasady Fr. Meyer (Math. Ann XXI, s 528—564, 1883), rozwiązał ją ogólnie za pomocą środków niesymbolicznych w dziele „Apolarität“.

[57]) W przypadku, gdy rząd formy pierwotnej jest liczbą pierwszą, wprowadzamy jej biegunowe rzędu rozkładalnego. Zresztą czyni się tu obszerny użytek z „zasady rzutu“, co do której patrz podstawową pracę Veronesego, Math. Ann. XIX, str. 161—214 (1882).

[58]) Fr. Meyer, „Apolarität i t. d.“ § 32

[60]) Gross, Rozprawa z r. 1887, Tybinga 1887, lub wyciąg w Math. Ann XXXII, s. 136—130, Wstęp. Berzolari, Ann. di mat. XX (1892), XXI (1893).

[61]) Math. Ann. XXX, s 30—74 (1887). Co do przypadków szczególnych patrz Math. Ann. XXIX, s. 548—467 (1887); XXXI, s. 96—133 (1888).

[62]) Gött. Nachr. 1889, zwł str. 30; Math. Ann. XXXVI, s. 516 (1890). Postulat ten wymaga uprzednio przyjęcia możliwości żądanego „tworzenia“. Powinno być zatem możliwem wyznaczenie dla danego układu $d+1$ form $f(\lambda)$ rzędu $n$-tego takich $d$ układów $d+1$ form $\varphi(\mu)$ rzędów $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d$, aby każda suma $\sum f(\lambda)\varphi(\mu)$ była podzielną

przez $\lambda-\mu$, oraz aby suma ilości $\nu$ była równa $n$. Dla przypadku $p=3$ postulat ten udowodnił Fr. Meyer, l. c.

[63]) Zasadę tę znajdujemy w najprostszej jej postaci w pracy Brilla, Math. Ann. XXXVI, s. 240—288 (1890), przedruk z dodatkami z Münch. Ber. 1885. Przedstawienie utworów końcowych jako kombinantów podał Fr. Meyer.

[65]) Math. Ann. XXXVIII, s. 561—585 (1891), XL s. 1—54 (1892). Wywód polega tu przeważnie na wymienionych wyżej twierdzeniach o wyznacznikach. Porówn. też Schuhmacher, Math. Ann. XXXVIII, s. 298—306 (1892); Jolles, rozprawa habilitacyjna, Aachen, 1886.

[64]) Nie podajemy tedy pięknych zastosowań wyróżników w teoryi równań różniczkowych i w teoryi arytmetycznej wielkości algebraicznych.

[66]) Patrz np. Salmon-Fiedler, Nr 309, 310.

[67]) Journ. f. Math. LVIII, s. 273—291 (1861). Porówn. Gordan, Journ f. Math. LXXI, s. 164—194 (1870). Clebsch podał kryteryum podzielności formy $f_n$ przez formę $f_2$ za pomocą znikającego tożsamościowo spółzmiennika (Binäre Formen, s. 81). Patrz uogólnienie u Igela, Wien. Ber. 1890, w którym zamiast $f_2$ jest funkcyą rzędu wyższego.

[68]) Math. Ann. III, s. 355—414 (1871). W pracy, ogłoszonej w Gött. Nach. 1870, s. 426 i nast., Gordan podał u ład równań różniczkowych cząstkowych dla wypadkowej form $f_n$ i $f_m$ $(n \geqslant m)$. Jeżeli $\varphi_\mu$ $(\mu \leqslant n)$ oznacza spółzmiennik jednoczesny form $f_n$ i $f_m$, zawierający zarazem wspólne czynniki form danych, to nasunięcie $\mu$-te formy $\varphi$ na ewektant wypadkowej $R$ jest podzielne przez $R$. Stąd wypływają równania żądane. Kryterya niezmiennicze istnienia pewnej liczby wspólnych pierwiastków dwóch form równego rzędu podał dla różnych przypadków Pascal według metody Gordana, Napoli Rend. (2) II, s. 402—409, Annali di Mat. (2) XVI, s. 85—99. Por. też Perrin, C. R. CVII, s. 22—24 (1888).

[69]) Batt. G. XXV, s. 257—280 (1887), Napoli Rend (2) II, s. 67—72 (1888). Por. Berzolari, Rend. Pal. 1897.

