72.

SUR LA THÉORIE DES RACINES RÉELLES ET IMAGINAIRES DES ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LIX. (1864), pp. 749—753.]

ON sait la découverte faite par M. Hermite et insérée dans le tome IX. du *Journal de Mathématiques de Cambridge et Dublin*. C'est là que M. Hermite a fait la belle observation, qu'aux conditions fournies par le théorème de Sturm on peut substituer des fonctions des invariants d'une forme binaire de degré impair quelconque, pour déterminer le nombre de ses racines réelles et imaginaires. De plus, M. Hermite, en suivant une marche toute particulière, a donné les *criteria* actuels, qui servent à peu près pour distinguer entre les trois cas qui se présentent dans la considération des formes du cinquième degré, c'est-à-dire le cas où toutes les racines sont réelles, celui où trois seulement sont réelles et le cas où il n'y a qu'une seule réelle. Cependant ce grand travail avait laissé quelque chose à désirer; car pour remplir cet objet, M. Hermite a été conduit à se servir de cinq invariants, un du degré 4, un (le discriminant) du degré 8 et trois chacun du degré 12, tandis que la méthode de M. Sturm n'exige que l'emploi de quatre *criteria*. De plus, le système de conditions donné par M. Hermite n'est pas absolument complet, mais laisse une certaine lacune à combler: je veux dire qu'il y a de certaines combinaisons de ses *criteria* pour lesquelles il reste douteux si la forme possède cinq ou bien une seule racine réelle; c'était une omission dont M. Hermite avait conscience et qu'il aurait sans doute trouvé le moyen de remplir. En me pénétrant de l'esprit de la méthode de M. Hermite, mais en suivant une tout autre voie d'application, je suis parvenu à trouver la solution la plus générale de ce problème important sous une forme d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer, et à laquelle aucun cas n'échappe. Dans cette solution, au lieu d'excéder le nombre des *criteria* donnés par la méthode générale de M. Sturm, on se sert d'un de moins; en effet, en outre du discriminant, on n'a besoin que d'un invariant (le seul qui existe) du quatrième ordre et un du douzième ordre. Nommons D le discriminant de la forme proposée, J le discriminant de son covariant quadratique le plus simple multiplié par -4, L le discriminant de son covariant cubique le plus simple multiplié par -27, et de plus écrivons

$$\Lambda = J^3 - 2^{11}L;$$

J, D, Λ suffisent pour déterminer le caractère des racines selon la règle suivante:

Quand D est négatif, trois racines sont réelles, deux imaginaires.

Quand D est positif, si J et $\Lambda + \mu JD$ sont tous les deux négatifs, les racines seront toutes réelles; dans le cas contraire, une seule sera réelle.

μ est un paramètre numérique variable à volonté entre certaines limites que j'ai trouvées, mais que je n'ose rapporter, n'ayant pas les calculs sous mes yeux. Je crois cependant pouvoir affirmer en toute sûreté que ces limites sont ou $1, -2$, ou bien $-1, 2$. Avec ces mêmes *criteria* on peut aussi déterminer le caractère des racines dans le cas où D devient zéro, mais je n'entrerai pas ici dans ce détail.

La valeur $\mu = -\frac{4}{5}$ ne sort pas des limites permises, et on trouvera que $\Lambda - \frac{4}{5}JD$ s'exprime facilement en fonction des racines. Nommons-les a, b, c, d, e en désignant par K un certain coefficient numérique et positif, on aura

$$\tfrac{4}{5}JD - \Lambda$$
$$= K\Sigma\,[(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(a-d)^4(a-e)^4(b-d)^4(b-e)^4(c-d)^4(c-e)^4].$$

De plus, en nommant q un autre multiplicateur numérique et positif, on aura

$$-J = q\Sigma\,[(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(d-e)^4].$$

Posons $$Q(d, e) = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(d-e)^4.$$

