56.

SUR UNE CLASSE NOUVELLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES D'UNE FORME INTÉGRABLE.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIV. (1862), pp. 129—132.]

COMMENÇONS par le cas des différences finies. Représentons par Δ_x le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_x, & u_{x+1}, & u_{x+2} & \dots u_{x+i-1} \\ u_{x+1}, & u_{x+2}, & u_{x+3} & \dots u_{x+i} \\ u_{x+2}, & u_{x+3}, & u_{x+4} & \dots u_{x+i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{x+i-1}, & u_{x+i}, & u_{x+i+1} & \dots u_{x+2i-2} \end{vmatrix},$$

et considérons l'équation

$$\Delta_x = C, \dots, \tag{1}$$

ce qui au fond est aussi général que si nous écrivions $\Delta_x = C\gamma^x$.

Je dis que l'équation (1) pourra être satisfaite par la même intégrale que celle qui satisfait à l'équation

$$u_x - p_1 u_{x+1} + p_2 u_{x+2} \dots (-1)^{i-1} p_{i-1} u_{x+i-1} + (-1)^i u_{x+i} = 0, \tag{2}$$

$p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$, étant des constantes. Car si cette dernière équation a lieu, on peut dans la première ligne du déterminant substituer à

$$u_x, u_{x+1} \dots u_{x+i-1}$$

les quantités

$$(-1)^{i-1} u_{x+i}, (-1)^{i-1} u_{x+i+1} \dots (-1)^{i-1} u_{x+2i-1},$$

sans changer la *valeur* de ce déterminant.

Donc on voit immédiatement que Δ_x devient égal à Δ_{x+1}, c'est-à-dire Δ_x sera constant ; donc l'intégrale de $\Delta_x = C$ sera

$$u_x = a_1 \alpha_1^x + a_2 \alpha_2^x + \dots + a_i \alpha_i^x, \tag{3}$$

www.rcin.org.pl

avec la condition $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i = 1$. Cette condition est une conséquence de la forme du dernier coefficient, $(-1)^i$, dans l'équation (2); de plus une autre condition se présente à cause de la valeur spéciale qu'il faut attribuer à la constante C dans l'équation donnée.

Pour obtenir cette dernière condition nous pouvons considérer les a et les α comme étant données et C comme une fonction de ces quantités. Or en faisant un quelconque des a égal à zéro, le degré de l'équation (2) s'abaisse d'une unité, c'est-à-dire les i fonctions $u_x, u_{x+1}, \dots, u_{x+i-1}$ seront liées entre elles par une équation linéaire et conséquemment le déterminant Δ_x s'évanouira. Donc C contient le produit $a_1a_2 \dots a_i$ comme facteur. Mais on trouve aussi, en prenant $x=0$, C égal au déterminant à i lignes

$$\begin{vmatrix} \Sigma a, & \Sigma a\alpha \dots \Sigma a\alpha^{i-1} \\ \Sigma a\alpha, & \Sigma a\alpha^2 \dots \Sigma a\alpha^i \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \Sigma a\alpha^{i-1}, & \Sigma a\alpha^i \dots \Sigma a\alpha^{2i-2} \end{vmatrix}$$

qui est du degré i par rapport aux quantités a.

Donc $$C = a_1a_2 \dots a_i F(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i).$$

Pour déterminer F, on n'a qu'à supposer

$$a_1 = a_2 = \dots = a_i = 1,$$

et on obtient immédiatement par un théorème bien connu

$$F = (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2 \dots (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^2.$$

Donc finalement on aura pour l'intégrale complète de l'équation (1), qui est de l'ordre $(2i-2)$, le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} u_x &= a_1\alpha_1^x + a_2\alpha_2^x + \dots + a_i\alpha_i^x, \\ \text{avec les conditions} \qquad \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i &= 1, \\ a_1a_2 \dots a_i\left[(\alpha_1-\alpha_2)^2 \dots (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^2\right] &= C, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

système qui contient $(2i-2)$ constantes, le nombre qu'on doit avoir.

On peut appliquer cette même méthode à un système d'équations beaucoup plus général. Car si on désigne par $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ les fonctions algébriques de $u_x, u_{x+1}, \dots, u_{x+2i-2}$ qui satisfont au système simultané des $(i-1)$ équations

$$\begin{aligned} &u_x - P_1u_{x+1} + P_2u_{x+2} \dots - (-1)^i P_{i-1}u_{x+i-1} + (-1)^i u_{x+i} = 0, \\ &u_{x+1} - P_1u_{x+2} + P_2u_{x+3} \dots - (-1)^i P_{i-1}u_{x+i} + (-1)^i u_{x+i+1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_{x+i-2} - P_1u_{x+i-1} + P_2u_{x+i} \dots - (-1)^i P_{i-1}u_{x+2i-3} + (-1)^i u_{x+2i-2} = 0, \end{aligned}$$

www.rcin.org.pl

et si, en conservant à Δ_x la même valeur que dans l'équation (1), on écrit

$$\Delta_x + \phi(P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}) = 0, \tag{5}$$

il est évident qu'en faisant

$$u_x - p_1 u_{x+1} + p_2 u_{x+2} \ldots - (-1)^i p_{i-1} u_{x+i-1} + (-1)^i u_{x+i} = 0,$$

