41.

NOTE SUR LES 27 DROITES D'UNE SURFACE DU 3ᵉ DEGRÉ.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LII. (1861), pp. 977—980.]

Mes recherches sur l'involution d'axes de rotation m'a forcément conduit à étudier les propriétés géométriques des 27 lignes droites qui sont situées sur chaque surface générale du 3ᵉ degré, et j'ai trouvé un théorème pour représenter ces lignes d'une manière à ôter toute difficulté en approfondissant leurs rapports mutuels. En se servant de ce théorème que je lui ai communiqué, M. Cayley est parvenu avant moi à donner une construction géométrique de ces 27 lignes; mais sa construction exige la connaissance de 8 droites données, c'est-à-dire d'une ligne droite prise comme base, coupée par 3 paires de droites qui se croisent (et dont les traces sur la base forment un système de 6 points en *involution*), et coupée aussi par une 7ᵉ droite. C'est une conséquence de la théorie connue de ces 27 lignes (comme l'a bien montré mon ami distingué), qu'une surface du 3ᵉ degré peut être construite, qui contiendra ces 8 droites (la base et les 7 autres lignes qui la coupent).

En me prévalant d'une autre façon de mon théorème, je suis parvenu à donner une construction d'une nature semblable, mais plus symétrique et plus simple que celle de M. Cayley, au moins dans des données qui pour moi sont une ligne droite coupée par 5 autres droites sans autre condition.

C'est le système de droites qui s'offre tout naturellement dans la théorie de mécanique dont je m'occupais et dont je me fus proposé de prime abord de me servir pour résoudre la question au temps même que j'ai reçu de la part de M. Cayley la solution avec le nouveau système de données dont j'ai parlé plus haut. Voici une première observation qui sera utile dans la suite. En prenant 5 lignes droites tout à fait arbitraires, disons a, b, c, d, e, en les joignant quatre à quatre, on peut construire 5 systèmes de paires de transversales; mais si les 5 données rencontrent la même droite, disons x, il est évident que ces 5 paires se réduiront à cette droite et 5 autres transversales; or il est facile de démontrer que ces 5 dernières seront toutes rencontrées elles-mêmes par une autre droite, disons ξ; elles peuvent être convenablement nommées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$; où α est la seconde transversale à b, c, d, e; β à a, c, d, e, etc.

Je fais une seconde observation très-importante, voir que 6 droites dont 5 sont coupées par la 6^e, sont situées sur la même surface du 3^e degré, et réciproquement tout système de 5 droites sur une surface du 3^e degré qui ne se coupent pas entre elles sont coupées par la même droit. Je dois ajouter que si 5 droites sont toutes coupées par les mêmes 2 lignes droites, on peût faire passer un nombre infini de surfaces du 3^e degré par ces 7 lignes, parmi lesquelles se trouveront comprises 2 surfaces réglées, et le théorème réciproque aura aussi lieu.

Écrivons les 12 lignes

$$\begin{array}{ccccc} & & x & & \\ a, & b, & c, & d, & e \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \epsilon \\ & & \xi & & \end{array}$$

où on suppose que a, b, c, d, e sont rencontrées par x, mais non par aucune autre droite, et que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sont les 5 transversales à a, b, c, d, e prises quatre à quatre, et ξ la transversale commune à $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$.

Formons encore le système $ABCDE$, où A est la transversale à $xa\alpha\xi$, B à $xb\beta\xi$, C à $xc\gamma\xi$, D à $xd\delta\xi$, E à $xe\epsilon\xi$; c'est-à-dire A est l'intersection des plans qui passent respectivement par xa, $\xi\alpha$ et de même pour B, C, D, E.