[70]) Jak dotąd, nie mają dla teoryi niezmienników znaczenia kombinatoryjno-symboliczne przedstawienie wypadkowej przez Schendela, Schlöm, Z. XXXII, s. 46—65, 83—90 (1887), XXXIII s. 1—13, 65—77 (1888), oraz przedstawienie Mac-Mahona za pomocą funkcyj symbolicznych, Quart. J. XXIII, s. 139—143 (1888).

[71]) Chelini Coll. Medyolan 1881, s. 221—223.

[72]) Atti Tor. XV, s. 385—389, 1880 $(m=4,\ n=4)$; Nap. Mem. XI, 1883 $(m=5)$ $n=2,3)$; Mem. Soc. It. d. sc. IV (1888) lub Rom. Acc. L. Mem. (4), IV s. 607—622 1888 $(m=5,\ n=2,3,4,5)$. Atti Tor. XXVIII 1892 $(m=6,\ n=5)$.

[73]) Vorlesungen, II Nr. 99. Za pomocą niezmienników zasadniczych wyrażono już poprzednio:

wyróżnik formy $f_4$, Boole 1845 (u Cayley'a, Papers, I, s. 94).

wyróżnik formy $f_5$, Salmon 1854, Cambr. a. Dubl. M. J. IX. s. 32.

wyróżnik formy $f_6$, Brioschi 1867, Annali di Mat. (2), I, s. 159.

Ostatni wynik otrzymał Maisano, Math. Ann. XXX, s. 442—452 (1885) za pomocą metody Gordana.

Strukturę wyróżników dwójkowych badali Joachimsthal, Journ. f. M. XXXIII, s. 371—376 (1846); Cayley, tamże XXXIV, s. 30—45 (1847); Pasch, tamże LXXIV, s. 1—6 (1872); Bauer, Münch. Ber. 1886, s. 183—191. Odpowiednie badania wypadkowej dwójkowej i trójkowej znajdujemy u Nöthera, Math. Ann. XXIII, s. 311—358 (1884), zwł, s. 315 i nast. Stahl (Math. Ann. XXXV, s. 395—400, 1889) przedstawił wypadkową dwóch form dwójkowych rzędu $n$-tego, jako wyznacznik $(n-1)^2$ elementów, związany z teoryą kombinantów.

[74]) Math. Ann. XXXI, s. 566—600 (1888).

[75]) Pal. Rend. III, s. 53—59 (1889), IV s. 1—8 (1890).

[76]) Math. Ann. XXXI, s 493—506 (1888).

[77]) Torino Atti XXIV, s. 164—176 (1888).

[78]) Journ. f. Math. LXXX, s. 73—85 (1875).

[79]) Wien. Ber XCIII, s. 62—67 (1886).

[80]) Münch. Ber. XVII (1887). Co do przypadku $n=4$ patrz Klein. Math. Ann. XXXVI, zwł. s. 56.

[81]) Journ. f Math. LIII, s. 372—376. Wypadkowa odnosi się do dwu form dwójkowego równego rzędu. Dla form rzędu nierównego podał później Gordan odpowiednie równania różniczkowe, Gött. Nachr. 1870, s. 427 i nast.

[82]) Bruno-Walter, „Binäre Formen etc.“ § 25.

[83]) Math. Ann. XXXIII, zwł. s. 279 (1888).

[84]) Math. Ann. III, s. 169—161 (1871).

[85]) Wien Ber. lipiec 1891, paźdz. 1891.

[86]) Gött. Nachr 1891, s. 279—286.

[87]) Math. Ann. XVI, s 345—408, zwł. s. 388. Por. Math. Ann. XII, s. 90—122 (1877).

[88]) Dla płaszczyzny w Gött. Nr. 1888, s. 74—77, Math. Ann. XXXVIII, s. 369—404 (1891); dla przestrzeni w Gött. N. 1890 lipiec, grudzień s. 493—501, 1891 styczeń s. 1—12. W dziedzinie funkcyj algebraicznych jednej zmiennej istnieje zjawisko podobne „Wyróżnik“ formy $C(1, s, z)$, t. j. wypadkowa form $C$ i $\dfrac{\partial C}{\partial s}$ rozpada się na dwa czynniki wymierne, z których jeden daje rozgałęzienia krzywej $C=0$, druga zaś jej osobliwości (Kronecker, Journ. f. Math. XCI, s. 331—334, 1981) Por. uogólnienie rzutowe u Noethera, Math. Ann. XXIII, s. 341—358 (1884).

[89]) Math. Ann, XX, zwł. s. 336 i nast. (1882).

