1958

1958

LA

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE

PAR

H. LAURENT

ANCIEN EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

> Si Dieu a créé l'univers, l'Homme a créé l'espace, pour expliquer et coordonner ses sensations; il l'eût créé à deux dimensions, s'il avait été condamné à l'immobilité et s'il n'avait eu que le sens de la vue.

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1906

PRÉFACE

La géométrie non Euclidienne est à l'ordre du jour, et un grand nombre de personnes ont émis les idées les plus diverses sur les principes fondamentaux de la géométrie. Si l'on ne parvient pas à se mettre d'accord sur ces premiers principes, c'est qu'il s'agit d'une question mal posée, c'est aussi que, pour la résoudre, chacun y apporte ses préjugés.

La question précise que je me propose de traiter est la suivante : Quelles sont les hypothèses irréductibles qu'il faut faire pour retrouver les propositions de la géométrie d'Euclide ? Notez-bien ceci, je dis : quelles sont les hypothèses qu'il faut faire, *et non pas :* quels sont les axiomes évidents sur lesquels il faut s'appuyer. *La différence est très importante. Je ne pose aucun axiome, je n'ai pas besoin d'axiomes, je ne fais que des hypothèses et j'examine à la fois les conséquences de mes hypothèses et des hypothèses contraires.*

J'ai cherché à me mettre à l'abri de toute idée préconçue provenant de mon atavisme ou de mon éducation, et pour cela, je me suis demandé s'il ne serait pas possible d'édifier une science abstraite et logique, n'ayant d'autre rapport avec la géométrie que les noms des objets sur lesquels on spécule, ces objets n'ayant qu'une existence aussi abstraite que les nombres.

Cette science peut être édifiée sans autres hypothèses que celles sur lesquelles s'appuie l'analyse la plus pure, c'est une branche de la théorie des nombres. Elle reproduit sans y changer un mot *toutes les proportions de la géométrie classique, seulement les mots, point, ligne, surface, ligne droite, plan, angle, cercle, etc., n'y ont pas le même sens qu'en géométrie.*

Une définition est capitale c'est celle du déplacement sans changement de forme, *et je montre qu'il suffit de modifier cette définition pour changer la géométrie Euclidienne en celle de Riemann, en celle de Lobatschewski ou en d'autres moins bien étudiées.*

Pour passer de l'abstrait au concret, c'est-à-dire, pour appliquer à la géométrie des corps de l'espace réel, les résultats de l'analyse, il suffit de faire une hypothèse très simple, qu'Euclide aurait appelée un axiome.

Mais le postulatum d'Euclide et ses conséquences dépendent essentiellement *de la définition que l'on adoptera pour le déplacement sans changement de forme.*

Il y a plus : on verra que la définition de la ligne droite et du plan sont à peu près arbitraires, c'est dire que toute la géométrie d'Euclide serait vraie en appelant plans *les surfaces les plus diverses ; c'est ce qui explique pourquoi les auteurs des traités de géométrie arrivent tous au même résultat en donnant des définitions différentes de la ligne droite et du plan ou en n'en donnant pas du tout.*

En me plaçant au point de vue très général dont je viens de parler, j'ai été conduit à aborder immédiatement la théorie des espaces à un nombre quelconque de dimensions, cela m'a permis d'étudier à la fois la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, ce qui simplifie l'exposition.

J'ai été conduit ainsi à montrer les ressources que le langage géométrique fournit à l'analyse, pour simplifier les énoncés et condenser les raisonnements sans nuire à la clarté. J'ai donné deux formes nouvelles à une théorie de l'élimination que j'avais donnée ailleurs, j'ai été ainsi amené à démontrer le célèbre théorème d'Abel, sous une forme qui m'a permis d'en déduire un théorème que Chasles croyait inaccessible à l'analyse, théorème que je suis parvenu à généraliser ; le lecteur pourra même en suivant la voie que j'ai indiquée généraliser à l'infini le théorème de Chasles.

Je termine par quelques considérations sur les géométries non Euclidiennes, et le lecteur conclura sans doute avec moi, que ce travail n'est qu'une introduction à la théorie générale des groupes de substitutions, dans laquelle j'étudie surtout le groupe orthogonal et ses invariants : la distance et l'angle. Enfin je fais connaître sous une forme simple toutes les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même.

CHAPITRE PREMIER

—

INTRODUCTION

1. Définitions. — La *géométrie analytique* est ordinairement considérée comme un prolongement de la géométrie élémentaire, ayant pour but de montrer comment l'usage systématique de l'analyse algébrique peut faciliter la résolution des problèmes et la démonstration des théorèmes de géométrie. C'est comme on l'a dit, l'application de l'algèbre à la géométrie.

Mais elle a encore un but plus élevé et éminemment philosophique, elle est pour ainsi dire à la géométrie élémentaire ce qu'est la physique mathématique à la physique expérimentale. Pour établir les vérités élémentaires de la géométrie, on est obligé de poser un grand nombre d'hypothèses (ou de postulatums) que l'on évite souvent de mettre en relief; la géométrie analytique a précisément pour but d'établir d'une façon à la fois *franche* et rigoureuse les propositions de la géométrie élémentaire. Elle a pour but de montrer sur quelles hypothèses *nettes* et *fondamentales* il faut s'appuyer pour y parvenir.

Je dois prévenir le lecteur que pour lire ce qui suit, il est indispensable qu'il fasse table rase de toutes les connaissances qu'il a acquises en géométrie, les mots que nous allons employer n'ayant pas le même sens qu'en géométrie, au moins au début, plus tard on verra que ce sens est seulement généralisé.

2. Remarque au sujet des fonctions circulaires. — Dans ce qui va suivre, j'appellerai sinus et cosinus d'un *nombre* x, réel ou imaginaire, non pas les *lignes* considérées en trigonométrie, mais les *nombres* définis par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1.2} + \dots, \\ \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{cases}$$

On démontre facilement, dans tous les traités d'analyse, indépendamment de toutes considérations géométriques, et comme conséquences des formules de définition (1) que

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \end{cases}$$

d'où l'on conclut, en observant que en vertu de (1)

$$(3)\qquad \sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1,$$

la formule

$$(4)\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tout cela est bien connu, mais ce que l'on sait moins bien, c'est que à l'aide des formules (1), et sans le secours de la géométrie, on peut encore définir le nombre π et établir la périodicité du sinus et du cosinus, nous croyons donc utile d'entrer dans quelques détails à ce sujet. On sait que des formules (1) on tire

$$(5)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \dots,$$

$$(6)\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} \dots,$$

qui montrent que

$$(7)\qquad \cos x = \cos(-x), \qquad \sin x = -\sin(-x).$$

Si l'on suppose $x = 0$ la formule (5) donne $\cos x = 1$. Si l'on ait $x = 2$, on a,

$$\cos 2 = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \dots$$

et l'erreur commise en prenant

$$\cos 2 = 1 - \frac{4}{2} = -1,$$

est moindre que le premier terme négligé $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, donc $\cos 2 < 0$. L'équation $\cos x = 0$ a donc au moins une racine entre 0 et 2, appelons $\frac{\pi}{2}$ la plus petite de ces racines, les formules (2) donneront

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \sin\frac{\pi}{2},$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \quad \cos x \sin\frac{\pi}{2}.$$

mais la formule (4) donne

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \text{ et } \sin\frac{\pi}{2} = \pm 1.$$

Or pour $x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ qui, en vertu de (5), (6) est la dérivée de $\sin x$ est positif, $\sin x$ est croissant, comme il est nul pour $x = 0$, il est positif pour $x = \frac{\pi}{2}$ donc il ne peut être égal à -1 et l'on a

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

d'où il est facile de conclure

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

. . . .

et l'on aurait de même

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \text{ etc.}$$

Il reste à montrer comment on peut calculer π bien que cela ne soit pas absolument nécessaire. Or les dérivées de $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{arctg} x$, se déduisent facilement des formules précédentes sans avoir recours à la géométrie et on en tire

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

par les procédés connus, et l'on sait comment cette formule peut servir au calcul de π.

Ainsi en résumé, un individu n'ayant aucune notion de géométrie pourrait établir toutes les formules de la trigonométrie, abstraction faite de ses applications géométriques (théorème des projections, résolution des triangles, etc.).

CHAPITRE II

—

LES ÉLÉMENTS

1. Notions générales. — On appelle point ou variété à 0 dimensions, dans un espace à n dimensions, l'ensemble de n quantités x_1, x_2, ..., x_n ; et ces quantités portent le nom de *coordonnées* du point en question.

Si les coordonnées d'un point sont variables et fonctions d'une seule quantité, qui peut être l'une d'entre elles, on dit que le point en question décrit une *ligne*, ou un espace à une dimension, ou encore une *variété* à une dimension.

En général, si les n coordonnées d'un point sont variables et fonctions de p paramètres distincts, on dit que le point décrit une variété ou un espace à p dimensions.

On appelle souvent surfaces les variétés à n — 1 dimensions, dans les espaces à n dimensions.

On appelle *figure* un ensemble de variétés à 0, 1, 2, ... dimensions.

On appelle *intersections* de deux figures, les points communs à ces deux figures, quand elles en ont.

Quand deux figures ont des points communs on dit qu'elles se *coupent* ou se *rencontrent* en ces points, et ces points sont dits *sur* les figures.

Une variété à p dimensions est continue, si les n — p coordonnées fonctions des p autres considérées comme variables indépendantes, sont continues.

Une surface (variété d'ordre n — 1 dans un espace à n dimensions) est algébrique quand son équation est de la forme, on peut se ramener à la forme

$$F(x_1 \dots x_n) = 0,$$

F désignant un polynôme entier. Le degré de ce polynôme est alors le degré ou l'ordre de la surface.

Les surfaces du premier ordre sont ce que l'on appelle des plans (des droites dans l'espace à deux dimensions).

Une variété est du premier ordre, si toutes ses équations sont du premier degré.

$n - 1$ équations du premier degré représentent une variété à une dimension à laquelle on donne le nom de ligne droite, il est évident que les n coordonnées d'une droite peuvent, d'une infinité de manières, s'exprimer en fonction linéaire d'un paramètre variable qui sera l'une d'elles si l'on veut.

Les conventions qui précèdent permettent de condenser le langage algébrique, et aussi de lui donner une forme imagée qui le rend plus facile à retenir. Avec ces conventions, la théorie des équations linéaires peut se résumer ainsi :

n plans dans l'espace à n dimensions se coupent en général en un point et un seul. Si cependant le déterminant Δ des coefficients des coordonnées est nul, ils ne se coupent plus, à moins que les déterminants obtenus en remplaçant une colonne de Δ par les termes indépendants des coordonnées soient tous nuls. Dans ce cas, les plans se coupent en une infinité de points en ligne droite, car les n équations de nos plans se réduisent à $n - 1$ qui définissent une variété du premier degré.

Il peut arriver que les mineurs du déterminant Δ soient tous nuls, alors en général nos plans ne se coupent plus, à moins que certains déterminants ne soient encore nuls, les équations de nos plans ne sont plus qu'au nombre de $n - 2$ distinctes et ces plans se coupent suivant une variété à 2 dimensions et ainsi de suite, en sorte que n plans peuvent se couper suivant des variétés à 0, 1, 2, 3 ... et même n dimensions, c'est ce qui arrivera si toutes les équations des plans sont identiques à un facteur près.

Il convient de remarquer les surfaces qui ont pour équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_n = 0$, ce sont des *plans*, on les appelle plans de *coordonnées*, ils se coupent au point de coordonnées nulles, ce point est l'*origine* des coordonnées, les variétés à une dimension obtenues en prenant $n - 1$ équations parmi les équations des plans de coordonnées sont les *axes* des coordonnées.

2. Substitutions orthogonales. — Les équations suivantes où les a_{ij} sont indépendants des x et des y :

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

constituent ce que l'on appelle une substitution linéaire et homogène. Cette substitution est orthogonale, si l'on a quels que soient d'ailleurs i et $j < n + 1$:

$$(2) \qquad a_{j1}a_{i1} + a_{j2}a_{i2} \cdots + a_{jn}a_{in} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \lessgtr j. \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Nous allons étudier les propriétés de ces substitutions.

1° En premier lieu, nous résoudrons les équations (1), à cet effet nous multiplierons la première formule (1) par a_{11}, la seconde par a_{21}, la suivante par a_{31} ... et nous ajouterons ; nous aurons en vertu de (2), la formule suivante et ses analogues :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \cdots + a_{n1}y_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

2° *Nous constaterons que le déterminant*

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

est égal à ± 1, car son carré est :

$$\begin{vmatrix} a^2_{11} + a^2_{12} + \ldots, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \ldots \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} \ldots, & a^2_{21} + a^2_{22} + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

ou en vertu de (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = 1.$$

Le carré de Δ étant 1, $\Delta = \pm 1$.

3° *La substitution* (3) *est orthogonale*, on lui donne le nom de substitution *inverse* de (1). On a en effet, en laissant j fixe, n équations parmi les équations (2) qui sont du premier degré en $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots$ et donnent

$$a_{pj} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{pj}} \frac{1}{\Delta} = \pm \frac{\partial\Delta}{\partial a_{pj}}.$$

Or Δ étant égal à ± 1, on a :

$$a_{i1} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{j1}} + \ldots + a_{in} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{jn}} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \lessgtr j, \\ \pm 1 \text{ si } i = j, \end{cases}$$

donc

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} \ldots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \lessgtr i. \\ \pm 1 \text{ si } i = j, \end{cases}$$

ce qui prouve que la substitution inverse est orthogonale.

4° *Des équations* (1) *élevées au carré et ajoutées, on tire, en vertu de* (2) :

(4) $$x^2_1 + x^2_2 \ldots + x^2_n = y^2_1 + y^2_2 \ldots + y^2_n.$$

5° *Réciproquement si les formules* (1) *entraînent quels que soient* $x_1, x_2 \ldots x_n$, *la relation* (4), *elles constituent une substitution orthogonale.*

Car

$$y^2_1 + y^2_2 \ldots = (a^2_{11} + a^2_{21} \ldots)\, x^2_1 + 2\,(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \ldots)\, x_1x_2 \ldots ;$$

si donc (4) a lieu identiquement, il faut que

$$a^2_{11} + a^2_{21} \ldots = 1, \qquad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \ldots = 0, \ldots$$

ce qui revient à (2).

Ce théorème pourrait servir à prouver le théorème (4) ; mais il va nous permettre de prouver le suivant :

6° *Il existe des substitutions orthogonales, en nombre infini*, considérons en effet les formules

(5) $$\begin{cases} x_1 - y_1 = c_{11}\,(x_1 + y_1) + c_{12}\,(x_2 + y_2) \ldots + c_{1n}\,(x_n + y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - y_n = c_{n1}\,(x_1 + y_1) + c_{n2}\,(x_2 + y_2) \ldots + c_{nn}\,(x_n + y_n). \end{cases}$$

où l'on a

$$c_{ij} = -\, c_{ji}, \qquad c_{ii} = 0.$$

multiplions la première par $x_1 + y_1$, la seconde par $x_2 + y_2$, etc., et ajoutons, nous aurons

$$x^2_1 - y^2_1 + x^2_2 - y^2_2 + \ldots = 0$$

ou

$$x^2_1 + x^2_2 \ldots + x^2_n = y^2_1 + y^2_2 \ldots + y^2_n$$

donc en résolvant les équations (5), par rapport aux x ou par rapport aux y, on obtiendra une substitution orthogonale.

On obtiendrait encore une substitution orthogonale en résolvant les équations :

$$(5 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x_1 \pm y_1 = c_{11}(x_1 \mp y_1) + \ldots c_{1n}(x_n \mp y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \pm y_n = c_{n1}(x_1 \mp y_1) + \ldots c_{nn}(x_n \mp y_n). \end{cases}$$

ou l'on a toujours

$$c_{ij} = c_{ji}, \qquad c_{ii} = 0$$

la démonstration est la même, il suffit de multiplier la première formule par $x_1 \mp y_1$, la seconde par $x_2 \mp y_2$, etc., et d'ajouter pour trouver ;

$$x^2_1 + x^2_2 \ldots + x^2_n = y^2_1 + \ldots y^2_n$$

Mais il y a une différence capitale entre les formules (5) et (5 bis), les premières ont pour déterminant 1, les autres peuvent avoir pour déterminant — 1, quand on les résout par rapport aux y. En effet, en faisant varier les c, d'une manière continue, pour les faire tendre vers zéro, les premières conduisent aux formules :

$$x_1 - y_1 = 0, \qquad x_2 - y_2 = 0, \ldots$$

ou $x_1 = y_1$ $x_2, = y_2 \ldots x_n = y_n$, les autres conduisent aux formules $x_1 = \pm y_1$, $x_2 = \pm y_2$, dans le premier cas on a des formules qui, résolues par rapport aux y auront pour déterminant 1, les autres fourniront des formules de déterminant $\pm$ 1, à volonté.

Les formules (5) et (5 bis), renferment $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres comme les formules (1) qui en renferment n^2 liés par $\frac{n(n+1)}{2}$ relations ; elles fournissent donc les substitutions orthogonales les plus générales. Observons enfin que ces formules sont très remarquables en ce sens que, résolues par rapport aux y, les coefficients des x sont rationnels en c_{ij}, et à cofficients rationnels.

7° Enfin nous constaterons que si

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} z_1 = b_{11}\, y_1 + \dots\, b_{1n}\, y_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = b_{n1}\, y_1 + \dots\, b_{nn}\, y_n, \end{cases}$$

est une substitution orthogonale et si l'on élimine les y entre (1), et (6), on aura ;

$$x_1 = c_{11}\, z_1 + \dots\, c_{1n} z_n, \text{ etc,}$$

et ces formules définiront encore une substitution orthogonale, car on aura

$$x^2_1 + x^2_2 + \dots = y^2_1 + y^2_2 + \dots = z^2_1 + z^2_2 + \dots$$

3. Les déplacements. — Si l'on pose

$$\text{(1)} \qquad x_1 = \varphi_1\,(y_1, y_2 \dots y_n), \qquad \dots\, x_n = \varphi_n\,(y_1 \dots y_n),$$

le point $x_1 \dots x_n$ se transformera en un point $y_1 \dots y_n$, en posant de même

$$x'_1 = \varphi_1\,(y'_1 \dots), \qquad \dots\, x'_n = y_n\,(y'_1 \dots y'_n)$$

un second point $x'_1 \dots$ se transformera en $y'_1 \dots y'_n$. Une figure F formée de points $x_1, \dots ,x'_1 \dots$ se transformera en un autre G, formé d'autres points $y_1 \dots, y'_1 \dots$

On dit alors que l'on obtient G en déplaçant F, sans changer sa forme.

Il y a donc une infinité de déplacements sans changement de forme. La géométrie est l'étude des déplacements sans changement de forme.

Il y a une infinité de géométries, caractérisées par les fonctions φ qui définissent pour chacune d'elles les déplacements sans changement de forme.

La géométrie Euclidienne, pour nous la plus simple, est celle pour laquelle les déplacements sans changement de forme sont définis par les formules

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_n + a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n, \end{cases}$$

ou les a et les α sont des quantités indépendantes des x et des y et ou les a_{ij} sont les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$.

Quand les α sont nuls, la substitution (1) est ce que l'on appelle une *rotation.*

Quand les a_{ij} sont nuls, saufs les a_{ii}, et quand on a par suite

$$x_1 = \alpha_1 + y_1, \qquad \dots x_n = \alpha_n + y_n$$

le déplacement est une *translation.*

Si deux figures F et G peuvent être transformées l'une dans l'autre par un déplacement, on dit qu'elles sont égales, l'égalité est donc toute relative, deux figures égales en géométrie Euclidienne, ne seront pas égales dans les autres géométries. Si la figure T est la figure S déplacée, on dit que l'on a appliqué S sur T.

Jusqu'à nouvel ordre, nous ferons de la géométrie Euclidienne, exclusivement.

Une substitution orthogonale de déterminant -1, sera ce que nous appellerons un *retournement.*

Il est essentiel d'observer que deux déplacements successifs reviennent à un déplacement unique, et que par suite, *un nombre quelconque de déplacements successifs, revient à un déplacement unique.* En effet considérons les déplacements successifs

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 + a_{11}y_1 + \dots a_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

et

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \beta_1 + b_{11}z_1 + \dots b_{1n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

où les α, les β, les a et les b sont constants, on a

$$x_1 = \alpha_1 + a_{11}(\beta_1 + b_{11}z_1 + \dots b_{1n}z_n) + a_{12}(\beta_2 + b_{21}z_1 + \dots) + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ou

$$\begin{aligned} x_1 = \alpha_1 &+ a_{11}\beta_1 \dots + a_{1n}\beta_n \\ &+ z_1(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots) \\ &+ z_2(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21} + \dots) + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or $x_1\ x_2, \dots$ dans ces formules renferment un terme indépendant des z, plus des termes en z, qui ont pour coefficients, ceux d'une substitution orthogonale ; car ce sont ceux d'une substitution obtenue en faisant deux substitutions orthogonales successives, obtenues en faisant dans (1) et (2) les α et les β égaux à zéro, — donc *deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.*

4. La ligne droite. — Un point peut toujours être amené en coïncidence avec un autre au moyen d'un déplacement, et cela d'une infinité de manières, par exemple, le point $x_1, x_2 \dots x_n$, peut être amené sur $y_1, y_2 \dots y_n$, au moyen de la translation

$$x_1 = \alpha_1 + y_1, \qquad x_2 = \alpha_2 + y_2 \dots$$

La *ligne droite*, rappelons-le, est une ligne dont les coordonnées sont fonctions linéaires d'un paramètre t ; ses équations sont de la forme

$$(1) \qquad x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t \dots \qquad x_n = \alpha_n + a_n t,$$

les α et les a étant indépendants de t ; on peut mettre ces équations sous la forme

$$(2) \qquad \frac{x_1 - \alpha_1}{a_1} = \frac{x_2 - \alpha_2}{a_2} \dots = \frac{x_n - \alpha_n}{a_n}.$$

On voit que la droite contient le point $\alpha_1, \dots \alpha_n$, et que l'on peut remplacer $a_1, a_2 \dots a_n$ par $ka_1, ka_2 \dots ka_n$ sans que la droite cesse de représenter les mêmes points. On peut donc supposer

$$(3) \qquad a_1^2 + a^2_2 \dots + a^2_n = 1 ;$$

car on peut remplacer $a_1, a_2 \dots$ par

$$a'_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \qquad a'_2 = \frac{a_2}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \dots$$

alors il est clair que

$$a'^2_1 + a'^2_2 + \dots = 1.$$

Lorsque les a sont quelconques, on dit que ce sont les *coefficients directeurs* de la droite, et quand ils sont liés par la relation (3), on dit que ce sont les *cosinus directeurs* de la droite, et alors rien n'empêche, les a étant moindres que 1, de poser

$$a_i = \cos \varphi_i.$$

Par deux points $x'_1 \dots x'_n$ *et* $x''_1 \dots x''_n$, *on peut faire passer une droite et une seule.*

En effet par le point $x'_1, \dots x'_n$, on peut faire passer une infinité de droites, par exemple

$$(1) \qquad \frac{x_1 - x'_1}{a_1} = \frac{x_2 - x'_2}{a_2} \dots = \frac{x_n - x'_n}{a_n},$$

et si l'on assujettit cette droite à contenir le point $x''_1 \dots x''_n$, on aura

$$\frac{x''_1 - x'_1}{a_1} = \dots \frac{x''_n - x'_n}{a_n},$$

ce qui détermine $a_1 : a_2 : a_3 \dots$, et en portant leurs valeurs dans (1) on a

$$\frac{x_1 - x'_1}{x''_1 - x'_1} \dots = \frac{x_n - x'_n}{x''_n - x'_n};$$

cette droite est unique et bien déterminée. Si l'on avait $x''_i = x'_i$, on aurait pour l'une des équations $x_i = x'_i$.

Les équations

$$\frac{x'''_1 - x'_1}{x''_1 - x'_1} = \dots \frac{x'''_n - x'_n}{x''_n - x'_n}$$

expriment que les points $x'_1 \dots$, $x''_1 \dots$, $x'''_1 \dots$ sont sur une même droite.

Distance de deux points. — Considérons deux points $x'_1 \dots x'_n$ et $x''_1 \dots x''_n$, et faisons leur subir un même déplacement : en d'autres termes, posons

$$x'_i = \alpha_i + a_{i1}y'_1 + \dots a_{in}y'_n,$$

$$x''_i = \alpha_i + a_{i1}y''_1 + \dots a_{in}y''_n,$$

$$(i = 1, 2 \dots n),$$

nous aurons

$$x'_i - x''_i = a_{i1}(y'_1 - y''_1) \dots + a_{in}(y'_n - y''_n),$$

et en vertu des relations

$$a_{1p}a_{1q} + a_{2p}a_{2q} + \dots = \begin{cases} 0 \text{ si } p \lessgtr q, \\ 1 \text{ si } p = q, \end{cases}$$

on aura

$$(x'_1 - x''_1)^2 + \dots (x'_n - x''_n)^2 = (y'_1 - y''_1)^2 + \dots (y'_n - y''_n)^2.$$

La fonction

$$+\sqrt{(x'_1 - x''_2)^2 + \dots (x'_n - x''_n)^2}$$

que l'on appelle *distance* des points $x'_1 \dots ; x''_1 \dots$ ne change donc pas quand on effectue un déplacement ou même un retournement.

C'est ce que l'on appelle un invariant des substitutions orthogonales, c'est-à-dire une chose qui reste invariable ou invariante après une substitution.

Reprenons les équations de la droite, à savoir

$$x_1 = \gamma_1 + t \cos \varphi_1, \dots x_n = \gamma_n + t \cos \varphi_n ;$$

$\gamma_1, \gamma_2 \dots$ sont les coordonnées d'un point de la droite et $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2 \dots$ sont ses cosinus directeurs, t est la distance variable du point $x_1, x_2 \dots$, au point fixe $\gamma_1, \gamma_2 \dots$, car ces formules donnent

$$(x_1 - \gamma_1)^2 + \dots (x_n - \gamma_n)^2 = t^2$$

en vertu de la relation

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 \dots = 1.$$

Si l'on donne à t des valeurs positives, on obtient un certain nombre infini de points situés sur ce que l'on appelle la direction positive de la droite, et ils forment ce que l'on appelle une demi-droite ; les valeurs négatives de t fournissent les points situés sur la direction négative de la droite ; il n'y a rien d'absolu dans ces définitions, car en changeant les signes des cosinus directeurs, la droite reste la même et la direction positive se permute avec la direction négative.

Les points d'une droite obtenus en faisant varier t de t_0 à t_1, forment ce que l'on appelle un segment, il est *orienté* de t_0 vers t_1 ; il est supposé engendré par le point variable obtenu en faisant varier t de t_0 à t_1.

Considérons deux segments définis par les points $x'_1 \dots ; x''_1 \dots$ et $y'_1 \dots ; y''_1 \dots$ s'ils ont même *longueur*, c'est-à-dire si les distances l des deux premiers points est égale à la distance des deux autres, on pourra poser

(1) $$x'_1 = x''_1 + l \cos \varphi_1 \dots x'_n = x''_n + l \cos \varphi_n,$$

(2) $$y_1 = y''_1 + l \cos \psi_1 \dots y'_n = y''_n + l \cos \psi_n,$$

$\cos\varphi_1 \ldots$; et $\cos\psi_1 \ldots$ désignant les cosinus directeurs des segments, ou des droites sur lesquelles se trouvent leurs extrémités.

Il existe un déplacement permettant de faire coïncider les deux segments.

En effet une substitution orthogonale

$$x'_i = \alpha_i + a_{i1}y'_1 + \ldots a_{in}y'_n,$$
$$x''_i = \alpha_i + a_{i1}y''_1 + \ldots a_{in}y''_n,$$

changera les premières équations (1) en

$$y'_1a_{11} + y'_2a_{12} \ldots = y''_1a_{11} + y''_2a_{12} \ldots + l\cos\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que l'on peut remplacer par les suivantes

$$y'_1 = y''_1 + l\,(a_{11}\cos\varphi_1 + a_{21}\cos\varphi_2 + \ldots)$$ (2. (2))
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc une substitution orthogonale change une droite en une autre droite, un segment en un autre segment, la distance

$$\sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + \ldots}$$

est devenue $\sqrt{(y'_1 - y''_1)^2 \ldots}$ ou l, elle n'a pas changé et si l'on se donne $y'_1 \ldots$; et $y''_1 \ldots$ la substitution qui change $x'_1 \ldots$; $x''_1 \ldots$ en $y'_1 \ldots$; $y''_1 \ldots$ sera donnée par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\psi_1 = a_{11}\cos\varphi_1 + a_{21}\cos\varphi_2 \ldots, \\ \cos\psi_2 = a_{12}\cos\varphi_1 + a_{22}\cos\varphi_2 \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

qui ont une infinité de solutions, car elles sont au nombre de n et renferment les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres de la substitution à faire. Or $\frac{n(n-1)}{2} > n$, excepté pour $n = 2$, mais les formules (3) n'en forment que $n - 1$ distinctes comme on s'en assure en les élevant au carré et en les ajoutant, donc même dans les espaces à deux dimensions notre théorème est vrai.

Angle de deux droites. — Considérons les deux droites

$$(A)\qquad x_1 = \gamma_1 + a_1t \ldots x_n = \gamma_n + a_nt,$$
$$(B)\qquad x_1 = \delta_1 + b_1t \ldots x_n = \delta_n + b_nt,$$

supposons

$$a^2_1 + a^2_2 \dots = 1, \qquad b^2_1 + b^2_2 \dots = 1,$$

en sorte que a_1, a_2 ... soient les cosinus directeurs de la première droite, b_1, b_2... ceux de la seconde. Il est facile de voir que

$$(1) \qquad a_1b_1 + a_2b_2 \dots + a_nb_n \leqq 1,$$

en effet

$$(a^2_1 + a^2_2 \dots)(b^2_1 + b^2_2 + \dots) - (a_1b_1 + a_2b_2 \dots)^2 =$$
$$= (a_1b_2 - b_2a_1)^2 + \dots = \Sigma(a_ib_j - b_ia_j)^2,$$

c'est-à-dire

$$1 - (a_1b_1 + a_2b_2 \dots)^2 \geqq 0,$$

donc la formule (1) a lieu et l'on peut poser

$$\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 \dots + a_nb_n.$$

θ est alors l'*angle* des deux droites. Cet angle, non seulement n'est pas déterminé à un multiple de 2π près, mais comme on peut changer les signes des a ou des b, on voit que deux droites forment 4 angles positifs moindres que 2π ; mais quand les signes des a et des b sont donnés, on n'a plus à hésiter qu'entre deux valeurs de θ et même θ est déterminé si on convient de le prendre $\leqq \pi$.

L'angle de deux droites ne change pas quand on déplace les droites qui constituent cet angle, c'est un invariant.

En effet, si x_1 ..., est un point de la droite (A), y_1 ... un point de (B),

$$a_1 = \frac{x_1 - \gamma_1}{t} \dots, \qquad b_1 = \frac{y_1 - \delta_1}{t'} \dots,$$

et

$$a_1b_1 + a_2b_2 \dots = \frac{(x_1 - \gamma_1)(y_1 - \delta_1) + (x_2 - \gamma_2)(y_2 - \delta_2) \dots}{tt'} =$$
$$= \frac{(x_1 - \gamma_1 + y_1 - \delta_1)^2 - (x_1 - \gamma_1 - y_1 + \delta_1)^2 + \dots}{4\,tt'}.$$

Or un déplacement ne modifie ni $\Sigma(x + y - \overline{\gamma + \delta})^2$, ni $\Sigma(x + \delta - \overline{y + \gamma})^2$, comme il est facile de le constater.

Lorsque deux droites ont un point commun, leur angle n'est plus seulement un nombre, c'est la figure formée par ces deux droites dont le point commun est le sommet de l'angle, à ce point de vue deux angles de même mesure sont des figures égales ou superposables par retournement.

En effet soient

$$x_1 = \alpha_1 + t_1 \cos \varphi_1, \ldots$$
$$x_1 = \alpha_1 + t_2 \cos \psi_1, \ldots$$

les équations des droites qui forment l'angle, ou comme l'on dit, les équations de ses côtés. Une substitution orthogonale changera les équations de ces droites en

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \ldots = a_{11} \beta_1 + a_{12} \beta_2 \ldots + t_1 \cos \varphi_1, \ldots$$
$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \ldots = a_{11} \beta_1 + \ldots + t_2 \cos \psi_1, \ldots$$

ou en

$$y_1 = \beta_1 + t_1 (a_{11} \cos \varphi_1 + a_{12} \cos \varphi_2 \ldots), \ldots$$
$$y_1 = \beta_1 + t_2 (a_{11} \cos \psi_1 + a_{12} \cos \psi_2 \ldots), \ldots$$

Si ces droites sont données, $\beta_1, \beta_2 \ldots, a_{11} \cos \varphi_1 + \ldots$, et $a_{11} \cos \psi_1 + a_{12} \cos \psi_2 \ldots$ sont donnés cela constitue $3n$ équations contenant les paramètres de la substitution qui constituent la translation, et les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres qui constituent la rotation. Il y a donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ inconnues à déterminer, le problème sera en général résoluble. Pour $n = 2$, il y a 6 équations et 3 inconnues, mais ces 6 équations se réduisent à 5, en vertu de l'invariance de la mesure de l'angle, enfin à 3 parce que

$$(a_{11} \cos \varphi_1 + a_{12} \cos \varphi_2, \ldots)^2 + (a_{21} \cos \varphi_1 + a_{22} \cos \varphi_2 \ldots)^2 + \ldots = 1 ;$$
$$(a_{11} \cos \psi_1 + \ldots)^2 + \ldots = 1$$

pour $n = 3$, $\frac{n(n+1)}{2} = 6$ et $3n = 9$. Donc à partir des espaces à 3 dimensions, il y aura une infinité de manières de faire coincider les angles de même mesure.

Lorsque $\theta = 0$, on dit que les droites sont parallèles et de même sens, lorsque $\theta = \pi$, elles sont parallèles et de sens contraire, lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, elles sont dans des directions perpendiculaires ; dans le cas ou elles se rencontrent, et sont dans des directions perpendiculaires, on dit qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Lorsque $\theta = 0$ on a

$$\cos^2 \theta = 1 - \Sigma (a_i b_j - b_i a_j)^2$$
$$\sin^2 \theta = \Sigma (a_i b_j - b_i a_j)^2$$
$$0 = \Sigma (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

donc

$$a_i b_j - b_i a_j = 0,$$

ou

$$\frac{a_1}{b_1}, + \frac{a_2}{b_2} = \dots \frac{\sqrt{a^2_1 + a^2_2}}{\sqrt{b^2_1 + b^2_2 \dots}} = \pm 1 ;$$

et par suite $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 \dots$ ou $a_1 = - b_1$, $a_2 = - b_2 \dots$, et l'on voit que des droites parallèles ont, au signe près, les mêmes cosinus directeurs.

