42.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉOREME DE M. CAUCHY*.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIII. (1861), pp. 644, 645.]

DANS son Mémoire sur les *arrangements*, 1844, M. Cauchy a établi le théorème suivant:

Soit n un nombre entier donné,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda l = n;$$

en supposant $a, b, c, \ldots, l$ des nombres entiers et inégaux, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ des nombres entiers, et en faisant varier de toutes les manières possibles les valeurs du système $a, b, c, \ldots, l$, on aura

$$\Sigma \frac{1}{\pi\alpha . \pi\beta \ldots \pi\lambda a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda} = 1,$$

où πx signifie le produit $1 . 2 . 3 \ldots x$.

Je vais démontrer qu'on peut exprimer d'une manière très-simple la valeur générale de $\Sigma \dfrac{\omega^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}}{\pi\alpha . \pi\beta \ldots \pi\lambda a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda}$ pour une valeur quelconque d'une constante ω.

En effet, il est très-facile de voir qu'en posant l'équation en nombres positifs et entiers

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n,$$

et en attribuant à $x_1, x_2, \ldots, x_r$ toutes les valeurs possibles qui satisfont à cette équation (en regardant comme distinctes les solutions qui diffèrent dans les valeurs de x, quoique contenant le même système de valeurs), on peut représenter la série (nommée fonction de n et ω) sous la forme

$$\sum_{r=\infty}^{r=1} \Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_r} \frac{\omega^r}{\pi(r)},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{r=\infty}^{r=1} F(r, n) \frac{\omega^r}{\pi(r)}.$$

[* See below, p. 290.]

Or on voit immédiatement que $F(r, n)$ n'est autre chose que le coefficient de t^n dans le développement de la fonction génératrice $\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots\right)^r$, c'est-à-dire dans le développement de $[\log (1-t)^{-1}]^r$. Donc évidemment la série totale sera le coefficient de t^n dans le développement de $e^{\omega \log[(1-t)^{-1}]}$, c'est-à-dire de t^n dans $\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\omega}$.

En prenant $\omega = 1$, on voit que la valeur est toujours l'unité pour toute valeur de n, ce qui est le théorème de Cauchy. En prenant $\omega = -i$, i étant un nombre entier quelconque plus petit que n, on trouve la valeur zéro. Pour le cas de $\omega = -1$, cette remarque avait déjà été faite par M. Cayley, dans le *Philosophical Magazine* (mars 1861). En prenant $\omega = \frac{1}{2}$, on trouve pour la valeur de la série $\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}$, ce qui peut se déduire aussi par la méthode des arrangements, en se servant du théorème que le nombre des *substitutions* de $2n$ lettres qui peuvent être représentées par des égales d'un rang exclusivement pair est $[1.3.5\ldots(2n-1)]^2$, théorème que je crois être nouveau, mais qui est intimement lié au théorème célèbre de M. Cayley sur la valeur des déterminants dits *gauches*.

Voici une dernière observation que je fais sur le théorème général. On remarquera que l'exposant de $\omega^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}$ est le nombre des parties dans la partition de n, représentée par α répétitions de a, β de b, ..., λ de l: je nommerai donc $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$ l'*indice* de cette partition, et je dis qu'étant donné le *nombre* de ces indices, disons ν (nombre qu'on peut trouver pour une valeur quelconque de n par le théorème très-bien connu d'Euler sur les partitions indéfinies), on peut faire dépendre les valeurs de ces ν indices de la solution d'un système de 2μ équations algébriques à 2μ inconnues. Car pour une valeur quelconque de ω on connaîtra par le théorème du texte la valeur de $\frac{\omega^{i_1}}{q_1} + \frac{\omega^{i_2}}{q_2} + \ldots + \frac{\omega^{i_\mu}}{q_\mu}$, où $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ seront les indices cherchés, et $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ des quantités inconnues, mais indépendantes de ω. En substituant pour ω successivement $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{2\mu}$ et en écrivant $\omega^{i_r} = I_r$, on aura 2μ équations de la forme

$$\frac{I_1^k}{q_1} + \frac{I_2^k}{q_2} + \ldots + \frac{I_\mu^k}{q_\mu} = C,$$

k prenant toutes les valeurs de 1 jusqu'à 2μ. On peut donc former une équation dont dépendra la valeur de chacune des quantités $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, et conséquemment de leurs logarithmes $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, les μ indices de la partition indéfinie de n.