54.

ADDITION À LA DÉMONSTRATION DU THÉOREME DE LAGRANGE SUR LES MINIMA D'UNE FONCTION LINÉAIRE À COEFFICIENTS ENTIERS D'UNE QUANTITÉ IRRATIONNELLE, DONNÉE DANS LA SÉANCE PRÉCÉDENTE*.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIV. (1862), pp. 53—55.]

On peut à juste titre élever quelque objection contre la forme donnée au théorème cité en tant que j'ai posé comme *criterium* des réduites $\frac{p}{q}$ de l'irrationnelle ν, la condition que la valeur de $p - q\nu$ restera plus petite que toute valeur qui résulte de la diminution ou de p, ou de q, ou de p et q simultanément dans cette fonction, tandis que le *criterium* de Lagrange ne considère que l'effet de la substitution simultanée des nombres inférieurs à p et à q. On remédie à cet inconvénient et en même temps on simplifie la démonstration du théorème dont il est question en donnant un peu plus d'extension à la conclusion nommée A dans la Note précédente.

Dans l'équation (3), c'est-à-dire,

$$D\Delta' = (-1)^i (\theta - s\theta + r - ks),$$

si l'on pose $\quad s = l + 1, \quad r = ks + 1 = kl + k + 1$

(de sorte que $p - \lambda$, $q - \mu$ deviennent simultanément $-p'$, $-q'$), on aura

$$s\theta = (1 + l)\,\theta \begin{matrix} > 1 \\ < 1 + \theta \end{matrix} \quad \text{et} \quad \theta - s\theta + (r - ks) \begin{matrix} < \theta \\ > \theta \end{matrix},$$

donc $\Delta'^2 < \Delta^2$, c'est-à-dire que les minima $p - q\nu$, $p' - q'\nu$, etc., vont toujours en diminuant; mais si, s restant égale à $l + 1$, r n'est pas prise égale à $ks + 1$, λ et μ tous les deux excéderont $p + p'$, $q + q'$ respectivement. Tel est donc l'effet des conditions caractéristiques du système p, q; pour qu'il soit possible que Δ'^2 soit moindre que Δ^2, $(p - \lambda)^2$ ne peut pas devenir p'^2 sans qu'en même temps $(q - p)^2$ devienne q'^2 et réciproquement.

[* p. 250 above.]

Conséquemment à la place de ladite conclusion A, on peut substituer l'énoncé suivant, c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ *étant une réduite quelconque de* ν, $p - q\nu$ *s'augmentera en substituant pour* p *un nombre quelconque moindre que* p' *ou pour* q *un nombre moindre que* q', *pourvu qu'on ne substitue pas en même temps* p' *pour* p *et* q' *pour* q.

Avec cet énoncé, on peut se passer tout à fait de la conclusion B. La preuve que la condition de Lagrange est nécessaire découle et avec surabondance de cet énoncé: cela saute aux yeux; et quant à la suffisance ou *criterium*, on n'a qu'à remarquer que si $\frac{a}{b}$ n'est pas une réduite de ν, on peut prendre

$$a > p_e, \ a \mathrel{\overline{\gtrless}} p_{e+1}; \quad b > q_i, \ b \mathrel{\overline{\gtrless}} q_{i+1},$$

et alors $\qquad p_e - q_e\nu$ et $p_i - q_i\nu$,

seront tous les deux $< a - b\nu$. De plus, on aura

$$p_e < a \text{ et } q_e < b,$$

ou bien $\qquad p_i < a$ et $q_i < b$ *;

donc, dans tous les cas, $a - b\nu$ diminuera quand on diminuera dans une manière convenable a et b simultanément: ce qui démontre la différence du *criterium* dont il a été question.

* On n'a pas besoin de dire que rien n'empêche que e ne soit égal à i; mais dans ce cas, comme on ne peut pas avoir simultanément $a = p_{e+1}$, $b = q_{e+1}$, la conclusion du texte reste bonne.