5. La trigonométrie. — On appelle *triangle*, la figure formée par trois points, les côtés d'un triangle sont les droites qui passent par deux de ces points, ou *sommets* dont il est formé ; les côtés forment entre eux des angles qui sont les *angles* du triangle.

Pour achever de définir les angles, nous dirons que si A, B, C sont les sommets, les directions positives des côtés AB, BC, CA, seront telles que les segments AB, BC, CA sont positifs.

Soient x_1, $x_2 \dots$	les coordonnées	du sommet		A,
x'_1, x'_2	»	»	»	B,
x''_1, x''_2	»	»	»	C,

a la distance de B à C, b, celle de C à A, c, celle de A à B, soient A, B, C, les angles correspondant aux sommets A, B, C, les cosinus directeurs de BC sont

$$\frac{x''_1 - x'_1}{a}, \quad \frac{x''_2 - x'_2}{a}, \dots$$

ceux du C A sont

$$\frac{x_1 - x''_1}{b}, \quad \frac{x_2 - x''_2}{b}, \dots$$

ceux de AB sont

$$\frac{x'_1 - x_1}{c}, \quad \frac{x''_1 - x_2}{c}, \dots$$

donc on aura

$$\cos A = \frac{1}{bc}\, \Sigma\, (x - x'')\,(x - x'),$$

ou

$$\cos A = \frac{1}{2\,bc}\, \Sigma \left[(x - x'_1)^2 + (x - x'')^2 - (x' - x'')^2\right]$$

ou

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

On sait que des formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + c^2 - 2\,ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C,$$

on déduit facilement

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$a = b \cos C - c \cos B,\ b = c \cos A - a \cos C,\ c = a \cos B - b \cos A$$

$$A + B + C = \pi.$$

Donc quand on donne a, b, c, ou trois éléments consécutifs de la suite

$$A,\ c,\ B,\ a,\ C,\ b,\ A\ c\ B \ldots$$

les trois autres sont déterminés, donc deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties, s'ils ont trois éléments égaux consécutifs, ou trois côtés égaux, de plus, ce sont deux figures égales ou que l'on peut faire coïncider, en effectuant un déplacement ou un retournement.

Soient en effet A, B, C, et A', B', C', les sommets de deux triangles égaux, dans toutes leurs parties, on pourra faire coïncider A avec A' et b avec b', comme $c = c'$, B et B', coïncideront avec C et C' et a avec a'.

THÉORÈMES SUR LA DRO.TE

6. — Par un point donné, on peut mener une droite perpendiculaire sur une autre et une seule.

Soient :

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t \ldots$$

les équations de la droite, donnée, $x'_1, x'_2 \ldots$ les coordonnées du point donné, la droite

$$(1) \qquad \frac{x_1 - \alpha_1 - a_1 t_1}{x'_1 - \alpha_1 - a_1 t_1} = \frac{x_2 - \alpha_1 - a_2 t_1}{x'_2 - \alpha_2 - a_2 t_2} = \ldots$$

passe par le point $x'_1, x'_2 \ldots$ et, par un point $\alpha_1 + a_1 t_1, \ldots$ de la droite donnée ; et si l'on choisit t_1 de telle sorte que

$$(1) \qquad a_1 (x'_1 - \alpha_1 - a_1 t_1) + a_2 (x'_2 - \alpha_2 - a_2 t_1) \ldots = 0$$

elle sera perpendiculaire à la première ; cette formule détermine t_1, il n'y aura donc qu'une solution, et l'on aura

$$(3) \qquad t_1 = a_1 (x'_1 - \alpha_1) + a_2 (x'_2 - \alpha_2) \ldots$$

t_1 fera connaître les points de concours des deux droites, ou le *pied* de la perpendiculaire.

Toutefois, ce que nous venons de dire, n'aurait plus de sens si le point donné $x'_1, x'_2 \ldots$ était sur la droite donnée, les équations (1) et (2) seraient illusoires, car on aurait $x'_1 - \alpha_1 - a t_1 = 0, \ldots$ mais alors toute droite passant par le point $x'_1, x'_2, \ldots$ et ayant des coefficients angulaires $b_1, b_2 \ldots$ satisfaisant à la relation

$$(4) \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots = 0$$

à savoir

$$(5) \qquad x_1 = x'_1 + b_1 u, \qquad x_2 = x'_2 + b_2 u$$

sera perpendiculaire à la droite donnée. Si on tire les b de (5) pour les porter dans (4), on a

$$a_1 (x_1 - x'_1) + a_2 (x_2 - x'_2) + \ldots = 0$$

c'est l'équation d'un plan (d'une droite si l'espace est à 2 dimensions), qui contient toutes les perpendiculaires à la droite donnée en x'_1, x'_2 ... on lui donne le nom de *plan perpendiculaire à la droite.*

Pour évaluer la distance du point x'_1, x'_2 ... à une droite,

$$(6) \qquad x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t, \ldots$$

C'est-à-dire la distance d du point x'_1, x'_2 ... au pied de la perpendiculaire menée de ce point à la droite, il faudra tirer t_1 de (3) et le porter dans (6), on aura alors

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + a_1 \left[\alpha_1 (x'_1 - \alpha_1) + a_2 (x'_2 - \alpha_2) \ldots \right] \\ x_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et on aura la distance δ cherchée par la formule

$$\delta^2 = (x_1 - x'_1)^1 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots$$

ou bien

$$\delta^2 = \Sigma \left\{ \alpha_i - x'_i + a_i \left[a_i (x'_1 - \alpha_1) + a_2 (x'_2 - \alpha_2) \ \ldots \right] \right\}^2,$$

ce qui peut s'écrire en supposant $a^2_1 + a^2_2 \ldots = 1$

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Sigma(\alpha_i - x'_i)^2 &+ \left[a_1(x'_1 - \alpha_1) + a_2(x'_2 - \alpha_2)^2 \ldots \right]^2 \\ &+ 2\Sigma(\alpha_i - x'_i) a_i \left[a_1(x'_1 - a_1 + \ldots \right], \end{aligned}$$

ou

$$\delta^2 = \Sigma(\alpha_i - x'_i)^2 - \left[\Sigma a_i (x'_i - \alpha_i) \right]^2,$$

ou encore

$$\delta^2 = \Sigma(\alpha_i - x'_i)^2 \ \Sigma a_i^2 - \left[\Sigma a_i (x'_i - \alpha_i) \right]^2,$$

ou enfin

$$\delta^2 = \Sigma \left[a_i (x_j - \alpha_j) - a_j (x_i - \alpha_i) \right]^2 ;$$

et si $a^2_1 + a^2_2 \ldots$ n'est pas égal à 1

$$\delta^2 = \frac{1}{\Sigma a^2_i} \Sigma \left[a_i (x_j - \alpha_j) - a_j (x_i - \alpha_i) \right]^2.$$

Par un point donné on peut mener une parallèle à une droite donnée et une seule (Postulat d'Euclide)

En effet toutes les droites parallèles ont mêmes cosinus directeurs $a_1, a_2 \ldots a_n$ èt une droite est bien déterminée quand on en donne un point x_1', x_2' ... et les cosinus directeurs, ses équations sont

$$x_1 = x'_1 + a_1 t, \qquad x_2 = x'_2 + a_2 t, \ldots$$

On peut démontrer que *la perpendiculaire menée de x_1', x'_2 ... sur la droite*

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha'_2 + a_2 t, \ldots$$

est plus courte que toute oblique. C'est-à-dire que la perpendiculaire menée du point x_1', x_2' ... à la droite est plus petite que la distance du point x_1', x_2' ... à tout point de la droite différent du pied de la perpendiculaire.

En effet la distance D, du point x_1', x_2' ... à un point quelconque de la droite est donnée par la formule

$$D^2 = \Sigma\left[\alpha_i - x_i' + a_i t\right]^2,$$

ou si $\Sigma a_i^2 = 1$

$$D^2 = t^2 + \Sigma 2 a_i t\,(\alpha_i - x_i') + \Sigma(\alpha_i - x_i')^2,$$

et le second membre est minimum pour

$$t = \Sigma(x_i' - \alpha_i)a_i;$$

et dans ce cas t définit, comme on l'a vu tout à l'heure, le pied de la perpendiculaire menée de x_1', x_2' ... sur la droite.

On peut mener d'un point x'_1, x'_2 ... un plan, et un seul, perpendiculaire à une droite.

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t, \ldots$$

En effet on a vu que l'équation d'un pareil plan était

$$(x_1 - x_1'')a_1 + (x_2 - x_2'')a_2 \ldots = 0,$$

x_1'', x_2'' ... étant les coordonnées du point où il rencontre la droite ; s'il doit passer par le point x_1', x_2' ... on doit avoir

$$(x_1' - x_1'')a_1 + (x_2' - x_2'')a_2 \ldots = 0,$$

ce qui détermine $x_1'' a_1 + x_2'' a_2$ ... et en éliminant par soustraction cette quantité on a l'équation demandée

$$\Sigma(x_i - x_i')a_i = 0.$$

Trouver les conditions pour que deux droites

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t, \; \ldots$$
$$x_1 = \beta_1 + b_1 u, \qquad x_2 = \beta_2 + b_2 u \; \ldots$$

se coupent.

Pour qu'elles se coupent ou pour qu'elles aient un point commun x_1, x_2 ..., il faut et il suffit qu'il existe des valeurs de t et u telles que

$$\alpha_1 + a_1 t = \beta_1 + b_1 u, \; \ldots$$

ou :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 t - b_1 u = \beta_1 - \alpha_1, \\ a_2 t - b_2 u = \beta_2 - \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ou :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \beta_1 - \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \beta_2 - \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \beta_3 - \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots$$

toutes ces équations se réduisent à une seule, dans un espace à trois dimensions; si l'espace est à deux dimensions, on n'a plus que deux équations dans le système (1), donc, en général deux droites dans un espace à deux dimensions c'est-à-dire situées dans un plan se rencontrent toujours à distance finie ou infinie.

On peut toujours mener une perpendiculaire commune à deux droites,

$$(1) \qquad x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \; \ldots \qquad \Sigma a^2 = 1,$$
$$(2) \qquad x_1 = \beta_1 + b_1 u, \; \ldots \qquad \Sigma b^2 = 1.$$

En effet les coefficients directeurs d'une droite P joignant un point de (1) à un point de (2) sont

$$\alpha_1 - \beta_1 + a_1 t - b_1 u, \qquad \alpha_2 - \beta_2 + a_2 t - b_2 u, \; \ldots$$

et en exprimant que cette droite P est perpendiculaire à (1) et (2) on a

$$(3) \qquad \Sigma a_i(\alpha_i - \beta_i + a_i t - b_i u) = 0,$$
$$(4) \qquad \Sigma b_i(\alpha_i - \beta_i + a_i t - b_i u) = 0,$$

ou en appelant V l'angle des droites (1) (2)

$$\Sigma a_i(\alpha_i - \beta_i) + t - u \cos V = 0,$$
$$\Sigma b_i(\alpha_i - \beta_i) + t \cos V - u = 0.$$

Ces formules déterminent u et t ; et par suite deux points de la droite cherchée.

Les équations (3), (4) en posant

$$P^2 = \Sigma(\alpha_i - \beta_i + a_i t - b_i u)^2 \tag{5}$$

peuvent s'écrire

$$\frac{\partial P^2}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial P^2}{\partial u} = 0,$$

elles expriment que la perpendiculaire commune est minima parmi toutes les droites joignant un point de (1) et un point de (2).

Dans l'espace à trois dimensions, la recherche de la perpendiculaire commune est simplifiée par le fait que la condition d'être perpendiculaire aux directions a_1, a_2, a_3, et b_1 b_2 b_3 détermine les coefficients directeurs λ_1, λ_2, λ_3, de la perpendiculaire commune car on a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0,$$
$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0,$$

d'où

$$\lambda_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \ldots$$

pour avoir la perpendiculaire demandée, il suffit d'exprimer que la droite

$$\frac{x_1 - X_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - X_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - X_3}{\lambda_3}$$

rencontre les deux droites données et l'on a entre les coordonnées X_1, X_2, X_3, d'un point quelconque de la perpendiculaire commune les relations

$$\begin{vmatrix} X_1 - \alpha_1 & X_2 - \alpha_2 & X_3 - \alpha_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X_1 - \beta_1 & X_2 - \beta_2 & X_3 - \beta_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

ce sont les équations de la perpendiculaire commune.

Des équations (3) et (4) on tire

$$\frac{\alpha_1 - \beta_1 + a_1 t - b_1 u}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 - \beta_2 + a_2 t - b_2 u}{\lambda_2} = \frac{\alpha_3 - \beta_3 + a_3 t - \beta_3 u}{\lambda_3},$$

et comme $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3$ et $b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3$ sont nuls, ces rapports donnent, (Cos $V = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$)

$$\Sigma\left[(\alpha_i - \beta_i)a_i + t - u \cos V\right] = 0,$$
$$\Sigma\left[(\alpha_i - \beta_i)b_i + t \cos V - u\right] = 0,$$

et ils sont égaux à

$$\frac{P}{\sqrt{\lambda^2_1 + \lambda^2_2 + \lambda^2_3}},$$

en sorte que

$$\alpha_1 - \beta_1 + a_1 t - b_1 u = \frac{\lambda_1 P}{\sqrt{\lambda^2_1 + \lambda^2_2 + \lambda^2_3}};$$

. . . .

et en éliminant t et u

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \beta_1, & a_1, & b_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 & a_2, & b_2 \\ \alpha_3 - \beta_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda^2_1 + \lambda^2_2 + \lambda^2_3}\, P,$$

on peut remarquer que

$$\sqrt{\lambda^2_1 + \lambda^2_2 + \lambda^2_3} = \sin V$$

et que V est l'angle des deux droites. Le déterminant qui figure dans l'expression de P est le *moment* des deux droites.

Distance d'un point à un plan. — Soit

(1) $$a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots + a_n x_n + b = 0$$

l'équation d'un plan, $x'_1, x'_2, \dots$ les coordonnées d'un point la droite perpendiculaire au plan menée par ce point aura pour équations

(2) $$\frac{x_1 - x'_1}{a_1} = \frac{x_2 - x'_2}{a_2} = \dots$$

et le point où elle rencontre le plan, que l'on appelle son *pied*, aura des coordonnées fournies par les formules (1) (2) qui donnent

$$\frac{x_1 - x'_1}{a_1} = \frac{x_2 - x'_2 \dots}{a_2} = \frac{a_1(x_1 - x'_1) + a_2(x_2 - x'_2) \dots}{\Sigma a^2_i}$$
$$= -\frac{a_1 x'_1 + \dots a_n x'_n + b}{\Sigma a^2_i}.$$

on en tire immédiatement x_1, x_2 ... On obtient la distance des points x_1, ... et x'_1 ... ou la grandeur δ de la perpendiculaire en écrivant à la suite de ces rapports

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 \dots}}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

ou

$$\pm \frac{\delta}{\sqrt{\Sigma a_i^2}},$$

et l'on a

$$\delta = \pm \frac{a_1 x'_1 + \dots a_n x'_n + b}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}.$$

si $\Sigma a^2_i = 1$, le premier nombre de l'équation du plan dans lequel on remplace les coordonnées courantes par x'_1, x'_2 ... représente donc, au facteur près $\sqrt{\Sigma a^2_i}$, la distance du point x'_1, x'_2 ... au plan.

Nous laissons au lecteur le soin de prouver que la distance δ est plus courte que toute oblique, ou que $a_1 x'_1 + a_2 x'_2 \dots + b$ est un minimum de $\Sigma (x_i - x'_i)^2$ quand $a_1 x_1 + a_2 x_2$ ... est constant.

On appelle angle de deux plans, l'angle formé par les normales ou perpendiculaires à ces plans. Si alors a_1, a_2 .., et b_1, b_2 ... sont les cosinus directeurs de ces plans ou des normales à ces plans $a_1 b_1 + a_2 b_2$ ... sera le cosinus de l'angle θ de ces plans.

Quand $\cos \theta = 0$, les plans sont rectangulaires. Quand $\cos \theta = 1$, ils sont parallèles ; et on a vu que alors $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ... , ou si les a et les b ne sont que des coefficients directeurs

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

Par une droite

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \qquad x_2 = \alpha_2 + a_2 t \;..$$

mener un plan perpendiculaire sur le plan

$$A_1 x_1 + \dots A_n x_n + B = 0.$$

Le plan cherché aura pour équation :

$$A'_1 x_1 + \dots + B' = 0,$$

s'il passe par la droite, on aura

$$A'_1(\alpha_1 + a_1 t) + A_2(\alpha_2 + a_2 t) \ldots = 0$$

quel que soit t, donc

$$A'_1 \alpha_1 + A'_2 \alpha_2 \ldots = 0, \qquad A'_1 a_1 + A'_2 a_2 \ldots = 0;$$

s'il est perpendiculaire au plan donné

$$A_1 A'_1 + A_2 A'_2 \ldots = 0.$$

on a donc 3 équations pour déterminer $A_1 : A_2 : \ldots B$. Le problème n'est déterminé que pour l'espace à trois dimensions.

Distance de deux plans parallèles. — Deux plans parallèles sont deux plans dont l'angle est nul, deux plans parallèles ne se rencontrent pas, en effet, leurs équations, en mettant leurs cosinus directeurs (qui sont les mêmes) en évidence sont

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n + b = 0,$$

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n + c = 0,$$

ils ne sauraient avoir de points communs s'ils ne coïncident pas, car si $x_1, x_2 \ldots x_n$ était un point commun en retranchant leurs équations l'une de l'autre, on aurait $b = c$, ce qui est absurde, si les plans ne coïncident pas.

La distance d'un point du plan (1) au plan (2) est donnée par la formule

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + c,$$

ou en observant que $x_1, x_2 \ldots x_n$ satisfait à (1), cette distance se réduit à $c - b$, elle est la même quel que soit $x_1 \ldots x_n$, la distance d'un point de (2) à (1) serait $b - c$, la valeur absolue de $b - c$, est ce que l'on appelle la distance des deux plans parallèles (1) et (2).

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que une même droite est coupée en parties égales par des plans parallèles équidistants.

Trouver les coordonnées d'un point qui partage une droite joignant le point $x_1, x_2 \ldots$ au point $x'_1, x'_2 \ldots$ en parties proportionnelles à m et m'.

La droite qui passe par $x_1, x_2 \ldots$ et $x'_1, x'_2 \ldots$ a pour équations

$$X_1 = x_1 + \frac{x'_1 - x_1}{l} t, \qquad X_2 = x_2 + \frac{x'_2 - x_2}{l} t, \ldots$$

$\frac{x'_1 - x_1}{l}$, ... sont les cosinus directeurs de la droite et l la distance des points x_1, ...; x'_1 ... t est alors la distance des points x_1, x_2 ... et X_1, X_2 ... Si ce dernier point doit partager la droite en parties proportionnelles à m et m', il faudra que

$$\frac{t}{l - t} = \frac{m}{m'},$$

ou

$$tm' = lm - tm,$$

ou

$$t(m + m') = lm$$

$$t = \frac{lm}{m + m'},$$

alors

$$X_1 = x_1 + \frac{x'_1 - x_1}{l} \frac{lm}{m + m'}, \dots$$

ou

$$X_1 = x_1 + \frac{x'_1 - x_1}{m + m'} m = \frac{m'x_1 + mx'_1}{m + m'}.$$

Si $m = m'$, on a

$$X = \frac{x_1 + x'_1}{2},$$

bien entendu m et m' peuvent être négatifs, le point de division serait alors en dehors du segment qui joint x_1, x_2 ... à x'_1, x'_2 ...

Si l'on cherche un point M tel que A_1, A_2 ... désignant des points fixes, la quantité

$$\Sigma \mu_i \overline{A_i \mu}^2$$

soit un minimum, en appelant x_{1i}, x_{2i} ... les coordonnées de A_i; x_1, x_2 ... celles de M, cela reviendra à rendre

$$\Sigma \mu_i \left[(x_i - x_{1i})^2 + (x_2 - x_{2i})^2 \dots \right]$$

minimum, ou à poser

$$\Sigma \mu_i (x_1 - x_{1i}) = 0,$$

$$\Sigma \mu_i (x_2 - x_{2i}) = 0,$$

. . . .

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{\Sigma \mu_i x_{1i}}{\Sigma \mu_i}, \qquad x_2 = \frac{\Sigma \mu_i x_{2i}}{\Sigma \mu_i}, \ldots$$

Le point ainsi déterminé est dit le centre de gravité des masses $\mu_1, \mu_2 \ldots$ placées en $A_1, A_2 \ldots$

Lorsque $\mu_1 = \mu_2 \ldots = 1$, le centre de gravité porte le nom de centre des moyennes distances des points $x_{11} \ldots, x_{21} \ldots$ ou de centre de gravité sans autre indication.

7. Transformation des coordonnées. — Les coordonnées d'un point $x_1, x_2 \ldots x_n$, en définitive, sont les distances de ce point aux plans $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_n = 0$. Considérons n plans

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{nn}x_n + b_n = 0. \end{array}$$

les distances $X_1, X_2 \ldots$ du point $x_1, \ldots x_n$ à ces plans sont (en supposant que les a_{ij} soient les cosinus directeurs des normales aux plans en question)

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a_{11}x_1 + a_{1n}x_n + b_1, \\ X_2 = a_{21}x_1 \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

De ces formules on peut aussi tirer les x en fonction des X et si les plans considérés sont perpendiculaires deux à deux, les formules précédentes seront des formules représentant une substitution orthogonale en sorte que

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{11}(X_1 - b_1) + a_{21}(X_2 - b_2) \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Toute figure pouvant se représenter par une ou plusieurs équations en $x_1, x_2 \ldots x_n$, pourra également se représenter par les équations transformées en $X_1, X_2 \ldots X_n$. Quand on fait cela, on dit que l'on transforme les coordonnées.

Il y a plus, les a_{ij} tout en étant les cosinus directeurs des plans $X_1 = 0, \ldots X_n = 0$ pourront fort bien ne pas être les coefficients d'une susbtitution orthogonale, toute relation entre les X sera une relation entre les x et représentera une surface.

Mais en multipliant les X par des facteurs constants λ et en posant

$$X'_1 = \lambda_1 X_1. \qquad X'_2 = \lambda_2 X_2 \ldots$$

une équation entre X'_1, $X'_2 \ldots$ représentera encore une surface et en particulier, toute équation du premier degré représentera un plan.

Ordinairement on choisit les coefficients λ de telle sorte que $\lambda_i X_i$ désigne la portion de parallèle à la droite

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_n = 0,$$

(Equations d'où $X_i = 0$ est exclu) comprise entre le point $x_1 \ldots x_n$ ou $\lambda_1 X_1 \ldots \lambda_n X_n$ et le plan $X_i = 0$. Le calcul de λ ne présente aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Le théorème des projections qui résulte des formules de la trigonométrie conduit aisément aussi à l'évaluation des quantités λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$.

8. Sur les rotations. — Supposons $c_{ij} = - c_{ji}$ et $c_{ii} = 0$, les formules

$$(1) \qquad y_i - x_i = c_{i1}(x_1 + y_1) + \ldots c_{in}(x_n + y_n), \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

représenteront une rotation dans l'espace à n dimensions, les plans de coordonnées sont d'ailleurs n plans rectangulaires quelconques. Si l'on veut qu'un point reprenne sa position après la rotation, il faudra supposer $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 \ldots$ dans les formules (1), et si elles ont des solutions, ces solutions feront connaître les points qui ne seront pas déplacés après la rotation.

Au lieu de faire $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 \ldots$ on peut faire $y_1 = sx_1$, $y_2 = sx_2 \ldots$ et exprimer après coup que $s = 1$. Les équations (1) deviennent alors

$$x_1(s - 1) = c_{11}(s + 1)x_1 + c_{12}(s + 1)x_2 \ldots + c_{1n}(s + 1)x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou en posant

$$\frac{s - 1}{s + 1} = t$$

$$(c_{11} - t)x_1 + c_{12}x_2 \ldots + c_{1n}x_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ces équations admettent la solution $x_1 = x_2 \ldots = 0$, évidente *à priori*, mais elles en auront une infinité d'autres si l'on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} - t, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} - t, & \ldots & c_{2n} \\ c_{n1}, & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - t \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par T le premier membre de cette équation ; pour $t = 0$, T est nul ou positif, car un déterminant gauche est nul ou positif quand les éléments de sa diagonale principale sont nuls ; $\frac{dT}{dt}$ est une somme de déterminants gauches qui pour $t = 0$ sont nuls ou positifs, $\frac{d^2T}{dt^2}$ également et ainsi de suite, donc si l'on développe T par la formule de Mac-Laurin en faisant (si n est impair) abstraction du facteur t, on aura un polynôme dont tous les coefficients seront nuls de deux en deux, et dont les autres coefficients, relatifs aux puissances paires de t seront positifs, l'équation (2) a donc une racine nulle si n est impair, et ses autres racines sont imaginaires ; alors s sera imaginaire ou égal à 1, pour $t = 0$ seulement, si n est impair.

Donc, si n est impair, et seulement dans ce cas, il y aura une infinité de points, évidemment en ligne droite, passant par l'origine, que ne déplacera pas une rotation, cette droite porte le nom d'axe de la rotation.

Plaçons nous alors dans un espace à un nombre n impair de dimensions.

Les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{y_1 - x_1}{c_{11}\frac{y_1 + x_1}{2} + c_{12}\frac{y_2 + x_2}{2} + \ldots} = \frac{y_2 - x_2}{c_{21}\frac{y_1 + x_1}{2} + c_{22}\frac{y_2 + x_2}{2} \ldots} = \ldots = 2,$$

elles expriment que la droite D qui joint les points correspondants $y_1, y_2 \ldots$ et $x_1, x_2 \ldots$ est perpendiculaire au plan

$$\left(c_{11}\frac{y_1 + x_1}{2} + c_{12}\frac{y_2 + x_2}{2} \ldots\right) X_1 + \left(c_{21}\frac{y_1 + x_1}{2} + \ldots\right) X_2 \ldots = 0,$$

et ce plan passe par le point $\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2} \ldots$ milieu de la droite D.

Enfin le plan en question passe par l'axe de rotation dont les équations sont

$$c_{11}X_1 + c_{12}X_2 \dots = 0,$$
$$c_{21}X_1 + c_{22}X_2 \dots = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$

ou en posant

$$C = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \dots c_{nn}$$

on a

$$\frac{X_1}{\frac{\partial C}{\partial c_{11}}} = \frac{X_2}{\frac{\partial C}{\partial c_{12}}} = \dots$$

ainsi qu'il est facile de voir, car

$$\left(c_{11}\frac{y_1 + x_1}{2} + c_{12}\frac{y_2 + x_2}{2} \dots\right)\frac{\partial C}{\partial c_{12}} + \dots = 0.$$

Si l'on multiplie les équations (1) par $\frac{\partial C}{\partial c_{11}}, \frac{\partial C}{\partial c_{12}} \dots$ et si on les ajoute on a

$$(2) \qquad (y_1 - x_1)\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + (y_2 - x_2)\frac{\partial C}{\partial c_{12}} \dots = 0,$$

ce qui montre que les points $x_1 \dots$ et $y_1 \dots$ correspondants sont à la même distance du plan perpendiculaire à l'axe

$$X_1\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + X_2\frac{\partial C}{\partial c_{12}} \dots = \text{constante}.$$

La distance du point A, ou $x_1, \dots x_n$ à l'axe a pour carré

$$\left[\Sigma x^2_i - \left(\Sigma x_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right] : \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2,$$

celle du point B ou $y_1, \dots y_n$ a pour carré

$$\Sigma\left[y^2_i - \left(\Sigma y_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right] : \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2,$$

celle du point A au point B a pour carré

$$\Sigma(y_i - x_i)^2.$$

L'angle θ des droites perpendiculaires à l'axe menées par A et B est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{\Sigma\left[x^2{}_i - \left(\Sigma x_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right] + \Sigma\left[y^2{}_i - \left(\Sigma y_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right] - \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2 (x_i - y_i)^2}{2\sqrt{\left[x^2{}_i - \left(\Sigma x_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right]\left[y^2{}_i - \left(\Sigma y_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2\right] \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2}}.$$

Mais $\Sigma x_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}$ est égal à $\Sigma y_i \frac{\partial C}{\partial c_{1i}}$ en vertu de (2) en appelant cette quantité ρ on a

$$\cos\theta = \frac{(\Sigma x^2{}_i - \rho^2) + (\Sigma y^2 - \rho^2) - 2\rho^2 + 2\rho^2}{2\sqrt{(\Sigma x^2 - \rho^2(\Sigma(y^2 - \rho^2)}\ \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)},$$

or

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2 = \gamma^2,$$

on a donc

$$\cos\theta = \frac{2\gamma^2 - 2\rho^2}{\sqrt{(\gamma^2 - \rho^2)^2}} : \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2 = 1 : \Sigma\left(\frac{\partial C}{\partial c_{1i}}\right)^2.$$

L'angle θ qu'on appelle l'amplitude de la rotation est donc indépendant des points considérés A, B.

Remarquons enfin que si la rotation n'existe pas pour un espace à un nombre pair de dimensions, on pourra toujours effectuer une rotation de cet espace dans un autre à une dimension de plus.

CHAPITRE III

MESURE DE L'ÉTENDUE DES VARIÉTÉS

1. Espaces fermés. — Considérons une surface

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

f pourra être le produit de plusieurs fonctions entières ou non ; l'espace à n dimensions est partagé en deux régions par la surface $f = 0$, à savoir la région pour laquelle f est positif, et la région pour laquelle f est négatif. L'une de ces régions sera dite positive, l'autre négative. Comme $f = 0$ représente la même surface que $-f = 0$, il suffit de changer le signe de f pour changer le nom de ces régions. Pour éviter toute ambiguïté, il suffira de supposer que le signe de f soit déterminé une fois pour toutes en un point donné.

Considérons la région positive, ce que nous allons en dire s'appliquera à la région négative ; la région positive peut se décomposer en plusieurs autres, séparées par des limites telles que dans ces limites on a ou $f = 0$ ou $f < 0$.

Si dans un espace à n dimensions, on a toujours $f > 0$, sans qu'aucune des variables $x_1, x_2 \dots, x_2$ y soit infinie, si de plus, on peut toujours passer dans cet espace, d'un point à un autre d'une manière continue, sans que l'on ait jamais $f = 0$, cet espace sera dit fermé. Ce sera une prison pour un être à n dimensions assujetti à rester dans l'espace à n dimensions, de tels espaces fermés existent, ainsi la sphère

$$f = (x_1 - \alpha_2)^2 + \dots (x_n - \alpha_n)^2 - R^2 = 0$$

décompose l'espace à n dimensions en deux régions, dans l'une, à laquelle appartient le point $\alpha_1, \alpha'_2 \dots \alpha_n$, qui est le centre, f est négatif, et cette région est fermée parce que les x y sont tous finis, et parce que, en considérant des points pour lesquels $\Sigma(x-\alpha)^2 < R^2$, on peut toujours passer de l'un à l'aure d'une manière continue, sans supposer un seul instant $\Sigma(x-\alpha)^2 \leq R^2$.

Je vais prouver une proposition qui nous sera bientôt utile, à savoir que $n+1$ plans déterminent un espace fermé à n dimensions, dans l'espace complet à n dimensions, et cet espace que l'on appelle triangle dans le cas où $n=2$, tétraèdre dans le cas où $n=3$, nous l'appellerons un *simplex*, dans l'espace à n dimensions.

Considérons n plans, se coupant au point o et que nous prendrons pour plans des coordonnées. Si l'on considère un plan quelconque ne passant pas par l'origine, on pourra toujours choisir les directions positives des axes de coordonnées, de telle sorte que l'équation du nouveau plan soit

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1, \tag{1}$$

$a_1, \dots a_n$ seront les coordonnées non nulles des points où le plan rencontre les axes, et on pourra les supposer positifs. Or l'espace compris entre le plan (1) et les plans des coordonnées est limité par la surface

$$x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1}{a_1} + \dots \frac{x_n}{a_n} - 1\right) = 0,$$

et les x restant positifs, on peut passer d'une manière continue d'un point à un autre de la région, définie par l'inégalité.

$$x_1 \dots x_n \left(\frac{x_1}{a_1} \dots - 1\right) > 0,$$

qui est évidemment telle qu'elle ne peut contenir un point de coordonnées infinies.

Il est évident qu'avec moins de $n+1$ plans, on ne peut former aucun espace fini, au moins en géométrie Euclidienne. En sorte que si l'on peut s'exprimer ainsi en généralisant le langage ordinaire :

Le Simplex est le plus simple de tous les polyèdres, c'est-à-dire le plus simple des espaces fermés que l'on puisse former avec des plans.

2. Mesure des Variétés. — On appelle longueur d'une ligne, ou plutôt de la figure formée des points obtenus en faisant varier le paramètre t de t_0 à T, et que l'on appelle un arc, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \ldots \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\, dt, \tag{1}$$

cette longueur n'aura de valeur 1° que si les coordonnés $x_1, \ldots x_n$, considérées comme fonctions de t, ont des dérivées continues ; 2° que si l'intégrale a un sens bien déterminé. Il est facile de voir que la longueur de la droite

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \quad x_2 = \alpha_2 + a_2 t, \ldots$$

ou $a_1, a_2, \ldots$ sont les cosinus directeurs de la droite, comprise entre les points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ et $\alpha_2 + a_1 t, \alpha_2 + a_2 t, \ldots$ est précisément t, ce que nous avons appelé la distance de ces points, car l'intégrale (1) se réduit ici à

$$\int_0^t \sqrt{a^2_1 + \ldots a^2_n}\, dt = \int_0^t dt = t.$$

La circonférence est une ligne qui peut être définie par les équations

$$x_1 = \text{R} \cos \varphi \quad x_2 = \text{R} \sin \varphi,$$

ou par l'équation unique

$$x^2_1 + x^2_2 = \text{R}^2$$

sa longueur sera

$$\int \text{R}^2 d\varphi$$

et comme on l'obtient toute entière en faisant varier φ de 0 à 2π, sa longueur totale, on l'obtiendra en prenant pour limites de l'intégrale 0 et 2π, ce qui donne 2π R.

