43.

ADDITION À LA NOTE INTITULÉE: "GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. CAUCHY," ET INSÉRÉE DANS LE "COMPTE RENDU" DE LA SÉANCE DU 7 OCTOBRE DERNIER.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIII. (1861), pp. 722—725.]

EN suivant la même marche que dans la Note dont il s'agit [p. 245 above], on parvient très-facilement à résoudre une question un peu plus compliquée de la théorie des *arrangements*, savoir : *Trouver le nombre de substitutions de n lettres qu'on peut représenter par le moyen d'un nombre donné r de substitutions cycliques d'ordres impairs.*

Pour que ce nombre ne soit pas zéro, il faut que $n-r$ soit un nombre pair $2i$; alors le nombre demandé sera la somme suivante,

$$\Sigma\,[(\nu_1^2+\nu_1)(\nu_2^2+\nu_2)\dots(\nu_e^2+\nu_e)\dots(\nu_i^2+\nu_i)],$$

où le signe Σ se rapporte à tous les systèmes possibles de nombres entiers $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_e, \dots, \nu_i$ qui satisfont aux inégalités

$$\nu_e > \nu_{e-1}+1, \quad \nu_e < n-1.$$

Désignons par $[n, r]$ le nombre des substitutions exprimé par la somme précédente, et par (n, r) le nombre correspondant pour le cas où les r substitutions cycliques sont chacune indifféremment d'ordre pair ou d'ordre impair. On a déjà trouvé que (n, r) est la somme des produits de $n-r$ quelconques des nombres $1, 2, 3, \dots, (n-1)$, et l'on voit à présent que $[n, r]$ n'est autre chose que la somme des produits de $\frac{n-r}{2}$ facteurs dont chacun est le produit d'un terme de la même suite de nombres par le terme suivant. Et de même que (n, r) satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\frac{(n+1,\, r+1)-(n, r)}{n} = (n-1, r),$$

la fonction $[n, r]$ satisfait à l'équation analogue

$$\frac{[n+2, r+2]-[n, r]}{n}=(n+1)[n-2, r]+(n-1)[n-3, r-1],$$

comme il est facile de s'en assurer.

On peut ajouter que (n, r) (pour $n-r$ positif) et $[n, r]$ $\left(\text{pour } \frac{n-r}{2} \text{ positif}\right)$ sont tous deux divisibles par n quand n est un nombre premier. Ce théorème est bien connu en ce qui concerne (n, r), mais il me paraît nouveau à l'égard de $[n, r]$. Au reste, on peut appliquer aux deux cas la même démonstration fondée sur ce que le nombre de produits de cycles correspondant à chaque partition de n est évidemment un multiple de n.

Voici un exemple du théorème énoncé au commencement de cette Note: Le nombre des substitutions de 6 lettres qu'on peut représenter par le produit de deux cycles d'ordres impairs sera, d'après notre formule générale,

$$2\times 12+2\times 20+6\times 20=184,$$

ce que l'on peut vérifier bien facilement en remarquant que ce nombre doit être

$$6\times 24+10\times 4=184.$$

On démontre encore très-facilement que le nombre total des substitutions de n lettres représentées par le produit de substitutions cycliques d'ordres impairs est

$$[1.3.5\ldots(n-1)]^2$$

quand n est pair (c'est le même nombre que nous avons déjà obtenu pour les substitutions cycliques d'ordre pair), et

$$n[1.3.5\ldots(n-2)]^2$$

quand n est impair.

On peut donner une extension* très-considérable aux théorèmes énoncés précédemment, en considérant le nombre des substitutions de n lettres formées avec les produits de r substitutions cycliques où l'ordre de chaque cycle est congru à un nombre ρ par rapport à un module donné μ.

La solution dépend toujours des combinaisons des nombres de la série 1, 2, 3, ..., $(n-1)$. Je me bornerai ici au cas de $\rho=1$ qui est le plus simple, en exceptant celui de $\rho=0$, dont la solution est évidente. Dans le cas de $\rho=1$, le nombre cherché est exprimé par la somme

$$\Sigma\frac{\Pi(\nu_1+\mu-1)\,\Pi(\nu_2+\mu-1)\ldots\Pi(\nu_i+\mu-1)}{\Pi(\nu_1-1)\,\Pi(\nu_2-1)\ldots\Pi(\nu_i-1)},$$

[* Cf. below, p. 293.]

où l'on fait $i = \dfrac{n-r}{\mu}$ et où les nombres ν sont assujettis aux conditions

$$\nu_e > \nu_{e-1} + \mu - 1, \quad \nu_e < n - 1,$$

et, en conséquence, on peut énoncer le théorème suivant:

Si n est un nombre premier, r et μ deux nombres quelconques donnés, la somme des produits de r groupes de μ termes consécutifs de la série $1.2.3\ldots(n-1)$ (en supposant que chaque groupe contient des nombres distincts de ceux qui sont contenus dans chacun des autres groupes) sera divisible par n, pourvu que μr soit inférieur à n.

Dans le cas de $\mu = 1$, on retombe sur le théorème si connu, associé au théorème de Wilson.

Comme exemple du nouveau théorème, prenons $n = 11$, $\mu = 3$, $r = 3$. On doit trouver et l'on trouvera effectivement que la somme

$$\begin{aligned} &1.2.3.4.5.6.7.8.\ 9 \\ +&1.2.3.4.5.6.8.9.10 \\ +&1.2.3.5.6.7.8.9.10 \\ +&2.3.4.5.6.7.8.9.10 \end{aligned}$$

est divisible par 11. En effet cette somme est le nombre de substitutions de 11 lettres formées par les produits de deux substitutions cycliques assujetties à ne contenir que 1, 4, 7 ou 10 lettres. Les quatre produits qui figurent dans cette somme font partie des cinquante-cinq produits qu'on devrait prendre dans le cas correspondant du théorème ordinaire associé à celui de Wilson.