Finalement menons les 10 transversales désignées par la combinaison des symboles des 4 lignes qu'elles rencontrent respectivement, c'est-à-dire $a\alpha b\beta$, $a\alpha c\gamma$, $a\alpha d\delta$, $a\alpha e\epsilon$, $b\beta c\gamma$, $b\beta d\delta$, $b\beta e\epsilon$, $c\gamma d\delta$, $c\gamma e\epsilon$, $d\delta e\epsilon$. Il est bon de remarquer que les deux droites a, β se croisent, comme aussi b, α, et que $a\alpha b\beta$ signifie l'intersection des deux plans de $a\beta$, $b\alpha$. Une remarque semblable a lieu pour les autres droites de cette série de 10. On voit qu'on a obtenu

$$1 + 5 + 5 + 1 + 5 + 10 = 27 \text{ droites.}$$

Il est facile de démontrer géométriquement que toutes ces droites sont situées sur la même surface du 3^e degré, et que cette surface ne contiendra pas aucune autre ligne droite sur elle. Je dois ajouter, pour rendre plus complète l'image de ce système de 27 droites, que les 10 dernières couperont chacune 6 autres au-dessus des 4 exprimées par la notation quaternaire même, c'est-à-dire $a\alpha b\beta$ ne rencontrera pas seulement a, α, b, β, mais aussi C, D, E et $c\gamma d\delta$, $c\gamma e\epsilon$, $d\delta e\epsilon$ et ainsi pour les autres, de sorte qu'on trouvera facilement que chaque droite des 27 sera rencontrée par 10 autres, chaque combinaison de 3 qui ne se rencontrent pas par 3 autres qui ne se rencontrent pas, chaque combinaison de 4 qui ne se rencontrent pas par 2 autres sur la surface, etc.; conformément aux beaux résultats de MM. Salmon et Cayley, déjà, il y a longtemps, donnés dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*.

On peut résumer en peu de mots la construction précédente.

5 droites rencontrées par une 6e étant données, on construit 5 autres rencontrées par une nouvelle 6e, telles que chaque droite d'un des groupes de 5 rencontre 4 de l'autre groupe. Les 12 droites ainsi liées s'entrecoupent (par construction) en $2 \times 5 + 5 \times 4$, c'est-à-dire en 30 points, et conséquemment sont situées deux à deux en 30 plans dont chacun joint d'un rapport de réciprocité avec quelque autre. Les intersections de ces paires des plans réciproques donnent naissance à 15 nouvelles droites, lesquelles, combinées avec les 12 déjà nommées, constituent un système (le plus général qui peut exister) de 27 droites *réelles* appartenant à une surface du 3e degré. Il va sans dire qu'il existe des surfaces de ce degré pour lesquelles les 27 droites ne sont pas toutes *réelles*.

Je me propose de faire construire en fil de fer ou d'archal un système de 27 droites par la méthode donnée en haut, et d'en faire des copies stéréographiques, de sorte qu'on pourra éprouver le plaisir inattendu de voir avec les yeux du corps toutes les droites (le squelette pour ainsi dire) d'une surface du 3e degré avec leurs 135 points d'intersection, les 45 triangles les hexagones situés sur le même hyperboloïde et des autres non pas ainsi situés, et les autres merveilles de cette involution si compliquée, mais en même temps si symétrique.

Je prie qu'il me soit permis de profiter de cette occasion pour rectifier une erreur dans ma communication donnée dans les *Comptes rendus* (15 avril 1861): Dans le 4e paragraphe* les mots "les deux droites perpendiculaires ....correspondants; en conséquence" doivent être rayés. Plus bas dans le même paragraphe les mots "perpendiculaire à la ligne des centres" doivent être rayés, et dans la ligne suivante pour "perpendiculaire" on doit lire "droite."

La belle observation de M. Chasles dans le même numéro des *Comptes rendus*, sur une méthode de trouver un système de 6 droites en involution au moyen des perpendiculaires aux trajectoires de 6 points dans le déplacement infiniment petit d'un corps rigide, se trouve confirmée par une application assez simple de la méthode des vélocités virtuelles.

Car en donnant à un corps rigide sollicité par 6 forces agissant suivant des lignes droites données 6 déplacements arbitraires, on obtiendra 6 équations indépendantes et homogènes auxquelles les valeurs des 6 forces doivent satisfaire pour qu'elles fassent équilibre entre elles; ce qui en général ne sera pas possible; mais en supposant qu'un des déplacements peut être effectué d'une telle manière, que toutes les vélocités virtuelles des 6 points d'application seront nulles, une des six équations disparaîtra, c'est-à-dire deviendra une identité, et le système de cinq équations linéaires qui restent admettra une solution."

[* p. 238 above.]