Si l'on refuse de considérer la notion d'aire comme une notion première, on peut cependant appeler en géométrie à deux dimensions, surfaces égales des figures fermées superposables ou décomposables en parties superposables, et il est facile alors de prouver que deux rectangles sont décomposables en parties égales et que les nombres de parties égales contenues dans les rectangles sont entre elles comme le produit des côtés de ces rectangles. On est conduit ainsi à la mesure de la surface du rectangle, la mesure du parallélogramme, du triangle, des polygones, s'en déduisent rigoureusement, la mesure des aires limitées par des courbes, peut être plus difficile à concevoir, mais à l'aide du calcul intégral, on parvient à donner une définition précise de la mesure des aires, à l'aide d'une convention qui n'est qu'une traduction précise de la notion vague que nous avons à priori de l'aire limitée par un contour fermé. Le calcul intégral permet d'étendre cette notion d'aire aux surfaces courbes, nous pourrions dire quelque chose d'analogue au sujet des volumes et des mesures de toutes les autres variétés, mais toutes ces notions sont du ressort du calcul intégral sur lequel nous ne voulons pas empiéter de peur de nous laisser entraîner trop loin ([1]).

Quoi qu'il en soit, dans l'espace à n dimensions, l'espace limité par $2n$ plans rectangulaires ou parallèles deux à deux, et qui est l'analogue du rectangle et du prisme droit à base rectangulaire, a pour mesure le produit de ses arêtes : et le simplex a pour mesure le produit de l'une de ses bases par la $n^{ième}$ partie de sa hauteur. Nous laissons au lecteur le soin d'en faire la démonstration. Nous lui laissons également le plaisir de généraliser la théorie de la similitude.

([1]) Il ne sera pas inutile de faire connaître un théorème découvert par un ouvrier mécanicien, très facile à démontrer, mais qu'il était difficile de deviner, en raison même de sa forme paradoxale « Tout polygone peut être découpé en un nombre fini de parties qui, convenablement assemblées, peuvent former un carré ». Ce théorème, un des plus remarquables de la géométrie n'a malheureusement pas d'analogue pour l'espace de plus à deux dimensions.

CHAPITRE IV

—

INCURSION DANS LE DOMAINE CONCRET

L'homme, pour expliquer et coordonner ses sensations, est obligé de faire des hypothèses qu'il prend souvent pour des réalités. L'espace est une de ces hypothèses ; et pour bien nous en convaincre, il suffit de nous demander ce que serait pour nous l'espace, si nous n'avions que le sens de la vue et si nous étions assujettis comme certains mollusques à rester immobiles ; évidemment nous aurions créé un espace à deux dimensions, tout se passant pour nous dans la nature, comme si les objets se déplaçaient dans un tableau. Si l'on observe en effet les tout jeunes enfants, on voit qu'ils cherchent à saisir les objets éloignés, comme s'ils étaient à leur portée, ils n'ont pas encore la conscience du relief. Enfin il est très probable qu'avec d'autres sens, nous nous ferions une autre idée de l'espace, peut-être l'aurions nous créé à plus de trois dimensions, pour les anciens le ciel était à deux dimensions.

L'homme après avoir créé l'espace, à créé une géométrie, aussi simple que possible, pour expliquer les phénomènes qui se passent dans son espace. Mais sa géométrie a d'abord été expérimentale avant d'être rationnelle. Après avoir constaté expérimentalement une foule de faits, il a essayé d'en prévoir de nouveaux, et il a été conduit à se demander si les faits observés ne pouvaient pas être regardés comme des conséquences logiques d'un petit nombre d'entre eux et de quelques définitions bien choisies.

Or Euclide auquel nous attribuons ce travail de synthèse, et dont les opinions sont restées comme des oracles à travers l'antiquité et le moyen âge, est encore considéré aujourd'hui comme infaillible, à tel point qu'en Angleterre, on apprend sa géométrie par cœur, avec les numéros des propositions, comme on apprend chez nous le code. Et, si sur le continent on se montre moins respectueux envers l'illustre géomètre, on conserve cependant ses axiomes et ses postulats, énoncés ou sous-entendus.

Si l'on veut se rendre un compte exact de la valeur des raisonnements et des hypothèses qui servent de base à la géométrie classique, il faut faire abstraction des préjugés que nous devons à notre éducation et à notre atavisme. C'est là dira-t-on chose difficile, mais la lecture des pages qui précèdent, nous met sur la voie qu'il faut suivre.

Appelons avec tous les géomètres, surface ce qui sépare un corps du reste de l'espace, ligne ce qui sépare deux portions de surface et point, ce qui sépare deux portions d'une ligne.

Concevons dans l'espace une série de surfaces ne se coupant pas et en nombre illimité, et numérotons-les de $-\infty$ à $+\infty$; entre ces surfaces intercalons en de nouvelles, auxquelles nous donnerons des numéros fractionnaires, entre ces nouvelles surfaces, intercalons en encore d'autres, et ainsi de suite, de telle sorte que par tout point de l'espace passe une et une seule de nos surfaces. Imaginons enfin deux autres systèmes analogues et tels que par tout point de l'espace passent 3 surfaces, une de chaque système. Les numéros des surfaces passant par un point seront les coordonnées de ce point.

Une première hypothèse sera la possibilité de l'existence de nos trois systèmes de surfaces.

Une seconde hypothèse sera que, un véritable déplacement d'un corps est une substitution orthogonale effectuée sur ses coordonnées.

Tous les mots dont nous avons fait usage, en les empruntant à la géométrie classique, vont prendre un sens concret et nous reconstituons le travail d'Euclide.

Donc, au fond la géométrie repose sur deux postulats ou sur deux hypothèses dont la dernière est seule un peu dure à admettre. Mais elle est nécessaire; nous verrons en effet qu'en la rejettant on ne retrouve pas le postulatum d'Euclide. Et cela tient surtout à ce que la notion de *distance* est intimement liée à ce postulatum.

On a cherché en vain, et l'on cherchera toujours en vain la démonstration du postulatum d'Euclide, tant que l'on n'aura pas défini le déplacement sans changement de forme et ses invariants : la distance et l'angle.

Et maintenant, revenons à nos définitions : Le plan étant une surface du premier degré, sa définition est celle d'une surface presque quelconque, puisque les plans x_1 = constante, x_2 = constante, x_3 = constante, sont des surfaces arbitraires, simplement assujetties à ne pas se couper dans une même série. Il en résulte que la géométrie classique peut s'établir en appelant plan, une surface presque arbitraire, et droite une ligne presque arbitraire aussi, c'est ce qui explique pourquoi les auteurs classiques arrivent aux mêmes conclusions, soit qu'ils ne définissent pas le plan et la droite, soit qu'ils en donnent des définitions dépourvues de sens.

D'ailleurs en ne définissant pas la distance, ils sont obligés d'admettre le postulatum d'Euclide.

Nous verrons plus loin les conclusions auxquelles on arrive en modifiant la définition du déplacement.

La conséquence à tirer des remarques qui précèdent, n'est pas précisément qu'il faut renoncer à l'enseignement de la géométrie élémentaire, pour lui substituer la méthode exposée précédemment. Mais puisque la plupart des démonstrations et des postulats du premier et du cinquième livre n'ont en réalité *aucun sens*, il serait bon de renoncer à ces démonstrations et de reconnaître à la géométrie son véritable caractère qui est celui d'une *science physique*. Je crois qu'en supprimant les pseudo-démonstrations de l'égalité des angles droits, des angles opposés par le sommet, des cas d'égalité des triangles, etc., démonstrations qui n'ajoutent rien à l'évidence, et même, qui ne font que faire naître le doute là où il y avait évidence, je crois que l'on simplifierait l'enseignement sans nuire à ses qualités.

Et maintenant il se pose une question qui touche de près à la métaphysique. L'espace est-il fini ou infini ?

Une pareille question n'a pas de sens. Si en effet on veut demander par là s'il est possible de trouver dans l'espace deux points situés à des distances, aussi grandes que l'on veut l'un de l'autre, il faut répondre en demandant ce que l'on doit entendre par le mot *distance*. Quant aux coordonnées d'un point quelconque de l'espace, elles pourront ou ne pourront pas devenir infinies à volonté, si en effet il est loisible de les faire varier de $-\infty$ à $+\infty$, rien n'empêche de faire correspondre aux nombres variant de $-\infty$ à $+\infty$ d'autres nombres variant par exemple de -1 à $+1$ et que l'on pourra regarder comme les coordonnées de tous les points de l'espace.

En résumé, la géométrie, telle qu'elle est enseignée est un ensemble de propositions absolument vraies, mais les mots *plan*, *droite*, *distance*, *angle*, *etc*... ont en réalité une infinité de sens différents, s'appliquant à des choses très différentes. Il n'y a pas *une* géométrie Euclidienne, il y en a une infinité; c'est dont se doutait bien un peu le lecteur qui possède la théorie de la transformation des figures, mais la théorie de la transformation se présente ici, peut-être, sous un jour nouveau, et au début même de la science.

Quand nous disons que notre espace est à trois dimensions, nous entendons par là qu'il faut trois nombres pour déterminer la position d'un point, en entendant le mot nombre dans son sens le plus large, abstraction faite de toute notion de système de numération. Si nous avions un plus grand nombre de sens, peut-être aurions-nous créé un espace à plus de trois dimensions, pour expliquer et coordonner des phénomènes dont nous n'avons aucune idée, mais dont il serait téméraire de nier l'existence.

Le pigeon voyageur que l'on transporte loin du colombier qui l'a vu naître et auquel on cache le chemin qu'on lui fait parcourir, retrouve infailliblement l'endroit où sont ses petits et où il a l'habitude de recevoir abri et nourriture; il n'est pas téméraire de penser qu'il est doué d'un sens que nous ne possédons pas ou qui est très peu développé chez nous, il est fort possible que l'espace pour lui soit à quatre dimensions, en sorte qu'une quatrième coordonnée lui permette de repérer les points de l'espace. Il n'est pas impossible que les physiciens parviennent à expliquer dans l'avenir certains phénomènes en créant un nouvel espace. Et s'il est vrai que l'hélium pénètre dans des vases clos, qui sont des prisons pour nous, il ne faut pas oublier qu'ils cessent d'être des prisons, et qu'ils sont ouverts s'ils sont placés dans des espaces à quatre dimensions.

CHAPITRE V

LES CONTACTS

1. Lignes. — Considérons deux lignes ou variétés à une dimension dans un espace à n dimensions :

$$\begin{array}{lll} (1) & \left\{ x_1 = \varphi_1(t) \dots \right. & x_n = \varphi_n(t); \\ (2) & \left. x_1 = \psi_1(u) \dots \right. & x_n = \psi_n(u). \end{array}$$

En général, elles n'auront pas de point commun, mais on peut considérer le cas ou elles se rencontrent en un point $x_1, x_2 \dots x_n$. Il est permis de faire correspondre à chaque point de (1) un point de (2), il suffira pour cela, de remplacer u par $\theta(t)$. Nous supposons alors que pour une certaine valeur de t, les x_i des deux lignes soient les mêmes, les dx seront en général différents, mais s'ils sont les mêmes, on dira que les lignes considérées ont un contact du premier ordre.

Si en outre les d^2x sont les mêmes, on dira qu'elles ont un contact du second ordre.

Si en outre les d^3x sont les mêmes, on dira qu'elles ont un contact du troisième ordre et ainsi de suite.

La tangente à une ligne au point $x_1, \dots x_n$ est la droite qui a avec cette ligne en ce point un contact du premier ordre, cherchons les équations de cette tangente. En appelant $X_1, X_2 \dots X_n$ les coordonnées courantes c'est-à-dire d'un point quelconque de la tangente, les équations de la tangente seront de la forme

$$\frac{X_1 - x_1}{a_1} = \frac{X_2 - x_2}{a_2} = \dots$$

on en déduit (si x_1, x_2 ... ont des dérivées) en faisant en général $X_i = x_i + dx_i$

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} \cdots$$

donc a_1, a_2 ... sont proportionnels, non seulement aux dx de la droite au point de contact, mais aussi aux dx de la ligne, les équations de la tangente en x_1, .., x_2 seront donc

$$\frac{X_1 - x_1}{dx_1} = \frac{X_2 - x_2}{dx_2} = \cdots$$

et la tangente est en général bien déterminée. Il n'y aura donc pas en général de droite ayant avec une ligne un contact d'ordre supérieur au premier. La tangente à une droite est évidemment cette droite elle-même. On remarquera qu'il peut exister des courbes continues sans tangentes.

Les cosinus directeurs de la tangente sont, en posant

$$dx^2_1 + dx^2_2 \ldots + dx^2_n = ds^2$$

donnés par les expressions

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds} \cdots \quad \frac{dx_n}{ds}.$$

2. **Longueurs**. — La quantité ds considérée au § précédent porte le nom de différentielle de la longueur de l'arc de courbe. La longueur de l'arc ayant pour extrémités les points x^0_1, x^0_2, ... x^0_n et X_1, X_2, ... X_n est défini par la formule

$$\int_{x^0_1}^{X_1 \ldots} \sqrt{dx^2_1 + \ldots dx^2_n}$$

qui est la limite de la somme des petites cordes côtés d'un polygone infinitésimal ayant ses sommets sur la courbe. Pour une droite

$$x_1 = \alpha_1 + a_1 t, \; x_2 = \alpha_2 + a_2 t \ldots$$

dont les cosinus directeurs sont a_1 a_2 ... on a

$$ds^2 = \Sigma dx^2 = \Sigma a^2_i dt = dt^2$$

et l'arc s se confond avec la longueur t. [1]

3. Plan tangent. — Considérons une surface

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = 0. \tag{1}$$

soit $x_1, \dots x_n$ un point de cette surface, en sorte que la relation (1) soit satisfaite. Une droite sera tangente en ce point à la surface, si elle passe par $x_1, \dots x_n$ et par le point $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2 \dots$ également situé sur la surface en sorte que

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2 \dots) = 0,$$

qui en vertu de (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0. \tag{2}$$

Par le point $x_1, x_2 \dots$, il passe une infinité de tangentes à la surface, leur équation générale est

$$\frac{X_1 - x_1}{dx_1} = \frac{X_2 - x_2}{dx_2} \dots = \frac{X_n - x_2}{dx_n}, \tag{3}$$

$X_1, X_2 \dots$ désignant les coordonnées courantes, car $dx_1, dx_2 \dots$ sont arbitraires, à cela près qu'ils sont liés par la seule relation (2). La surface

$$(X_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots (X_n - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{4}$$

obtenue en éliminant $dx_1, dx_2 \dots$ entre (2) et (3), contient toutes les tangentes (3), c'est leur lieu, et comme elle est du premier degré, c'est un plan. On lui donne le nom de plan tangent à la surface en $x_1, x_2 \dots$

L'existence de ce plan est soumis à plusieurs conditions, il faut d'abord, bien entendu, que la fonction f soit continue et ait des dérivées. Il faut aussi que $\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ ne soient pas nuls à la fois. S'il en était ainsi les équations (2) et (4) seraient illusoires, mais on aurait

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 0,$$

[1] La longueur d'un arc est un invariant du déplacement, il faudra modifier sa définition si l'on fait de la géométrie non Euclidienne.

et le lieu des droites (3) serait la surface

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (X_i - x_i)(X_j - x_j) = 0,$$

du second degré, on voit ce qui arriverait si tous les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ étaient nuls à la fois, je n'insiste pas.

4. Les enveloppes. — Considérons une famille de surfaces, c'est-à-dire une équation de la forme

$$(1) \qquad f(x_1, x_2 \ldots x_n, a) = 0$$

renfermant un paramètre a. A chaque valeur de a correspond une surface particulière, et si l'on change a en $a + da$, on obtient une surface infiniment voisine de la famille. Les deux surfaces (1) et

$$(2) \qquad f(x_1 \ldots x_n, a + da) = 0$$

se coupent suivant une variété à $n - 1$ dimensions, qui peut aussi être représentée par (1) et par

$$f(x_1 \ldots a + da) - f(x_2 \ldots a) = 0,$$

ou par

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

si l'on élimine a entre (1) et (3), on obtient le lieu de ces variétés, que l'on appelle l'*Enveloppe* de la famille (1).

La variété (1) (3) est une *caractéristique* de la famille (1).

On conçoit de même des familles de surfaces dont l'équation contiendrait 2, 3 ... paramètres. Par exemple l'équation

$$(4) \qquad f(x_1, \ldots x_n, a, b) = 0$$

représente une famille à deux paramètres et trois surfaces infiniment voisines de la famille, à savoir (4) et

$$f(x_1, \ldots a + da, b) = 0,$$
$$f(x_1, \ldots a, b + db) = 0,$$

se couperont suivant une variété qui pourra être représentée par

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0;$$

et l'élimination de a et b fournira une surface, que nous appellerons encore une enveloppe et ainsi de suite.

Les surfaces de la famille, portent le nom d'enveloppées.

Il peut arriver qu'une famille de surfaces soit donnée par plusieurs équations

(5) $f(a_1 \,..\, a, b, c) = 0, \qquad \varphi(a, b, c) = 0, \qquad \psi(a, b, c) = 0$

les paramètres étant liés entre eux, il n'est pas nécessaire d'éliminer b et c et de différentier ensuite. Il est clair que l'on peut poser

$$\frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db + \frac{\partial \varphi}{\partial c} dc = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} da + \frac{\partial \psi}{\partial b} db + \frac{\partial \psi}{\partial c} dc = 0,$$

et éliminer a, b, c entre (5) et le résultant

$$\frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(a, b, c)} = 0.$$

Par exemple l'enveloppe des plans

(6) $$a_1 x_1 + \dots a_n x_n + b = 0$$

pour lesquels

(7) $$a^2_1 + a^2_2 \dots + a^2_n = k^2$$

k étant constant, s'obtiendra en différentiant ces équations ce qui donnera

$$x_1 da_1 + x_2 da_2 \dots + x_n da_n = 0,$$

$$a_1 da_1 + a_2 da_2 \dots + a_n da_n = 0$$

or $n - 1$ des quantités a sont arbitraires, il faudra donc éliminer l'un des da, égaler à zéro les coefficients des autres, ce qui donnera $n - 1$ équations qui jointes à (6) et (7) permettront d'éliminer les a. On peut aussi employer la méthode des multiplicateurs et poser

$$a_1 + \lambda x_1 = 0 \dots a_n + \lambda x_n = 0,$$

éliminer , ce qui donne

(8) $$\frac{x_1}{a_1} = \dots \frac{x_n}{a_n},$$

et éliminer les a entre (6) (7) (8) ce qui donne l'enveloppe

$$x^2_1 + x^2_2 \dots + x^2_n = \frac{1}{k^2}.$$

L'enveloppe d'une famille de surfaces, quel que soit le nombre de ses paramètres touche toutes ses enveloppées.
soit, en effet

(9) $$f(x_1, \dots a, b, c) = 0$$

une famille de surfaces, son enveloppe est donnnée par (9) et

(10) $$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

et l'on peut supposer que (9) représente l'enveloppe, si l'on y suppose a, b, c tirés de (10). Cherchons les coefficients directeurs des plans tangents à l'enveloppe et à l'enveloppée en un point commun $x_1 \dots x_n$. Pour l'enveloppée a, b, c sont constants et ces coefficients sont $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots$ Pour l'enveloppée a, b, c étant fonctions des x données par (10) les coefficients seront les dérivées *totales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_1},$$

. . . .

c'est-à-dire en vertu de (10) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots$ Les plans tangents seront donc les mêmes aux points communs c. q. f. d.

Réciproquement, *si la surface fixe*

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

touche quels que soient a, b, c, la surface

$$f(x_1 \dots x_n, a, b, c) = 0,$$

ce sera l'enveloppe de celle-ci.

Si en effet en un point commun x_1, $x_2 \dots$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_2} \dots$$

ce qui est nécessaire et suffisant pour que les plans tangents soient les mêmes ; on pourra toujours poser

$$F = f,$$

et déterminer a, b, c (d'une infinité de manières si ces paramètres sont en nombre supérieur à un) en fonction des x de telle sorte que la formule précédente soit une identité ; alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ sera égal à $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ et si l'on prend

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

et seulement dans ce cas, si l'on achève de déterminer les a, b, c au moyen de deux de ces dernières équations, ce qui exprime que $F = 0$ est l'enveloppe de $f = 0$.

Il résulte de là que toute surface est l'enveloppe de ses plans tangents ; et qu'elle est définie quand on se donne l'équation générale de ces plans.

Cette manière de définir une surface par ses plans tangents a comme nous allons voir une grande importance et nous allons entrer à ce sujet dans quelques développements.

Si l'on suppose l'équation $f = 0$ résolue par rapport à la variable x_n et mise sous la forme

$$F(x_1 \dots x_{n-1}) - x_n = 0,$$

et si l'on pose

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = p_1, \qquad \frac{\partial x_n}{\partial x_2} = p_2 \dots,$$

l'équation du plan tangent prend la forme

$$p_1(X_1 - x_1) \dots + p_{n-1}(X_{n-1} - x_{n-1}) - (X_n - x_n) = 0, \tag{5}$$

ou

$$X_n - p_1X_1 \dots - p_{n-1}X_{n-1} - (x_n - p_1x_1 \dots - p_nx_n) = 0,$$

ou en posant

$$\theta = x_n - p_1x_1 \dots - p_{n-1}x_{n-1}, \tag{6}$$

la forme :

$$X_n - p_1X_1 \dots - p_{n-1}X_{n-1} - \theta = 0.$$

Elle renferme n paramètres $p_1, \dots p_{n-1}, \theta$ qui ne sont pas distincts, car il est facile de voir que θ est fonction de $p_1 \dots p_{n-1}$; en effet de (6) on tire en différentiant

$$\begin{aligned} d\theta = (dx_n - p_1dx_1 - p_2dx_2 \dots - p_{n-1}dx_{n-1}) \\ - (x_1dp_1 \dots - x_{n-1}dp_{n-1}) ; \end{aligned}$$

or la première parenthèse est nulle, car

$$dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} = p_1 dx_1 \ldots + p_{n-1} dx_{n-1},$$

et l'on a

$$d\theta = - x_1 dp_1 \ldots - x_{n-1} dp_{n-1},$$

ce qui exprime que θ est fonction des p.

Ainsi en général, le plan tangent dépend de $n - 1$ paramètres $p_1, \ldots p_{n-1}$. En général ces paramètres sont distincts, et l'on peut assujettir le plan tangent à $n - 1$ conditions. On peut par exemple l'assujettir à passer par $n - 1$ points fixes, mais il peut en être autrement, si par exemple on a une ou plusieurs équations de la forme

$$\varphi(p_1, p_2 \ldots p_{n-1}) = 0.$$

La surface alors pourra être une enveloppe de plans à $n - 1$, $n - 2$, ... 1 paramètres. Examinons ces différents cas.

5. Surfaces développables. — Supposons les paramètres p_1, $p_2 \ldots p_{n-1}$ distincts, la surface sera l'enveloppe du plan

$$x_n - p_1 x_1 + \ldots p_{n-1} x_{n-1} - \theta = 0, \tag{1}$$

ou θ est une fonction des p qui caractérise la surface et pour obtenir son équation, il faudra éliminer les p entre cette équation et ses dérivées

$$x_1 + \frac{\partial \theta}{\partial p_1} = 0 \ldots x_{n-1} + \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1}} = 0.$$

telle est la méthode qui permet de passer de l'équation (1) à l'équation de la surface.

Supposons maintenant qu'il existe une relation entre $p_1, \ldots p_{n-1}$ à savoir

$$p_{n-1} = \theta_1(p_1 \ldots p_{n-2})$$

l'enveloppe du plan

$$x_n - p_1 x_1 \ldots - x_{n-1}\theta_1 - \theta = 0 \tag{2}$$

sera ce que l'on appelle une surface développable ; on l'obtiendra en éliminant les p entre (2) et ses dérivées relatives aux p

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 + x_{n-1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial\theta}{\partial p_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial p_{n-2}} + \dfrac{\partial\theta}{\partial p_{n-2}} = 0. \end{cases}$$

En éliminant les p qui sont au nombre de $p - 2$ entre (2) et (3) on aura l'équation générale des surfaces développables. Les équations (2) (3) sont les équations d'une droite ou génératrice située sur la surface. (Si l'on différentie les équations (3) par rapport aux p on en tire des relations qui si $n = 3$ représentent un point situé sur deux génératrices voisines, lesquelles se rencontrent quand on néglige les termes du second ordre et les génératrices touchent une même courbe gauche).

Ainsi les surfaces développables, par définition, enveloppes à $n - 2$ paramètres sont des surfaces réglées, c'est-à-dire engendrées par des droites mobiles, et le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice, car cette génératrice est caractérisée par des valeurs données des p.

Nous allons étudier les plus simples de ces surfaces.

Et d'abord signalons les plans pour lesquels $p_1 \dots p_n$ sont constants.

Nous rencontrons ensuite les cylindres, pour lesquels la fonction φ est du premier degré. Si l'on a

$$a_1p_1 + a_2p_2 \dots + a_{n-1}p_{n-1} + \alpha_n = 0,$$

les a étant constants, il est facile de voir que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(a_1x_n - a_nx_1)}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial(a_1x_n - a_nx_1)}{\partial x_2} & \dots \\ \dfrac{\partial(a_2x_n - a_nx_2)}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial(a_2x_n - a_nx_2)}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

et que l'on a

$$(4)\quad \Phi(a_1x_n - a_nx_1, \dots a_{n-1}x_n - a_nx_{n-1}) = 0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire. En effet (3) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1p_1 - a_n & a_1p_2 & \ldots & a_1p_{n-1} & 0 \\ a_2p_1 & a_2p_1 - a_n & \ldots & a_2p_{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} -a_n & 0 & 0 \ldots & 0 - a_1 \\ 0 & -a_n & 0 \ldots & 0 - a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3 \cdots & p_{n-1} \quad 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(a_1p_1 + a_2p_2 \ldots + a_{n-1}p_{n-1} + a_n)a_n^{n-1} = 0,$$

ce qui revient à

$$a_1p_1 + \ldots a_n = 0.$$

dans ces surfaces la normale au plan tangent est perpendiculaire à une droite fixe.

Il est clair qu'une fonction de $a_1x_n - a_nx_1, \ldots$ est une fonction de $n - 1$ fonctions linéaires quelconques, donc l'équation des cylindres peut aussi s'écrire

$$\Phi(X_1, X_2 \ldots X_{n-1}) = 0,$$

$X_1, X_2 \ldots$ désignant des fonctions linéaires quelconques. Parmi les cas particuliers des cylindres, se trouvent les surfaces

$$\Phi(X_1) = 0, \qquad \Phi(X_1, X_2) = 0, \ldots$$

Reprenons l'équation du plan tangent

$$(X_1 - x_1)p_1 + \ldots - (X_n - x_n) = 0.$$

Si nous exprimons qu'il passe par un point fixe $a_1, a_2 \ldots a_n$, nous obtenons une relation entre les p qui est l'équation d'une développable :

$$(a_1 - x_1)p_1 + \cdots (a_{n-1} - x_{n-1})p_{n-1} - (a_n - x_n) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \dfrac{p_1(x_1 - a_1) - (x_n - a_n)}{(x_n - a_n)^2}, & \dfrac{p_2(x_1 - a_1)}{(x_n - a_n)^2} & \cdots & \dfrac{p_{n-1}(x_1 - a_1)}{(x_n - a_n)^2} \\ \dfrac{p_1(x_2 - a_2)}{(x_n - a_n)^2}, & \dfrac{p_2(x_2 - a_2) - (x_n - a_n)}{(x_n - a_n)^2} & \cdots & \dfrac{p_{n-1}(x_2 - a_2)}{(x_n - a_n)^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime qu'il existe une relation

$$\Phi\left(\frac{x_1 - a_1}{x_n - a_n}, \frac{x_2 - a_2}{x_n - a_n}, \ldots\right) = 0,$$

entre $\frac{x_1 - a_1}{x_n - a_n}$, ... ou une relation homogène entre

$$x_1 - a_1, x_2 - a_2 \ldots x_n - a_n.$$

En effet la relation (4) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} p_1(x_1 - a_1) - (x_1 - a_1) \ldots p_{n-1}(x_1 - a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\begin{vmatrix} p_1(x_1 - a_1) - (x_n - a_n) \ldots p_{n-1}(x_1 - a_1) & 0 \\ p_1(x_2 - a_2) \ldots\ldots\ldots p_{n-1}(x_2 - a_2) & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots p_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} -(x_n - a_n), & 0 & \ldots\ldots & 0 & -(x_1 - a_1) \\ 0 & , -(x_n - a_n) & \ldots & 0 & -(x_2 - a_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 & , \quad p_2 & \ldots & p_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(x_n - a_n)^{n-2}\left[p_1(x_1 - a_1) + \ldots + p_{n-1}(x_{n-1} - a_{n-1}) - (x_n - a_n)\right] = 0,$$

ce qui revient à

$$p_1(x_1 - a_1) \ldots - (x_n - a_n) = 0.$$

Par un changement de coordonnées l'équation finie des cônes se ramène à la forme

$$\Phi(X_1, X_2 \ldots X_n) = 0,$$

Φ désignant une fonction homogène de n fonctions linéaires $X_1 \ldots X_n$.

Il est presque inutile de faire observer que tout ce qui a été dit dans ce chapitre est vrai quelque soit la nature euclidienne ou non de la géométrie considérée sauf ce qui concerne les longueurs et les angles.

CHAPITRE VI

—

SURFACES ALGÉBRIQUES

1. Résultantes. — On appelle surfaces algébriques celles dont l'équation est de la forme $f = 0$. f désignant une fonction entière.

Considérons deux polynômes entiers en x_1 de degrés p_0 et $p_1 \leqq p_0$, à savoir f_0 et f_1. Divisons f_0, $x_1 f_0 \ldots x_1^{p_1 - 1} f_0$ par f_1, appelons q_0, $q_1 \ldots$ les quotients et $c_{11} + c_{21}x_1 + \ldots, \ldots$ les restes, nous aurons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 - q_0 f_1 = c_{11} + c_{21}x_1 + \ldots c_{p_1} x_1^{p_1 - 1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{p_1 - 1} f_0 - q_{p_1 - 1} f_1 = c_{1p_1} + c_{2p_1}x_1 + \ldots c_{p_1 p_1} x_1^{p_1 - 1}. \end{array} \right.$$

Posons

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{p_1 p_1};$$

remplaçons x_1 successivement par les p_1 racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{p_1}$ de $f_1 = 0$, et désignons par Δ le déterminant (de Vandermonde), en général différent de zéro (si $f_1 = 0$ n'a pas de racines multiples)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{p_1} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{p_1 - 1} & \ldots \alpha_{p_1}^{p_1 - 1} \end{vmatrix},$$

les équations (1) en fourniront p^2_1 qui expriment que

$$f_0(\alpha_1) f_0(\alpha_2) \ldots f_0(\alpha_{p_1}) \Delta = C \Delta \text{ [1]},$$

[1] En vertu de la règle connue pour former le produit de deux déterminants.

ou que

$$\Pi f_0(\alpha_i) = C,$$

or

$$\Pi f_0(\alpha_i) = 0$$

est évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que $f_0 = 0$ et $f_1 = 0$ aient une solution commune. $C = 0$ est aussi cette condition.

Si l'on multiplie les formules (1) par $\frac{\partial C}{\partial c_{i1}}, \frac{\partial C}{\partial c_{i2}} \dots$ respectivement et si on les ajoute on trouve

$$f_0\left(\frac{\partial C}{\partial c_{i1}} + x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{i2}} + x^2{}_1 \frac{\partial C}{\partial c_{i3}} \dots\right) - f_1\left(q_0 \frac{\partial C}{\partial c_{i1}} + \dots\right) = Cx^i{}_1,$$

donc *étant donnés deux polynômes entiers en x, on pourra en général trouver des polynômes λ_0 et λ_1 tels que l'on ait identiquement*

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = Cx^i{}_1 \text{ et en particulier} = C \text{ ou même } 1,$$

à moins que $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ aient une solution commune, et alors on a identiquement

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0.$$

$C = 0$ est ce que l'on appelle la *résultante* de $f_0 = 0$ et $f_1 = 0$.

Supposons que les coefficients de f_0 et f_1 renferment un paramètre x_0 et que f_0 et f_1 soient encore de degrés p_0 et p_1 en x_0 et x_1, C sera de degré $p_0\,p_1$ en x_0, car les éléments c_{ij} sont de degré p_0. A chaque racine de $C = 0$ correspondront des valeurs de

$$x_1, x_1{}^2 \dots x_1{}^{p_1 - 1}$$

donnés par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} c_{11} + c_{21}x_1 + \dots c_{p_1 1}x^{p_1 - 1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_{p_1 1} + c_{p_1 2}x_1 + \dots c_{p_1 p_1}x^{p_1 - 1} = 0. \end{cases}$$

donc les équations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ auront $p_0 p_1$ solutions communes. Cette conclusion sera soumise à de nombreuses exceptions, bien entendu, si les coefficients des f satisfont à des relations particulières ; je n'insiste pas pour le moment sur ce point.

En général, des relations (1) on pourra éliminer

$$x_1^2,\ x_1^3 \ldots x_1^{p_1-1},$$

on en déduira deux relations de la forme

$$A_1x_1 + B_1 = \lambda_{01}f_0 + \lambda_{11}f_1,$$
$$A_2x_1 + B_2 = \lambda_{02}f_0 + \lambda_{12}f_1.$$

A_1, B_1, A_2, B_2 désignant des polynômes de degrés p_0p_1 au plus en x_0 ; or il existera des polynômes en x_0, u_1 et u_2 tels que

$$A_1u_1 + A_2u_2 = 1,$$

et alors on aura

$$x_1 + B_1A_1 + B_2A_2 = \Sigma \text{ multiples de } f_0, f_1,$$

ou, en appelant $F(x_0)$ un polynôme entier en x_0

$$x_1^{\alpha}x_0^{\beta} = F(x_0) + \Sigma \text{ multiple de } f_0f_1\ ;$$

j'ajoute que F_0 sera, si l'on veut, de degré $p_0p_1 - 1$; car on peut le remplacer par le reste de sa division par C. Donc :

Etant donnés deux polynômes entiers en x_0 et x_1 à savoir f_0, f_1 de degrés p_0 et p_1, tout polynôme en x_0 et x_1 est égal à un polynôme entier en x_0 seul de degré $p_0p_1 - 1$ au plus, à des multiples près de f_0 et f_1.

