44.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE LAGRANGE, SUR LES VALEURS NUMÉRIQUES MINIMA D'UNE FONCTION LINÉAIRE À COEFFICIENTS ENTIERS D'UNE QUANTITÉ IRRATIONNELLE*.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIII. (1861), pp. 1267—1272.]

APRÈS Euler, je me servirai du symbole $(a, b, c, \ldots, l)$ pour représenter le dénominateur de la fraction convergente dont $a, b, c, \ldots, l$ sont les quotients partiels, de sorte que $(b, c, \ldots, l)$ représentera le numérateur de la même fraction. Soit ν une quantité quelconque incommensurable à l'unité,

$$\frac{(b, \ldots, h, k)}{(a, b, \ldots, h, k)}, \quad \frac{(b, \ldots, h, k, l)}{(a, b, \ldots, h, k, l)},$$

deux réduites consécutives de ν. Comme à l'ordinaire, je nommerai ces convergentes $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$; on aura

$$\nu = \frac{[b, \ldots, h, (k+\theta)]}{[a, b, \ldots, h, (k+\theta)]} = \frac{N}{D}, \text{ où } \theta < \frac{1}{l};$$

on en conclut

$$p - \nu q = \frac{(b, \ldots, h, k)(a, b, \ldots, h, k+\theta) - (a, b, \ldots, h, k+\theta)(b, \ldots, h)}{D}$$

$$= \theta \frac{(b, \ldots, h, k)(a, b, \ldots, h) - (a, b, \ldots, h, k)(b, \ldots, h)}{D}$$

$$= (-1)^i \frac{\theta}{D},$$

i désignant le nombre des quantités $a, b, \ldots, h$.

Faisons
$$p - \nu q = \Delta,$$
on aura
$$D\Delta = (-1)^i \theta. \qquad (1)$$

[* Cf. p. 306, below.]

Prenons $$(p-\lambda)-\nu(q-\mu)=\Delta',$$

λ et μ étant des nombres entiers quelconques, tels que $\Delta'^2 < \Delta^2$, avec exclusion du cas où $p-\lambda=0$, $q-\mu=0$; alors

$$\Delta' = \Delta + \frac{\mu(b, \ldots, h, k+\theta) - \lambda(a, b, \ldots, h, k+\theta)}{D} = [(-1)^i\theta + A\theta + B] \div D$$

où
$$\left.\begin{aligned} A &= (b, \ldots, h)\,\mu - (a, b, \ldots, h)\,\lambda, \\ B &= (b, \ldots, h, k)\,\mu - (a, b, \ldots, h, k)\,\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Donc, pour que Δ'^2 soit moindre que Δ^2, A et B doivent être de signes contraires, à moins que A ou B soit zéro.

Si $A=0$,
$$\lambda = r(b, \ldots, h), \quad \mu = r(a, b, \ldots, h),$$
$$B = r[(a, b, \ldots, h)(b, \ldots, h, k) - (b, \ldots, h)(a, b, \ldots, h, k)] = (-1)^i r,$$
et
$$D\Delta' = (-)^i(\theta + r),$$
ce qui serait contraire à l'hypothèse.

De même si $B=0$,
$$\lambda = r(b, \ldots, h, k), \quad \mu = r(a, b, \ldots, h, k),$$
et $D\Delta'$ devient
$$(-)^i\theta(1-r),$$
de sorte que Δ'^2 ne peut pas être au-dessous de Δ^2, à moins que $r=1$, ce qui donnerait
$$p-\lambda=0, \quad q-\mu=0,$$
cas dont on a fait exclusion.

Donc, puisque A et B doivent avoir des signes contraires, $\frac{\lambda}{\mu}$ sera intermédiaire entre $\frac{(b, \ldots, h, k)}{(a, b, \ldots, h, k)}$ et $\frac{(b, \ldots, h)}{(a, b, \ldots, h)}$, c'est-à-dire $\frac{(b, \ldots, h, \infty)}{(a, b, \ldots, h, \infty)}$, et conséquemment, comme il est très-facile de le voir, $\frac{\lambda}{\mu}$ sera de la forme

$$\frac{\left(b, \ldots, h, \frac{\rho}{\sigma}\right)}{\left(a, b, \ldots, h, \frac{\rho}{\sigma}\right)}.$$

Or on peut supposer $\frac{\rho}{\sigma}$ ou un nombre entier ou une fraction irréductible plus grande que k ; de plus, comme il est facile de démontrer que $\sigma . \left(b, \ldots, h, \frac{\rho}{\sigma}\right)$, $\sigma . \left(a, b, \ldots, h, \frac{\rho}{\sigma}\right)$ seront premiers entre eux, on aura nécessairement

$$\lambda = r(b, \ldots, g, h) + s(b, \ldots, g), \quad \mu = r(a, b, \ldots, g, h) + s(a, b, \ldots, g),$$

avec la condition $r > ks$.