Δ_x sera égal à Δ_{x+1} et ϕ sera toujours constant, car on aura

$$P_1 = p_1,\ P_2 = p_2,\ \ldots,\ P_{i-1} = p_{i-1}.$$

Donc l'équation (5) sera satisfaite par l'intégrale

$$\left.\begin{aligned} &u_x = a_1\alpha_1^x + a_2\alpha_2^x + \ldots + a_i\alpha_i^x, \\ \text{avec les conditions}\qquad &\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i = 1, \\ &(a_1a_2\ldots a_i)\{(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^2\} \\ &\qquad + \phi(\Sigma\alpha_1, \Sigma\alpha_1\alpha_2, \ldots, \Sigma\alpha_i\ldots\alpha_{i-1}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Passons au cas de la forme analogue des équations différentielles. En supposant y une fonction de x, j'écrirai $\dfrac{d^iy}{dx^i} = y_i$, et je nommerai $D_x{}^i y$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2 & \cdots y_{i-1} \\ y_1, & y_2, & y_3 & \cdots y_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1}, & y_i, & y_{i+1} & \cdots y_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Considérons d'abord l'équation

$$D_x{}^i y = C. \tag{7}$$

Sans prendre la peine de passer par les moyens connus du cas des différences finies à des différences infiniment petites, il suffit de faire le rapprochement de la valeur de $\dfrac{u_{x+1}}{u_x}$ quand $u_x = \alpha^x$ avec celle de $\dfrac{d_xy}{y}$ quand $y = e^{\alpha x}$ pour conclure immédiatement de la forme de l'intégrale (1) celle de l'équation (7) qui sera évidemment

$$\left.\begin{aligned} &y = a_1e^{\alpha_1 x} + a_2e^{\alpha_2 x} + \ldots + a_ie^{\alpha_i x} \\ \text{avec les conditions}\qquad &\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i = 0, \\ &a_1a_2\ldots a_i(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^2 = C. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Avant de considérer quelques modifications très-intéressantes de cette équation, il sera utile d'établir un théorème élémentaire sur les rapports des formes consécutives $D_x{}^i y$ entre elles.

www.rcin.org.pl

Pour fixer les idées, bornons-nous pour le moment à la considération du déterminant

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2, & y_3, & y_4, & y_5 \\ y_3, & y_4, & y_5, & y_6 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $D_x^4 y$, et des déterminants *mineurs* qu'il renferme.

Posons

$$D_x^3 y = \begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ y_2, & y_3, & y_4 \end{vmatrix}.$$

En différentiant les quantités qui entrent dans ce déterminant *ligne* sur *ligne*, on formera trois déterminants nouveaux dont tous s'évanouiront identiquement à cause de l'égalité de deux lignes (terme à terme) qui en résultera, sauf toutefois le dernier qui sera

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ y_3, & y_4, & y_5 \end{vmatrix}$$

et qui exprimera conséquemment la valeur de $\frac{d}{dx}(D_x^3 y)$.

De même en différentiant ce dernier déterminant (*colonne à colonne*), on obtiendra

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_3 \\ y_1, & y_2, & y_4 \\ y_3, & y_4, & y_6 \end{vmatrix}$$

comme la valeur de $\frac{d^2}{dx^2}(D_x^3 y)$.

On remarquera que tous les termes du nouveau déterminant

$$\begin{vmatrix} D_x^3 y, & \frac{d}{dx}(D_x^3 y) \\ \frac{d}{dx}(D_x^3 y), & \frac{d^2}{dx^2}(D_x^3 y) \end{vmatrix}$$

seront des déterminants mineurs de $D_x^4 y$, et par un théorème tres-connu on conclut que ce déterminant composé sera égal au produit $D_x^2 y \times D_x^4 y$, c'est-à-dire

$$D_x^2 y \times D_x^4 y = D_x^2 (D_x^3 y),$$

www.rcin.org.pl

et dans la même manière on peut établir l'équation générale qui lie ensemble trois termes consécutifs quelconques de la série

$$D^1,\ D^2,\ D^3,\ D^4,\ D^5\ \ldots,$$

c'est-à-dire

$$D_x^{i-1}y \times D_x^{i+1}y = D_x^2\,(D_x^i y). \qquad (9)$$

Avec l'aide de cette équation on parvient facilement à l'intégration d'une classe très-intéressante d'équations différentielles du quatrième ordre, parmi lesquelles on peut distinguer les équations

$$D_x^3 y = C y^3, \quad (D_x^3 y)^2 = C\,(D_x^2 y)^3,$$

lesquelles ne sont que deux cas particuliers d'équations qu'on peut intégrer par le moyen des fonctions elliptiques inverses.

www.rcin.org.pl