Considérons maintenant trois polynômes entiers en x_0, x_1, x_2 de degrés p_0, p_1, p_2, à savoir f_0, f_1, f_2. Considérons les polynômes

$$f_0,\ x_2f_0,\ \ldots\ x_2^{p_1p_2-1}f_0,$$

on peut les mettre sous la forme suivante

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} f_0 = c_{11} + c_{12}x_2 + \ldots c_{1\mu}x_2^{\mu-1} + \Sigma \text{ mult. } f_1, f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2^{\mu-1}f_0 = c_{\mu 1} + c_{\mu 2}x_2 + \ldots c_{\mu\mu}x_2^{\mu-1} + \Sigma \text{ mult. } f_1, f_2, \end{array}\right.$$

μ désignant p_1p_2, puis posant

$$C = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \ldots c_{\mu\mu},$$

on a, en multipliant par $\dfrac{\partial c}{\partial c_{11}}$, $\dfrac{\partial c}{\partial c_{21}}$ ... et en ajoutant

$$C = \Sigma \text{ mult. } f_0, f_1, f_2.$$

Si $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ont une solution commune, on aura $C = 0$, d'ailleurs en appelant

$$\alpha_{11},\ \alpha_{21};$$
$$\cdots$$
$$\alpha_{1\mu},\ \alpha_{2\mu};$$

les solutions de $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, en faisant dans (2), x_1 et x_2 successivement égaux à ces solutions, on aura μ^2 équations d'où l'on déduira

$$\Delta \Pi f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = \Delta C,$$

ou

$$\Pi f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = C,$$

car Δ en général ne sera pas nul, et comme

$$\Pi f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = 0 \text{ exprime que } f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0$$

ont une solution commune, $C = 0$ sera la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations aient une solution commune. Ce sera ce que l'on appelle encore la *résultante* de ces équations ; si $C = 0$, la solution commune sera donnée par ce que deviennent les équations (2) ou

$$c_{11} + c_{12}x_2 \cdots + c_{1\mu}x_2^{\mu-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$C = 0$ est de degré $p_0\, p_1\, p_2$ en x_0, car les c_{ij} sont des polynômes en x_0 de degré p_0. A chaque racine de $C = 0$, correspond une valeur de x_2 et une de x_1, donc les trois équations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ont $p_0\, p_1\, p_2$ solutions. De plus, on se rappelle qu'il existe des polynômes λ_0, λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = C;$$

d'ailleurs des équations (2), on tire deux équations de la forme

$$A_1 x_2 + B_1 = \Sigma \text{ mult. } f_0, f_1, f_2,$$
$$A_2 x_2 + B_2 = \Sigma \text{ mult. } f_0, f_1, f_2,$$

et comme il existe des polynômes u_1 et u_2 tels que $A_1 u_1 + A_2 u_2 = 1$, on en conclura

$$x_2 = \Sigma \text{ mult. } f_0, f_1, f_2 + F(x_0)$$

et

$$x^{\alpha}{}_0 x^{\beta}{}_1 x^{\gamma}{}_2 = \Sigma \text{ mult. } f_0, f_1, f_2 + F_1(x_0)$$

d'ailleurs $F_1(x_0)$ pourra être supposé de degré $p_0p_1p_2 - 1$ en le remplaçant par le reste de sa division par C.

Donc étant donnés trois polynômes f_0, f_1, f_2 de degrés p_0, p_1, p_2 en x_0, x_1, x_2, on peut mettre un polynôme quelconque en x_0, x_1, x_2 sous la forme d'un polynôme de degré $p_0p_1p_2 - 1$ à des multiples de f_0, f_1, f_2 près, et ne contenant que x_0, de plus on voit que les trois équations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ont $p_1p_2p_3$ solutions et ainsi de suite.

En général *n équations algébriques auront autant de solutions qu'il y a d'unités dans le produit des degrés de ces équations,* ou *n surfaces des degrés $p_1p_2 \ldots p_n$ dans l'espace à n dimensions se coupent en général en $p_1p_2 \ldots p_n$ points.* (Quelle que soit la nature de l'espace, Euclidien ou non que l'on considère).

2. Discussion. — Considérons des équations algébriques

(A) $$f_0 = 0, f_1 = 0 \ldots f_n = 0,$$

tout à fait générales. $f_0, f_1 \ldots f_n$ désignant des polynômes de degrés $p_0, p_1 \ldots p_n$ en x_0, $x_1 \ldots x_n$, appelons

$$x_1 = \alpha_{11},\ x_2 = \alpha_{21} \ldots x_n = \alpha_{n1};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 = \alpha_{\mu 1},\ x_2 = \alpha_{\mu 2} \ldots x_n = \alpha_{\mu};$$

les solutions des équations

(B) $$f_1 = 0, \ldots f_n = 0.$$

solutions que nous supposons au nombre de $\mu = p_1p_2 \ldots p_n$. Formons les polynômes

$$f_0,\ x_nf_0 \ldots x_n{}^{\mu - 1}f_0$$

Il existe des polynômes entiers en x_0 de degré $\mu - 1$ égaux à ces polynômes, à des multiples de $f_1, \ldots f_n$ près, on peut donc poser

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f_0 = c_{11} + c_{12}x_n + \ldots c_{1\mu}x_n{}^{\mu - 1} + \Sigma \text{ mult.} f_1, \ldots f_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n{}^{\mu - 1}f_0 = c_{\mu 1} + c_{\mu 2}x_n + \ldots c_{\mu\mu}x_n{}^{\mu - 1} + \Sigma \text{ mult.} f_1, \ldots f_n. \end{array}\right.$$

et en faisant $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i} \ldots x_n = \alpha_{ni}$, puis $i = 1, 2, \ldots \mu$ on a μ^2 équations, qui montrent qu'en posant

$$C = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \ldots c_{\mu\mu}, \ \Delta = \Sigma \pm \alpha^0{}_{1\mu}\alpha_{1\mu} \ldots \alpha^{\mu-1}_{1\mu},$$

on a

$$\Pi f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni})\Delta = \Delta C,$$

ou

$$\Pi f_0(\alpha_{1i}, \ldots) = C.$$

ce qui prouve que $C = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (A) aient une solution commune. C'est leur résultante.

Cette solution quand $C = 0$, est donnée par les équations (1) où l'on fait $f_0 = f_1 \ldots = f_n = 0$, c'est-à-dire :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{11} + c_{12}x_n + \ldots c_{1\mu}x_n^{\mu-1} = 0, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c_{\mu 1} + c_{\mu 2}x + \ldots c_{\mu\mu}x_n^{\mu-1} = 0, \end{array} \right.$$

Ces équations font connaître l'x_n de la solution commune et ses puissances. Et comme x_1, $x_2 \ldots$ sont des fonctions de x_n, à des multiples des f près, ils seront connus quand on connaîtra x_n.

Les équations (2) sont en vertu de $C = 0$, au nombre de $\mu - 1$ distinctes et font bien connaître x_n, $x_n^2 \ldots$ pourvu toutefois que les mineurs de C ne soient pas tous nuls.

Si les mineurs du premier ordre de C sont tous nuls, les équations (2) se réduisent à $\mu - 2$; si l'on élimine $x^3_n, x^4_n \ldots x_n^{\mu-1}$, on a une équation du second degré en x_n, qui fournit deux valeurs pour x_n ; il y a donc deux solutions communes aux équations (A), et l'on verrait de même que si les mineurs d'ordre k de C étaient nuls, les équations (A) auraient $k + 1$ solutions communes.

L'équation $C = 0$ est de degré $\mu p_0 = p_0 p_1 \cdots p_n$ en x_0 les éléments c_{ij} de C sont de degré p_0 en x_0, à chaque solution x_0 de $C = 0$ correspondra, en général, une solution de (A). A moins qu'à une solution de (A) ne correspondent plusieurs solutions communes.

Cela aura lieu si les mineurs du déterminant C sont nuls jusqu'à l'ordre k, mais alors il y a $k+1$ solutions communes, or on a

$$\frac{dC}{dx_0} = \Sigma \frac{\partial C}{\partial c_{ij}} \frac{dc_{ij}}{dx_0},$$

$$\frac{d^2C}{dx_0^2} = \Sigma \frac{\partial^2 C}{\partial c_{ij} dc_{kl}} \frac{dc_{ij}}{dx_0} \frac{dc_{kl}}{dx_0} + \Sigma \frac{\partial C}{\partial c_{ij}} \frac{d^2 c_{ij}}{dx_0^2},$$

donc à ces $k+1$ solutions communes correspondra une racine x_0 d'ordre de multiplicité $k+1$ de $C = 0$, la circonstance en question n'infirmera donc pas notre conclusion relative au nombre des solutions des équations (A).

Nous devons cependant envisager encore un cas remarquable, c'est celui où la quantité C serait identiquement nulle, j'entends nulle quel que soit x_0; bien que C soit nul, il peut arriver que tous ses mineurs ne soient pas identiquement nuls, mais x_0 est arbitraire et à chaque valeur de x_0 correspond un système de valeurs de $x_1, x_2 \dots x_n$ les surfaces (A) ont alors une ligne commune, j'ajoute que si les mineurs de C sont nuls pour une valeur particulière de x_0, pour cette valeur particulière, il y aura deux systèmes de valeurs de $x_1, x_2 \dots x_n$ correspondantes, donc nos surfaces auront en commun une ligne et au moins un point commun en général situé hors de la ligne, en outre on aura en multipliant les équations (A) respectivement par $\frac{\partial c}{\partial c_{11}}, \frac{\partial c}{\partial c_{21}} \dots$ et en les ajoutant une équation de la forme

$$\text{(H)} \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

quel que soit x_0. Les λ étant des polynômes entiers, si tous les mineurs de C étaient nuls identiquement jusqu'à l'ordre k, on aurait $k+1$ équations distinctes de cette forme, distinctes, car les λ_0 ne sauraient y avoir les mêmes valeurs en général, et à chaque valeur arbitraire de x_0 correspondront $k+1$ systèmes de valeurs de $x_1, x_2 \dots x_n$.

Enfin si tous les c_{ij} sont nuls x_0 et $x_1, x_2 \dots x_n$ auront des valeurs indéterminées, on aurait μ équations de la forme (H), suivant les cas les surfaces (A) pourront avoir en commun des variétés d'un ordre quelconque inférieur à $n+1$, si l'on a affaire à de véritables surfaces.

La distinction de tous ces cas où il y a indétermination, paraît difficile à faire sur les équations (1) ou (2), mais à l'aide de la théorie des déterminants fonctionnels on pourra toujours reconnaître combien parmi les fonctions f il y en a qui sont distinctes.

3. Remarques. — La résultante des équations

(A) $$f_0 = 0, \quad f_1 = 0 \ldots \quad f_n = 0,$$

affecte la forme

$$\Pi f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots) = 0.$$

on voit alors que son premier membre est un polynôme entier et de degré $\mu = p_1 p_2 \ldots p_n$ par rapport aux coefficients de f_0, en général il sera un polynôme entier de degré $\frac{\Pi p}{p_i}$ par rapport aux coefficients de f_i ; comme la condition nécessaire et suffisante pour que (A) ait une solution commune est évidemment déterminée, il faudra qu'on puisse la mettre sous une forme entière par rapport à tous les coefficients des f en multipliant ses diverses formes par les coefficients des f ne renfermant pas x_0.

Réciproquement si une fonction des coefficients des f, $\Theta = 0$, s'annule avec f_0, f_1 .., f_n, et si elle est entière et de degré $\frac{\Pi p}{p_0}$ par rapport aux coefficients de f_0, de degré $\frac{\Pi p}{p_1}$ par rapport aux coefficients de f_1, ... $\Theta = 0$ sera le résultante de (A) pourvu qu'elle ne contienne x_0 que par les coefficients des f.

Car si $R = 0$ est la résultante, Θ s'annulant avec R sera de la forme $RA = 0$, mais elle est de même degré que R, comme elle ne contient x_0 que par les coefficients de f, il faut que A soit de degré 0, c'est-à-dire une constante numérique, $\Theta = 0$ est donc bien la résultante.

Nous avons dit que $n + 1$ surfaces se coupaient toujours dans l'espace à $n + 1$ dimensions en un nombre de points égal au produit de leurs degrés quand il n'y avait pas indétermination, pour l'exactitude du théorème il faut compter les points confondus et les points situés à l'infini. Toutefois on pourrait craindre que la limite $p_0 p_1 \ldots p_n$ que nous avons trouvée soit une limite supérieure qui ne pourrait jamais être atteinte.

Cette crainte n'est pas fondée, il n'est pas difficile de montrer sur un exemple que la limite peut être atteinte. Considérons en effet des fonctions linéaires l_{ij} et soit

$$\begin{aligned} f_0 &= l_{01} l_{02} \dots l_{0p_0}, \\ f_1 &= l_{11} l_{12} \dots l_{1p_1}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= l_{n1} l_{n2} \dots l_{np_n}, \end{aligned}$$

les équations (A) auront pour solutions, les solutions des $p_0 p_1 \dots p_n$ systèmes linéaires

$$l_{0\alpha} = 0, \qquad l_{1\beta} = 0 \dots \qquad l_{n\theta} = 0.$$

dans lesquels on devra faire $\alpha = 1, 2 \dots p_0$, $\beta = 1, 2 \dots p_1$, $\theta = 1, 2 \dots p_n$.

4. Théorème de Jacobi. — Considérons les n équations en x_1, $x_2 \dots x_n$ des degrés $p_1, p_2 \dots p_n$

$$f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = 0, \qquad f_2 = 0, \dots \qquad f_n = 0.$$

soit X_1 la résultante provenant de l'élimination de $x_2, x_3 \dots x_n$, X_2 la résultante provenant de l'élimination de $x_1, x_3 \dots x_n$, etc λ_{ij} des multiplicateurs, on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \lambda_{11} f_1 + \lambda_{12} f_2 \dots + \lambda_{1n} f_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n &= \lambda_{n1} f_1 + \lambda_{n2} f_2 \dots + \lambda_{nn} f_n. \end{aligned} \right.$$

en différentiant on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X'_i &= \frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_i} f_1 \dots + \frac{\partial \lambda_{in}}{\partial x_i} f_n + \lambda_{i1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \dots + \lambda_{in} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}, \\ 0 &= \frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_j} f_1 + \dots \frac{\partial \lambda_{in}}{\partial x_j} fx + \lambda_{i1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots \lambda_{in} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}, \end{aligned} \right.$$

si l'on donne aux x des valeurs annulant les X sans annuler les f, les formules montrent que pour ces valeurs, on aura $\Lambda = 0$, en posant $\Lambda = \Sigma \pm \lambda_{11} \lambda_{12} \dots \lambda_{nn}$. Et si l'on pose

$$D = \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)},$$

les formules (2) montrent que les valeurs des x qui annulent les f donnent, en appelant

$$\begin{array}{l} \alpha_{11},\ \alpha_{21},\ \dots\ \alpha_{n1}\ ; \\ \alpha_{12},\ \alpha_{22},\ \dots\ \alpha_{n2}\ ; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

ces valeurs,

$$(3)\qquad \Lambda(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\ \dots)\ D(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\ \dots) = X'_1(\alpha_{1i})\ X'_2(\alpha_{2i})\ \dots\ X'_n\ (\alpha_{ni}).$$

Soit maintenant $F(x_1\ \dots\ x_n)$ un polynôme entier, divisons F par X_1, soit Q_1 le quotient R_1 le reste, divisons R_1 par X_2, soit Q_2 le quotient, R_2 le reste, et ainsi de suite, on aura

$$F = Q_1X_1 + \dots\ Q_nX_n + R.$$

et R sera de degré $p_1 - 1$ en x_1, ... $p_n - 1$ en x_n, et la formule d'interpolation de Lagrange donnera

$$\frac{F}{X_1\ X_2\ \dots\ X_n} = \frac{Q_1X_1 + \dots\ Q_nX_n}{X_1X_2\ \dots\ X_n} + \Sigma \frac{F(\alpha_{1i}, \alpha_{2j}\ \dots)}{X'_1(\alpha_{1i})\ X'_2(\alpha_{2j}) \dots (x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{1j}) \dots}$$

Faisons $F = G\Lambda$, où G est un nouveau polynôme, si l'on se rappelle que Λ est nul pour les valeurs qui annulent les X sans annuler les f, on aura

$$\frac{G\Lambda}{X_2X_2\ \dots\ X_n} = \frac{Q'_1X_1\ \dots + Q'_nX_n}{X_1\ \dots\ X_n} + \Sigma \frac{G(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\ \dots)\ \Lambda(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) \dots}{X'_1\ (\alpha_{1i})\ X'_2\ (\alpha_{2i}) \dots (x_1 - \alpha_{2i}) \dots},$$

les Q′ désignant toujours des polynômes entiers. Egalons alors de part et d'autre les coefficients de $\frac{1}{x_1}\ \frac{1}{x_2}\ \cdots\ \frac{1}{x_n}$, on voit que le coefficient de $\frac{1}{x_1x_2\ \dots\ x_n}$ dans

$$\frac{G\Lambda}{X_1X_2\ \dots\ X_n},$$

est égal à

$$\Sigma\ \frac{G(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\ \dots\ \alpha_{ni})\ \Lambda(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\ \dots\ \alpha_{ni})}{X'_1(\alpha_{1i})\ \dots\ X'_n\ (\alpha_{ni})}.$$

C'est là le théorème de Jacobi, qui va nous être bientôt utile. On peut lui donner une autre forme, en vertu de la formule (3), et écrire

$$\text{Coef. de } \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \text{ dans } \frac{G\Lambda}{X_1 X_2 \ldots X_n} = \Sigma \frac{G(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni})}{D(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni})}.$$

λ_{ij} est de degré $p_1 p_2 \ldots p_n - p_i$, donc Λ sera de degré

$$\Sigma(p_1 \ldots p_n - p_i)$$

ou

$$np_1 \ldots p_n - \Sigma p_i,$$

D est de degré $\Sigma p_i - n$, donc si G est de degré inférieur au degré $\Sigma p_i - n$ de D, $G\Lambda$ sera degré $np_1 \ldots p_n - \Sigma p_i + \Sigma p_i - n - 1$ au plus, c'est-à-dire de degré $np_1 p_2 \ldots p_n - n$ au plus, il sera donc de degré inférieur à $np_1 \ldots p_n$, de degré $X_1 \ldots X_n$, donc :

Si G *est de degré inférieur à* D, *on aura*

$$\Sigma \frac{G(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)} = 0,$$

mais si G est de même degré que D, cette somme sera une quantité qui *pourra* être une constante non nulle dépendant des termes du degré le plus élevé dans G, etc.

On a ainsi des relations entre les intersections des surfaces

$$f_1 = 0, \ldots f_n = 0.$$

Conservons les notations précédentes, et appelons, pour simplifier, $F^{(j)}$ la valeur que prend une fonction $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ pour $x_1 = \alpha_{1j}, x_2 = \alpha_{2j} \ldots$, il est clair qu'il existera une infinité de fonctions $f_{i1j}, f_{i2j} \ldots$ telles que

$$(4) \qquad f_i = (x_1 - \alpha_{1j}) f_{ij1} + \ldots (x_1 - \alpha_{nj}) f_{ijn}.$$

Posons alors

$$\xi_j = \frac{1}{D^{(j)}} \begin{vmatrix} f_{1j1} & f_{1j2} \cdots f_{1jn} \\ f_{2j1} & f_{2j2} \cdots f_{2jn} \\ f_{nj1} & f_{nj2} \cdots f_{njn} \end{vmatrix},$$

Les fonctions ξ_j, au nombre de $\mu = p_1 p_2 \ldots, p_n$, jouissent des propriétés suivantes :

1° *Pour* $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i} \ldots \xi_j$ *sera nul, excepté si* $i = j$, *alors on aura* $\xi_j = 1$.

En effet, en vertu de (4) on peut remplacer la première colonne du déterminant ξ_j par $f_1, f_2 \dots f_n$, il s'annule donc pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$ ... mais si $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j}$, on a

$$f_{1j1} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{1j}}, \qquad f_{1j2} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_{2j}} \dots,$$

le déterminant qui entre dans l'expression de ξ_j se réduit à $D^{(j)}$ et $\xi_j = 1$.

2° On a

$$\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_\mu = 1\,;$$

car, en vertu du théorème de Jacobi, $\xi_1 + \xi_2 \dots \xi_\mu$ est constant, et pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{22}$ ..., il se réduit à $\xi_1^{(1)} = 1$.

3° Soit f_0 une fonction de $x_1 \dots x_n$ de degré P_0, le déterminant

$$\frac{1}{D^{(j)}} \begin{vmatrix} f_0 - f_0^{(j)} & f_{0j1} \cdots f_{0jn} \\ f_1 & f_{1j1} \cdots f_{1jn} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n & f_{nj1} \cdots f_{njn} \end{vmatrix}$$

est évidemment nul ; mais il est de la forme

$$(f_0 - f_0^{(j)})\,\xi_j + \lambda_1 f_1 + \dots \lambda_n f_n = 0,$$

les λ désignant des polynômes entiers et λ_i est de degré $\Sigma p - p_i - n$. Si dans cette formule on fait $j = 1, 2 \dots \mu$ et si l'on observe que $\xi_1 + \xi_2 \dots = 1$, on a, en ajoutant

$$f_0 = f_0^{(1)}\xi_1 + f_0^{(2)}\xi_2 \dots + f_0^{(\mu)}\xi_\mu + \lambda_1 f_1 + \dots \lambda_n f_n,$$

les λ représentant des polynômes différents de ceux que l'on vient de considérer.

Si f_0 est nul avec les x, ou si la surface $f_0 = 0$ passe par les intersections de $f_1 = 0, \dots f_n = 0$ on a identiquement

$$f_0 = \lambda_1 f_1 + \dots \lambda_n f_n\,;$$

et si $f_1, f_2 \dots f_n, f_0$ sont de mêmes degrés, les λ sont constants.

4° Les ξ sont linéairement indépendants, on ne peut pas avoir

$$a_1\xi_1 + \dots + a_\mu \xi_\mu = 0,$$

si $a_1 \dots a_\mu$ sont des constantes, car pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{21} \dots$ il reste $a_1\xi_1^{(1)}$ ou $a_1 = 0$, donc les a sont nuls.

5° Si donc

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 \dots = l_1\xi_1 + l_2\xi_2 \dots,$$

$a_1 \dots l_1$ désignent des constantes, on a $a_1 = l_1$, $a_2 = l_2 \dots$

Il y a en général $\mu = p_1\, p_2 \dots p_n$ arguments $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, dans lesquels $\alpha_1 < p_1$, $\alpha_2 < p_2 \dots \alpha_n < p_n$; en effet ces arguments sont les termes du produit

$$(1 + x_1 + \dots x_1^{p_1-1})(1 + x_2 + \dots x_2^{p_2-1}) \dots (1 + x_n + \dots x_n^{p_n-1}),$$

et leur nombre s'obtiendra en y faisant $x_1 = x_2 \dots = 1$, ce qui donne bien $p_1p_2 \dots p_n$. Soient ω_1, $\omega_2 \dots \omega_\mu$ ces arguments, posons

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \dots & \omega_{1\mu} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \dots & \omega_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\mu 1} & \omega_{\mu 2} \dots & \omega_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

ω_{ij} désignant la valeur de ω_i pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j} \dots$, posons encore

$$\Omega_j = \begin{vmatrix} \omega_{11} \dots & \omega_1 \dots & \omega_{1\mu} \\ \omega_{21} \dots & \omega_2 \dots & \omega_{2\mu} \\ & \vdots & \\ \omega_{\mu 1} \dots & \omega_\mu \dots & \omega_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

$$= \omega_1 \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{1j}} + \dots \omega_\mu \frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{\mu j}} ;$$

il est clair que Ω_j s'annulera en même temps que les f, sauf pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j}$; et se réduira à Ω pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{1j}$; et l'on aura

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} + \frac{\Omega_2}{\Omega} \dots + \frac{\Omega_\mu}{\Omega} = 1.$$

Du reste si l'on considère le déterminant suivant, où l'on a fait $f_{ij} = f_i(\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \dots)$.

$$\frac{1}{\Omega}\begin{vmatrix} f_0 & \omega_1 & \omega_2 \dots & \omega_\mu \\ f_{01} & \omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{\mu 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{0\mu} & \omega_{1\mu} & \omega_{2\mu} & \omega_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

il se réduit à o, si f_0 ne contient pas de termes divisibles par

$$x_1^{\mu_1},\ x_2^{\mu_2}\ \ldots\ x_n^{\mu_n}$$

et alors

$$o = \Omega f_0 - \Omega_1 f_{01} \cdots - \Omega_\mu f_{0\mu},$$

ou

$$\Omega f_0 = \Omega_1 f_{01} \cdots + \Omega_\mu f_{0\mu}.$$

D'ailleurs $\Omega_i = \xi_i\Omega$ à des multiples de $f_1 \ldots f_n$ près, si f_0 est quelconque, on a

$$\Omega f_0 = \Omega_1 f_{01} \cdots + \Omega_\mu f_{0\mu} + \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n,$$

les λ étant des polynômes entiers.

Il est intéressant de montrer que Ω^2 peut se calculer en fonction rationnelle des coefficients des f. Soit en effet D $(x_1, \ldots x_n)$ le déterminant des fonctions f et

$$D_i = D(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots),$$

on a

$$\frac{\Omega^2}{D_1 D_2 \ldots D_\mu} = \begin{vmatrix} \frac{\omega_{11}}{D_1} & \frac{\omega_{21}}{D_1} & \cdots \\ \frac{\omega_{12}}{D_2} & \frac{\omega_{22}}{D_2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} & \cdots \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\omega^2_{1i}}{D_i}, & \Sigma\frac{\omega_{1i}\omega_{2i}}{D_i}, & \cdots \\ \Sigma\frac{\omega_{1i}\omega_{2i}}{D_i}, & \Sigma\frac{\omega^2_{2i}}{D_i}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Or, en vertu du théorème de Jacobi, si l'on suppose les degrés de $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\mu$ non décroissants, tous les termes à gauche de la diagonale principale de ce déterminant sont nuls, ceux de la diagonale principale sont fonctions des coefficients des termes des degrés les plus élevés dans les f, on peut donc poser

$$\Omega^2 = D_1 D_2 \ldots D_\mu k,$$

k étant indépendant des α (¹).

(¹) Les quantités Ω_i et ξ_i, jouissent encore de cette propriété, que, si on néglige dans les calculs les multiples des f, on aura $\Omega_i\Omega_j = o$, $\Omega^2_i = \Omega_i$, ce sont ce que les allemands appellent des unités complexes.

5. Nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface. — Un polynôme du degré p à une variable, est déterminé à un facteur près, quand on se donne ses racines.

Or nous allons voir qu'en se donnant les solutions d'un système d'équations, on ne peut pas déterminer en général ces équations, ou pour parler plus clairement, on ne peut pas se donner arbitrairement les $p_1 p_2 \ldots p_n$ solutions d'équations des degrés $p_1, \ldots p_n$, ou si l'on veut, il existe des relations entre ces solutions.

Cherchons d'abord le nombre des coefficients d'un polynôme de degré p à n variables.

Un polynôme du degré p à deux variables homogène

$$a_0x^p + a_1x^{p-1}y + \ldots a_py^p$$

contient $p + 1$ termes. Un polynôme homogène du degré p à 3 variables est de la forme

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} \ldots + A_p = P,$$

ou A_i est de degré i en y et z, il contient

$$1 + 2 \ldots + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \text{ termes. (}^1\text{)}$$

Un polynôme du degré p à 4 variables est de la forme P ; mais A_i est de degré i à 3 variables, il contient

$$1 + 3 + \ldots \frac{(p+2)(p+1)}{2} = \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{1.2.3} \text{ termes.}$$

etc. Un polynôme homogène de degré p à $n + 1$ variables contiendra

$$\frac{(p+1)\ldots(p+n)}{1.2\ldots n} \text{ termes.}$$

c'est aussi le nombre des termes d'un polynôme de degré p à n variables non homogène. Ce nombre est aussi égal à

$$\frac{(p+n)!}{p!\,n!},$$

[1] En vertu de la formule $\sum \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p} = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{1.2\ldots(p+1)}$

donc une surface du degré p dans un espace à n dimensions dépend de

$$\frac{(p+n)!}{p!\,n!} - 1 = \nu$$

paramètres, on peut l'assujettir à passer par ν points ou à toucher ν plans.

On ne peut pas se donner à *priori* les points d'intersection des surfaces $f_1 = 0, \ldots f_n = 0$. En effet le nombre des α_{ij} est $n.p_1p_2 \ldots p_n$. Ils sont fonctions des coefficients des f c'est-à-dire de

$$\frac{(p_1+n)!}{p_1!\,n!} + \ldots + \frac{(p_n+n)!}{p_n!\,n!} - n$$

paramètres, et ce nombre de paramètres est ordinairement plus petit que $n.p_1p_2 \ldots p_n$. Il y aura donc des relations entre les α_{ij}.

6. Théorème d'Abel. — Abel a découvert des relations différentielles entre les coordonnées des points communs aux courbes algébriques

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots f_n = 0.$$

Voici comment on peut les trouver. Supposons toujours $f_1, f_2 \ldots f_n$ de degrés $p_1, p_2 \ldots p_n$ respectivement, posons

$$D = \frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)},$$

différentions les équations de ces surfaces en faisant varier non seulement les x, mais aussi les coefficients $a_1, a_2, \ldots$ de la fonction f_1 et soit $x_1 \ldots x_n$ une solution de (1), posons

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} da_2 \ldots$$

nous aurons,

$$-\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n,$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n.$$

on en tire

(1) $$dx_i = \frac{-\partial f_1}{D} \frac{\partial D}{\left(\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)},$$

ou

$$-\frac{\partial f_1}{D} = \frac{dx_i}{\dfrac{\partial D}{\left(\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)}};$$

multiplions les deux membres par une fonction $F(x_1 \ldots x_n)$ entière et de degré inférieur à $\Sigma p - n$, remplaçons ensuite $x_1 \ldots x_n$, successivement par tous les éléments d'une solution de $f_1 = 0 \ldots f_n = 0$, ajoutons, nous aurons, en vertu du théorème de Jacobi, la formule suivante qui est une forme du théorème d'Abel

$$0 = \Sigma \frac{d\alpha_{ij} F(\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots)}{\dfrac{\partial D}{\left(\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_{ij}}\right)}}.$$

On peut encore donner au théorème d'Abel une autre forme et ajouter les équations obtenues en faisant dans (1) $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i} \ldots$ et $i = 1, 2, \ldots$ on a alors

$$\Sigma G d\alpha_{1i} = -\Sigma \frac{\partial f_1(\alpha_{1i}, \ldots)}{D} \frac{\partial D}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_{ji}}} G,$$

G désignant une fonction des α_{ji} ou i varie de 1 à μ. S'il arrive alors que, en vertu du théorème de Jacobi, le second membre soit nul, on a des relations intéressantes, si le premier membre est intégrable.

Considérons par exemple le cas ou $f_2, \ldots f_n$ sont du degré $m > 2$, et soit $f_1 = x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2 - R$, posons

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{ij},$$

on aura

$$x_1 dx_1 + \ldots x_n dx_n = dR,$$
$$f_{21} dx_1 + \ldots f_{2n} dx_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et en appelant D le déterminant de $x^2_1 + \dots x^2_n, f_1 \dots f_n$

$$dx_1 = \frac{dR}{D}\,\frac{\partial D}{\partial\dfrac{\partial D}{\partial x_1}},$$

en faisant $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... $i = 1, 2, \dots$ et en ajoutant, on a

$$\Sigma d\alpha_{1i} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\alpha_{1i} = \text{constante}.$$

donc *quand une sphère de centre fixe coupe l'intersection de* $n - 1$ *surfaces algébriques, le centre de gravité de ses points d'intersection avec les surfaces est fixe quand on fait varier le rayon de la sphère.*

7. Propriétés de la résultante. — Sa forme explicite. — Considérons les équations

(1) $$\varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 0, \ \dots \ \varphi_n = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$ désignant des polynômes en $x_1, x_2 \dots x_n$ et x_0 de degrés p, soit $x_1 = \gamma_{1i}, x_2 = \gamma_{2i} \dots x_n = \gamma_{ni}$, une quelconque des $\mu = p^n$ solutions des équations

(2) $$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \ \dots \ \varphi_n = 0,$$

résolues par rapport à $x_1, \dots x_n$. Soient

(3) $$f_1 = 0, f_2 = 0 \dots f_n = 0,$$

des équations en $x_1, \dots x_n$ de degrés p (on pourra supposer f_1 fonction de x_1 seul, f_2 fonction de x_2 seul, etc.) soit $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$ ... $x_n = \alpha_{ni}$ une solution quelconque des équations (3). Posons

(4) $$\varphi_k = \varphi_k(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \dots) + (x_1 - \alpha_{1i})\varphi_{k1i} \dots + (x_n - \alpha_{ni})\varphi_{kni},$$

en sorte que φ_{kji} soit un polynôme de degré $p - 1$, posons enfin

$$\theta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0, & \varphi_{01i}, & \dots & \varphi_{0ni} \\ \varphi_1, & \varphi_{11i}, & \dots & \varphi_{1ni} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n, & \varphi_{n1i}, & \dots & \varphi_{nni} \end{vmatrix};$$

θ_i sera de degré $np - n$ en $x_1 \dots x_n$, car, en vertu de (4) la première colonne de θ_i peut être remplacée par $\varphi_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \dots)$, $\varphi_1(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \dots)$, ... $\varphi_n(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \dots)$, il est de même degré en $\alpha_{1i}, \dots \alpha_{ni}$.

Il existe des polynômes $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$ tels que

$$\theta_1 = \theta_{11}\zeta_1 + \ldots \theta_{1\mu}\zeta_\mu,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\theta_\mu = \theta_{\mu 1}\zeta_1 + \ldots \theta_{\mu\mu}\zeta_\mu,$$

en posant pour abréger $\theta_{ij} = \theta_i(\alpha_{1j}, \alpha_2, \ldots, \alpha_{1i}, \ldots \alpha_{\mu i})$; et si l'on observe que pour $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i} \ldots$, on a $\theta_j = \theta_{ji}$; on en conclura que ζ_i s'annule avec les f, sauf pour $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i} \ldots$ et alors, il est égal à un. Posons $\Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22} \ldots \theta_{\mu\mu} = \Theta$, lorsque les φ sont tous nuls, $\theta_1, \theta_2, \ldots$ sont nuls, et les ζ sont nuls, à moins que $\Theta = 0$, or en appelant $\xi_1, \ldots \xi_\mu$ les fonctions considérées § 3, on a

$$\zeta_1 = \xi_1 + F_1, \qquad \zeta_2 = \xi_2 + F_2 \ldots$$

les F étant des sommes de multiples de $f_1, f_2 \ldots f_n$. Les ξ sont indépendants des coefficients des φ, donc ils ne s'annulent pas avec les φ, quant aux F ils ne peuvent devenir égaux et de signes contraires aux ξ quand les φ s'annulent, car il n'en est rien quand on prend $\varphi_1 = f_1, \ldots \varphi_n = f_n$, puis qu'alors ils sont nuls ou égaux à l'unité.

