30.

SUR LA FONCTION $E(x)$.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* L. (1860), pp. 732—734.]

SOIENT p et q deux quantités positives quelconques, λ une quantité moindre que la plus petite valeur a qui rende en même temps ap et aq entiers, de sorte que, p et q étant incommensurables, λ est arbitraire; mais si l'on suppose que ces quantités aient un plus grand commun diviseur k, on aura

$$\lambda < \frac{1}{k}.$$

Cela étant, je dis qu'on aura l'égalité suivante:

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda q)} E\left(\omega\frac{p}{q}\right) + \sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda p)} E\left(\omega\frac{q}{p}\right) = E(\lambda p)\,E(\lambda q).$$

Supposons-la satisfaite, en effet, pour toutes les valeurs de λ inférieures à une certaine limite, et faisons croître λ par degrés insensibles à partir de cette limite. Aucun des membres de l'équation ne changera de valeur qu'autant que λp ou λq deviendront des nombres entiers, ce qui, par hypothèse, n'arrivera jamais en même temps. Supposons que λp le premier devienne entier: à ce moment la seconde somme du premier membre s'augmente de $E\left(\lambda p\,.\,\frac{q}{p}\right)$, c'est-à-dire de $E(\lambda q)$, la première ne changeant pas. Quant au second membre de l'équation, il est évident que $E(\lambda q)$ ne change pas, mais $E(\lambda p)$ est augmenté d'une unité, donc le second membre comme le premier s'accroît de $E(\lambda p)$. Donc le théorème subsiste pour la première valeur de λ qui fait varier les deux membres de l'équation, par conséquent, pour la seconde, la troisième, etc., et enfin pour toutes les valeurs inférieures à la plus petite quantité qui rend en même temps λp et λq entiers. Donc, étant vrai pour $\lambda = 0$, le théorème a lieu également pour toutes les valeurs de λ moindres que la limite supposée.

Si l'on supprime la restriction admise à l'égard de λ, j'observe que toutes les fois que, cette quantité croissant d'une manière continue, λp et λq deviennent entiers en même temps, l'expression

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda q)} E\left(\omega\frac{p}{q}\right) + \sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda p)} E\left(\omega\frac{q}{p}\right),$$

www.rcin.org.pl

recevra un accroissement

$$E(\lambda p)+E(\lambda q)=\lambda p+\lambda q,$$

tandis que $E(\lambda p)+E(\lambda q)$ ne recevra que l'accroissement

$$\lambda p\lambda q-(\lambda p-1)(\lambda q-1)=\lambda p+\lambda q-1.$$

Par conséquent, on aura pour toutes les valeurs de λ, l'égalité suivante :

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda q)} E\left(\omega\frac{p}{q}\right)+\sum_{\omega=0}^{\omega=E(\lambda p)} E\left(\omega\frac{q}{p}\right)=E(\lambda p)\,E(\lambda q)+L,$$

où L désigne combien de fois px et qx deviennent entiers lorsque x croît de zéro à λ, ou, si l'on veut, le nombre des solutions positives moindres que λ de l'équation

$$(p+q)\,x=E(px)+E(qx).$$

Supposons maintenant p et q entiers, et $\lambda=\frac{k'}{k}$, k et k' étant aussi entiers avec la condition $k'<k$. En désignant par e et f les résidus minima positifs de p et q suivant le module k, les quantités $k'e$ et $k'f$ soient toutes deux moindres que k et le théorème se présente sous la forme suivante :

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{k'(q-f)}{k}} E\left(\omega\frac{p}{q}\right)+\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{k'(p-e)}{k}} E\left(\omega\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{k'}{k}\right)^2(p-e)(q-f).$$

Lorsque $e=1$, $f=1$, les inégalités $k'e<k$, $k'f<k$ ont séparément lieu et on obtient l'équation

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{k'(q-1)}{k}} E\left(\omega\frac{p}{q}\right)+\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{k'(p-1)}{k}} E\left(\omega\frac{q}{p}\right)=\frac{k'^2(p-1)(q-1)}{k^2},$$

qui donne le théorème d'Eisenstein en posant $k'=1$. On voit aussi qu'on aura toujours si e et f sont les résidus minima de p et q par rapport au module k,

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{q-f}{k}} E\left(\omega\frac{p}{q}\right)+\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{p-e}{k}} \Sigma\left(\omega\frac{q}{p}\right)=\frac{(p-e)(q-f)}{k^2}.$$

Il m'a paru qu'une démonstration tellement simple, on peut presque dire intuitive, de la proposition fondamentale de la théorie des résidus quadratiques, par l'emploi d'une variable continue, ne serait pas sans intérêt pour les géomètres.

www.rcin.org.pl