Donc, en substituant ces valeurs en (2), $D\Delta'$ devient égal à

$$(-)^i \theta + rP + sQ,$$

$$P = (b, \ldots, h, k)(a, b, \ldots, h) - (a, b, \ldots, h, k)(b, \ldots, h) = (-1)^i,$$

$$Q = \theta\,[(b, \ldots, g, h)(a, b, \ldots, g) - (a, b, \ldots, h)(b, \ldots, g)]$$

$$+ (b, \ldots, g, h, k)(a, b, \ldots, g) - (a, b, \ldots, g, h, k)(b, \ldots, g)$$

$$= -\theta(-1)^i + (-)^\omega k,$$

ω étant le nombre des lettres $(a, b, \ldots, h, k)$, c'est-à-dire $i + 1$.

Donc $$D\Delta' = (-1)^i(\theta - s\theta + r - sk). \tag{3}$$

Maintenant, imposons à volonté sur λ la limite $\lambda < p + p'$, ou bien sur μ la limite $\mu < q + q'$; pour fixer les idées, disons $\lambda < p + p'$:

$$p' = (b, \ldots, h, k, l) = (kl + 1)(b, \ldots, g, h) + l\,(b, \ldots, g),$$

$$p = (b, \ldots, h, k) = k\,(b, \ldots, g, h) + (b, \ldots, g);$$

donc $$p' + p = (kl + k + 1)(b, \ldots, g, h) + (l + 1)(b, \ldots, g).$$

Mais $$\lambda = r\,(b, \ldots, g, h) + s\,(b, \ldots, g).$$

Donc je dis que s ne peut pas excéder l.

Car si $$s \geqslant l + 1,$$

r, qui est au moins $ks + 1$, sera $\geqslant kl + k + 1$, et λ ne sera pas moindre que $p' + p$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$s\theta \leqslant l\theta < 1\,;$$

mais $$r - sk > 1,$$

donc $$(-)^i D\Delta' > \theta,$$

c'est-à-dire $$> (-)^i D\Delta,$$

et l'on peut, de la même manière, démontrer que, si $\mu < q + q'$,

$$(-)^i D\Delta' > (-)^i D\Delta.$$

Donc il est évident que $(p - q\nu)^2$ sera moindre que $(x - y\nu)^2$ si $x < p'$ ou si $y < q'$. Toujours excluant le cas, on a en même temps

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Je nomme ce résultat la *conclusion A*.

J'ajoute une *observation* importante pour ce qui sort immédiatement de la forme de l'équation (2): c'est que $(D\Delta')^2$ sera plus grand que $(D\Delta)^2$ si $\lambda = 0$ pour toute valeur de $\mu > 0$, et de même si $\mu = 0$ pour toute valeur de $\lambda > 0$. Je nomme cette observation *conclusion B*.

En vertu de ces deux conclusions, on peut démontrer très-facilement ce qui est le but du théorème Lagrange donné dans les Additions de l'Algèbre d'Euler, c'est-à-dire que la condition *nécessaire* et *suffisante* que $\frac{p}{q}$ soit une convergente de ν sera que la valeur $(p - q\nu)$ sera toujours augmentée en diminuant ou p ou q, ou tous les deux.

La nécessité de cette condition découle immédiatement et avec surabondance de la conclusion A, qui affirme qu'un changement quelconque de p qui ne le rend pas égal à p', ou de q qui ne le rend pas égal à q', aura l'effet d'augmenter $p - q\nu$.

Pour prouver que la condition est suffisante, il faut montrer que si a et b ne sont pas simultanément de la forme p, q, $a - b\nu$ peut être diminué en diminuant ou a ou b, ou tous les deux.

Si $\frac{p_e}{q_e}$ est une convergente de ν du rang e,

$\frac{p_i}{q_i}$ une autre convergente de ν du rang i,

1°. Si $a = p_e$, $b = q_i$, si $i > e$, il découle de la conclusion B, que $(p_e - q_e\nu)^2$ sera plus petit que $(p_e - q_i\nu)^2$, et de même si $e > i$, $(p_i - q_i\nu)^2$ sera plus petit que $(p_e - q_i\nu)^2$, et conséquemment $p_e - q_i\nu$ diminue en diminuant ou p_e ou q_i.

2°. Si l'une au moins des suppositions faites en 1° n'a pas lieu, par exemple si a tombe entre p_e et p_{e+1}, en vertu de la conclusion A, $(p_e - b\nu)$ sera plus petit que $a - b\nu$, et de même si b tombe entre q_i et q_{i+1}, $(a - q_i\nu)$ sera plus petit que $a - b\nu$.

Donc, à moins que $a = p_e$, $b = q_e$, $(a - b\nu)$ ne sera pas un minimum.

La conclusion A, quoiqu'elle n'ait pas été formellement énoncée par M. Hermite, était contenue implicitement, je dois le dire, dans une belle démonstration du théorème de Lagrange fondée sur d'autres principes et que M. Hermite a bien voulu me communiquer il y a un an ou deux.