De là il faut conclure que Θ est nul, toutes les fois que les φ sont nuls à la fois, d'ailleurs Θ est une fonction entière de degré μ par rapport aux coefficients de chacune des fonctions φ_i : $\Theta = 0$ est donc la résultante des équations $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 0 \ldots, \varphi_n = 0$. (Voir § 3)

Si l'on pose

$$\varphi_0 = z - \psi(x_1 \ldots x_n),$$

la résultante $\Theta = 0$ pourra s'ordonner par rapport aux puissances de z et l'on pourra mettre cette résultante sous la forme

$$z^\mu - \Psi_1 z^{\mu-1} + \Psi_2 z^{\mu-2} - \ldots = 0,$$

on aura alors

$$\Psi_1 = \Sigma\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots),$$
$$\Psi_2 = \Sigma\psi(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots)\psi(\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

On pourra ainsi se procurer les fonctions symétriques des solutions communes à plusieurs équations algébriques. Il résulte de là que

Toute fonction symétrique, entière, des solutions de plusieurs équations algébriques est une fonction rationnelle des coefficients de ces équations.

Cette méthode pour calculer les fonctions symétriques, pas plus que les méthodes d'élimination que nous avons fait connaître, n'est pratique, les calculs qu'elle exige étant fort prolixes.

Soient $f_0, f_1 \ldots f_n$ des polynômes entiers en $x_1 \ldots x_n$ de degré p soit

$$\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni};$$

les éléments d'une solution quelconque des équations,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 \ldots \qquad f_n = 0,$$

$p^n = \mu$ et

$$R = f_0(\alpha_{11}, \alpha_{22} \ldots) f_0(\alpha_{12}, \ldots) f_0(\alpha_{1\mu}, \alpha_{2\mu} \ldots).$$

Posons, en appelant ω_i un argument quelconque dans f_k et a^k_i son coefficient

$$f_k = a^k_1 \omega_1 + \ldots a^k_j \omega_j + \ldots;$$

en appelant f^j_k, ω_{ij} les valeurs de f_i et ω_i pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j} \ldots$ on a

$$f_0(\alpha_{1i} \ldots) = a_1^0 \omega_{1i} \ldots + a^0_j \omega_{ji} + \ldots;$$

$$\frac{\partial f^i_0}{\partial a^0_j} = \omega_{ji},$$

donc

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial R}{\partial a^0_j} = \omega_{j1} f^2_0 f^3_0 \ldots + \omega_{j2} f^1_0 f_0^3 \ldots + \ldots,$$

ou simplement, en n'écrivant pas les termes nuls, si $\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots$ est solution de $f_0 = 0$

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_j} = \omega_{ji} \frac{R}{f^i_0},$$

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_k} = \omega_{ki} \frac{R}{f^i_0};$$

on a donc

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_1} : \omega_{1i} = \frac{\partial R}{\partial a^0_2} : \omega_{2i} = \ldots$$

si α_{1i}, α_{2i} ... satisfait à $f_0 = 0$. Ce qui permet de calculer la solution commune à $f_0 = 0 \dots f_n = 0$, dès que l'on a formé la résultante. Si tous les $\frac{\partial R}{\partial a^0_j}$ étaient nuls, cette méthode ne permettrait plus de calculer la solution commune, il faudrait alors différentier deux fois et il y aurait deux solutions communes, mais je n'insiste pas sur ce point.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_j} = R\left(\omega_{j1}\frac{1}{f^1_0} + \omega_{j2}\frac{1}{f^2_0} + \dots\right);$$

on en tire, en multipliant par a^k_j, en fesant $j = 1, 2 \dots$ et en ajoutant

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_1}a^k_1 + \frac{\partial R}{\partial a^0_2}a^k_2 + \dots = R\left(\frac{f^1_j}{f^1_0} + \frac{f^2_j}{f^2_0} + \dots\right);$$

or $f^1_j, f^2_j \dots$ sont nuls, donc

$$\frac{\partial R}{\partial a^0_1}a^k_1 + \frac{\partial R}{\partial a^0_2}a^k_2 \dots = 0,$$

et plus généralement

$$(2) \qquad \frac{\partial R}{\partial a^i_1}a^k_1 + \frac{\partial R}{\partial a^i_2}a^k_2 + \dots = 0.$$

Les équations (2) sont au nombre de $\frac{(n+1)n}{2}$, elles définissent la fonction R, jusqu'à un certain point. Observons d'abord que ces équations sont satisfaites quand on prend $R = F(P)$, P désignant l'un quelconque des déterminants de la forme

$$P = \begin{vmatrix} a^0_\mu & a^0_\nu & \dots & a^0_\rho \\ a^1_\mu & a^1_\nu & \dots & a^1_\rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_\mu & a^n_\nu & \dots & a^n_\rho \end{vmatrix};$$

en effet P satisfait évidemment à (2) et F (P) aussi, car

$$\frac{\partial F(P)}{\partial a^i_k} = F'(P)\frac{\partial P}{\partial a^i_k}.$$

Or si l'on prend pour variables indépendantes, autant de déterminants P à savoir $P_1, P_2 \dots$ qu'il y a de coefficients $a^i_1, a^i_2 \dots$ moins un, et si l'on garde ce coefficient restant a^i, on a :

$$\frac{\partial R}{\partial a^i_1} = \frac{\partial R}{\partial P_1}\frac{\partial P_1}{\partial a^i_1} + \frac{\partial R}{\partial P_2}\frac{\partial P_2}{\partial a^i_1} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial R}{\partial a^i} = \frac{\partial R}{\partial a^i} + \frac{\partial R}{\partial P_1}\frac{\partial P_1}{\partial a^i} + \ldots,$$

si l'on multiplie ces équations par a^k_1, a^k_2 ... et si l'on ajoute, en vertu de (2) on a

$$0 = \frac{\partial R}{\partial a^i} a^k$$

ou

$$\frac{\partial R}{\partial a^i} = 0.$$

ce qui montre que R ne contient pas a^i et est fonction des seuls déterminants P.

Cela suppose R de la forme $f^1{}_i f^2{}_i \ldots f^k{}_i$, et par suite entier en a^i_1, a^i_2 ..., et si toutes les équations (2) sont censées avoir lieu quelque soit i, il faut supposer que R a été mis sous forme entière par rapport aux $a^j{}_i$ et de même degré par rapport à chacun d'eux. Ce résultat est très important comme on le verra plus loin.

8. Emploi des coordonnées homogènes. — Nous rendrons nos équations homogènes, par l'introduction d'une variable fictive que nous supposons égale à 1 après avoir effectué, s'il y a lieu, des différentiations. Considérons alors les équations

$$f_0(x_0, x_1 \ldots x_n) = 0, \qquad f_1 = 0 \ldots f_n = 0,$$

homogènes en x_0, x_1 ... x_n, et ou $x_0 = 1$ n'a été introduit que pour rendre les formules homogènes.

Je dis que le déterminant

$$\Delta = \frac{\partial(f_0, f_1 \cdots f_n)}{\partial(x_0, x_1 \ldots x_n)}$$

s'annule pour les valeurs des x, s'il y en a, qui annulent à la fois

$f_0, f_1 \ldots f_n$; en effet p_i désignant le degré de f_i, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0\dfrac{\partial f_0}{\partial x_0}+x_1\dfrac{\partial f_0}{\partial x_1}\ldots+x_n\dfrac{\partial f_0}{\partial x_n}=p_0 f_0, \\ x_0\dfrac{\partial f_1}{\partial x_0}+x_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\ldots+x_n\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}=p_1 f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et si $f_0 \ldots$ sont nuls à la fois, on en conclut, comme nous l'avons annoncé, pour les valeurs des x qui annulent les f

$$\Delta = 0.$$

Il y a plus, si l'on suppose $p_0 = p_1 \ldots = p_n$, on aura pour les valeurs des n qui annulent les f

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_0}=0,\ \frac{\partial\Delta}{\partial x_1}=0 \ldots \frac{\partial\Delta}{\partial x_n}=0,$$

En effet :
des équations (1) on tire alors

$$\Delta x_0 = p\left[\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)}f_0+\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_0}\right)}f_1+\ldots\right],$$

et en différentiant

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_0}x_0+\Delta=p\Sigma f\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)}+p\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)},$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}x_0=p\Sigma f\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)}+p\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)},$$

. . . .

or si $f_0, f_1 \ldots$ sont nuls, Δ est nul ; et l'on a

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_i}=p\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\Delta}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)},$$

ou en vertu des relations connues entre un déterminant et ses mineurs

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_i}=0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

9. Solutions multiples. — Considérons n surfaces rapportées à des coordonnées homogènes $x_0 \dots x_n$,

$$f_1(x_0, x_1 \dots x_n) = 0, \qquad f_2 = 0 \dots f_n = 0.$$

Si la résultante provenant de l'élimination $n - 1$ inconnues $\frac{x_2}{x_0} \dots \frac{x_n}{x_0}$, a des racines multiples en $\frac{x_1}{x_0}$, et si à une racine multiple, correspond un seul système de valeurs des autres x, la solution considérée sera multiple. On peut supposer que l'on fasse varier les coefficients des f infiniment peu, cette singularité ne se présentera plus et l'on rentrera dans le cas général ; mais deux ou plusieurs points d'intersection seront infiniment voisins, en ces points les dx, les d^2x … pourront être les mêmes pour toutes les surfaces $f = 0$, qui auront alors un contact d'ordre plus ou moins élevé. On aura alors pour un même système de valeurs des dx

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial(f_1, \dots f_n)}{\partial(x_1, \dots x_n)} = 0\,;$$

et pour la même raison

$$\frac{\partial(f_1 \dots\dots f_n)}{\partial(x_0, x_2 \dots x_n)} = 0, \text{ etc.}$$

La condition (1), si elle avait lieu pour une infinité de valeurs des x, exprimerait que les $f = 0$ ont en commun une variété à une dimension au moins. Si elle avait lieu identiquement, on sait que les fonctions f seraient reliées entre elles par une relation.

10. Démonstration d'un Lemme. — *Si deux équations algébriques*

$$f(x_1, \dots x_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x_1, \dots x_n) = 0$$

représentent la même surface, c'est-à-dire sont satisfaites pour les *mêmes valeurs des x, les coefficients des mêmes arguments sont égaux à un facteur constant près.*

Donnons en effet à $x_1, \ldots x_{n-1}$ des valeurs $a_1 \ldots a_{n-1}$ les équations

$$f(a_1 \ldots a_{n-1}, x_n) = 0, \qquad \varphi(a_1 \ldots a_{n-1}, x_n) = 0$$

devront fournir pour x_n les mêmes valeurs, les coefficients de $x^0_n, x_n, x^2_n, \ldots$ devront être les mêmes à un facteur indépendant de x_n près. Or ces coefficients sont des polynômes entiers en $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$, ils devront être égaux deux à deux au même facteur près k, si ce facteur k est indépendant des a, ils ont leurs coefficients proportionnels et par suite f et φ ont leurs coefficients égaux au facteur k près.

Mais k ne peut dépendre des a, sans quoi on aurait

$$f(x_1 \ldots x_n) = k(x_1 \ldots x_{n-1})\, \varphi(x_1 \ldots x_n),$$

et il faudrait que $\varphi = 0$ et $k\varphi = 0$ représentent la même surface, ce qui est absurde, car $k\varphi = 0$ représente les points de $\varphi = 0$ et de $k = 0$.

On *identifie* deux équations en écrivant qu'elles ont leurs coefficients proportionnels.

11. Coordonnées tangentielles. — Observons maintenant que l'équation du plan tangent à la surface

$$f(x_1, \ldots x_n) = 0$$

au point $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ peut se mettre sous la forme

$$(x_1 - \alpha_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \ldots (x_n - \alpha_n)\frac{\partial f}{\partial \alpha_n} = 0$$

et si l'on rend f homogène par l'introduction de la variable fictive $x_0 = \alpha_0 = 1$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \ldots x_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} - \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \ldots x_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} + \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = 0.$$

Cherchons la condition pour que la surface $f(x_1 \dots x_n) = 0$ de degré m soit touchée par le plan

$$(1) \qquad \xi_1 x_1 + \dots \xi_n x_n + \xi_0 = 0.$$

soit $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ le point de contact ; on aura

$$(2) \qquad f(\alpha_1, \dots \alpha_n) = 0,$$

et en identifiant l'équation (1) avec l'équation du plan tangent en

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \alpha_0 = 1,$$

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} + x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} = 0,$$

on a

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \frac{1}{\xi_0} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{1}{\xi_1} \dots = \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} \frac{1}{\xi_n},$$

ou

$$(4) \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = \xi_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots \xi_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = \xi_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}.$$

En éliminant $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n$ entre (2) et (4), on aura une relation en $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_n$ qui aura lieu, si le plan (1) touche la surface $f = 0$, et seulement dans ce cas.

Cette équation est l'*équation tangentielle* de la surface. Elle sera du degré $m(m-1)^{n-1}$ par rapport à ξ_1 et aussi par rapport à $\xi_2, \xi_3 \dots$ Mais les ξ n'y entreront que sous forme de déterminants et n'y figureront que dans une colonne (Voir § 7, la fin).

Donc *le degré de l'équation tangentielle sera* $m(m-1)^{n-1}$ par rapport aux $\frac{\xi_i}{\xi_0}$ et par suite par rapport à tous les ξ.

Supposons

$$f = \sum_0^n a_{ij} x_i x_j,$$

les équations (3) pourront s'écrire

$$(3 \text{ bis}) \qquad \frac{1}{\xi_0}(a_{00}\alpha_1 + a_{01}\alpha_1 \dots + a_{0n}\alpha_n) = \dots$$

$$= \frac{f(\alpha_0 \dots)}{\alpha_0 \xi_0 + \dots \alpha_n \xi_n},$$

de sorte que l'on pourra remplacer $f(\alpha_0 \ldots) = 0$ par

$$(5) \qquad \alpha_0\xi_0 + \alpha_1\xi_1 \ldots + \alpha_n\xi_n = 0$$

d'ailleurs (3 bis) pourront, en égalant ces rapports à $-t$, s'écrire

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{00}\alpha_0 + \ldots + a_{0n}\alpha_n + t\xi_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n0}\alpha_0 + \ldots + a_{nn}\alpha_n + t\xi_n = 0 \end{array} \right.$$

Eliminant les α et t entre (5) et (6), on a l'équation tangentielle

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} & \xi_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \xi_n \\ \xi_0 & \xi_1 & \ldots & \xi_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on suppose $\xi_0 = 1$, les coordonnées tangentielles $\xi_1, \ldots$ sont les inverses des coordonnés à l'origine du plan tangent. En général on appellera coordonnées tangentielles d'un plan, les inverses des coordonnées à l'origine de ce plan. Dans ce système de coordonnées, un plan a des coordonnées et pas d'équation, un point n'a plus de coordonnées, mais il a une équation qui est du premier degré, en effet

$$a_1\xi_1 + \ldots a_n\xi_n + \xi_0 = 0$$

exprime que le plan

$$x_1\xi_1 \ldots + x_n\xi_n + \xi_0 = 0$$

passe par le point fixe $a_1 \ldots a_n$.

Quand on a l'équation tangentielle $\varphi(\xi_1 \ldots \xi_n)\ 0 =$ d'une surface, pour avoir son équation ordinaire ou *cartésienne*, il faut chercher l'enveloppe du plan

$$(1) \qquad x_1\xi_1 + \ldots x_n\xi_n + \xi_0 = 0, \qquad (\xi_0 = 1),$$

sachant que

$$(2) \qquad \varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) = 0$$

Il faut donc éliminer les ξ entre cette équation (1) et

$$\frac{d\varphi}{d\xi_1} - x_1 = 0_1 \ldots \frac{d\varphi}{d\xi_n} - x_n = 0$$

et on peut remplacer (2) par

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} - x_0 = 0.$$

de sorte que l'on passe de l'équation tangentielle à l'équation cartésienne, comme on passe de cette dernière à la première, et il en résulte que si le degré de l'équation tangentielle est m, celui de l'équation ordinaire sera $m(m-1)^n$, sorte de paradoxe que l'on explique en admettant que si l'on appelle classe d'une surface, le degré de son équation tangentielle, la surface la plus générale de sa classe, n'est pas la plus générale de son degré et vice versa.

12. Loi de dualité. — Nous avons dit qu'en coordonnées tangentielles, un plan était déterminé par ses coordonnées, à savoir les inverses de ses coordonnées à l'origine. Au contraire, un point est représenté par une équation du premier degré.

(1) $$a_1\xi_1 + \ldots a_n\xi_n + a_0 = 0$$

dont les coordonnées s'obtiennent en cherchant l'enveloppe du plan

(2) $$\xi_1 x_1 + \ldots \xi_n x_n + 1 = 0$$

ou le point $a_1, \ldots a_n$ par lequel il passe en vertu de (1).

Une équation $\varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) = 0$ représente l'enveloppe du plan (1), c'est l'équation tangentielle d'une surface.

Deux équations entre $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ à savoir

(3) $$\varphi_1(\xi_1 \ldots) = 0, \qquad \psi_2(\xi_1 \ldots \xi_n) = 0$$

représenteront encore une enveloppe du plan (1) qui sera une surface développable et ainsi de suite.

Supposons les équations (3) du premier degré et de la forme

$$a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \ldots + a_{1n}\xi_n + a_{10} = 0$$
$$a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \ldots + a_{2n}\xi_n + a_{20} = 0$$

elles expriment que le plan (2) passe par les points $\frac{a_{11}}{a_{10}}, \frac{a_{12}}{a_{10}} \ldots$ et $\frac{a_{21}}{a_{20}}, \frac{a_{21}}{a_{20}} \ldots$ ou par la droite qui unit ces points, on peut donc dire que deux équations du premier degré, représentent une droite ...

que p équations du premier degré représentent la partie commune à $n-p$ plans.

Considérons une surface représentée par son équation tangentielle

$$\varphi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = 0;$$

$\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ déterminent un plan tangent à cette surface. La figure formée des intersections de n — 1 plans, a pour équations

$$\frac{\xi'_1 - \alpha_1}{a_1} = \frac{\xi'_2 - \alpha_2}{a_2} \dots = \frac{\xi'_n - \alpha_n}{a_n},$$

$\xi'_1 \dots$ désignant les coordonnées courantes, et cette variété est satisfaite pour $\xi'_1 = \alpha_1$, $\xi'_2 = \alpha_1 \dots$ Si l'on veut qu'elle soit contenue dans le plan $\xi_1 \dots \xi_n$ qui touche les surfaces et dans le plan voisin $\xi_1 + d\xi_1$, $\xi_1 + d\,\xi, \dots_2$ il faudra prendre $\alpha_1 = \xi_1, \dots \alpha_n = \xi_n$ et $a_1 = d\xi_1$, $a_2 = d\xi_2 \dots$ ce qui donnera

$$\frac{\xi'_1 - \xi_1}{d\xi_1} \dots = \frac{\xi'_n - \xi_n}{d\xi_n};$$

or on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\, d\xi_1 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_n}\, d\xi_n = 0;$$

en éliminant entre ces équations $d\xi_1$, $d\xi_2 \dots$ on aura une équation qui représentera l'ensemble des figures contenues dans deux plans tangents voisins ; cette équation étant

$$(\xi'_1 - \xi_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + \dots (\xi'_n - \xi_n)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_n} = 0,$$

c'est-à-dire du premier degré, représente un point qui, étant sur tous les plans tangents infiniment voisins de $\xi_1 \dots \xi_n$ ne peut être que le point de contact de ce plan.

La théorie des coordonnées tangentielles, conduit à écrire des équations qui peuvent être interprétées de manière à faire correspondre deux à deux tous les théorèmes de géométrie ou d'analyse, car pour nous, l'analyse comprend, ou ne se distingue même pas de la géométrie.

Ce que nous avons appelé *point* au début de cette étude c'est l'ensemble de n nombres qui peuvent représenter des quantités arbitraires, donc nous pouvons appeler *point* un *plan* défini par ses coordonnées, en sorte qu'à tout théorème relatif à des coordonnées ordinaires correspondra un théorème relatif à des coordonnées tangentielles, pour passer de l'un à l'autre de ces théorèmes il suffira de permuter dans leurs énoncés les mots plans et point, enveloppe et lieu, etc.

13. Application des principes précédents. — La loi de dualité dont il a été question tout à l'heure permet d'énoncer les principes suivants : n surfaces dans l'espace à n dimensions et de classes $q_1, q_2 \dots q_n$, ont $q_1 q_2 \dots q_n$, plans tangents communs. Ces plans ne peuvent pas, en général, être choisis arbitrairement.

L'équation générale des surfaces qui admettent les mêmes plans tangents communs que les surfaces dont les équations tangentielles sont

$$\varphi_1 = 0 \dots \varphi_n = 0$$

est

$$\lambda_1\varphi_1 + \dots \lambda_n\varphi_n = 0,$$

etc.

CHAPITRE VII

—

LES ESPACES HOMOGÈNES

1. Coordonnées homogènes. — Soient x_0, x_1 ... x_n les coordonnées d'un point dans l'espace à $n + 1$ dimensions. Supposons que nous ne considérions que des équations homogènes, une équation (homogène)

$$f(x_0, x_1 \dots x_n) = 0$$

peut être envisagée à plusieurs points de vue :

1° On peut supposer $x_0 = 1$, cela se fait souvent, on l'a déjà vu, parce que le théorème des fonctions homogènes permet des simplifications, comme on en verra des exemples.

2° On peut supposer que x_0, x_1 ... sont les distances d'un point à des plans fixes.

3° On peut supposer que x_0, x_1 ... sont les distances d'un plan à des points fixes.

4° Enfin on peut donner à x_0, x_1 ... d'autres interprétations, mais nous nous bornerons pour le moment aux deux hypothèses qui précèdent, en laissant au lecteur le soin d'explorer la mine extrêmement riche dont nous ouvrons l'entrée.

Considérons donc $n + 1$ fonctions linéaires de x_n ... x_1 de la forme

$$(1) \qquad p^i_0 + p^i_1 x_1 + \dots p^i_n x_n = X_i,$$

ou p^i_1 ... p^i_n sont les cosinus directeurs des normales aux plans $X_i = 0$, les équations

$$X_0 = 0, X_1 = 0 \dots X_i = 0 \dots$$

représenteront nos $n+1$ plans, et X_i. en général, sera la distance du point $x_1, \dots x_n$ au plan $X_i = 0$.

Toute équation de la forme

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots + a_n X_n = 0$$

représentera un plan, si $a_0 \dots a_n$ sont des constantes, pourvu que cette formule ne soit pas une identité, ou une impossibilité, ce qui peut arriver, et en effet, elle peut s'écrire

$$a_0 (x_1 p^0{}_1 + x_n p^0{}_n + p_0) + a_1 (x_1 p^1{}_1 + \dots) \dots \dots = 0$$

ou

$$\begin{gathered} x_1 (a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1 \dots) \\ + x_2 (a_0 p^0{}_2 + a_1 p^1{}_2 + \dots) \dots + x_n (a_0 p^0{}_n + \dots) + a_0 p^0{}_0 + \dots = 0 \end{gathered}$$

elle se réduit à une absurdité si l'on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1 \dots a_n p^n{}_1 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 p^0{}_n + a_1 p^1{}_n \dots a_n p^n{}_n = 0 \end{array} \right.$$

et à une identité, si en outre,

$$(3) \qquad a_0 p^0{}_0 + \dots a_n p^n{}_0 = 0.$$

ce sera une absurdité si posant

$$\Sigma \pm p^0{}_0 p^1{}_1 \dots p^n{}_n = P,$$

on a

$$a_0 : \frac{\partial P}{\partial p^0{}_0} = a_1 : \frac{\partial P}{\partial p^1{}_0}, = \dots$$

Il existe d'ailleurs entre les X une relation que l'on obtient en éliminant les x entre les équations (1), ce qui donne

$$\left| \begin{array}{l} p^0{}_1 \dots p^0{}_n, X_0 - p^0{}_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p^n{}_1 \dots p^n{}_n, X_n - p^n{}_0 \end{array} \right| = 0$$

ou

$$(4) \qquad X_0 \frac{\partial P}{\partial p^0{}_0} + \dots X_n \frac{\partial P}{\partial p^n{}_0} - P = 0,$$

et cette formule est l'identité en question. Il en résulte que

$X^2_0 + X^2_1 + \dots$ est susceptible d'un minimum donné par les formules

$$X_0 dX_0 + \dots X_n dx_n = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial p^0_0} dX_0 + \dots = 0$$

d'où l'on tire

$$X_0 : \frac{\partial P}{\partial p^0_0} = X_1 : \frac{\partial P}{\partial p^1_0}, \dots = X_n \frac{\partial P}{\partial p^n_0}$$
$$= \frac{P}{\left(\frac{\partial P}{\partial p^0_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial p^1_0}\right)^2 + \dots}$$

2. Usage des coordonnées homogènes. — En résumé, si les plans

$$X_0 = 0. \dots X_n = 0$$

forment un simplex, dit simplex de *référence*, toute équation entre $X_0, \dots X_n$ représentera une surface, et sans nuire à la généralité, on peut toujours supposer cette équation homogène : car si elle ne l'était pas, on la rendrait homogène en multipliant ses termes de degrés inférieurs par des puissances convenables de

$$\frac{1}{P}\left(X_1 \frac{\partial P}{\partial p^0_0} + X_1 \frac{\partial P}{\partial p^1_0} \dots\right),$$

qui en vertu de l'équation (4) du § précédent est identiquement égale à un.

Nous poserons une fois pour toutes

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial p^0_i} = \sigma_i.$$

et nous aurons l'identité fondamentale

$$\sigma_0 X_0 + \sigma_1 X_1 \dots + \sigma_n X_n = 0$$

qu'on appelle quelquefois l'équation du plan de l'infini, [1], parce

[1] Le premier membre de cette identité est à un facteur près le volume du simplex, décomposable en $n + 1$ simplex, ayant leur sommet commun en $X_0, X_1 \dots$ et pour bases les bases du simplex de référence.

que si l'on adjoint à cette équation, celle de $n - 1$ plans, les solutions en $x_1 \dots x_n$, seront infinies.

Si un plan est représenté par

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 \dots + a_n X_n = 0$$

son équation ordinaire sera

$$x_1 (a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1 \dots) + x_2 (a_0 p^0{}_2 + a_1 p^1{}_2 \dots) \dots = 0$$

les coefficients de sa normale seront

$$a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1 \dots, \; a_0 p^0{}_2 + a_1 p^1{}_2 \dots, \dots \; a_0 p^0{}_n + a_1 p^1{}_n \dots$$

La condition pour que deux plans

$$\Sigma a_i X_i = 0, \qquad \Sigma b_i X_i = 0$$

soient rectangulaires sera donc

$$(a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1 \dots)(b_0 p^0{}_1 + b_1 p^1{}_1 \dots) \dots$$
$$+ (a_0 p^0{}_n + a_1 p^1{}_n \dots)(b_0 p^0{}_n + b_1 p^1{}_n \dots) = 0$$

pour qu'ils soient parallèles, il faudra que

$$\frac{a_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1}{b_0 p^0{}_1 + a_1 p^1{}_1} \dots = \dots \frac{a_0 p^0{}_n + a_1 p^1{}_n}{b_0 p^0{}_n + b_1 p^1{}_n} \dots$$

Les plans $\Sigma a_i X_i = 0$ et $\Sigma (a_i + \sigma_i) X_i = 0$ sont parallèles, car leurs équations ne diffèrent que par un terme constant.

Cherchons les distances des sommets du simplex de référence au plan.

$$\Sigma a_i X_i = 0.$$

Cette équation équivaut à

$$\Sigma a_i (x_1 p^i{}_1 + x_2 p^i{}_2 \dots) = 0$$

le point où se coupent les plans du simplex de référence, abstraction faite de $X_j = 0$, est donné par

$$p^1{}_1 x_1 + p^1{}_2 x_2 \dots + p^1{}_0 = 0,$$

. . . .

il faut tirer $x_1 \dots x_n$ de là pour les porter dans

$$\Sigma a_i (x_1 p^i{}_1 + x_2 p^i{}_2 \dots).$$

et diviser par

$$\sqrt{(\Sigma_i p^i{}_1)^2 + (\Sigma\, a_i p^i{}_2)^2 \dots}$$

or, l'expression $\Sigma a_j (x_1 p^j{}_1 \ldots)$ se réduit à $a_j X_i$, ou à

$$a_j(p^j{}_0 + p^j{}_1 x_1 + \ldots) = u$$

Il faut donc éliminer les x entre

$$p^1{}_0 + p^1{}_1 x_1 \ldots = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$p^j{}_0 + p^j{}_1 x_1 \ldots = \frac{u}{a_j}$$

$$\cdots\cdots$$

ce qui donne

$$-\frac{u}{a_j}\frac{\partial P}{\partial p_0}, + P = 0$$

donc

$$\frac{u}{a_j} = \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial p^j{}_0}} = \frac{1}{\sigma_j}$$

les a_j sont donc proportionnels aux distances des sommets du simplex de référence au plan $\Sigma a_j X_j = 0$. En sorte que si $\delta_0, \delta_1 \ldots \delta_n$ sont ces distances, le plan $\Sigma a_j X_j = 0$ peuvent aussi s'écrire

(1) $$\Sigma \delta_i X_i = 0$$

Cette équation met en évidence une réciprocité entre les propriétés du plan et du point. Si l'on considère les δ comme donnés, et les X comme variables, l'équation (1) représente un lieu de points, un plan. Si l'on y regarde les X comme donnés et les δ comme variables, nous pouvons regarder l'équation comme représentant un point fixe par lequel passent tous les plans (1), quand on y suppose

$$\Sigma \delta_j X'_j = 0,$$

les X ayant des valeurs données, et les X' comme coordonnées courantes.

Toute relation homogène entre les δ peut être censée représenter une surface, en effet si l'on considère une équation

(2) $$f(\delta_0, \delta_1 \ldots \delta_n) = 0$$

et le plan

(1) $$\Sigma \delta_i X_i = 0$$

en vertu de la relation (2), le plan enveloppera une surface qui pourra être censée représentée par l'équation (2) ; pour avoir l'équation de cette enveloppe, il faudra éliminer les α entre

$$f(1, \alpha_1 \dots \alpha_n) = 0$$
$$X_0 + \Sigma X_i \alpha_i = 0$$

et les équations obtenues, en éliminant les $d\alpha$ entre

$$X_1 d\alpha_1 + X_n d\alpha_n = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0,$$
$$X_2 d\alpha_2 + X_n d\alpha_n = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = 0.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

à savoir

$$\frac{1}{X_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{X_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \dots = \frac{1}{X_n}\frac{\partial f}{\partial \alpha_n}.$$

ce qui revient à éliminer $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ entre

$$f(\delta_0, \delta_1 \dots \delta_n) = 0,$$
$$\Sigma\delta_1 X_1 = 0,$$
$$X_1 : \frac{\partial f}{\partial \delta_1} = \dots = X_n : \frac{\partial f}{\partial \delta_n} = \frac{X_1\delta_1 + \dots X_2\delta_2 \dots X_n\delta_n}{\delta_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_1} + \delta_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_2} + \dots}.$$

et le dernier membre est égal à $X_0 \frac{\partial f}{\partial \delta_0}$, en vertu du principe des fonctions homogènes. En résumé : l'équation $f(\delta_0, \dots \delta_n) = 0$ représente *en coordonnées tangentielles*, comme l'on dit, la surface obtenue en éliminant les δ entre

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\delta_0, \dots \delta_n) = 0, \quad \Sigma\delta_i X_i = 0, \\ X_0 : \frac{\partial f}{\partial \delta_0} = X_1 : \frac{\partial f}{\partial \delta_1} = \dots X_n : \frac{\partial f}{\partial \delta_n}. \end{array} \right.$$

Si f est du premier degré, les dernières équations se réduisent à $\frac{X_0}{a_0} = \frac{X_1}{a_1} \dots$ les a désignant des constantes, et la méthode ne donne rien, ou si l'on veut un point fixe par lequel passe le plan

$$\Sigma\delta_i X_i = 0.$$

On a beaucoup étudié le cas où $n = 2$, le simplex est alors un triangle, le cas où $n = 3$ fournit déjà moins de sujets d'études à cause de la complication des formules, le cas général a été peu exploré, et si nous l'avons signalé c'est surtout pour faire ressortir la notion de plan de l'infini.

3. Théorème de Poinsot. — Nous allons généraliser la notion des coordonnées homogènes et nous désignerons par X_1, X_2 .... non plus les distances d'un point à des plans fixes, mais ses distances normales à des surfaces fixes. Ainsi S_1, S_2 ... désignant des surfaces, pouvant se réduire à de simples points, nous désignerons par X_i la longueur de la normale menée du point $x_1, x_2 \dots x_n$ à la surface S_i, et par $a_{1i}, \dots a_{ni}$ les coordonnées du point d'incidence de cette normale :
nous poserons

$$f(X_1, X_2 \dots X_k) = 0;$$

cette équation représentera une surface à laquelle nous allons mener un plan tangent, une normale.

Si nous appelons $\cos \alpha_{1i}$, $\cos \alpha_{2i}$ ... les cosinus directeurs de la droite X_i et $\cos \gamma_1$, $\cos \gamma_2$ ... ceux de la normale à $f = 0$, nous aurons

$$(1) \qquad \cos \gamma_1 = \frac{1}{N} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \dots}$$

on a évidemment

$$(2) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + .$$

mais

$$X_i^2 = (x_1 - a_{1i})^2 + (x_2 - a_{2i})^2 + \dots,$$

alors

$$X_i dX_i = (x_1 - a_{1i})(dx_1 - da_{1i}) + (x_2 - a_{2i})(dx_2 - da_{2i}) \dots,$$

ou

$$(3) \qquad dX_i = \frac{x_1 - a_{1i}}{X_i}(dx_1 - da_{1i}) + \frac{x_2 - a_{2i}}{X_i}(dx_2 - da_{2i}) \dots;$$

mais da_{1i}, da_{2i} ... sont des déplacements effectués sur la surface S_i; $\frac{x_1 - a_{1i}}{X_i}$, ... sont les cosinus directeurs de la normale à S_i, que nous avons appelés $\cos \alpha_{1i}$, $\cos \alpha_{2i}$ ..., donc

$$da_{1i}\frac{x_1 - a_{1i}}{X_i} + \ldots = 0,$$

ou

$$da_{1i}\cos \alpha_{1i} + da_{2i}\cos \alpha_{2i} \ldots = 0,$$

et l'on a au lieu de (3)

$$dX_i = \frac{x_1 - a_{1i}}{X_i}dx_1 + \ldots,$$

ou

$$dX_i = \cos \alpha_{1i}dx_1 + \cos \alpha_{2i}dx_2 + \ldots;$$

(2) devient alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial X_1}(\cos \alpha_{11}dx_1 + \cos \alpha_{21}dx_2 \ldots) + \ldots,$$

d'où l'on déduit $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ou

$$N\cos \gamma_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}\cos \alpha_{11} + \frac{\partial f}{\partial X_2}\cos \alpha_{12} + \ldots,$$
$$N\cos \gamma_2 = \frac{\partial f}{\partial X_1}\cos \alpha_{21} + \frac{\partial f}{\partial X_2}\cos \alpha_{22} + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ce qui montre que la longueur N comptée sur la normale cherchée est la résultante des droites

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial X_2} \ldots$$

comptées sur les normales X_1, X_2 ...