[90]) Patrz Russell, Quart. J. XXI, s. 373—375 (1886); Hilbert, Math. Ann. XXXI, s. 489—492 (1888).

[91]) Gött. N. 1892, s. 89—92.

[92]) Math. Ann. XXX, s. 437—441 (1881). Zastosowaniem oddzielnem jest uogólnienie twierdzenia o tożsamościach pomiędzy jednakowemi potęgami form dwójkowych, podane przez Fr. Meyera w „Apolarität“ s. 350 i nast.

[93]) Phil. Mag. (4), III 1852.

[94]) Metodę Bézouta rozciągnął End na funkcye o trzech zmiennych, które, prócz dla skończonej liczby układów wartości zmiennych, znikają jeszcze dla pojedyńczo-nieskończonego układu wartości (Rozprawa, Tybinga 1888 lub w wyciągu w Math. Ann. XXXV, s. 82—90, 1889).

[95]) Wiener Ber. XCVII, s. 618—622 (1888). Dla form dwójkowych odpowiednie traktowanie wypadkowej znajdujemy już u Kroneckera, Berl. Ber. 1881, s. 535—600.

[96]) Quart. J. XI, s. 211—213 (1871); porówn. też Journ. J. Math. XXXIV, str. 30—45 (1847).

[97]) C. R. CVI, s. 1789—1791; CVII s. 22—24, 219—221 (1888).

[98]) Math. Ann. IV, s. 510—526, 527—549 (1871); Münch. Abh. XVII, s. 91—101.

[99]) l. c. Brill podał jeszcze uogólnienie inne, polegające na rozciągnięciu pojęcia wypadkowej na dwa szeregi potęgowe (Math. Ann. XXXIX, s. 129—141, zwł. 138, 1891); O. Schlesinger zaś rozpatrywał wcześniej wypadkowe i wyróżniki funkcyj $\vartheta$ (Math. Ann XXVI, s. 411—445, 1887).

[100]) Stéphanos, Thèse, 1883, Fr. Meyer Gött. N. 1890 Nr. 10, Math. Ann. XXXVIII, s. 369—404, zwł. § VIII, 1891; Verhandl. der Bremer Naturforscherversammlung 1891, s. 9—11. Mówiąc geometrycznie, postępowanie to jest równoważne z pewnemi rzutami.

[101]) Z rozległego szeregu dalszych form specyalnych wydzielono w dalszym ciągu jeszcze dwie klasy, mające szersze znaczenie; patrz co do tego szereg not na końcu tego rozdziału.

[102]) Wspomnijmy o dwu innych jeszcze własnościach hesyanu $H$. Voss dowiódł ogólnie, że dla form sześciennych $F$ o $n$ zmiennych forma Hessego wysnacznika $H$ jest kombinacyą liniową formy pierwotnej $F$ i hesyanu $H$ (Math. Ann. XXVII, s. 515—546, 1886). Dla $n=4$ twierdzenia tego dowiódł był wcześniej Bauer (Münch. Abh. 1883, s. 1—14) i zastosował je do geometryi powierzchni rzędu trzeciego. Z drugiej strony Brill, w celu zbadania krzywej Hessego $H=0$ w punktach osobliwych krzywej $C=0$, zbudował formę $H$ z pewnych spółzmienników dwójkowych (Math. Ann. XIII, s. 175—182, 1878), według zasady, którą później rozwinął Forsyth. Toż samo zadanie geometryczne pobudziło Wölffinga do utworzenia formy $H$ funkcyi całkowitej form trójkowych z najprostszych spółzmiennikkw jednoczesnych tych ostatnich form. (Rozprawa Tybinga 1890, albo Math. Ann. XXXVI, s. 97—120). Porówn. Gerbaldi Pal. Rend. III, s. 60—66 (1889).

[103]) Gordan, Erl. Ber. 1876, s. 89—95; Noether, Erl. Ber. 1876, s. 51—56; Gordan i Noether, Math. Ann. X, str 547—568 (1876). Moment główny dowodu znajduje się w ostatniej pracy na str. 561. Pasch przy pomocy związków wyznacznikowych wykazał, że twierdzenie to jest prawdziwe dla form trójkowych sześciennych i czwórkowych sześciennych. Gordan w pierwszej z wymienionych tu prac rozwiązał całkowicie zadanie dla form trójkowych przez rozważanie hesyanu formy przywiedlnej ze względu na jej czynniki oraz związków, zachodzących pomiędzy biegunowemi. Można, według Gordana i Noethera, podać całe klasy form $f$ o $r$ ($>4$) zmiennych, do których nie stosuje się twierdzenie Hessego. Utwórzmy $r-s$ $\left(s<\frac{r}{2}\right)$ form