Alors, pour distinguer entre le cas où il n'y a pas de racines imaginaires et le cas où il y en a quatre (les seuls qui se présentent quand D est positif), la règle donnée ci-dessus conduit à l'observation que si les racines ne sont pas toutes réelles et si D est positif, $\Sigma Q(d, e)$ et $\Sigma\,\dfrac{1}{Q(d, e)}$ ne peuvent pas rester tous les deux positifs. Dans le cas contraire il est évident que ΣQ et $\Sigma\,\dfrac{1}{Q}$ sont tous les deux positifs. J'ajouterai quelques mots sur la marche que j'ai suivie pour obtenir ces résultats. Je démontre qu'en général la forme $(x, y)^5$ peut être réduite par des substitutions linéaires et réelles à l'expression $au^5 + bv^5 + cw^5$, où w est une fonction linéaire et réelle de x, y; u, v des fonctions linéaires, mais pas nécessairement réelles, et où de plus $u + v + w = 0$. Le cas d'exception, c'est celui où le covariant cubique du troisième ordre par rapport aux coefficients (dit le *canonisant*) contient des racines égales ou bien s'évanouit. Dans ce cas, sauf la supposition de trois racines égales et quand, conséquemment, tous les invariants s'évanouissent, la proposée se réduit par des substitutions linéaires à la forme de Jerrard $ax^5 + exy^4 + fy^5$. De là on conclut facilement que, étant donnés J, D, L (pourvu qu'on n'ait pas en même temps $J = 0$, $D = 0$, $L = 0$), le caractère des racines, quant à la distinction entre le réel et l'imaginaire, est absolument déterminé, et de plus que J, D, L, non-seulement doivent être réels, mais encore (comme l'a remarqué le premier mon devancier M. Hermite) doivent satisfaire à une certaine condition d'inégalité, c'est-à-dire qu'une certaine fonction (nommons-la G) de J, D, L doit rester toujours positive. Je prends J, D, L pour coordonnées d'un point dans l'espace. Alors la surface $G = 0$ divisera l'espace en deux portions pour l'une desquelles (qu'on peut nommer *la portion facultative*) tous les points correspondront à des familles d'équations avec des coefficients réels et dans l'autre (qu'on peut nommer *la portion non facultative*) tous les points correspondront à des familles d'équations avec des coefficients conjugués. Ces deux portions d'espace sont exactement égales et contraires, étant disposées symétriquement par rapport à l'axe de D. Cela étant, je trouve que la première (en faisant pour le moment abstraction du plan de D) se divise en trois régions. Toute la portion facultative au-dessous du plan de D constitue une seule région, tandis que la portion facultative au-dessus de ce plan se divise en deux régions qui se rencontrent dans la ligne où la surface G touche le plan de D, c'est-à-dire la ligne parabolique

$$\Lambda = 0,\ D = 0.$$

La condition qui fixe les limites de ces trois régions ou, si l'on veut, de ces trois circonscriptions limitrophes, c'est qu'on doit pouvoir passer dans une région donnée d'un point à un autre sans percer ni toucher le plan de D. Cela étant ainsi, on démontre facilement que pour chaque région les familles des formes représentées par un point qui y est renfermé appartiennent à la même catégorie, quant au nombre de leurs racines réelles et imaginaires, et on assigne sans aucune difficulté son propre caractère radical à chaque région. En exprimant dans la langue de l'analyse les conditions qui servent pour déterminer à quelle région répond un système donné de valeurs de J, D, L, on établit la règle donnée ci-dessus pour fixer le caractère des racines de la forme à laquelle ces trois invariants appartiennent. On devinera facilement comment le paramètre μ vient s'offrir dans ces conditions: en effet,

$$\Lambda + \mu JD = 0$$

représente une surface qui, passant par la ligne limitrophe aux deux régions supérieures, ne passe par aucun point facultatif au-dessus du plan de D, c'est-à-dire ne rencontre nulle part la surface $G = 0$ au-dessus de ce plan.

Le perfectionnement que j'ai eu le bonheur d'ajouter ainsi à la découverte de mon confrère s'est offert à moi comme une conséquence (dans l'ordre subjectif des idées) du théorème que j'ai eu l'honneur déjà de publier dans les *Comptes rendus* de cette année*, et qui se rapporte à la limite du nombre des racines réelles de l'équation

$$\lambda_1 (x+c_1)^m + \lambda_2 (x+c_2)^m + \ldots + \lambda_i (x+c_i)^m = 0.$$

Dans cette équation, en supposant $c_1, c_2, \ldots, c_m$ arrangés en ordre de leurs grandeurs et en écrivant la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, (-1)^m \lambda_1$, le théorème consiste en ce que le nombre des racines réelles ne peut pas dépasser le nombre de changements de signe dans la suite; mais j'avais imposé la condition que m doit être un nombre entier et positif; cette dernière restriction au moins est superflue; le théorème reste vrai quand m est un nombre négatif, tout aussi bien comme quand il est positif. Cette extension suit comme conséquence immédiate d'un théorème algébrique qu'on peut établir sans aucune difficulté, mais que je ne me rappelle pas d'avoir jamais rencontré.

Soient† $f(x, y)$, $\phi(x, y)$ deux fonctions homogènes quelconques en x, y; J la jacobienne de f, ϕ, c'est-à-dire $\frac{df}{dx}\frac{d\phi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dx}$. Alors je dis qu'un nombre impair des racines de J sera compris entre chaque paire de racines réelles et consécutives de f, comme évidemment aussi entre chaque paire de racines réelles et consécutives de ϕ, de sorte que le nombre des racines réelles de f ni de ϕ ne peut excéder de plus d'une unité le nombre des racines réelles de J. Si on prend $\phi(x, y) = y$, on retombe sur le théorème d'algèbre élémentaire qui donne la disposition des racines réelles de $f'x$ par rapport aux racines réelles de fx.

* [p. 360 above.] † [See p. 375 below.]