Si X_1, X_2 sont des distances normales du point x_1, x_2 ... x_n à des plans fixes, le plan tangent aura pour équation

$$(u_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (u_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots = 0,$$

u_1, u_2 ... désignant les coordonnées courantes, or

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

l'équation du plan tangent devient alors

$$(u_1 - x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\cdots\right] + (u_2 - x_2)\left[\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \cdots\right]\cdots = 0,$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}\left[(u_1 - x_1)\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + (u_2 - x_2)\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\cdots\right] + \cdots = 0;$$

mais $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial X_1}{\partial x_2}$ ... sont les coefficients du plan $X_1 = 0$, etc. ; donc U_i désignant ce qui devient X_i pour $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ ... on a pour l'équation cherchée du plan tangent

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(U_1 - X_1) + \frac{\partial f}{\partial X_2}(U_2 - X_2)\cdots = 0;$$

et si f est homogène en X_1 ... X_k

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}U_1 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_k}U_k = \Sigma\frac{\partial f}{\partial X_i}X_i = mf = 0,$$

m désignant le degré de l'homogénité, donc enfin

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}U_1 + \cdots \frac{\partial f}{\partial X_k}U_k = 0$$

est la forme de l'équation d'un plan tangent en coordonnées homogènes. Tout ce qui précède constitue le théorème de Poinsot dont le lecteur devine les nombreuses applications : (Tracé de la normale aux coniques, etc.)

4. Théorème analogue. — A côté du théorème de Poinsot vient se placer un théorème qui a avec lui de grandes analogies et que j'ai donné dans les nouvelles annales mathématiques.

Considérons un plan mobile

(1) $$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_nx_n + a_0 = 0, \ (\Sigma a^2 = 0),$$

soient δ_1, δ_2 ... δ_k les distances normales de ce plan à des surfaces S_1, S_2 ... pouvant se réduire à des points. (δ_i est la normale commune au plan (1) et à la surface S_i) si l'on pose

$$f(\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_k) = 0,$$

le plan (1) enveloppera une surface. Soient

$$x_{1i},\ x_{2i}\ \dots\ x_{ni}$$

les coordonnées du point ou le plan (1) et la droite δ_i se rencontrent;

$$\alpha_{1i},\ \alpha_{1i}\ \dots\ \alpha_{ni}$$

les coordonnées de point ou la surface S_i rencontre la droite δ_i; on aura

$$\delta_i^2 = (x_{1i} - \alpha_{1i})^2 + (x_{2i} - \alpha_{2i})^2 + \dots, \tag{2}$$

et aussi

$$\delta_i = a_1\alpha_{1i} + a_2\alpha_{21} \dots + a_0. \tag{3}$$

L'enveloppe du plan (1) est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\, da_1 + \dots x_n da_n + da_0 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \delta_1}\, d\delta_1 + \dfrac{\partial f}{\partial \delta_2}\, d\delta_2 + \ \dots\ = 0, \end{array}\right. \tag{4}$$

en différentiant (3) on a

$$\begin{aligned} d\delta_i = {} & a_1 d\alpha_{1i} + a_2 d\alpha_{2i} \dots \\ & + \alpha_{1i} da_1 + \dots + da_0; \end{aligned}$$

ce qui est écrit sur la première ligne est nul, parce que le déplacement α_{1i} … est normal à la direction a_1, a_2 .., donc

$$d\delta_i = \alpha_{1i} da_1 + \dots + da_0,$$

et la seconde équation (4) donne

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta_i}(\alpha_{1i} da_1 + \alpha_{2i} da_2 \dots + da_0) = 0.$$

or on a

$$\begin{aligned} & x_1 da_1 + x_2 da_2 \dots + da_0 = 0, \\ & a_1 da_1 + a_2 da_2 \dots = 0; \end{aligned}$$

éliminant da_0 on a

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta_i}(\alpha_{1i} da_1 + \alpha_{2i} da_2 \dots - x_1 da_1 - x_2 da_2 \dots) = 0;$$

en éliminant da_n et en égalant à zéro les coefficients des autres da_i, on a

$$\frac{\Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta i}(\alpha_{1i} - x_1)}{a_1} = \frac{\Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta i}(\alpha_{2i} - x_2)}{a_2} = \dots$$
$$= \Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta_i}\left[a_1(\alpha_{1i} - x_1)\dots\right] = 0,$$

donc

$$x_1 \Sigma \frac{\partial f}{\partial \delta i} = \Sigma \alpha_{1i} \frac{\partial f}{\partial \delta i} \dots;$$

et le point ou le plan mobile touche son enveloppe, est le centre de gravité de masses $\frac{\partial f}{\partial \delta_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \delta_2}$ ... placées aux pieds des normales aux surfaces S_i sur le plan.

CHAPITRE VIII

—

SURFACES DU SECOND DEGRÉ

1. Centres. — Soit $F = 0$ l'équation d'une surface du second degré, nous pouvons supposer $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ et poser

$$F = \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2a_{01} x_1 + \dots 2a_{0n} x_n + a_{00},$$

et si l'on rend F homogène par l'introduction d'une variable fictive $x_0 = 1$

$$F = \sum_{0}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

Nous poserons une fois pour toutes

$$f = \sum_{1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

c'est la partie homogène et du second degré de F.

Transformons les coordonnés et posons

$$x_1 = a_1 + \xi_1 \qquad \dots x_n = a_n + \xi_n, \dots,$$

$a_1, a_2 \dots a_n$ désignant les coordonnées de la nouvelle origine et $\xi_1, \xi_2 \dots$ les nouvelles coordonnées courantes, l'équation $F = 0$ deviendra

$$F(\xi_1 + a_1, \xi_2 + a_2 \dots) = 0,$$

ou

$$F(a_1 \dots a_n) + \left(\xi_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} \dots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial a_n}\right) + f(\xi_1 \dots \xi_n) = 0.$$

On peut en général disposer de a_1, a_2 ... a_n de manière à satisfaire aux équations

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \qquad \ldots \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0,$$

qui peuvent aussi s'écrire

$$(1 \text{ bis}) \qquad \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 \ldots + \alpha_{1n}a_n + \alpha_{01} = 0, \ldots$$

supposons d'abord les équations (1) ou (1 bis) compatibles, on en déduira un et un seul système de valeurs des a, et l'équation de la surface prendra la forme

$$(2) \qquad f(\xi_1 \ldots \xi_n) + F(a_1 \ldots a_n) = 0$$

alors à tout point $\xi_1 \ldots \xi_n$ de la surface, correspondra un autre point $-\xi_1$, $-\xi_2 \ldots -\xi_n$ également situé sur la surface, en sorte que la nouvelle origine partagera en deux parties égales toute corde qui le traversera. Le point a_1, a_2 ... a_n est ce que l'on appelle un *centre* et l'on peut dire qu'en général, les surfaces du second degré ont un centre et un seul.

Quand le déterminant

$$\Delta = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$$

sera nul, on ne pourra plus en général satisfaire aux équations (1) ou (1 bis) et on ne pourra plus en général ramener l'équation de la surface à la forme simple (2). Si enfin les équations (1) sont indéterminées, il y aura une infinité de centres situées sur des variétés du premier degré et l'équation de la surface pourra d'une infinité de manières se ramener à la forme (2).

2. Diamétraux. — Conservons les notations du § précédent et cherchons le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée par ses cosinus directeurs $\nu_1 \ldots \nu_n$ soient

$$(1) \qquad x_1 = \mu_1 + \nu_1 t, \qquad \ldots x_n = \mu_n + \nu_n t$$

les équations d'une droite parallèle à la direction $\nu_1 \ldots \nu_n$; pour avoir ses intersections avec la surface $F = 0$, on éliminera les x entre $F = 0$ et (1) ce qui donnera

$$F(\mu_1 + \nu_1 t, x_2 + \nu_2 t, \ldots) = 0$$

ou

$$(2)\quad F(\mu_1, \dots \mu_n) + t\left(\frac{\partial F}{\partial \mu_1}\nu_1 + \dots \frac{\partial F}{\partial \mu_n}\nu_n\right) + t^2 f(\nu_1 \dots \nu_n) = 0;$$

Equation du second degré en t, en portant les valeurs de t qui satisfont à cette équation dans (1) on en déduirait deux systèmes de valeurs pour $x_1 \dots x_n$, ce qui montre que toute droite rencontre une surface du second degré en deux points (du moins en général) or l'équation (2) fait connaître les distances t du point $\mu_1 \dots \mu_n$ aux points d'intersection de la droite (1) avec la surface ; si l'on veut que le point $\mu \dots \mu_n$ soit le milieu de l'intervalle qui sépare les points d'intersection en question, il faudra que l'équation (2) ait deux racines en t égales et de signes contraires, ou que

$$(3)\quad \frac{\partial F}{\partial \mu_1}\nu_1 + \frac{\partial F}{\partial \mu_2}\nu_2 \dots + \frac{\partial F}{\partial \mu_n}\nu_n = 0.$$

c'est en regardant $\mu_1 \dots \mu_n$ comme des coordonnées courantes, l'équation du lieu des milieux des cordes parallèles à la direction ν_1, ν_2 … ν_n. Cette équation étant du premier degré représente un plan. Ainsi le lieu des milieux d'une corde parallèle à une direction donnée est pour une surface du second degré un plan, auquel on donne le nom de *plan diamétral conjugué de la direction donnée*.

L'équation du plan diamétral (3) que nous écrirons

$$(4)\quad \frac{\partial F}{\partial x_1}\nu_1 + \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\nu_n = 0,$$

en remplaçant μ_1, μ_2 … par x_1, x_2, est satisfait pour

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \qquad \dots \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0;$$

ce qui montre que les plans diamétraux passent par le centre quand il y en a un. L'équation (4) peut aussi s'écrire

$$(5)\quad x_1\frac{\partial f}{\partial \nu_1} + \dots x_n\frac{\partial f}{\partial \nu_n} + 2a_{01}\nu_1 + \dots 2a_{0n}\nu_n = 0$$

elle est illusoire quand on a à la fois

$$(6)\quad \frac{\partial f}{\partial \nu_1} = 0, \qquad \dots \frac{\partial f}{\partial \nu_n} = 0$$

ou

$$a_{11}\nu_1 + \ldots a_{1n}\nu_n = 0, \ldots$$

c'est-à-dire que cette particularité ne peut se présenter que si $\Delta = 0$, elle peut être indéterminée, si l'on a en outre

$$\alpha_{01}\nu_1 + \ldots \alpha_{0n}\nu_n = 0.$$

Lorsque les équations (5) ont lieu, on a aussi

$$\nu_1 \frac{\partial f}{\partial \nu_1} + \ldots \nu_n \frac{\partial f}{\partial \nu_n} = 2f(\nu_1 \ldots \nu_0) = 0,$$

et les droites de direction $\nu_1, \nu_2 \ldots$, en vertu de (2), rencontrent la surface en *un* seul point à distance finie, et en un autre situé à l'infini, alors en posant la relation (2) au lieu d'un plan diamétral proprement dit, on a le lieu des droites parallèles à la direction $\nu_1, \nu_2 \ldots$ qui rencontrent la surface en deux points à l'infini, les droites qui rencontrent la surface en un point à l'infini sont dites asymptotiques.

3. Plans principaux. — Un plan principal est un plan diamétral perpendiculaire à ses cordes conjuguées. Si le plan diamétral (§ précédent for. (5))

$$(1) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial \nu_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial \nu_n} + 2\alpha_{01}\nu_1 \ldots + 2\alpha_{0n}\nu_n = 0,$$

est principal, on doit avoir

$$\frac{1}{\nu_1}\frac{\partial f}{\partial \nu_1} = \frac{1}{\nu_2}\frac{\partial f}{\partial \nu_2} \ldots = \frac{1}{\nu_n}\frac{\partial f}{\partial \nu_n}.$$

ces équations déterminent les ν, et pour les calculer, on égalera la suite de rapports précédents à $2\,s$ ce qui donnera

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial \nu_1} = 2s\nu, \qquad \ldots \frac{\partial f}{\partial \nu_n} = 2s\nu_n.$$

ou en divisant par 2 et en remplaçant les dérivées par leurs développements

$$(3) \qquad \begin{cases} (a_{11} - s)\nu_1 + a_{12}\nu_2 \ldots + a_{1n}\nu_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\nu_1 + a_{n2}\nu_2 + \ldots (a_{nn} - s)\nu_n = 0, \end{cases}$$

et en éliminant les ν

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad S = 0,$$

de là on tirera s, et les équations (3) pour chaque valeur de s feront connaître un système de valeurs de $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n$; les ν une fois connus, l'équation (1) donnera autant de plans principaux que de valeurs de s, l'équation (4) étant de degré n, il y aura n plans principaux et n directions principales $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n$.

En éliminant $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n$ entre les équations

$$(5)\qquad \frac{1}{\nu_1}\frac{\partial f}{\partial \nu_1} = \frac{1}{\nu_2}\frac{\partial f}{\partial \nu_2} \dots = \frac{1}{\nu_n}\frac{\partial f}{\partial \nu_n},$$

et (1) ou

$$(1)\qquad \nu_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \nu_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \nu_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

on aura une équation du degré n qui représentera à la fois les n plans principaux.

On peut faire cette élimination comme il suit : à l'aide de (5), (1) devient

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

ou

$$(6)\qquad \Sigma \nu_i \frac{\partial f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}} = 0,$$

nouvelle équation du premier degré en $\nu_1, \nu_2 \dots$, dans laquelle on peut encore remplacer ν_1, ν_2 par $\frac{\partial f}{\partial \nu_1}, \frac{\partial f}{\partial \nu_2}$ ce qui donne

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial \nu_i} \frac{\partial f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots\right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}} = 0,$$

ou en ordonnant par rapport aux ν

$$(7)\qquad \Sigma \nu_i \frac{\partial \dots}{\partial \dots} = \sigma,$$

et ainsi de suite, les équations (5), (6), (7), ... peuvent s'écrire :

$$(8) \qquad \Sigma\nu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad \Sigma\nu_i \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \Sigma\nu_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \dots$$

en posant

$$y_i = \frac{\partial f(x_1 \dots)}{\partial x_i}, \qquad z_i = \frac{\partial f(y_1 \dots)}{\partial y_i}, \qquad t_i = \frac{\partial f(z_1 \dots)}{\partial z_i} \dots,$$

en éliminant alors les ν entre (8), on a l'équation des plans principaux

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

4. Propriétés des plans principaux. — L'équation (4) est toujours du degré n, car le coefficient de s^n est l'unité, mais elle peut avoir des racines multiples, ce qui peut faire disparaître des directions principales, et par suite, des plans principaux. En second lieu les équations (3) peuvent être indéterminées ; pour certaines valeurs de s, certaines directions principales peuvent donc être indéterminées. Enfin certaines directions principales peuvent être asymptotiques et le plan principal correspondant peut être rejeté à l'infini ou être indéterminé, mais cela ne pourra avoir lieu que si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

dernier terme de l'équation en s ou discriminant de f est nul.

Supposons les équations (3) *indéterminées, je dis que l'équation* $S = 0$ *aura une racine multiple, et réciproquement.*

En effet les équations (5) se réduisent ordinairement à $n - 1$ distinctes, puisque leur déterminant est nul et alors elles donnent en général les rapports $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 \dots$ sans ambiguité.

Si elles se réduisent à $n - 2$ distincts, les mineurs

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}, \ldots \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} \ldots$$

$$\left(\text{ou l'on écrit } \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ii}} \text{ au lieu de } \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ii} - s}\right)$$

sont nuls et l'on a

$$\frac{dS}{ds} = \Sigma \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} \frac{d\alpha_{ij}}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial S}{\partial s} = 0\,;$$

si elles se réduisent à $n - 3$ distinctes, on a

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}} = 0 \ldots,$$

et

$$\frac{d^2 S}{ds^2} = \Sigma \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}} \frac{d\alpha_{ij}}{ds} \frac{d\alpha_{kl}}{ds}$$

ou

$$\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} = 0, \text{ etc.}$$

Donc, si les équations (5) se réduisent à $n - 2$, $n - 3$, $n - 4$, ... l'équation $S = 0$ aura une racine double, triple, quadruple, etc.

Réciproquement on a *en supposant les α_{ij} réels*,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}(\alpha_{11} - s) + \frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}} \alpha_{12} + \ldots \frac{\partial S}{\partial \alpha_{1n}} \alpha_{1n}, \\ 0 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_{21}} \alpha_{21} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_{22}}(\alpha_{22} - s) \ldots \frac{S\partial}{\partial \alpha_{2n}} \alpha_{2n}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en différentiant par rapport à s

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} S' &= \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)'(\alpha_{11} - s) + \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}}\right)' \alpha_{12} + \ldots - \frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}, \\ 0 &= \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)' \alpha_{21} + \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}}\right)'(\alpha_{22} - s) + \ldots - \frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

multiplions la première de ces équations par $\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}$, la seconde par $\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}$, la suivante par $\frac{\partial S}{\partial \alpha_{13}}$ et ajoutons en observant que

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ji}},$$

nous aurons

$$(10) \qquad S' \frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}} = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)' S - \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}}\right)^2 + \cdots$$

ce qui montre que si $S = 0$, $S' = 0$, on aura

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}}\right)^2 + \ldots = 0.$$

Or en supposant les α_{ij} réels (ce que nous ferons à l'avenir) on a

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}} = 0 \ldots,$$

et on verrait de même que

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} = 0.$$

Si $S = 0$ a une racine triple, en vertu de (10), on voit que $\frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} = 0$ a une racine double ; car $S' \frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}$ et $S \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{11}}\right)'$ ont un facteur du 3^e degré, donc en ôtant un facteur du second degré dans $\Sigma \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{1i}}\right)^2$, les $\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_{i1}}\right)^2$ seront encore nuls après la suppression de ce facteur.

Or on a

$$S \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial S}{\partial \alpha_{kl}} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_{il}} \frac{\partial S}{\partial \alpha_{kj}};$$

le second membre a un facteur quadruple qui est triple pour S, donc il appartient à $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}}$, et ainsi de suite.

A deux racines distinctes de l'équation $S = 0$, *correspondent deux directions* $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n$ *principales rectangulaires.*

En effet supposons que pour $s = s'$ on ait $\nu_1 = \nu'_1 \ldots$ et pour

$s = s''$ on ait $\nu_1 = \nu''_1$ ... les équations (2) donneront

$$\frac{\partial f}{\partial \nu'_1} = 2s'\nu'_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \nu'_2} = 2s'\nu'_2 \ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu''_1} = 2s''\nu''_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial \nu''_2} = 2s''\nu''_2 \ldots,$$

on en déduit

$$\left(\nu''_1 \frac{\partial f}{\partial \nu'_1} + \nu''_2 \frac{\partial f}{\partial \nu'_2} \ldots\right) - \left(\nu'_1 \frac{\partial f}{\partial \nu''_1} + \nu''_2 \frac{\partial f}{\partial \nu''_2} \ldots\right) = 2(s' - s'') \Sigma \nu'_i \nu''_i ;$$

or le premier membre est nul ; donc

$$(s' - s'')(\nu'_1\nu''_1 + \nu'_2\nu''_2 \ldots) = 0,$$

et si s' est différent de s''

$$\nu'_1\nu''_1 + \nu'_2\nu''_2 \ldots = 0,$$

ce qui prouve que les directions ν'_1, ν'_2 et ν''_1, ν''_2 ... sont rectangulaires c. q. f. d.

Il en résulte que si les α_{ij} sont réels, l'équation $S = 0$ *a toutes ses racines réelles.*

En effet si elle avait des racines imaginaires, elle en aurait au moins deux s' et s'' conjugués, et en supposant $\Sigma\nu_i'^2 = 1$, $\Sigma\nu_i''^2 = 1$, ν'_1 et ν''_1 seraient des imaginaires conjugués ν'_2 et ν''_2 aussi, et l'équation $\nu'_1\nu''_1 + \nu'_2\nu''_2 \ldots = 0$ exprimerait que la somme des carrés des modules de $\nu'_1, \nu'_2 \ldots$ est nulle, ce qui est absurde, puisque

$$\Sigma\nu_i'^2 = 1.$$

Posons maintenant

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 = \nu'_1 X_1 + \nu''_2 X_2 + \ldots, \\ x_2 = \nu'_2 X_1 + \nu''_2 X_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les ν' désignant les valeurs des ν pour $s = s'$, ... s', s'' ... désignant les racines de $S = 0$. Nous aurons

$$f(x_1, x_2 \ldots) = f(\nu'_1 X_1 + \nu''_2 X_2 \ldots, \nu'_1 X_1 + \nu''_2 X_2 + \ldots, \ldots)$$

le coefficient de X^2_1 dans le second membre sera

$$f(\nu'_1, \nu'_2 \ldots) = 2\left(\nu'_1 \frac{\partial f}{\partial \nu_1} + \nu'_2 \frac{\partial f}{\partial \nu_2} + \ldots\right),$$

ou en vertu de (2) et de $\Sigma \nu_i'^2 = 1$,

$$f(\nu'_1, \nu'_1 \ldots) = s'.$$

Le coefficient de X^2_2 serait s'', etc. Le coefficient de $X_1 X_2$ sera

$$\nu'_1 \frac{\partial f}{\partial \nu''_1} + \nu'_2 \frac{\partial f}{\partial \nu''_2} \ldots = 2 s'' (\nu'_1 \nu''_1 + \nu'_2 \nu''_2 \ldots = 0,$$

etc., donc enfin on aura

$$f(x_1, x_2 \ldots) = s' X^2_1 + s'' X^2_2 + \ldots$$

et f se réduira à une somme de n carrés au plus, je dis au plus, parce que $S = 0$ pourra avoir des racines nulles.

Ce que nous venons de dire semble en défaut quand l'équation $S = 0$ a des racines égales, mais si alors par exemple $S = 0$ a une racine double, une direction principal $\nu_1 \ldots \nu_2 \ldots$ loin de disparaître, se trouve remplacée par une infinité d'autres, parmi lesquelles on en choisira deux qui soient rectangulaires. Une observation analogue pourrait être faite si $S = 0$ avait une racine triple ou quadruple.

Si l'équation $S = 0$ a des racines multiples, il y aura une infinité de systèmes de directions $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_1 \ldots$ permettant de remplacer f par une somme de carrés.

Ce que nous venons de dire suppose les a_{ij} réels, cependant une grande partie de nos conclusions s'appliqueraient encore si les a_{ij} étaient imaginaires, mais si l'équation $S = 0$ avait une racine multiple, on ne pourrait plus en conclure qu'il existe n directions principales rectangulaires, de sorte que nos simplifications ne pourraient plus s'appliquer à certaines surfaces singulières à coefficients imaginaires.

5. Décomposition en carrés, classification des surfaces du second degré. — Si dans l'équation du second degré

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

on effectue la substitution (10), la partie homogène prend, comme on l'a vu, la forme $s' X^2_1 + s'' X^2_2 \ldots$ et alors l'équation précédente devient

$$s' X^2_1 + s'' X^2_2 \ldots + 2 A_1 X_1 + \ldots + 2 A_n X_n + B = 0$$

les A et les B désignant des constantes. Si l'on fait encore

$$X_1 = \xi_1 + a_1, \qquad X_2 + \xi_2 + a_2, \ldots$$

elle devient de nouveau

$$s'\xi^2_1 + s''\xi^2 + \ldots + 2\xi_1 (s'a_1 + A_1) + \ldots$$
$$+ s'a^2_1 + s''a^2_2 \ldots + 2A_1a_1 + 2A_2a_2 \ldots + B = 0$$

si s', s'' ... sont tous différents de o. On peut disposer de a_1, a_2... de manière à annuler les coefficients de ξ_1, ξ_2... En général si s' n'est pas nul, on pourra poser

$$s'a_1 + A_1 = 0$$

on en déduira la valeur à donner à a_1 pour faire disparaître ξ_1.

1° Si l'équation $S = 0$ n'a pas de racines nulles, une transformation de coordonnées ramène l'équation de la surface à la forme

$$s'\xi^2_1 + s''\xi^2_2 + \ldots = H$$

H désignant une constante.

2° Si $s' = 0$ on ne peut plus faire disparaître le terme en ξ_1, mais le terme en ξ^2_1 a disparu, et l'on peut essayer de faire disparaitre le terme constant

$$s'a^2_1 + s''a^2_1 \ldots + 2A_1a_2 + 2A_2a_1 + \ldots + B,$$

qui dans l'hypothèse $s' = 0$ se réduit a

$$s''a^2_2 \ldots + 2A_1a_1 \ldots + B$$

et qui pourra être annulé si A_1 n'est pas nul. Si A_1 est nul, nous rentrons dans le cas examiné tout à l'heure, il en résulte que si quelque racine de l'équation $S = 0$ est nulle, l'équation de la surface peut être ramenée à la forme

$$s'\xi^2_1 + s''_2\xi^2_2 \ldots + 2t_1\xi_\alpha + 2t_2\xi_\beta \ldots = 0$$

ou les ξ qui entrent au premier degré, n'entrent pas au second et vice versa.

J'appellerai (ce qui n'est pas tout à fait conforme à l'usage) surface de première classe, celles dont l'équation peut être ramenée à la forme

$$s'\xi^2_1 + s''\xi^2_2 \ldots = H$$

qui ne contient pas de termes du premier degré en ξ_1, ξ_2 ....

Parmi ces surfaces, il convient de distinguer

1° Celles pour lesquelles un certain nombre de carrés manquent, nous les appellerons surfaces singulières de première, de seconde espèce, suivant qu'il manquera 1, 2... carrés, ces surfaces singulières sont des cylindres, car leur équation ne dépend que de $n - 1$, $n - 2$, ... fonctions linéaires. Quand $H = 0$, la surface a pour premier membre une fonction homogène de fonctions linéaires, c'est un cône. Nous remarquons les deux formes singulières

$$s'\xi^2_1 + s''\xi^2_2 = 0 \text{ et } s'\xi^2_1 = H,$$

La première représente deux plans, et la seconde, deux plans parallèles, confondus si $H = 0$,

2° Si la surface est réductible à une forme qui contient des termes du premier degré, elle sera de seconde classe, elle représentera un cylindre dans un grand nombre de cas ; il suffit pour cela qu'une des quantités s ou t soit nulle, si tous les s étaient nuls (ce qui ne se présentera pas), on aurait un plan, Nous ne parlons pas du cas où les t seraient tous nuls, il a été examiné.

De cette discussion, il résulte, que l'équation du second degré peut représenter des cônes, des cylindres, des plans.

1° Pour qu'une équation du second degré représente un cône, il faut que dans son équation réduite $H = 0$. Or H est le discriminant ou hessien de la forme réduite, si l'on observe que dans un changement de variable, le hessien d'une fonction après le changement se trouve multiplié par le carré du déterminant de la substitution, nous voyons que, comme nous n'avons effectué, que des substitutions orthogonales de déterminant ± 1, H est le discriminant de la forme primitive, comme de la forme réduite, donc *pour que l'équation du 2e degré représente un cône, il faut et il suffit que son discriminant soit nul.*

Si $a_1, a_2 ...$ sont les coordonnées du centre de la surface $F = 0$, quand on a rapporté la surface à son centre, son équation devient $f + F(a_1, a_2 ...) = 0$ et $H = F(a_1, ...)$; or

$$2\,F(a_1 \ldots a_n) = \frac{\partial F}{\partial a_1} a_1 \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot x_0,$$

x_0 désignant une variable fictive égale à 1 et rendant F homogène, mais $\frac{\partial F}{\partial a_1}$ ... étant nuls, on a

$$F(a_1 \ldots a_n) = H = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_0},$$

formule souvent commode pour calculer H.

Pour que la surface soit un cylindre, il faut qu'une racine de l'équation $S = 0$ soit nulle, ce qui exige que le discriminant Δ de la partie homogène f de F soit nulle, mais cela ne suffit pas, parce que si $\Delta = 0$, la surface peut aussi être de seconde classe, il faut que F ne dépende que de $n - 1$ variables, et cela suffit, or rendons F homogène, formons l'équation en s relative à cette fonction rendue homogène, elle sera du degré $n + 1$, et la forme réduite de F ne devra contenir que n carrés ; le discriminant de F devra donc être nul, ce discriminant est H, donc $H = 0$, $\Delta = 0$ *sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que* $F = 0$ *représente un cylindre*.

Si l'on change de notation et si l'on pose

$$F = \Sigma\, \alpha_{ij} x_i x_j$$

la variable x_0 rendant F homogène, se trouvant parmi les x_i, on aura $H = \Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{00}$ et $\Delta = \frac{\partial H}{\partial \alpha_{00}}$. Or

$$H \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha_{00}\, \partial \alpha_{pp}} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_{00}} \frac{\partial H}{\partial \alpha_{pp}} - \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_{0p}}\right)^2$$

si donc $H = 0$, $\Delta = 0$, il reste

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{0p}} = 0$$

de sorte que si la surface $F = 0$ est cylindrique, H et ses mineurs seront nuls, mais cela fait trop de conditions (voir § 6).

Pour que $F = 0$ représente deux plans, c'est-à-dire un produit de facteurs ou une somme de deux carrés, il faudra que $H = 0$ et que toutes les racines $S = 0$, sauf deux soient nulles, Δ et tous ses mineurs, sauf ceux du 3e degré devront être nuls.

Pour que $F = 0$ représente deux plans parallèles, il faudra que toutes les racines de $S = 0$ soient nulles sauf une, donc Δ devra être nul ainsi que ses mineurs jusqu'au second degré.

Pour que F = o représente deux plans confondus, il faudra que F soit un carré, donc H et tous ses mineurs jusqu'à ceux du second degré devront être nuls.

Pour qu'une surface du second degré F = o contienne une droite

$$x_1 = x'_1 + a_1\rho, \qquad x_2 = x'_2 + a_2\rho \ldots,$$

il faut que

$$F(x'_1 + a_1\rho, x'_2 + a_2\rho \ldots) = 0,$$

ou que

$$F(x'_1, x'_2 \ldots) + \rho\left(a_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x'_2} \cdots\right) + \rho^2 f(a_1 \ldots a_n) = 0,$$

ce qui exige que

$$F(x'_1 \ldots) = 0, \quad a_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x'_2} \ldots = 0, \quad f(a_1 \ldots a_n) = 0.$$

si le point $x'_1 \ldots x'_n$ est sur la surface, les deux dernières équations fourniront des valeurs pour les a. Il y a donc une infinité de droites passant par un point de la surface, comme en éliminant les a on a

$$(x_1 - x'_1)\frac{\partial f}{\partial x'_1} \cdots (x_n - x'_n)\frac{\partial f}{\partial x'_n} = 0, \quad f(x_1 - x'_1 \ldots) = 0,$$

on reconnait que les droites sont à l'intersection : 1° du plan tangent en $x'_1, x'_2 \ldots$ 2° du cône $f(x_1 - x'_1, \ldots) = 0$ et de la surface. Il n'y a que deux droites passant en $x'_1, x'_2 \ldots$

6. **Remarques**. — Nous venons de voir que la fonction homogène $f = \alpha_{ij}x_ix_j$ à n variables pouvait être décomposée en n carrés, cette décomposition peut évidemment se faire d'une infinité de manières, il y a plus, la fonction non homogène F peut se décomposer d'une infinité de manières en $n + 1$ carrés et ces deux théorèmes n'en font qu'un si, supposant $x_0 = 1$,

$$F = \sum_1^n \alpha_{ij}x_ix_j + (\alpha_{01}x_1 + \ldots \alpha_{0n}x_n + \alpha_{00}x_0)\,x_0.$$

1° La décomposition de $\sum\limits_{1} \alpha_{ij}x_ix_j$ en n carrés peut se faire d'une infinité de manières, puisque si l'on pose

$$\Sigma\alpha_{ij}x_ix_j = (a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n)^2 \dots + (a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n)^2,$$

l'identification des deux membres fournira $\frac{n(n+1)}{2}$ équations entre les n^2 quantités a_{ij} qui seront par suite indéterminées ;

2° On peut effectuer la décomposition en carrés comme il suit, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation d'ordre supérieur ; on ordonnera f suivant les puissances de x_1, ce qui donnera

$$\begin{aligned} f &= Ax^2 + 2Bx + C \\ &= A\left(x^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\ &= A\left[\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right] \\ &= A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{A}. \end{aligned}$$

$\frac{B^2 - AC}{A}$ est un polynôme du second degré en $x_2, \dots x_n$, $A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2$ est un carré, en procédant sur $\frac{B^2 - AC}{A}$ comme sur f on en extraira encore un carré et il restera un polynôme en $x_3, \dots x_n$ que l'on traitera de la même façon, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un monôme qui sera nécessairement un carré.

On ne sera arrêté dans ce travail que si l'un des polynômes à décomposer ne renfermait que des rectangles des variables et pas de terme tel que x^2_i, voici alors comment on procéderait, soit

$$f = \Sigma\alpha_{ij}x_ix_j \qquad \text{ou} \qquad \alpha_{ii} = 0,$$

on posera

$$f = \frac{1}{\alpha_{12}}(\alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n)(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 \dots + \alpha_{2n}x_n) + \varepsilon,$$

le produit qui précède ε contient tous les termes qui dépendent de x_1 et x_2, en sorte que ε que l'on obtiendra en faisant la différence

$$f - \frac{1}{\alpha_{12}}(\alpha_{12}x_2 \dots)(\alpha_{21}x_1 + \dots)$$

ne contiendra plus que x_3, x_4 ... x_n ; c'est d'ailleurs un polynôme du second degré qui, en général, contiendra des termes en x^2_3, x^2_4 ... que l'on décomposera comme plus haut, d'ailleurs si l'on pose

$$\alpha_{12}x_2 + \dots \alpha_{1n}x_n = X,$$
$$\alpha_{21}x_2 + \dots \alpha_{2n}x_n = Y,$$

on aura

$$XY = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2;$$

et l'on voit que l'on pourra toujours décomposer f en n carrés positifs, négatifs ou nuls, en appelant ainsi des carrés précédés de coefficients positifs, négatifs ou nuls.

De quelque manière qu'on s'y prenne pour décomposer f en n carrés, on trouve toujours le même nombre de carrés positifs, négatifs ou nuls.