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{r-s}$$

o $s$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots. x_s$ i złóżmy z nich nową formę:

$$Q = x_{s+1}\, P_1 + x_{s+2}\, P_2 + \ldots + x_r\, P_{r-s};$$

wtedy szukane formy $f$ dają się przedstawić w postaci:

$$f = \varphi\, (Q, x_1, x_2, \ldots, x_s),$$

gdzie $\varphi$ jest funkcya jednorodną względem $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (l. c. s. 564). W szczególności otrzymujemy wszystkie formy piątkowe, nie spełniające twierdzenia Hessego w postaci:

$$f = \varphi\, (x_3 P_1 + x_4 P_2 + x_5 P_3, x_1, x_2),$$

gdzie $P$ są formy dwójkowe jednakowego rzędu względem $x_1, x_2$.

[104]) Journ. f. Math. XLII, str. 117—124, (1851); LVI, s. 263—269 (1859).

[105]) Rozprawa, Królewiec 1885; Math. Ann. XXX, s. 15—29 (1887). Co do innych specyalnych form i grup podstawień, nie uwzględnionych w tekscie, wspomnijmy jeszcze co następuje:

Najprostsze formy dziedziny dwójkowej, trójkowej i czwórkowej ze szczególnem uwzględnieniem interpretacyi geometrycznej na układach pierwszego i drugiego rzędu badał systematycznie Battaglini: formy dwójkowe pierwszych czterech rzędów Rend. Acc. Napoli 1864, 1865, 1866; piątego rzędu Batt. G. XIV, s. 54—66 (1876), dowolnego rzędu Batt. G. IX, s. 1—18, 78—86 (1871). Zastosowanie form kwadratowych dwójkowych do przekształcenia różniczki eliptycznej znajduje się w Rend. Acc. Linc. (4) I, s. 653—657 (1885); Batt. G. XXIV, s. 128—140 (1886). Formy dwuliniowe dwójkowe: Rom Acc. L. (4) I, s. 691—699 (1885); Batt. G. XXV, s. 281—297 (1887). Też formy oraz ich zastosowania do obrotu przestrzeni około punktu stałego badał szczegółowo Stéphanos, Math. Ann. XXV, s. 299—368, 1883. Formy trójkowe rzędu drugiego: Atti di Napoli III 1867 dwie rozprawy; Batt. G. VIII s. 38—59, s. 129—156 (1870); trzeciego rzędu, Chelini Coll Mat. s. 27—51 (1881) (kombinanty formy i jej hesyanu w traktowaniu dwójkowem) rzędu dowolnego: Batt. G. X, s. 152—169, 193—205 (1872);—dwuliniowe: Rom. Acc. L. Mem. IX (1880); Acc. L. (3) V, 24—26 (1881), Batt. G. XXI, s. 50—68 (1883): koneksy trójkowe pierwszego rzędu i pierwszej klasy: Atti di Napoli IX, (1880); Nap. Rend. XIX, s. 110—112 (1881); drugiego rzędu i drugiej klasy: Atti di Napoli VIII (1879), Nap. Rend. XIX s. 316—328 (1881). Formy czwórkowe dwuliniowe: Rom. Acc. L. Mem. XII (1882); Acc. L. (3) VI, s. 40—42 (1882); Batt. G. XXI, s. 293—323 (1883).

