76.

NOTE SUR LES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR DISTINGUER LE CAS QUAND TOUTES LES RACINES D'UNE ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ SONT RÉELLES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LX. (1865), pp. 759—761.]

DANS une communication [p. 371 above] que j'ai eu l'honneur de faire précédemment à l'Académie, j'ai donné la définition de trois invariants appartenant à une forme binaire du cinquième degré, que j'ai nommés J, D, L, D étant le discriminant.

Quant à J et L, il y a une autre méthode très-nette qui suffit pour les définir.

Si on suppose la fonction donnée mise sous la forme

$$(ax+by)^5+(cx+dy)^5+(ex+fy)^5,$$

et si on écrit

$$(ad-bc)^5=A, \quad (cf-de)^5=B, \quad (eb-fa)^5=C,$$

on aura

$$J=A^2+B^2+C^2-2AB-2AC-2BC,$$
$$L=A^2B^2C^2.$$

Avec J et L on forme un nouvel invariant que j'ai nommé Λ, tel que $\Lambda=2^{11}L-J^3$.

Alors, quand D est positif, on sait que les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines soient réelles, sont* que J et $\Lambda+\mu JD$ soient tous les deux négatifs, μ étant une quantité numérique choisie à volonté, pourvu qu'elle ne sorte pas de l'intervalle compris entre les deux limites 1 et -2.

On voit donc (chose jusqu'ici inouïe dans les recherches de cette nature) que l'un des trois *criteria* est variable entre des limites fixes.

Mais on se forme une idée beaucoup trop restreinte de la nature de cette indétermination en se bornant aux invariants (tels que Λ) du douzième degré par rapport aux coefficients de la fonction donnée pour servir ainsi comme troisième critérium.

Au lieu de $\Lambda+\mu JD$, on peut substituer une fonction rationnelle et entière quelconque de J, K, L, K étant la quantité $A^2BC+AB^2C+ABC^2$

[* Cf. footnote, p. 452.]

homogène par rapport à J, $K^{\frac{1}{2}}$, $L^{\frac{1}{3}}$, à savoir $F(J, K, L)$, pourvu que certaines conditions soient satisfaites que je vais donner. Écrivons

$$J = \theta^2 - 4\theta, \quad K = \theta^2 + 2\theta, \quad L = \theta^2,$$

alors F devient une fonction de θ, et les conditions nécessaires et suffisantes pour que F (pris avec le signe convenable) soit un bon troisième critérium (comme remplaçant de Λ) sont les suivantes, qu'en écartant toutes les racines de F, qui se répètent un nombre pair de fois, une des restantes est égale à -4, mais nulle autre ne sort des limites 0 et 12.

Ainsi, par exemple, on peut se servir (comme critérium) d'un invariant du seizième degré par rapport aux coefficients, dans lequel il entrera deux paramètres variables, et on tombe sur une question très-intéressante d'Algèbre pour trouver les conditions auxquelles ces deux paramètres doivent être assujettis pour que l'invariant soit bon comme critérium, problème qui se résout par des considérations géométriques et sur lequel je prendrai quelque autre occasion de revenir. Comme exemple de la manière de mettre à l'épreuve un critérium quelconque donné, je prendrai la fonction trouvée par M. Hermite par une méthode particulière à lui qu'il a eu la grande bonté de me communiquer.

Cette fonction, exprimée dans ma notation, est

$$18L^2 - JKL - K^3;$$

en faisant les substitutions dont j'ai parlé, cette quantité devient

$$-2\theta^3(\theta^3 + 2\theta^2 - 7\theta + 4) = -2(\theta + 4)(\theta - 1)^2\theta^3,$$

où on voit qu'il existe une racine -4 et que les autres racines d'une multiplicité impaire, c'est-à-dire celles qui appartiennent au facteur θ^3, ne sortent pas des limites 0, 12.

De même, on peut démontrer plus généralement que

$$(2L^2 - K^3) + \mu(16L^2 - JKL)$$

sera bon comme critérium, pourvu que $\mu > -\frac{1}{9}$.

Par exemple, en mettant $\mu = 1$, on retombe sur le critérium de M. Hermite: en mettant $\mu = 0$, on trouve comme critérium $2L^2 - K^3$, et en mettant $\mu = \infty$, on trouve $16L^2 - JKL$, équivalant au seul facteur $16L - JK$, qui à son tour peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{\Lambda + JD}{128} \text{ (car } D = J^2 - 128K);$$

on reconnaît immédiatement que 1 étant compris, comme cas extrême, entre les limites 1 et -2, $\Lambda + JD$ et conséquemment $16L - JK$ doit être bon comme critérium.

On comprend aisément que la forme $(2L^2 - K^3) + \mu(16L^2 - JKL)$, avec $\mu > -\frac{1}{9}$, n'est qu'une solution particulière du problème de trouver le critérium le plus général du degré 24 dans les coefficients, lequel contiendra 5 paramètres variables, c'est-à-dire 2 moins que le nombre des compositions du nombre 6 qu'on peut effectuer avec les éléments 1, 2, 3.