Pour que le théorème soit exact, il faut que tous les carrés soient indépendants, c'est-à-dire que la racine de l'un d'eux ne soit pas fonction linéaire des racines des autres.

Supposons en effet que X_1 ... X_p et Y_1, ... Y_q étant des fonctions linéaires de x_1, x_2 ... x_n on puisse avoir

$$(1) \qquad A_1X^2_1 \dots + A_pX^2_p = B_1Y_1^2 + \dots B_qY^2_q$$

$q > p$; les X étant indépendants ainsi que les Y, nous pourrons exprimer x_1 ... x_p en fonction des X et porter leurs valeurs dans les Y qui deviendront fonctions de X_1 ... X_p x_{p+1} x_n, en différentiant alors par rapport à x_{p+1}, on trouvera une relation linéaire entre les Y ce qui est contraire à nos hypothèses, donc $p = q$.

Supposons alors A_1 ... A_r positifs, B_1, B_2 ... B_s négatifs, les autres A négatifs, les autres B positifs, s'il n'y a pas autant d'A que de B positifs, alors $r + s$ ne sera pas égal à p et on peut supposer $r + s < p$. Posons alors

$$(2) \qquad X_1 = X_2 \dots = X_r = Y_1 = \dots = Y_s = 0,$$

et tirons x_1 ... x_{r+s} de là pour les porter dans (1), cette formule sera absurde, le premier membre étant négatif, le second positif, à moins que

$$Y_{s+1} = 0, \dots Y_p = 0$$

ou que

$$X_{p+1} = 0 \ldots X_p = 0,$$

ces équations seraient des conséquences de (2), il y aurait les relations entre les X ou entre les Y.

Ces remarques permettent de compléter ce que nous avons dit plus haut au sujet des surfaces singulières. Pour que f soit un carré il faut et il suffit qu'après avoir fait la décomposition par la méthode précédente, $n-1$ carrés soient nuls, nous pouvons choisir les derniers, qui renferment : le dernier un coefficient, l'avant-dernier deux, etc., donc pour annuler $n-1$ carrés il faudra annuler $1 + 2 \ldots + n - 1$ ou $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients, ce qui donne $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions distinctes pour qu'un polynôme homogène à n variables ou non homogène à $n-1$ variables soit un carré.

Pour que f soit un produit de 2 facteurs ou une somme de 2 carrés, il faut $1 + 2 \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ conditions, etc,, etc.

7. Plans tangents, plans polaires. — Considérons la surface du second degré

$$f = \Sigma \alpha_{ij} x_i x_j + 2(\alpha_{01} x_1 \ldots + \alpha_{0n} x_n) + \alpha_{00} = 0$$

dans l'espace à n dimensions, le plan tangent a pour équation

$$(1) \qquad f_1(X_1 - x_1) + \ldots f_n(X_n - x_n) = 0\,;$$

en posant

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Nous introduirons une variable fictive $x_0 = 1$ et alors nous écrirons

$$f = \sum_{i=0, j=0}^{i=n, j=n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

l'équation (1) prendra alors successivement les formes

$$f_1 X_1 + \ldots f_n X_n - (f_1 x_1 \ldots - f_n x_n) = 0.$$

et en vertu du théorème des fonctions homogènes, comme

$$2f = f_0 x_0 + \dots f_n x_n = 0,$$

et comme $x_0 = X_0 = 1$, on aura en ajoutant ces équations

$$(2) \qquad X_0 f_0 + X_1 f_1 \dots + X_n f_n = 0.$$

Si l'on demande de mener par le point $z_0, z_1 \dots z_n$ un plan tangent à la surface, l'équation précédente devra avoir lieu pour $X_0 = z_0, X_1 = z_1 \dots$ et le point de contact sera déterminé par l'équation

$$(2) \qquad z_0 f_0 + z_1 f_1 \dots + z_n f_n = 0,$$

d'ailleurs

$$f(x_0, x_1 \dots x_n) = 0.$$

Il y aura donc une infinité de solutions situées à l'intersection de la surface et du plan représenté par (2) dont on peut aussi écrire l'équation

$$x_0 \frac{\partial f(z_0 \dots z_n)}{\partial z_0} + \dots x_n \frac{\partial f(z_0 \dots z_n)}{\partial z_n} = 0.$$

Le plan (2) est ce que l'on appelle le plan polaire du point $z_0, z_1 \dots z_n$, et ce point est dit le pôle du plan (2).

Il est intéressant de chercher les points qui ont le même plan polaire par rapport à deux surfaces du second degré

$$f = 0, \qquad g = 0.$$

Pour cela il faut identifier les deux équations

$$z_0 f_0 + z_1 f_1 \dots + z_n f_n = 0,$$
$$z_0 g_0 + z_1 g_1 \dots + z_n g_n = 0,$$

dans lesquelles on peut supposer que les z sont les coordonnées courantes et $x_0, x_1 \dots$ les coordonnées d'un pôle, alors on a pour déterminer ce pôle (ou ces pôles) les équations

$$\frac{f_0}{g_0} = \frac{f_1}{g_1} \dots = \frac{f_n}{g_n},$$

ou en posant ces rapports égaux à λ

$$(1) \qquad f_0 - g_0 \lambda = 0, \qquad \dots f_n - \lambda g_n = 0,$$

ou en supposant

$$f = \Sigma\alpha_{ij}x_ix_j, \qquad g = \Sigma\beta_{ij}x_ix_j :$$

$$(1)' \qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{00} - \lambda\beta_{00})x_0 + \ldots + (\alpha_{0n} - \lambda\beta_{0n})x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array}\right.$$

on en tire

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{00} - \lambda\beta_{00} \ldots & \alpha_{0n} - \lambda\beta_{0n} \\ \alpha_{10} - \lambda\beta_{10} \ldots & \alpha_{1n} - \lambda\beta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\Lambda = 0.$$

Equation du degré $n + 1$ d'où l'on tire $n+1$ valeurs qui, portées dans (1) donnent $n + 1$ équations qui se réduisent à n, et font connaître $n + 1$ pôles communs aux surfaces $f = 0$, $g = 0$.

Nous ferons observer tout d'abord que si l'un des discriminants $\Sigma \pm \alpha_{00}\alpha_{11} \ldots$, $\Sigma \pm \beta_{00}\beta_{11} \ldots$ est nul, la surface correspondante est un cône et le pôle correspondant à la racine nulle est le centre de l'autre surface.

Si les équations (1) ou (1)' sont indéterminées c'est-à-dire si les mineurs de Λ sont nuls, on a

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = -\Sigma \frac{\partial\Lambda}{\partial(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})}\beta_{ij} = 0,$$

et l'équation en λ a une racine double ; elle aurait une racine triple si tous les mineurs du second ordre de λ étaient nuls etc., on a en appelant x_0, x_1 ... les mineurs $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial a_{10} - \lambda\beta_{00}}$, ...

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda = x_0(\alpha_{00} - \lambda\beta_{00}) \ldots + x_n(\alpha_{0n} - \lambda\beta_{0n}), \\ 0 = x_0(\alpha_{10} - \lambda\beta_{10}) \ldots + x_n(\alpha_{1n} - \lambda_{1n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et en différentiant par rapport à λ

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda' = \left\{\begin{array}{l} x'_0(\alpha_{00} - \lambda\beta_{00}) \ldots + x'_n(\alpha_{0n} - \lambda\beta_{0n}) \\ - \beta_{00}x_0 - \ldots - \beta_{0n}x_n, \end{array}\right. \\ 0 = x'_0(\alpha_{10} - \lambda\beta_{10}) - \ldots + x'_n(\alpha_{1n} - \lambda\beta_{1n}) \\ \qquad - \beta_{10}x_0 \ldots - \beta_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

multipliant ces formules par x_0, x_1, ... et ajoutant on a

$$\Lambda' x_0 = x'_0 \Lambda - \Sigma\beta_{ij} x_i x_j.$$

Si l'équation $\Lambda = 0$ a une racine double on a

$$\Sigma\beta_{ij} x_i x_j = 0$$

et les x_i dans cette formule ont les mêmes valeurs que dans (1) et (1)' car les mineurs de Λ sont, en vertu de ces équations, proportionnels aux x.

Ainsi les équations (1) que l'on peut écrire

$$\frac{f_0}{g_0} = \frac{f_1}{f_2} \dots = \frac{f_n}{g_n} = \frac{f}{g},$$

en vertu du théorème des fonctions homogènes, montrent que, un pôle est sur la surface $g = 0$, et par suite en vertu des formules précédentes, sur la surface $f = 0$; de la proportionnalité des f_i et des g_i, on conclut que les surfaces ont même plan tangent en leur pôle commun et ce plan est le plan polaire correspondant.

Proposons-nous maintenant de trouver une substitution linéaire

$$x_0 = c_{00} X_0 + c_{01} X_1 \dots + c_{0n} X_n,$$
$$x_1 = c_{10} X_0 + c_{11} X_1 \dots + c_{1n} X_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

qui réduise, si c'est possible, à la fois les formes $\Sigma\alpha_{ij} x_i x_j = f$ et $\Sigma\beta_{ij} x_i x_j = g$ à des sommes de carrés. On devra avoir à la fois pour

$$f(c_{00} X_0 + c_{01} X_1 \dots, c_{10} X_0 + c_{11} X_1 \dots)$$

et

$$g(c_{00} X_0 + c_{01} X_1 \dots, c_{10} X_0 + c_{11} X_1 \dots)$$

des sommes de carrés en X_0, X_1 ... En d'autres termes il faudra que

$$f_0(c_{00}, c_{10} \dots) c_{01} + f_1(c_{00}, c_{10} \dots) c_{11} \dots = 0,$$
$$g_0(c_{00}, c_{10} \dots) c_{01} + g_1(c_{00}, c_{10} \dots) c_{11} \dots = 0,$$

puis

$$f(c_{00}, c_{10} \dots) c_{02} + \dots\dots = 0,$$
$$g(c_{00}, c_{10} \dots) c_{02} + \dots\dots = 0,$$

etc...

ces équations donnent évidemment

$$\frac{f_0}{g_0} = \frac{f_1}{g_1} \dots = \frac{f_n}{g_n}.$$

Non seulement pour $x_0 = c_{00}$, $x_1 = c_{01}$ ... mais encore pour $x_0 = c_{10}$, $x_1 = c_{11}$, ... etc. Ce qui montre que les c_{ij} sont les systèmes de valeurs de x_0, x_1 ... obtenues tout à l'heure pour les points ayant les mêmes plans polaires par rapport aux deux surfaces $f = 0$, $g = 0$. Les coefficients des carrés des deux formes réduites seront :

$$f(c_{00}, c_{10} \dots) \qquad \text{et} \qquad g(c_{00}, \dots)\lambda_0, \text{ etc.}$$

alors si l'une des formes est

$$A_0X^2_0 + \dots A_nX^2_n,$$

l'autre sera

$$\lambda_0A_0X^2_0 + \dots \lambda_0A_nX^2_n.$$

Les équations des deux surfaces pourront donc s'écrire

$$\Sigma A_iX^2_i = 0, \qquad \Sigma\lambda_iA_iX^2_i = 0,$$

et X_i sera la *distance* du point x_0, x_1 ... au plan $c_{i0}x_0 + c_{i1}x_1 \dots = 0$, à un facteur constant près.

Diamètres. — Considérons une surface du second degré

(1) $$F(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

coupons-la par un plan

(2) $$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 \dots + \lambda_nx_n + \lambda_0 = 0$$

on obtiendra une variété à $n - 2$ dimensions

(3) $$\begin{cases} F\left(x_1, \dots x_{n-1}, -\dfrac{\lambda_1x_1 + \dots \lambda_0}{\lambda_n}\right) = 0 \\ \lambda_2x_2 + \dots \lambda_0 = 0 \end{cases}$$

formée d'un cylindre et d'un plan. Ce cylindre a un lieu de centres

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_n}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

qui rencontre le plan (2) en un point qui partage en deux parties égales les cordes de la variété (3), le lieu de ces points quand on fait varier λ_0 s'obtient en éliminant λ_0 entre (2) et (4), ce qui donne

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial F}{\partial x_2} \dots = \frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}$$

ce sont les équations d'une droite, qui passe par le centre quand il y en a un. Dans le cas ou la surface a pour équation

$$A_1 x^2_1 + \dots A_n x^2_n = H$$

elle devient

$$\frac{A_1 x_1}{\lambda_1} = \dots \frac{A_n x_n}{\lambda_n}.$$

Elle admet pour diamétral conjugué

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0,$$

on lui donne le nom de diamètre conjugé du plan

$$\lambda_1 x_1 \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Considérons n plans

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n + b_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n + b_n = 0. \end{array} \right.$$

Si l'intersection de $n - 1$ d'entre eux est une droite conjuguée du n^e, quel que soit l'ordre dans lequel on considère ces plans, on dit que ces plans forment des plans conjugués. S'ils passent par le centre, ce sont des plans diamétraux conjugués; enfin leurs droites d'intersection sont des diamètres conjugués, les cordes correspondantes aux diamètres conjugués sont les longueurs de ces diamètres.

Cherchons la condition pour que les plans (5) soient conjugués :

Considérons la droite intersection des $n - 1$ derniers plans (5) à savoir (en négligeant les b)

$$\frac{x_1}{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}} = \frac{x_2}{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}}} = \dots$$

en posant

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$$

le diamétral conjugué de cette droite est

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} + \ldots = 0$$

il est parallèle au plan

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \ldots = 0$$

ou, en posant $F = \Sigma\alpha_{ij}x_ix_j$

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \ldots)\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \ldots = 0$$

ou

$$x_1\left(\alpha_{11}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \alpha_{21}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} \ldots\right) + x_2\left(\alpha_{12}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} \ldots\right) \ldots = 0\,;$$

pour que ce plan soit parallèle au premier plan (5), il faut que

$$\frac{\alpha_{11}\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \alpha_{21}\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} \ldots}{a_{11}} = \frac{\alpha_{12}\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{11}} + \ldots}{a_{12}} \ldots$$

si la surface a la forme

$$(6) \qquad A_1x^2_1 + \ldots A_nx^2_n = H,$$

on a

$$\frac{A_1\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}}{a_{11}} = \frac{A_2\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{12}}}{a_{12}} = \ldots$$

ou

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} : \frac{a_{11}}{A_1} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{12}} : \frac{a_{12}}{A_2} \ldots$$

on en déduit en multipliant ces rapports haut et bas respectivement par a_{21}, a_{22} ... et en ajoutant

$$\frac{1}{A_1}a_{11}a_{21} + \frac{1}{A_2}a_{12}a_{22} \ldots = 0$$

et en général pour que les plans (5) soient conjugués

$$(7) \qquad \frac{a_{i1}a_{j1}}{A_1} + \frac{a_{i2}a_{j2}}{A_2} + \ldots = 0. \; i \gtrless j.$$

Supposons, ce qui est permis, les b égaux à zéro. On sait que les a_{ij} sont proportionnels aux $\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}$ en sorte que les relations (7) peuvent aussi s'écrire

$$\Sigma \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}} \frac{\partial\Delta}{\partial a_{jk}} \frac{1}{A_k} = 0.$$

et les équations des diamètres conjugués seront

$$\frac{x_1}{a_{i1}} = \frac{x_2}{a_{i2}} \ldots = \rho_i$$

les ρ_i de leurs points d'intersection avec la surface seront donnés par la formule

$$(8) \qquad \frac{a^2_{i1}}{A_1} + \frac{a^2_{i2}}{A_2} \ldots = \frac{1}{\rho_i},$$

et l'on aura pour les coordonnées de l'extrémité du diamètre ρ_i

$$x^2_1 = a^2_{i1} : \left(\frac{a^2_{i1}}{A_1} + \frac{a^2_{i2}}{A_2} \ldots\right)$$

$$x^2_2 = a^2_{i2} : \left(\frac{a^2_{i1}}{A_1} + \frac{a^2_{i2}}{A_2} \ldots\right)$$

Les formules (7) et (8) sont celles qui définissent une substitution orthogonale, si l'on pose $C_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{A_j}} \rho_i$, on aura donc

$$A_1 + A_2 \ldots + A_n = \rho^2_1 + \rho^2_2 \ldots + \rho^2_n.$$

Les axes d'une surface de second degré sont les diamètres conjugués des plans principaux. Si donc ν_1, ν_2 ... est une direction principale, les équations d'un axe seront

$$(8) \qquad \frac{1}{\nu_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \ldots \frac{1}{\nu_n}\frac{\partial F}{\partial x_n};$$

or on a pour déterminer ν_1, ν_2 ...

$$(9) \qquad \frac{1}{\nu_1}\frac{\partial f}{\partial \nu_1} = \frac{1}{\nu_2}\frac{\partial f}{\partial \nu_2} \ldots = \frac{1}{\nu_n}\frac{\partial f}{\partial \nu_n},$$

pour avoir les axes, il suffira donc d'éliminer les ν entre ces équations et (8) ce qui donnera

$$\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial f\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots\right)}{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)} = \text{etc.}$$

Si la surface était rapportée à son centre, les axes seraient les droites

$$\frac{x_1}{\nu_1} = \frac{x_2}{\nu_2} \cdots = \frac{x_n}{\nu_n}.$$

et si les ν étaient inconnus, on aurait les équations des axes en éliminant les ν entre ces équations et (9), ce qui donnerait

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots$$

Disons enfin que les sommets d'une surface de second degré sont les points réels ou imaginaires où la surface rencontre ses axes.

10. Sur les substitutions linéaires qui laissent une fonction homogène du second degré invariante. — Considérons les formules

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 - x_1 = c_{11} f_1 + c_{12} f_2 \cdots + c_{1n} f_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n - x_n = c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 \cdots + c_{nn} f_n, \end{cases}$$

dans lesquelles on suppose

$$c_{ij} = -c_{ji}, \quad c_{ii} = 0,$$

$$F_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Sigma\, a_{ij} x_i x_j,$$

les a et les c désignant des quantités indépendantes des x et

$$f_i = F_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots x_n + y_n),$$

multiplions les équations (1) respectivement par $f_1, f_2 \ldots f_n$ et ajoutons les résultats ainsi obtenus, nous aurons

$$(y_1 - x_1) f_1 + (y_2 - x_2) f_2 \cdots + (y_n - x_n) f_n = 0.$$

ou

$$(y_1 - x_1)\,\Sigma a_{1j}\,(x_j + y_j) + (y_2 - x_2)\,\Sigma a_{2j}\,(x_j + y_j) + \dots$$
$$(y_n - x_n)\,\Sigma a_{nj}\,(x_j + y_j) = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma a_{ij}(y_i y_j - x_i x_j) + \Sigma a_{ij}(x_i y_j - y_i x_j) = 0,$$

ou

$$\Sigma a_{ij} y_i y_j = \Sigma a_{ij} x_i x_j.$$

Il résulte de là que si l'on résout les équations (1) par rapport aux y par exemple, on aura une substitution linéaire, telle que si l'on y remplace les y par leurs valeurs en x dans $\Sigma a_{ij} y_i y_j$, cette fonction deviendra $\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Il importe de remarquer que la substitution la plus générale qui transforme ainsi une fonction du second degré en une autre doit renfermer $\frac{n(n-1)}{1}$ paramètres, c'est celle que nous venons de donner ; elle a de remarquable que ses coefficients sont rationnels et à coefficients rationnels par rapport aux a_{ij}.

Nous ferons enfin observer qu'aux substitutions que nous venons de faire connaître il faudrait encore adjoindre celles que l'on obtiendrait en changeant les signes de quelques y.

Quand on connait une substitution linéaire qui change $\Sigma a_{ij} y_i y_j$ en $\Sigma b_{ij} x_i x_j$, il sera facile d'en déduire toutes les autres en effectuant après celle-ci une substitution qui n'altère pas $\Sigma b_{ij} x_i x_i$, ou avant, une substitution qui n'altère pas $\Sigma a_{ij} y_i y_j$.

Enfin les substitutions que nous venons de considérer ont évidemment pour déterminant ± 1.

CHAPITRE IX

—

QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES — THÉORÈMES

1° Lieux de centres, etc. — *Trouver le lieu des centres des surfaces du second degré d'axes de grandeur constante touchant* n *plans rectangulaires.*

Cherchons d'abord la condition pour que la surface

$$\Sigma s_i x^2_i - 1 = 0$$

touche le plan

$$p_1 x_1 + \dots p_n x_n - h = 0$$

à cet effet, identifions cette équation avec celle d'un plan tangent

$$(x_1 - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots = 0$$

ou

$$(x_1 - y_1)\, s_1 y_1 + \dots (x_n - y_n)\, s_n y_n = 0$$

ou encore, en observant que $s_1 y^2_1 + \dots = 1$,

$$s_1 x_1 y_1 + s_2 x_2 y_2 + \dots = 1\,;$$

nous aurons

$$\frac{s_1 y_1}{p_1} = \frac{s_2 y_2}{p_2} \dots = \frac{1}{h}$$

ou

$$y_1 = \frac{p_1}{hs_1},\ y_2 = \frac{p_2}{hs_2} \dots$$

et portant ces valeurs dans $\Sigma s_i y_i^2 = 1$

$$\frac{p^2_1}{s_1} + \frac{p^2_2}{s_2} \dots = h^2$$

ce qui montre que si une surface du second degré à centre touche un plan, le carré de la distance h^2 du centre à ce plan, est égale à la somme des quantités $\frac{1}{s}$ ou des carrés des demi-axes, multipliés par les cosinus p des angles que les axes font avec la normale au plan.

Prenons alors pour plans donnés les plans de coordonnées, et exprimons qu'ils touchent la surface de demi-axes $a_1, a_2 \dots a_n$, nous aurons en appelant $x_1 x_2 \dots$, les coordonnées du centre

$$x_1^2 = p_{i_1}^2 a^2_1 \dots + p^2_{in} a_n^2 ;$$

mais les p_{ij} sont les cosinus directeurs de plans rectangulaires, donc $\Sigma p_{ik} p_{il} = 0$, sauf si $k = l$ et alors $\Sigma p^2_{ii} = 1$, en ajoutant les équations (1) on a

$$x^2_1 + \dots x^2_n = a^2_1 + a^2_2 + \dots a^2_n,$$

ce qui montre que le lieu demandé est une sphère dont le centre est au point de croisement des plans.

Corollaire. — Le lieu des points de concours de n plans rectangulaires tangents à une surface du second degré à centre est une sphère.

Lieu des centres des surfaces du 2e ordre touchant $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ *plans.*

Soient $\alpha_1 \dots \alpha_n$ les demi-axes $a_{11} \dots a_{1n}$; $a_{21} \dots a_{2n}$; ... leurs cosinus directeurs, la condition de contact avec un plan

$$h_i + u_{1i} x_1 + u_{2i} x_2 \dots + u_{ni} x_n = 0 \text{ ou } X_i = 0$$

est, en appelant $x_1 \dots x_n$ les coordonnées du centre

$$\alpha^2_1 (a_{11} u_{i1} + a_{12} u_{i2} \dots)^2 + \alpha^2_2 (a_{21} u_{i1} + \dots)^2 \dots = X^2_i$$

l'élimination des a et des α donnerait le lieu. Mais on peut arriver autrement au résultat.

Pour que

$$F(x_1 \dots x_n) = 0$$

touche le plan

$$u_1 x_1 + \ldots u_n x_n + u_0 = 0$$

il faut que l'on puisse identifier cette équation avec celle d'un plan tangent,

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} - x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \ldots = 0$$

ou que

$$\frac{1}{u_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots = \frac{1}{u_n} \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots}{u^0}$$

ou en égalant ces rapports à λ et rendant F homogène

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lambda u_1 \ldots \frac{\partial F}{\partial x_0} = \lambda u_0$$

ou

supposant $F = \Sigma a_{ij} x_i x_j$

$$a_{11} x_1 \ldots + a_{10} x_0 - \lambda u_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

éliminant λ et les x entre ces équations et $F = 0$ ou celle du plan, on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & u_0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_0 & u_1 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On aura $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ équations analogues où $u_0, u_1 \ldots$ devront être remplacés par $u_{0i} \ldots u_{ni}$ et i par 1, 2, 3 ... d'un autre côté en appelant $x_1 x_2 \ldots, x_n$ les coordonnées du centre, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ \ldots \ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

ou

$$a_{11} x_1 + a_{1n} x_n + a_{10} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(A) \qquad \Delta x_1 = \frac{\partial H}{\partial a_{01}}.$$

en posant

$$H = \Sigma \pm a_{00} a_{11} \dots a_{nn},$$

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn} = \frac{\partial H}{a_{00}},$$

et (1) devient

$$\Sigma u_i u_j \frac{\partial H}{\partial a_{ij}} = 0.$$

Si entre les équations obtenues en remplaçant u_i par $u_{1i}, u_{2i} \dots$ et i par 1, 2, 3 ... et les équations (A) on élimine les a_{ij}, ou ce qui revient au même les $\frac{\partial H}{\partial u_{ij}}$, on a une équation du premier degré en $x_1, x_2, \dots x_n$. Le lieu cherché est donc un plan.

Trouver le lieu des pôles des plans normaux à une surface du second degré

$$f(x_{11} \dots x_n) = 0$$

en un même point $a_{11} a_2 \dots, a_n$ *de cette surface.*

Les équations de la normale en $a_{11} a_2 \dots a_n$ sont

$$\frac{x_1 - a_1}{\frac{\partial f}{\partial a_1}} = \frac{x_2 - a_2}{\frac{\partial f}{\partial a_2}} = \dots$$

un plan normal est un plan qui passe par la normale, il aura donc pour équation

$$(1) \qquad (x_1 - a_1) A_1 + \dots (x_n - a_n) A_n = 0.$$

et l'on devra avoir

$$(2) \qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

pour avoir le pôle d'un plan

$$u_1 x_1 + \dots u_n x_n + u_0 = 0,$$

il faut identifier l'équation de ce plan avec celle du plan polaire de α_1, α_2 à savoir

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \dots + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}}{u_1} = \dots \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_0}}{u_0}.$$

Le pôle du plan (1) sera donc donné par les formules :

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : A_1 = \dots = \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} : (-A_1 a_1 - A_2 a_2 \dots).$$

Pour avoir le lieu, il faudra éliminer A_1, A_2 ... entre (2) et (3). On simplifiera en prenant $f = \frac{x^2_1}{l^2_1} + \dots \frac{x^2_n}{l^2_n} - 1$ alors (2) et (3) donnent :

$$A_1 \frac{a_1}{l^2_1} + \dots A_n \frac{a_n}{l^2_n} = 0,$$

$$\frac{A_1 l_1^2}{\alpha_1} = \frac{A_2 l^2_2}{\alpha_2} \dots = -(A_1 a_1 + A_2 a_2 \dots)$$

$$= \frac{0}{\frac{\alpha_1}{l^2_1} a_1 + \dots},$$

on a donc pour équations du lieu

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{l^2_1} a_1 + \frac{\alpha_2}{l^2_2} a_2 \dots = 0, \\ & \frac{a_1 \alpha_1}{l^4_1} + \frac{a_2 \alpha_2}{l^4_2} \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

2. Sur une propriété des surfaces. — Considérons une surface de degré p

$$(1) \qquad f(x_1 \dots\dots x_n) = 0,$$

le nombre total des coefficients de f est

$$\nu = \frac{(p+n)!}{n!\, p!},$$

et si l'un deux est $a_{\alpha, \beta \dots}$, on pourra mettre l'équation $f = 0$ sous la forme

$$\Sigma a_{\alpha, \beta \dots} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \dots = 0,$$

si l'on exprime que la surface en question contient $\nu - 1$ points on aura $\nu - 1$ équations de la forme

$$\Sigma a_{\alpha,\beta\ldots}\, y_1^{\alpha} y_2^{\beta} \ldots = 0\,;$$

si l'on élimine les a on aura

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1_1 x_1 & \ldots & x_1^{\alpha} x_2^{\beta} & \ldots \\ 1_1 y_1 & \ldots & y_1^{\alpha} x_2^{\beta} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1_1 v_1 & \ldots & v_1^{\alpha} v_2^{\beta} & \ldots \end{vmatrix} = 0\,;$$

le déterminant qui figure dans cette formule a ν lignes et ν colonnes.

Soient $b_{\alpha\beta\ldots}$, $c_{\alpha\beta\ldots}$ ... les coefficients de ν surfaces du degré p multiplions les deux membres de (2) par le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{00} & \ldots\ldots & b_{\alpha\beta\ldots} \\ c_{00} & \ldots\ldots & c_{\alpha\beta\ldots} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

et appelons g_1, g_2 ... g_ν les premiers membres des équations des surfaces en question g_{11}, g_{12} ... $g_{1\nu}$ ce que deviennent ces premiers membres pour $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ ... ; g_{21}, g_{22} ... ce qu'ils deviennent pour $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$ ... et nous aurons

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_\nu \\ g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1\nu} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0\,;$$

et cette formule sera l'une des formes que peut affecter l'équation $f(x_1 \ldots x_n) = 0$. Or rien n'empêche de supposer

$$g_i = (\lambda_{i_1} x_1 + \ldots \lambda_{in} x^n + \lambda_{i0})^p.$$

les λ étant des constantes, l'équation $\sqrt{g_i} = 0$ représentera alors un plan et nous supposerons que λ_{i_1}, λ_{i_2} ... sont ses cosinus directeurs. L'équation (3) exprime alors que *toute surface* $f = 0$ *du degré* p *est le lieu des points tels que les puissances* p *de leurs distances à* ν *plans, fixes, sont liées entre elles par une équation linéaire et homogène.*

Ce théorème peut prendre une autre forme, et l'on peut dire que pour que ν points soient sur une surface du degré p, ils faut et il suffit qu'il existe une relation de la forme (3) ou même de la forme (2).

La relation (2) aura lieu entre ν points $x_1 \ldots$; $y_1 \ldots$; $z_1 \ldots$ et l'on a pour des valeurs des μ

$$\mu_1 g(x_1 \ldots) + \mu_2 g(y_1 \ldots) + \mu_3 g(z_1 \ldots) \ldots = 0$$

quelle que soit la fonction g, car alors on aura

$$\mu_1 + \mu_2 \ldots\ldots = 0,$$
$$\mu_1 x_1 + \mu_2 y_2 \ldots\ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et par suite on en déduira (2). On peut donc dire que *si ν points sont sur une surface de degré p, il existera une relation linéaire et homogène entre les quantités $g(x_1 \ldots)$, $g(y_1 \ldots)$ quelle que soit la surface g* et si l'on a

$$g = (\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n + \lambda_0)^p$$

On pourra dire que, *pour que ν points soient sur une surface de degré p, il faut et il suffit qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les puissances p des distances de ces points à un plan arbitraire.*

Ces théorèmes ont évidemment des corrélatifs que l'on démontrerait en supposant que x_1, $x_2 \ldots$ sont des coordonnées tangentielles et que nous nous dispenserons d'énoncer.

3. Condition de contact avec une droite. — Pour que la droite

$$(G) \qquad x_1 = \alpha_1 + \beta_1\rho, \ldots x_n = \alpha_n + \beta_n\rho$$

touche la surface $f = 0$, il faut que l'équation en ρ

$$f(\alpha_1 + \beta_1\rho_1, \ldots \alpha_n + \beta_n\rho) = 0$$

ait une racine double ou que l'on ait en même temps

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\beta_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\beta_2 \ldots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\beta_n = 0.$$

Si l'on a $f = \sum\limits_{0}^{n} a_{ij} x_i x_j$ les deux équations en question prendront la forme

$$f(\alpha_1 \dots \alpha_n) + \left(\beta_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \dots \beta_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\right)\rho + \rho^2 \varphi(\beta_1 \dots \beta_n) = 0$$

φ désignant l'ensemble du second degré de f

$$\beta_1 f_1(\alpha_1 + \beta_1 \rho_1 \dots) + \beta_2 f_2(\alpha_1 + \beta_1 \rho \dots) \dots = 0$$

formule ou $f_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$. Il suffit d'exprimer que la première a une racine double, ou de poser :

$$(1) \quad \left(\beta_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \dots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\right)^2 - 4f(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)\varphi(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n) = 0$$

cette équation, quand on y considère les ν comme des coordonnées courantes, est l'équation d'un cylindre dont les génératrices touchent la surface et ont la direction $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$.

Le cône circonscrit qui a pour sommet $\alpha_1\ \alpha_2 \dots$ s'obtiendra en éliminant les β et ρ entre l'équation qui exprime le contact et les équations (G) de sa génératrice. S'il s'agit de la surface $\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0$, il faudra éliminer les β et ρ entre (G) et (1), ce qui donnera

$$\left[(x_1 - \alpha_1)\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} + (x_2 - \alpha_2)\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \dots\right]^2$$
$$- 4f(\alpha_1 \alpha_2 \dots)\varphi(x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2 \dots) = 0,$$

ou en observant que

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} + \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} = 2f$$

on a

$$\left[x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} - 2f(\alpha_1 \dots)\right]^2 - 4f(\alpha_1 \dots)\varphi(x_1 - \alpha_1 \dots)^2 = 0$$

ou

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}\right)^2 - 4f(\alpha_1 \dots)\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots\right) + 4f^2(\alpha_1 \dots)$$
$$- 4f(\alpha_1 \dots)\varphi(x_1 - \alpha_1 \dots) = 0$$

ou

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}\right)^2 - 4f(\alpha_1 \dots)$$
$$\left[x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots f(\alpha_1 \dots) + \varphi(x_1 - \alpha_1)\right] = 0.$$

Or

$$f(x_1 \dots) = f(\alpha_1 + x_1 - \alpha_1 \dots) = \varphi(x_1 - \alpha_1 \dots) + (x_1 - \alpha_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \dots$$
$$+ f(\alpha_1 \dots) = \varphi(x_1 - \alpha_1, \dots) + x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \dots x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} - f(\alpha_1 \dots),$$

on a donc l'équation du cône

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \dots + x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}\right)^2 - 4 f(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) f(x_1 \dots x_n) = 0.$$

4. Théorème de Chasles. — Voici un théorème découvert par Chasles, et qui mérite d'être signalé, parce que l'illustre géomètre pensait qu'il ne pouvait pas être établi par l'analyse ; Liouville cependant y est parvenu ; mais, il lui a fallu pour cela inventer une méthode spéciale d'élimination. Or ce théorème de Chasles (Théorème qu'il ne pouvait pas étendre à l'espace à n dimensions), est, comme on va le voir, très facile à démontrer et à généraliser, voici en quoi il consiste :

Soit

$$(1) \qquad f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

une surface algébrique, f désignant un polynôme entier d'un degré quelconque, si on lui mène des plans tangents parallèles à une direction, $l_1, l_2 \dots l_n$, le centre de gravité des points de contact restera fixe quand on fera varier $l_1, l_2 \dots l_n$.

