77.

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LX. (1865), pp. 1011—1012.]

SOIT $F(a, b, c, d)$ le représentant de la quantité

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd;$$

soient b, c deux quantités *positives* qui satisfont à l'équation

$$F(a, b, c, d) = 0;$$

écrivons l'équation cubique en x

$$F(a, x, c, d) = 0,$$

et soient (b, b_1) les deux racines positives de cette équation. De même écrivons

$$F(a, b_1, x, d) = 0,$$

et soient (c, c_1) ses deux racines positives; posons semblablement

$$F(a, x, c_1, d) = 0,$$

dont (b_1, b_2) sont les deux racines positives, et ainsi de suite; on obtiendra de cette façon deux séries infinies $b, b_1, b_2, b_3 \ldots$; $c, c_1, c_2 \ldots$.

Or je dis: 1° que si b est plus grand que b_1, chacune des deux séries sera constamment décroissante, et si au contraire b est moindre que b_1, chacune sera constamment croissante. De plus, je dis: 2° que dans ces deux cas les quantités b tendront vers $\sqrt[3]{(a^2d)}$, et les quantités c vers $\sqrt[3]{(ad^2)}$ comme limite. Nommons $\sqrt[3]{(a^2d)} - b_n = \beta_n$, $\sqrt[3]{(ad^2 - c_n)} = \gamma_n$. Je dis: 3° qu'en même temps que β_n et γ_n deviennent infiniment petits quand n est infini, les différences $\beta_n - \gamma_n$, $\beta_n - \beta_{n-1}$, $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ deviendront infiniment petites par rapport à β_n et γ_n.

On remarquera que $F(a, b, c, d)$ est un discriminant binaire du troisième ordre. Il y a un théorème général analogue pour le discriminant binaire d'un ordre quelconque.