Wspomnimy jeszcze krótko o formach sześciennych trójkowych $C_3$. Poincaré całkowicie zbadał równoważność algebraiczną (i zarazem arytmetyczną) tych form (a także form sześciennych czwórkowych) Éc. Pol. s. 199—253, LI s. 45—91, 1883. Stosownie do zachowania się dwu niezmienników $S$ i $T$, formy $C_3$ dzielą się na siedem klas; dla każdej z tych klas ustanawia się podstawienia, które przekształcają formę na samą siebie. Na tem opiera się równoważność dwu form $C_3$ i $C'_3$, którą rozpatruje się jeszcze osobno dla przypadku rzeczywistych spółczynników i podstawień. W późniejszej pracy (Éc. Pol. LVI, s. 79—142, 1886) poddał Poincaré podobnemu badaniu rozpadające się formy $C_3$. Gundelfinger już poprzednio pokazał był, w jaki sposób ze stanowiska teoryi niezmienników można scharakteryzować wszystkie zniekształcenia formy $C_3$ (Math. Ann. IV, s. 561—571, 1871; Annali di Mat. (2), V s. 223—236, 1872 porówn. Gordan, Math. Ann. III, s. 631—632, 1871); wyniki te dla przypadku, w którym forma $C_3$ rozpada się na trzy czynniki liniowe, uprościli: Brioschi (Annali di Mat. (2) VII, s. 189—192, 1879) i Thaer (Math. Ann. XIV, s. 545—556, 1871). Brioschi (Annali di Mat. (2), VII s. 52—60, 1875) badał paralelizm pomiędzy formami $C_3$ i $f_4$; por. Hilbert, Journ. ke Math. (4), IV s. 246—256 (1888), gdzie zasada istotna jaśniej występuje. Brioschi zastosował to badanie do przekształcenia trzeciego rzędu funkcyj eliptycznych, należących do $f_4$ lub $C_3$, rozważanego już poprzednio przez Cayleya (Quarl. J. XIII s. 211—216, 1874).

Dingeldey podał proste przekształcenie formy $C_3$ ze znikającym wyróżnikiem na postać kanoniczną (Math. Ann. XXX, s. 177—182, 1888); Gross badał tworzenie się takich form $C_3$. Harnack badał równanie różniczkowe, związane z pewnemi formami pośredniemi Clebscha dla form $C_3$ (Math. Ann. IX, s. 218—240, 1875).

Do poznania pojedyńczych utworów niezmienniczych przyczynili się nadto: Bonsdorff (Helsingfors, 1876), Gerbaldi (Atti Tor. XV, s. 707—714, 1880); Maisano (Pal. Rend. IV s. 153—158, 1880) i inni.

Wyjaśnienie znaczenia geometrycznego najważniejszych utworów, należących do formy $C_3$, znaleść można w dziele Clebscha-Lindemanna, t. I, cz. 2-ga, dział 1; gdzie zarazem wskazana jest dalsza literatura. Najprostsze utwory niezmiennicze formy sześciennej czwórkowej wraz z interpretacyą geometryczną podane są w geometryi przestrzeni Salmona-Fiedlera Rozdz. V, s. 318—324.

Co do specyalnych grup podstawień (patrz I A i II Da) można do poprzednich uwag o grupach ortogonalnych dodać jeszcze wiadomości następujące:

Prym (Gött. Abh. 1892) rozciągnął na podstawienia inwolucyjne, podane przez Cayley'a, przedstawienie wymierne spółczynników ogólnego podstawienia ortogonalnego $n$-tego rzędu przez $\frac{1}{2}n(n-1)$ parametrów niezależnych. Równanie „charakterystyczne“ ma wtedy pierwiastki $+1$ i $-1$; jeżeli $m$ jest liczbą pierwiastków równania, to liczba parametrów wynosi $2mn$. Prym wyprowadza wzór wyraźny na całkowitą liczbę inwolucyjnych, a w szczególności inwolucyjno-ortogonalnych układów spółczynników, należących do do danej liczby $m$ (Porówn. cytowane w rozdziale o równoważności form różniczkowych, Część I, prace Lipschitza i Kroneckera). Inną metodę wyprowadzania i formułowania tych wyników podał Cornely (Rozprawa, Würzburg, wydana w Getyndze 1892), który pokazał nadto, w jaki sposób przejść można od jego wzorów do wzorów Pryma.

Hofmann (Hoppe. Arch. (2), VIII. s. 225—268, 1889) stara się podać ogólne wyrażenie parametrowe dla podstawień charakteru inwolucyjnego, przekształcających na samą siebie funkcyę całkowitą stopnia drugiego i trzeciego.

H. Wiener badał ogólnie przy pomocy środków geometrycznych grupy pokrewieństw inwolucyjnych („odzwierciadlań"). Leipz. Ber. 1890, s. 13—21, 71—87, 245—267 1891, s. 424—447.

Nie możemy tu bliżej omawiać teoryi pojedyńczych inwolucyj, badanych geometrycznie przez Bertiniego, Weyra i innych, a także intepretacyi geometrycznej form dwójkowych na układach wymiernych, mającej już rozległą literaturę.

[106]) Porówn. zwł. Hermite, C. R. 1853 I; Jacobi J. für. Math. LIII, s. 275—280; Sylvester, Phil. Trans. Lond. 1864, s. 579—666; Cayley, VIII Mem. tamże, 1867 s. 513—554.