Les points de contact sont donnés par la formule (1) et les suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : l_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : l_2 \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} \, l_n$$

ou en posant

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

par les équations

(2) $$f = 0, f_1 - l_1 s = 0 \ldots f_n - l_n s = 0,$$

où s est une inconnue auxiliaire. Différentions ces équations en considérant les x et s comme des fonctions de $l_1 \ldots l_n$, nous aurons

(3) $$\begin{cases} f_1\, dx_1 + f_2 dx_2 \ldots + f_n\, dx_n = 0, \\ f_{11}\, dx_1 + f_{12}\, dx_2 \ldots + f_{1n}\, dx_n - l_1\, ds - s\, dl_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}\, dx_1 + f_{n2}\, dx_2 \ldots + f_{nn}\, dx_n - l_n\, ds - s\, dl_n = 0\,; \end{cases}$$

posons

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & 0 \\ f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & -l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & -l_n \end{vmatrix},$$

nous tirerons de (3)

(4) $$dx_1 = \frac{s}{D}\left(dl_1 \frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \ldots dl_n \frac{\partial D}{\partial f_{n1}}\right).$$

Or, si f est au moins du 2^e degré, les $s\,\dfrac{\partial D}{\partial f_{ij}}$ seront de degré inférieur à D, et en vertu du théorème de jacobi Σdx_1 sera nul, et il en sera de même de Σdx_2 Σdx_3 donc Σx_1, $\Sigma x_2 \ldots$ seront constants, c'est-à-dire indépendants de la direction $l_1, l_2 \ldots l_n$, ce qui démontre le théorème de Chasles.

Généralisons : supposons f au moins du 3^e degré, on déduira de (4)

$$x_1 dx_1 = \frac{sx_1}{D}\left(dl_1 \frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \ldots\right),$$

$$x_1 dx_2 + x_2 dx_1 = \frac{sx_1}{D}\left(dl_1 \frac{\partial P}{\partial f_{21}} + \ldots\right) + \frac{sx_2}{D}\left(dl_1 \frac{\partial D}{\partial f_{11}} \ldots\right).$$

alors $\dfrac{\partial D}{\partial f_{1i}}\, sx_1$ sera de degré inférieur à D, et l'on aura

$$\Sigma x_1 dx_1 = 0, \qquad \Sigma\,(x_1 dx_2 + x_2 dx_1) = 0 \text{ ou } d\Sigma x_1 x_2 = 0\,;$$

donc Σx^2_1, $\Sigma\, x_1 x_2$ seront constants, c'est-à-dire indépendants de l'orientation $l_1, l_2 \ldots l_n$, il en sera de même de $\Sigma x^2_1 + \Sigma x^2_2 + 2\,\Sigma x_1 x_2$ c'est-à-dire que

La somme des carrés des cordes joignant les points de contact deux à deux sera constante.

Il en sera de même de la somme des moments d'inertie polaires des points de contact.

Si f est au moins du 4^e degré, on verra de même que la somme des cubes construits sur les cordes qui joignent deux à deux les points de contact est constante, etc.

On voit aussi comment on pourrait généraliser d'une autre manière, en remplaçant les plans tangents par d'autres surfaces tangentes, etc. En sorte que le théorème de Chasles n'est que le premier d'une foule de théorèmes analogues, qui ne sont que des cas particuliers du théorème d'Abel et de Jacobi.

CHAPITRE X

—

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

1. Géométrie de Riemann. — Nous allons étudier la géométrie sur l'hypersphère

$$(1) \qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^4_4 = R^2$$

de rayon R. Les coordonnées d'un point, au nombre de 4 sont toujours liées par la relation (1). En réalité elles seront au nombre de trois distinctes.

Un déplacement sans changement de forme sera une substitution orthogonale et homogène, entre les 4 coordonnées de chacun des points d'une figure. Il y aura alors un invariant $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 = \lambda^2$ et un autre invariant

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2$$

que l'on pourra remplacer par $x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 + x_4x_4'$.

Toute équation homogène en x_1, x_2, x_3, x_4 et du premier degré représentera ce que nous appellerons un plan. Deux équations linéaires et homogènes représenteront une droite.

Si on résout les équations d'une droite par rapport à deux des coordonnées, celles-ci se présenteront comme fonctions linéaires et homogènes, des deux autres, et si l'on exprime celles-ci en fonction linéaires, et homogènes de deux paramètres, u, v les équations d'une droite quelconque se présenteront sous la forme

$$x_1 = a_1u + l_1v, \ldots x_4 = a_4u + l_4v.$$

Il sera commode de poser $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, et alors

$$x_1 = \rho(a_1 \cos \varphi + l_1 \sin \varphi) \ldots$$

or pour $\varphi = 0$ $x_1 = a_1 \rho \cos \varphi, \ldots$ ainsi $a_1 \rho \cos \varphi \ldots$ et $l_1 \rho \sin \varphi \ldots$ sont les coordonnées d'un point de la droite donc $\rho^2 \Sigma a_i^2 \cos^2 \varphi = R^2$, $\rho^2 \Sigma l_i^2 \sin^2 \varphi = R^2$ et comme Σx_i^2 doit aussi être égal à R^2, on aura

$$R^2 = \Sigma a_i^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\, \Sigma a_i l_i \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + \Sigma l_i^2 \rho^2 \sin^2 \varphi\,;$$

il faudra que $\rho^2 \Sigma a_i l_i \sin \varphi \cos \varphi = 0$ et cela quel que soit φ ; donc on peut supposer $\rho = 1$ et

$$\Sigma a_i^2 = R^2, \quad \Sigma a_i l_i = 0, \quad \Sigma l_i^2 = R^2,$$

et les équations de la droite seront

$$(2) \qquad x_1 = a_1 \cos \varphi + l_1 \sin \varphi, \quad x_2 = \ldots$$

La longueur d'un arc de courbe sera l'intégrale

$$\int \sqrt{\Sigma dx_i^2}$$

prise entre deux limites caractérisant les extrémités de l'arc, la longueur de la droite (2) prise entre des limites définies par les paramètres φ_0 et φ_1 sera

$$\int \sqrt{\Sigma (a \sin \varphi - l \cos \varphi)^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R d\varphi = R(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$R(\varphi_1 - \varphi_0)$ sera la *distance* des points extrémités de la droite qui les joint.

L'angle A de deux lignes en un point x_1, x_2, x_3, x_4 commun à ces lignes est donné par la formule

$$\cos A = \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_1}{ds'} + \frac{dx_2}{ds}\frac{dx_2}{ds'} + \frac{dx_3}{ds}\frac{dx_3}{ds'} + \frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds'},$$

s et s' désignant les éléments des arcs au point commun.

Si l'on considère la droite (2) et la droite

$$(3) \qquad x_1 = a_1 \cos \varphi' + l'_1 \sin \varphi', \ldots$$

qui passent en a_1, a_2, a_3, a_4, leur angle V est donné par la formule

$$\cos V = \varepsilon\varepsilon' \big[\Sigma a_i^2 \sin \varphi \sin \varphi' + \Sigma a_i l'_i \cos \varphi' \sin \varphi + \Sigma a_i l_i \cos \varphi \sin \varphi' + \Sigma l_i l'_i \cos \varphi' \cos \varphi \big],$$

formule où $\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $\varepsilon' = \frac{\partial \varphi'}{\partial s'}$; or $s = R\varphi$, $s' = R\varphi'$, on a donc en posant $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$.

$$\cos V = \frac{1}{R^2} \Sigma l_i l'_i.$$

Pour $l_1 = l'_1$, $l_2 = l'_2$ ... $\cos V = 1$, car $\Sigma l_i^2 = R^2$, et les droites sont confondues, si $\Sigma l_i l'_i = 0$, $\cos V = \frac{\pi}{1}$, et les droites sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Si nous éliminons les l' et φ' entre (3), $\Sigma l_i l'_i = 0$ et $\Sigma l'^2_i = R^2$; nous aurons le lieu des droites perpendiculaires à une autre en un point donné. Or on a

$$l'_i = \frac{x_i - a'_i \cos \varphi'}{\sin \varphi'},$$

donc

$$R^2 \sin^2 \varphi' = \Sigma (x_i - a_i \cos \varphi')^2, \qquad \Sigma l_i (x_i - a_i \cos \varphi') = 0.$$

De la dernière on tire

$$\cos \varphi' = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma a_i l_i},$$

et le lieu cherché a pour équation

$$R^2 \left[1 - \left(\frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma a_i l_i}\right)^2\right] = \Sigma \left(x_i - a_i \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma a_i l_i}\right)^2.$$

c'est-à-dire

$$R^2 - \left(\frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma a_i l_i}\right)^2 (R^2 - \Sigma a_i^2) = \Sigma x_i^2 - \Sigma 2 a_i x_i \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma a_i l_i},$$

en observant que $\Sigma a^2 = R^2$, $\Sigma x^2 = R^2$, il reste

$$\Sigma a_i x_i \, \Sigma l_i x_i = 0 ;$$

équation qui se décompose en $\Sigma a_i x_i = 0$ et $\Sigma l_i x_i = 0$, or le lieu doit passer en a_1, a_2 ... et $\Sigma a_i x_i = 0$ n'y passe pas, donc le lieu cherché est le plan $\Sigma l_i x_i = 0$, dit perpendiculaire à la droite (1).

Cherchons maintenant l'équation de la droite passant par les points y_1, y_2, y_3, y_4 et z_1, z_2, z_3, z_4, appelons a la distance de ces deux points ; ses équations seront

$$X_1 = y_1 \cos \varphi + z'_1 \sin \varphi, \ldots,$$

et on devra avoir

$$z_1 = y_1 \cos \varphi' + z'_1 \sin \varphi', \ldots,$$

ou en éliminant z'_1, z'_2 ...

$$X_1 \sin \varphi' - z_1 \sin \varphi = y_1 \sin (\varphi' - \varphi), \ldots$$

ou

$$X_1 = \frac{y_1 \sin (\varphi' - \varphi) + z_1 \sin \varphi}{\sin \varphi'}, \ldots$$

or

$$a = \varphi' R,$$

donc on a pour les équations de la droite

$$(4) \qquad X_1 = \frac{y_1 \sin \left(\frac{a}{R} - \varphi\right) + z_1 \sin \varphi}{\sin \frac{a}{R}}, \ldots$$

La longueur de la droite

$$X_1 = a_1 \cos \varphi + l_2 \sin \varphi, \ldots$$

est donnée par la formule $R \cos (\varphi_1 - \varphi_0)$, or aux arguments φ_0 et φ_1 correspondent les points

$$x'_1 = a_1 \cos \varphi_0 + l_2 \sin \varphi_0, \ldots \qquad \text{et} \qquad x''_1 = a_1 \cos \varphi_1 + l_1 \sin \varphi_1 \ldots$$

et l'on a

$$\Sigma x'_1 x''_1 = \Sigma a_i^2 \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 + \Sigma l_i^2 \sin \varphi_0 \sin \varphi_1$$
$$+ 2 \Sigma a_i l_i (\sin \varphi_0 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_1),$$

ou

$$\Sigma x'_1 x''_1 = R^2 \cos (\varphi_1 - \varphi_0) + 2 \Sigma a_i l_i \sin (\varphi_0 + \varphi_1);$$

mais $\Sigma a_i l_i$ est nul, donc

$$\Sigma x'_1 x''_1 = R^2 \cos (\varphi_1 - \varphi_0).$$

ce qui fournit la distance ou le cosinus de la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées.

Revenons à l'équation (4) de la droite qui passe par les points $y_1 \ldots z_1 \ldots$ Considérons une autre droite

$$X_1 = \frac{x_1 \sin \left(\frac{b}{R} - \varphi'\right) + z_1 \sin \varphi'}{\sin \frac{b}{R}}, \ldots$$

passant par z_1 ... et x_1 .., la distance de ces points étant b, l'angle C des droites (4) et (5) sera donné par la formule

$$R^2 \cos C = \frac{\Sigma \left[-y_i \cos\left(\frac{a}{R} - \varphi\right) + z_i \cos\varphi \right] \left[-x_i \cos\left(\frac{b}{R} - \varphi'\right) + z_i \cos\varphi' \right]}{\sin\frac{a}{R} \sin\frac{b}{R}}.$$

ou l'on devra faire

$$\varphi = \frac{a}{R}, \quad \varphi' = \frac{b}{R},$$

on aura alors

$$R^2 \cos C \sin\frac{a}{R} \sin\frac{b}{R} = \Sigma x_i y_i + \Sigma z_i^2 \cos\frac{a}{R} \cos\frac{b}{R}$$
$$- \Sigma y_i z_i \cos\frac{b}{R} - \Sigma x_i z_i \cos\frac{a}{R},$$

c'est-à-dire

$$R^2 \cos C \sin\frac{a}{R} \sin\frac{b}{R} = R^2 \cos\frac{c}{R} + R^2 \cos\frac{a}{R} \cos\frac{b}{R} - 2 R^2 \cos\frac{a}{R} \cos\frac{b}{R},$$

ou enfin

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R} \cos\frac{b}{R} + \cos C \sin\frac{a}{R} \sin\frac{b}{R}.$$

C'est la relation qui existe entre les angles et les côtés d'un triangle; de cette formule et de ses analogues

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R} \cos\frac{c}{R} + \cos A \sin\frac{b}{R} \sin\frac{c}{R},$$
$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R} \cos\frac{c}{R} + \cos B \sin\frac{c}{R} \sin\frac{a}{R},$$

on tire toutes les formules de la trigonométrie sphérique.

2. Espaces Hyperboliques. Géométrie de Bolyai. — Plaçons nous dans l'espace hyperbolique, dans lequel les coordonnées x_1 ... x_4 d'un point sont liées entre elles par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = R^2,$$

et pour abréger posons

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = \Sigma' \alpha_i,$$

on pourra écrire

$$\Sigma' x_i^2 = R^2.$$

Le déplacement sans changement de forme, sera la substitution linéaire

$$x_i = a_{i_1} y_1 + a_{i_2} y_2 \ldots, a_{i_4} y_4, \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

dans laquelle on aura

$$\Sigma' a_{i_p} a_{i_q} = 0, \qquad \Sigma' a^2_{ip} = 1.$$

alors on aura

$$\Sigma' x^2_i = \Sigma' y^2_i = R^2,$$
$$\Sigma' x_i x'_i = \Sigma' y_i y'_i.$$

Toute équation homogène et du premier degré en x_1, x_2, x_3, x_4 représentera un plan, deux équations linéaires homogènes représenteront une droite.

Les équations d'une droite seront alors de la forme

$$x_1 = a_1 u + b_1 v, \ldots$$

ou plus élégamment (en suivant une analyse semblable à celle que nous avons développée au § précédent)

(1) $$x_1 = a_1 \cos h\varphi + b_1 \sin h\varphi, \ldots$$

la longueur de l'arc de courbe sera

$$\int \sqrt{\Sigma' dx^2_i}$$

et la longueur de l'arc de droite (1) sera

$$R(\varphi_1 - \varphi_0).$$

l'angle A de deux lignes se rencontrant en x_1, x_2, x_3, x_4, sera donné par la formule de définition

$$\cos A = \Sigma' \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_i}{ds'}$$

s et s' désignant les longueurs des arcs au point commun ; l'angle V de deux droites

(2) $$x_1 = a_1 \cos h\varphi + b_1 \sin h\varphi, \ldots$$
$$x_1 = a_1 \cos h\varphi' + b'_1 \sin h\varphi', \ldots$$

au point a_1, a_2 ... est donné par la formule

$$\cos V = \frac{1}{R_2} \Sigma' b_i b'_i,$$

et le plan perpendiculaire en a_1, a_2 ... à la droite (2) est

$$\Sigma b_i x_i = 0.$$

la droite qui passe par les points x_1, x_2 ... et y_1, y_2 ... et dont la longueur est c a pour équations

$$X_1 = \frac{x_1 \sin h\left(\frac{c}{R} - \varphi\right) + y_1 \sin h\varphi}{\sin \frac{c}{R}}, \ldots$$

et en copiant pour ainsi dire l'analyse du § précédent, on trouve entre les angles et les côtés d'un triangle ABC les relations

$$\cos h\frac{a}{R} = \cos h\frac{b}{R} \cos h\frac{c}{R} + \sin h\frac{b}{R} \sin h\frac{c}{R} \cos A,$$

$$\cos h\frac{b}{R} = \cos h\frac{c}{R} \cos h\frac{a}{R} + \sin h\frac{c}{R} \sin h\frac{a}{R} \cos B,$$

$$\cos h\frac{c}{R} = \cos h\frac{a}{R} \cos h\frac{b}{R} + \sin h\frac{a}{R} \sin h\frac{b}{R} \cos C.$$

et en général toutes les formules de la trigonométrie sphérique où on change a en $a\sqrt{-1}$, b en $b\sqrt{-1}$ et c en $c\sqrt{-1}$.

3. L'horisphère. — Plaçons-nous dans un espace hyperbolique, soit

$$A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 = 0;$$

l'équation d'un plan, par un point a_1, a_2, a_3, a_4 du plan menons une perpendiculaire de longueur l à ce plan, elle aura pour équations

$$X_1 = a_1 \cos h\varphi + b_1 \sin h\varphi, \ldots$$

pour $\varphi = 0$, on a $X_1 = a_1$, ... pour $\varphi = \frac{l}{R}$, on a

$$X_1 = a_1 \cos\frac{hl}{R} = b_2 \sin\frac{hl}{R}, \ldots$$

et pour que la droite soit perpendiculaire au plan, il faut que

$$\frac{b_1}{A_1} = \frac{b_2}{A_2} = \frac{b_3}{A_3} = \frac{b_4}{A_4} = \frac{R}{\sqrt{\Sigma' A^2}}$$

Les coordonnées du point situé sur la perpendiculaire en a_1 a_2 … menée au plan et à la distance l de ce point seront

$$X_1 = a_1 \cos \frac{hl}{R} + \frac{RA_1}{\sqrt{\Sigma' A^2}} \cdots$$

éliminant les a entre ces équations et

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 - A_4 a_4 = 0,$$

on a l'équation de l'*horisphère*.

$$\Sigma' \left(X_i - \frac{RA_i}{\sqrt{\Sigma' A^2}} \right) \frac{A_i}{\cos \frac{hl}{R}} = 0.$$

c'est une équation non homogène du 1er degré, mais qu'il est facile de rendre homogène, en l'écrivant ainsi

$$\Sigma' \left(X_i - \frac{RA_i}{\sqrt{\Sigma' A^2}} \frac{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2}}{R} \right) \frac{A_i}{\cos \frac{hl}{R}} = 0.$$

CONCLUSION

La géométrie Euclidienne correspondant au cas où $R = \infty$, dans les deux géométries que nous venons de considérer, pourrait s'appeler géométrie parabolique.

En géométrie sphérique, dans un triangle ABC qui a un angle droit B, on déduit de la formule

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \frac{a}{R},$$

la suivante

$$\cos A = \sin C \cos \frac{a}{R};$$

$\cos \frac{a}{R} \sin C$ peut être pris égal à 1 et même plus petit que 1 ; une droite perpendiculaire à une droite peut rencontrer une autre perpendiculaire à cette droite. Au contraire en géométrie hyperbolique, dans le triangle rectangle en B, on a

$$\cos A = \sin C \cos h \frac{a}{R};$$

et $\sin C \cos h \frac{a}{R}$ doit être inférieur ou au plus égal à 1, pour que A soit réel ; donc $C < \frac{\pi}{2}$. Non seulement deux perpendiculaires ne se rencontrent pas, mais bien des obliques ne rencontrent pas la perpendiculaire située dans le même plan, le plus petit angle $2p$ donné par la formule

$$\cos p = \frac{1}{\cos h \frac{a}{R}}$$

est l'*angle* de *parallélisme* ; il dépend de la nature de l'espace caractérisé par la constante R, et il dépend aussi de la distance a qui sépare la perpendiculaire du point par lequel on mène l'oblique.

Le postulatum d'Euclide, au fond, suppose qu'un déplacement est une substitution orthogonale.

La géométrie sphérique ou de Riemann, suppose le déplacement défini par des formules telles que

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11}x'_1 + \ldots a_{14}x'_4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_4 = a_{41}x'_1 \ldots + a_{44}x'_n, \end{array} \right.$$

avec les relations

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 = R^2;$$

la géométrie hyperbolique suppose

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - x^2_4 = R^2.$$

les formules (1) ne sont plus orthogonales et l'on a

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 - a_{4i}^2 = 1,$$
$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} - a_{4i}a_{4j} = 0.$$

Les formules de la géométrie Euclidienne sont homogènes par rapport aux lignes, quand l'unité ne joue aucun rôle dans ces formules. C'est là un fait qui est incontestable, et qui résulte de ce que les formules fondamentales sont homogènes ; mais on a cru démontrer cette homogénété *à priori*, et sans s'appuyer sur aucune considération tirée des théorèmes de la géométrie. Or le principe d'homogénété, s'il était vrai, servirait à démontrer le postulatum d Euclide, car, dans un triangle, un angle est fonction d'un côté et des deux autres angles ; puisque, un triangle est déterminé quand on donne un côté a et les angles adjacents B et C, donc en appelant A le 3^e angle, on aurait $A = \varphi(a, B, C)$, d'ou a doit disparaître, en vertu de l'homogénété ; donc $A = \varphi(B, C)$, et dans un triangle rectangle, si $B = \frac{\pi}{2}$, A est déterminé quand C l'est, car la fonction φ et son inverse n'ont qu'une valeur. Il n'est pas difficile alors, en décomposant un triangle en deux triangles rectangles, au moyen d'une hauteur, de voir sur cette figure, que $A + B + C = \pi$.

D'ailleurs les formules de la trigonométrie sphérique et hyperbolique ne sont pas homogènes.

4. L'espace homographique. — Nous allons édifier un nouveau type de géométrie, mais auparavant, il est nécessaire de dire ce que l'on entend par un groupe de substitutions, considérons une substitution

$$(1) \qquad y_i = \varphi_i (x_1, x_2 \dots x_n)$$
$$(i = 1, 2 \dots n)$$

Supposons que les fonctions φ renferment outre les variables $x_1 \dots x_n$, des paramètres variables, comme les substitutions orthogonales, voir même des fonctions arbitraires, la substitution (1) en représentera en réalité une infinité, et ces substitutions formeront un groupe, si en effectuant deux substitutions quelconques de cet ensemble successivement, on obtient une nouvelle substitution de cet ensemble, et si de plus, les substitutions obtenues en résolvant les équations (1) font encore partie de l'ensemble. Enfin pour certaines valeurs de paramètres, on doit avoir $\varphi_i = x_i$. Les substitutions orthogonales sont un exemple de substitutions formant un groupe.

Les déplacements dans l'espace ordinaire Euclidien et a trois dimensions que l'homme a *créé*, pour expliquer et coordonner ses sensations, forment un groupe; mais *en réalité* les déplacements forment-ils un groupe? Les objets sensibles, peuvent-ils prendre deux fois la même place? il semble que oui, mais cela n'est pas sûr. Or ce qui fait que l'étude de la géométrie est intéressante, c'est précisément parce que nous admettons la notion d'égalité des figures, notion qui n'existe que parce que nous admettons que les déplacements forment un groupe.

Les diverses géométries que l'on peut édifier sont donc au fond l'étude des groupes de substitutions et de leurs invariants, et par invariants nous entendons tout ce qui subsiste quand on fait les substitutions du groupe que l'on considère.

Un groupe important, le premier de ceux qui a été étudié, est le groupe linéaire, il donne lieu à la considération de l'espace homographique, les formules

$$(1) \qquad y_i = \frac{a_{0i} + a_{1i}x_1 \dots + a_{ni}x_n}{a_{00} + a_{10}x_1 \dots + a_{n0}x_n},$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

où les a_{ij} sont des paramètres indépendants des x_j qui définiront maintenant les déplacements sans changement de forme. Une équation de premier degré

$$A_1x_1 + A_2x_2 \dots + A_nx_n + A_0 = 0$$

représentera toujours ce que nous appellerons un plan, $n - 1$ équations du premier degré ou des équations de la forme

$$(2) \qquad x_1 = \alpha_1\rho + \beta_1, \dots x_n = \alpha_n\rho + \beta_n,$$

où les α et les β sont constants et ρ variable, représenteront toujours une droite.

Un déplacement, évidemment, n'altère pas le degré d'une équation, une droite, un plan déplacés sont encore une droite, un plan. Mais la notion de distance n'existe plus en général, pas plus que la notion d'angle, deux points n'ont pas en général d'invariant.

Quatre points

$$x_1^{(1)} \dots ; x_1^{(2)} \dots ; x_1^{(3)} \dots ; x_1^{(4)} \dots$$

ont un invariant quand ils sont en ligne droite; cet invariant, que l'on appelle leur rapport anharmonique, est donné par les formules

$$\frac{x_i^{(1)} - x_i^{(2)}}{x_i^{(1)} - x_i^{(4)}} : \frac{x_i^{(3)} - x_i^{(2)}}{x_i^{(3)} - x_i^{(4)}}$$

où i peut être à volonté égal à $1, 2, \dots n$. Pour le démontrer, il suffit de mettre les équations de la droite contenant ces points sous la forme (2), d'y changer $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ et x en y, ce qui donne

$$y_1^{(1)} = \alpha_1\rho_1 + \beta_1 \dots y_n^{(1)} = \alpha_n\rho_1 + \beta_n$$

. . . .

de faire la substitution (1) ce qui donne

$$\frac{a_{0i} + a_{1i}x_1^{(1)}, \dots + a_{ni}x_n^{(1)}}{a_{00} + a_{10}x_1^{(1)}, \dots + a_{n0}x_n^{(1)}} = \alpha_1\rho_1 + \beta_1 \dots$$

pour constater que

$$\frac{x_1^{(1)} - x_1^{(2)}}{x_1^{(1)} - x_1^{(4)}} = \frac{x_1^{(3)} - x_1^{(2)}}{x_1^{(3)} - x_1^{(4)}} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_4} : \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_4} \text{ etc.}$$

Il y a des points que toute substitution linéaire laisse invariants, on les obtient en faisant dans (1)

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2 \dots$$

ce qui donne

$$(a_{00} + a_{10}x_1 + \dots) x_i = a_{0i} + a_{1i}x_1 + \dots$$

ces équations sont du deuxième degré en x_1, x_n, on peut les mettre sous la forme

$$\frac{a_{0i} + a_{1i}x_1 + \dots}{x_i} = \dots = \frac{a_{00} + a_{10}x \dots}{1} = s$$

ou en les rendant homogènes et en supposant $x_0 = 1$

$$\frac{a_{0i}x_0 + a_{1i}x_1 + \dots}{x_i} \dots = \frac{a_{00} + a_{10}x_1 + \dots}{x_0} = s$$

ou enfin

$$a_{0i}x_0 + a_{1i}x_1 \dots + a_{ni}x_n = sx_i$$
$$(i = 1, 2 \dots n)$$

l'élimination des x donne une équation du degré $n + 1$ en s.

$$\begin{vmatrix} a_{00} - s, & a_{10} & \dots & a_{n0} \\ a_{01} & a_{11} - s, & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

à chacune des racines de cette équation correspondra un système de valeurs des x. Il y aura donc $n + 1$ points invariants et par suite des droites invariantes joignant les points invariants, etc.

Bien entendu, ces conclusions sont soumises à des restrictions.

Maintenant nous allons diminuer la généralité de nos conclusions pour obtenir des résultats plus conformes à l'idée que nous nous fesons de l'espace que nous croyons réel.

L'homologie. — Considérons le cas particulier où les formules homographiques sont de la forme

$$y_i = \frac{x_i}{a_1x_1 + \dots a_nx_n + a_0}$$

elles forment un groupe

On voit que le point $x_1 = o$, $x_2 = o$ ... reste invariant, c'est le *centre d'homologie* ou *l'œil*. Les points du plan

$$a_1x_1 + a_2x_2 \dots = 1$$

restent invariants, c'est le plan du *tableau*. Le rapport anharmonique est toujours invariant pour 4 points en ligne droite.

Réduisons le nombre n à 3 pour nous rapprocher, de nos apparences, désignons par T_1 T_2 ... les opérations qui ont pour objet de faire une substitution

$$y_1 = \frac{x_1}{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\dots}, \quad y_2 = \frac{x_3}{\dots}$$

désignons en outre par D_1 D_2 ... de simples déplacements par D'_1, D'_2 ... les opérations qui ont pour objet de remettre en place les figures sur lesquelles on a opéré les déplacements D_1 D_2 ... enfin par D_i T_j l'opération résultant de l'opération T_j suivie de l'opération D_i. Les opérations $D'_i\,TD_i$ sont représentées par des formules linéaires qui forment un groupe, car

$$D'_iT_jD_iD'_iT_kD_i$$

revient à $D'_iT_jT_kD_i$, les opérations T'_iDT_i également, car les opérations D forment un groupe.

Si donc on considère un objet réel dans diverses positions et l'objet homologique qui en est une sorte d'image, ces images, pour nous, changeront de forme, en supposant, a, b, c invariables. Le point y_1, y_2, y_3 étant joint au point x_1, x_2, x_3, la droite qui unit ces points aura pour équations

$$\frac{X_1 - x_1}{y_1 - x_1} = \frac{X_2 - x_2}{y_2 - x_2} = \frac{X_3 - x_3}{y_3 - x_3}$$

ou

$$\frac{X_1 - x_1}{x_1} = \frac{X_2 - x_2}{x_2} = \frac{X_3 - x_3}{x_3}$$

ou

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2} = \frac{X_3}{x_3}$$

elle passe par l'œil ; on peut supposer

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = x_3 - h$$

l'intersection de la droite en question avec le tableau $X_3 = h$, aura pour coordonnées

$$X_1 = x_1 \frac{h}{x_3}, \qquad X_2 = x_2 \frac{h}{x_3}.$$

C'est ce qu'on appelle la *perspective* du point y_1, y_2, y_3, perspective dont les propriétés sont bien connues. La figure homologique d'une figure donnée est ce qu'on appelle la *perspective relief* ou *bas-relief* de cette figure.

Or, nous ne voyons que les *bas-reliefs* des objets, et même que les perspectives de ces objets quand l'œil reste immobile, ou varie peu par rapport aux dimensions de ces objets. N'oublions pas alors, que les apparences sont trompeuses, n'oubiions pas qu'il a été dangereux de proclamer que la lune était plus grande que le Péloponèse, même chez les Athéniens.

La similitude est un groupe de transformations que l'on obtient en faisant successivement des déplacements euclidiens et des substitutions de la forme

$$y_1 = kx_1 \ldots y_n = kx_n$$

k désignant un paramètre variable, mais indépendant des x et des y. Ces dernières substitutions sont des homotheties. Elles ont, comme on sait, pour invariants les angles, mais la distance n'est pas, en général invariante.

Enfin il y a un groupe de transformations très intéressantes à cause des analogies qu'elles présentent avec les transformations orthogonales ; ce sont les suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \ldots\ldots + c_{1n}x_u, \\ y_2 = \alpha_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \ldots\ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les α et les c_{ij} sont indépendants des x et des y et les c_{ij} sont les coefficients d'une substitution qui n'altère pas une fonction du second degré homogène toujours positive

$$f = \Sigma a_{ij}\, x_i x_j$$

et que nous avons appris à former p. (118). Si l'on appelle déplacement sans changement de forme une substitution telle que (A), distance de deux points $x_1 x_2 \ldots$ et $x'_1, x'_2 \ldots$ la quantité δ donnée par la formule

$$\delta^2 = f(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2 \ldots)$$

δ sera un invariant.

On pourra mettre les équations de deux droites sous la forme

$$x_1 = \gamma_1 + \delta_1 t, \ldots x_n = \gamma_n + \delta_n t$$
$$x_1 = \gamma'_1 + \delta'_1 t, \ldots x_n = \gamma'_n + \delta'_n t$$

les γ et les δ désignant des constantes et t une variable on pourra supposer

$$f(\delta_1, \delta_2 \ldots) = 1, f(\delta'_1, \delta'_2 \ldots) = 1 ;$$

et alors on appellera cosinus de l'angle des deux droites l'invariant

$$\delta'_1 f_1(\delta'_1, \delta'_2 \ldots) + \delta_2 f_2(\delta'_1, \delta'_2 \ldots) + \ldots$$

qui est égal à

$$\delta f_1(\delta'_1, \delta'_2 \ldots) + \delta_2 f_2(\delta'_1, \delta'_2 \ldots) + \ldots,$$

formules où

$$f_i(x_1, x_2 \ldots = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

à l'aide de ces conventions on pourra constituer une géométrie qui ressemblera beaucoup à la géométrie Euclidienne.

En parlant des groupes de substitutions, nous n'avons fait qu'effleurer un sujet extrêmement vaste et qui est appelé à jeter un jour éclatant et nouveau sur toutes les branches de l'analyse, ce qui précède n'est qu'une introduction à cette théorie dont toute l'importance a été mise en relief par le géomètre Suédois Sophus Lie.

Une dernière question. — Et maintenant que nous sommes fixés sur la nature des hypothèses fondamentales sur lesquelles est fondée notre géométrie Euclidienne, il se pose une question :

Est-il possible d'édifier une géométrie rigoureuse dans ses principes, claire dans son exposition, sans se servir de l'appareil algébrique et trop transcendant dont nous avons fait usage ?

Peut-être, car nous ne pouvons prévoir les découvertes que nous ménage l'avenir. Dans l'état actuel de la science, cela parait bien difficile, car il faudra définir le déplacement sans changement de forme auquel est liée l'idée de nombre; cette idée du nombre est indépendante de tout système de numération, car c'est un symbole qui sert à distinguer les quantités égales entre elles de celles qui leur sont supérieures ou inférieures, ce symbole peut être une forme géométrique sur laquelle il faudra chercher à définir l'égalité et l'addition d'une façon qui comportera beaucoup d'arbitraire et quoi que l'on imagine, la géométrie que l'on édifiera devra nécessairement s'appliquer à une foule de figures très différentes et portant le même nom.

Le plan, la ligne droite, l'angle, la distance devront être les invariants des déplacements sans changement de forme, et on devra pouvoir *démontrer* facilement le postulatum d'Euclide. La grosse difficulté sera la définition du déplacement sans changement de forme.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

CHAPITRE II

LES ÉLÉMENTS

CHAPITRE III

MESURE DE L'ÉTENDUE DES VARIÉTÉS

CHAPITRE IV

INCURSION DANS LE DOMAINE CONCRET

CHAPITRE V

LES CONTACTS

CHAPITRE VI

SURFACES ALGÉBRIQUES

CHAPITRE VII

LES ESPACES HOMOGÈNES

CHAPITRE VIII

SURFACES DU 2e DEGRÉ

CHAPITRE IX

QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES — THÉORÈMES

CHAPITRE X

GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

LAURENT

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE