# 39.

## SUR L'INVOLUTION DES LIGNES DROITES DANS L'ESPACE CONSIDÉRÉES COMME DES AXES DE ROTATION.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LII. (1861), pp. 741—745.]

Note présentée par M. CHASLES.

ON sait qu'on peut représenter un déplacement infiniment petit quelconque d'un corps rigide au moyen des rotations du corps autour de six axes. En effet, la méthode usuelle de représenter ce déplacement au moyen de trois mouvements de rotation et de trois de translation rentre, comme un cas particulier, dans la méthode dont je parle, en prenant trois axes sur les six à une distance infiniment éloignée du corps. Cependant il n'est pas vrai que la disposition des six axes soit arbitraire dans un sens absolu. Car si les six axes sont choisis de telle façon qu'on peut trouver des forces qui, agissant dans leurs directions sur un corps rigide, feront équilibre entre elles, les rotations autour de ces axes ne restent plus indépendantes, c'est-à-dire une rotation autour d'un de ces axes peut être décomposée dans ses rotations autour des autres, et conséquemment les six axes n'équivaudront en réalité qu'à cinq tout au plus. Dans ce cas, on peut dire que les six axes forment un système en *involution*; et l'objet de cette Note est de préciser les caractères géométriques par lesquels on peut reconnaître une pareille involution et, de plus, de fournir les moyens de construire un tel système, et, en supposant cinq des axes donnés, de trouver le lieu le plus général du sixième.

L'auteur traite d'abord les cas où les droites données sont en nombre inférieur à cinq, et où il s'agit d'en déterminer une de plus qui fasse avec les droites données un système de droites pouvant représenter les directions d'un système de forces (ou de rotations, ce qui revient au même) se faisant équilibre. Il a occasion de citer la Statique de M. Mœbius (*Lehrbuch der Statik*; Lepzig, 1837), et surtout un Mémoire dans lequel ce savant géomètre a traité ces mêmes questions (*Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen*; voir *Journal de Crelle*, 1, XVIII, p. 189—212).

Il continue ainsi :

Je passe à la question (objet principal de cette Note) de l'involution du nombre maximum de six lignes. Je suppose que ces lignes soient données, à l'exception d'une seule dont il s'agit de déterminer le lieu géométrique. Je combine les cinq lignes données quatre à quatre ; et, quand cela peut se faire, je mène deux transversales rencontrant les quatre droites de chaque combinaison. L'on aura ainsi, en général, cinq paires de transversales.

Dans ces circonstances, je suis à même d'énoncer la proposition géométrique remarquable qui suit : En choisissant arbitrairement un point dans l'espace, et en menant par ce point une transversale à chacune des paires de transversales nommées plus haut, toutes ces transversales ainsi menées (en général au nombre de cinq) se trouveront dans le même plan ; et corrélativement, en coupant les paires de transversales par un plan quelconque, les droites (généralement cinq en nombre) qui joignent les deux points d'intersection de la même paire, se croiseront toutes dans le même point. Je nomme un plan et un point ainsi déterminés réciproquement, *pôle* et *plan polaire*.

Je prends arbitrairement une droite qui coupe une paire quelconque de transversales, et je choisis à volonté deux points $O$ et $O'$ sur cette ligne ; je trouve les plans polaires respectifs de $O$ et $O'$ (ce qu'il est toujours possible de faire, parce qu'il y a deux paires de transversales au moins, outre la paire coupée par la ligne $OO'$), disons $P$ et $P'$. Dans le plan $P$, je prends à volonté deux points $E$ et $F$, et par $E$ et $F$ je mène deux lignes qui coupent respectivement les deux lignes d'une quelconque des paires de transversales dont j'ai parlé et qui rencontrent le plan $P'$ en $E'$ et $F'$ ; je construis deux *faisceaux homographiques* situés dans $P$ et $P'$, pour lesquels les rayons $OO'$, $OE'$, $OF'$ correspondent respectivement à $O'O$, $O'E$, $O'F$, et je dis que toute droite qui coupe deux rayons correspondants quelconques de ces deux faisceaux sera en involution avec les cinq lignes données, et *vice versâ*, chaque ligne en involution avec les cinq lignes données coupera deux rayons correspondants de ces deux faisceaux.

Jusqu'ici j'ai supposé que la ligne commune aux deux faisceaux a été choisie dans une direction qui traverse les deux droites d'une des paires de transversales connues. Cette restriction peut maintenant être abandonnée, car on pourra choisir pour la ligne des centres des faisceaux une droite quelconque qui coupe deux rayons correspondants ; c'est-à-dire une sixième ligne quelconque qui se trouve en involution avec cinq lignes données, pourra servir de rayon commun à deux faisceaux plans homographiques ainsi disposés que chaque ligne coupant deux rayons correspondants dans deux faisceaux sera elle-même en involution avec les cinq lignes données.

J'ajoute, comme étant compris virtuellement dans ce qui précède, que le lieu de toutes les lignes qui sont en involution avec les lignes données et passent par un point donné, est le plan polaire de ce point (selon la définition expliquée ci-dessus du pôle et du plan polaire). M. Mœbius avait déjà démontré que ce lieu doit être un plan; mais il avait omis de donner le moyen de la construire.

On peut aussi remarquer que chacune des cinq lignes données passe par deux rayons correspondants dans chaque couple de faisceaux construit selon la méthode fournie plus haut; la même chose aura lieu pour chaque ligne droite qui se trouve dans l'hyperboloïde dont trois quelconques des lignes données sont des génératrices; et j'ajoute que six lignes quelconques, chacune desquelles passe par deux rayons correspondants dans un couple de faisceaux, seront en involution entre elles.

On peut donner le nom d'*axes conjugués* à chaque paire de lignes dont toutes les transversales sont en involution avec un système donné de cinq droites. Ces systèmes d'axes possèdent entre eux des propriétés remarquables dont, pour le moment, je veux seulement indiquer la suivante: *On peut toujours mener un hyperboloïde par deux paires quelconques d'axes conjugués.*

Voici les propriétés métriques les plus frappantes des couples de faisceaux homographiques dont il est question. Les deux droites* perpendiculaires à la ligne des centres dans les deux plans de l'homographie seront des rayons correspondants; en conséquence, si l'on fait tourner l'un des faisceaux autour de la ligne des centres jusqu'à ce qu'il se trouve dans le même plan avec l'autre faisceau, les rayons correspondants s'entrecouperont dans une ligne droite perpendiculaire à la ligne des centres*, et je trouve que le point où cette perpendiculaire coupe la ligne des centres sera le *pôle* du plan qui, passant par cette ligne, divise en deux parties égales l'angle dièdre formé par les deux plans homographiques. Nommons ce point le *pivot* de la ligne des centres: j'aurai tout à l'heure l'occasion d'y revenir.

Considérons l'ensemble de tous les axes conjugués, c'est-à-dire de toutes les paires de rayons correspondants de tous les couples de faisceaux appartenant à un système donné de cinq lignes, je dis qu'on peut appliquer dans les directions de ces deux axes deux forces dont le rapport de grandeur sera absolument constant pour le système donné, de façon qu'elles seront statiquement équivalentes à deux forces de grandeurs convenablement choisies dans les directions de deux autres axes conjugués quelconques. En considérant une ligne quelconque coupant ces deux axes comme la ligne des centres d'un couple homographique contenant ces deux axes pour rayons correspondants, les deux forces qui doivent agir dans leur direction pour balancer les deux forces fixes auront des *moments* égaux par rapport au *pivot* de cette ligne. Par conséquent, si l'on connaît le pivot d'une seule ligne de centres qui rencontre deux axes conjugués fixes porteurs des lignes en involution avec un système de cinq lignes données, on peut construire tous les couples de

[* See the correction below, p. 244.]

faisceaux homographiques dont les lignes et centres rencontrent ces mêmes axes. Car non-seulement les plans d'homographie de chaque couple seront connus, mais le rapport anharmonique de ses deux faisceaux le sera de même, et cela parce que la position des pivots devient déterminée. On peut ajouter que, puisque tous les pivots appartenant aux mêmes axes conjugués doivent être très-éloignés de ces deux axes par des distances perpendiculaires qui sont dans un rapport constant entre elles, le lieu géométrique qui les contient tous sera une surface du second degré et évidemment un hyperboloïde.

Puisque tous les axes conjugués appartenant à un système de cinq droites données peuvent être considérés comme les directions de deux forces qui équivalent statiquement à deux forces données en grandeur et en position, on voit par ce qui a été dit plus haut que l'ensemble infini de toutes les paires de forces équivalentes entre elles possède cette propriété remarquable, déjà donnée par M. Mœbius (*Journal de Crelle,* t. x. p. 317), que les transversales tirées du même point quelconque dans l'espace de manière à rencontrer les directions des forces dans chaque paire, seront situées dans le même plan, qu'on peut nommer le plan polaire au point donné. C'est une polarité réciproque tout aussi nettement définie que la polarité plus ordinaire qui se rattache à une surface donnée du second degré. On voit que la polarité dont il est ici question peut être considérée comme se rattachant à deux paires de lignes droites qui sont les génératrices du même hyperboloïde.

Dans une communication subséquente, j'ajouterai brièvement les caractères algébriques de tous les cas d'involution, et je ferai connaître un déterminant (composé de déterminants obtenus par la combinaison des coefficients des équations de six ou d'un moindre nombre de lignes droites, mises sous leurs formes les plus générales) au moyen duquel on peut s'assurer si ces droites sont en involution ou non, et, de plus, distinguer entre les diverses espèces d'involution, et même reconnaître d'autres dispositions singulières de ces lignes qui constituent une espèce d'involution imparfaite. Toute cette théorie découle, selon ma méthode de la traiter, des notions les plus élémentaires de la statique des corps rigides.