[107]) Pozostawioną tu lukę wypełnił Nöther, który okazał, w jaki sposób przy pomocy kryteryów niezmienniczych można dokładnie rozdzielić oba przypadki czterech pierwiastków zespolonych i czterech pierwiastków rzeczywistych.

Modele Rohna (patrz niżej) przedstawiają poglądowo wszystkie kryterya rzetelności pierwiastków równania rzędu czwartego.

[108]) Dodajmy tu, że Weierstrass, Lipschitz, Stickelberger i Voss zajmowali się także przekształceniem rzeczywistem form rzeczywistych dwuliniowych i kwadratowych.

[109]) Annali di Mat. (2), I, s. 256—279 (1867); III, s. 41—55 (1869).

[110]) Journ. f. Math. LXXXVII, s. 217—219 (1879). Co do spółzmiennika Hessego patrz Gerbaldi, Pal. Rend. III, s. 22—26; Schoute, tamże s. 170—164 (1889).

[111]) Badania Laguerre'a z C. R. 1879, 1880, 1881, 1882, zebrane są w rozprawie w Journ. de Math. (3). IX s. 99—147 (1883).

[112]) Gött. Nachr. 1891, s. 272—286.

[113]) Patrz Program erlangeński Kleina 1872 (Prace mat. fiz. V). Segre i Juel badali systematycznie własności rzutów najprostszych utworów na płaszczyźnie i w przestrzeni w założeniu, że tak spółrzędne punktów, jak i spółczynniki podstawień są ilościami zespolonemi. Segre (Atti di Torino XXV, 1890, styczeń, marzec, kwiecień, listopad; Math. Ann. XL, s. 413—467, 1892); Juel, Acta Mat. XIV, s. 1—30 (1890).

[114]) Math. Ann. IX, s. 183—20 (1875).

[115]) Math. Ann. IX, s. 209—217 (1871).

[116]) Math. Ann. XVI, s. 345—408, zwł. § 7.

[117]) Math. Ann. X, s. 189—209 (1876). Poprzednio już Zeuthen zbadał był szczegółowo stosunki rzetelności 28 stycznych podwójnych krzywej płaskiej rzędu 4-go oraz jej 24 stycznych zwrotnych (Math. Ann. VII, s. 410—432, 1874); liczba maksymalna zwrotów rzeczywistych wynosi ośm. Inne rozważanie rzetelności odnosi się do liczby gałęzi rzeczywistych krzywej algebraicznej rzędu $n$-tego. Harnack (Math. Ann. X, str. 189—198, 1876) wykazał, że dla płaszczyzny liczba ta wynosi najwyżej $p+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ i że to maximum daje się i osiągnąć. Hilbert wykazał, że dla krzywych przestrzennych liczbę powyższą należy zastąpić przez $\frac{1}{2}(n-2)^2+1$ lub $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ stosownie do tego, czy $n$ jest parzyste lub nieparzyste, oraz że krzywe o takiej liczbie gałęzi rzeczywistych istnieją.

Klein w odczytach swych (semestr letni 1864) o powierzchniach Riemanna, badał rzeczywistość tak zwanych „linij symetryi". Porówn. F. Klein „Odczyty o matematyce", przekład polski, Warszawa, 1899. Dalsze twierdzenia o liczbie i uporządkowaniu gałęzi rzeczywistych krzywych płaskich algebraicznych z punktami podwójnemi podał Hulburt (Ann. J. XIV, s. 246—260, 1892). Za pomocą przejścia ciągłego od krzywej $n$-tego rzędu do krzywej rzędu $(n+1)$-go można wykać, że istnieje krzywa algebraiczna rzędu $n$-tego z $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punktami podwójnemi rzeczywistemi (i nie odosobnionemi).

Zresztą stosunki rzetelności pierwiastków równań, dających osobliwości, są jeszcze mało znane.

[118]) Gött. N. 1897, s. 1—13 Fr. Meyer badał przykładowo krzywą wymierną przestrzenną 4-go rzędu pod względem stosunków rzetelności jej osobliwości. Rohn zbudował modele nitkowe, ilustrujące te stosunki, zwłaszcza dla odpowiedniej powierzchni rozwijalnej. Porówn. dwie noty w Leipz. Ber. 1891, 1892.

[119]) Leipz. Ber. 1886, s 83—96. Byłoby bardzo pożądanem dalsze rozwinięcie badań, poruszonych przez Engela.

# Skorowidz nazwisk.

Meyer * TEORYA NIEZMIENNIKÓW

T. N. W.