79.

SUR LES LIMITES DU NOMBRE DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, LX. (1865), pp. 1261—1263.]

J'AI l'honneur de soumettre à l'Académie un théorème que j'ai tout récemment réussi à établir par une analyse des plus simples. On verra qu'il comprend comme cas particulier le célèbre théorème de Newton qui, donné sans preuve par son auteur, n'a pas été démontré jusqu'à ce jour, nonobstant les efforts des Maclaurin, des Waring et des Euler. Soit fx une fonction rationnelle et entière de x. Soit c_0, nc_1, $\frac{1}{2}n(n-1)c_2$, ..., c_n les coefficients des puissances successives de x dans $f(x+p)$. Écrivons

$$C_0 = c_0^2, \quad C_1 = c_1^2 - c_0c_2, \quad C_2 = c_2^2 - c_1c_3, \ \ldots, \ C_n = c_n^2.$$

Alors on peut dire qu'à chaque petite lettre c_r est associée une grande lettre C_r, et de même à chaque succession c_r, c_{r+1} de petites lettres est associée une succession de grandes lettres C_r, C_{r+1}. Quand ces successions forment toutes deux des permanences, c'est-à-dire quand les produits $c_r . c_{r+1}$ et $C_r . C_{r+1}$ sont tous les deux positifs, on peut dire que la succession composée $\begin{pmatrix} c_r c_{r+1} \\ C_r C_{r+1} \end{pmatrix}$ forme une double permanence; et en prenant de cette sorte toutes les successions simultanées fournies par ces deux suites, il y aura un certain nombre de ces permanences qu'on peut nommer le nombre de permanences doubles propres à p.

Or, je dis qu'en supposant p plus grand que q, la différence entre le nombre des permanences doubles propres à p et le nombre de ces permanences propres à q ne sera jamais négative, et de plus elle fournira une limite supérieure au nombre de racines réelles comprises entre p et q.

Si l'on prend p égal à zéro et q égal à $-\infty$, il est évident que le nombre de permanences doubles propre à $-\infty$ est zéro, car toutes les successions simples dans $f(-\infty)$ sont des variations.

Ainsi, en donnant aux coefficients de fx, disons $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, le nom de *suite cartésienne*, et à $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$, formés de la manière décrite plus haut, celui de *suite newtonienne* appartenant à fx, on peut affirmer que le nombre des racines négatives dans une équation a pour limite supérieure le nombre des permanences doubles fournies par la combinaison de la suite cartésienne avec la suite newtonienne; et conséquemment, en changeant x en $-x$, on voit également que le nombre des racines positives de la même équation aura pour limite supérieure le nombre des successions simultanées composées d'une permanence newtonienne associée à une variation cartésienne. C'est là, en d'autres termes, le théorème complet de Newton, comme on peut le vérifier en consultant l'*Arithmétique universelle.*

On voit facilement que, pour la forme $f(x+p)$, les éléments $c_0, c_1, \ldots, c_n$, au moyen desquels on forme $C_0, C_1, \ldots, C_n$, ne sont autre chose (pris en ordre inverse) que les quantités

$$fp, \quad \frac{f'p}{n}, \quad \frac{f''p}{n(n-1)}, \quad \frac{f'''p}{n(n-1)(n-2)}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n)}p}{n(n-1)\ldots 1};$$

mais on n'est nullement borné à cette suite déterminée de valeurs pour les éléments. Je trouve qu'on peut prendre pour éléments un système de multiples numériques de $fp, f'p, f''p, \ldots$ dans lesquels il entre deux paramètres arbitraires, dont l'un cependant est limité par la grandeur de n. Par exemple, on peut prendre tout simplement pour les deux séries

$$\begin{array}{llll} fp, & f'p, \ldots, & f^{(n-1)}p, & f^{(n)}p, \\ Tp, & T_1p, \ldots, & T_{n-1}p, & T_np, \end{array}$$

où T_rp signifie

$$(f^{(r)}p)^2 - f^{(r-1)}p \,.\, f^{(r+1)}p.$$

Alors le nombre de permanences double dans ces deux suites, moins le nombre semblable quand on écrit q pour p, donnera comme auparavant une limite supérieure au nombre des racines réelles de fx compris entre p et q: et l'on doit remarquer que quelquefois l'une des méthodes et quelquefois l'autre donnera la meilleure limite, excepté pour les cas de $n=2$ et $n=3$, cas où la première méthode est toujours préférable.

Ainsi l'on voit qu'on peut substituer à la règle de Fourier une règle où les fonctions qu'il emploie sont associées à des combinaisons quadratiques d'elles-mêmes, formant deux systèmes dont l'un est effectivement fixe, l'autre variable. Je n'entre pas dans les détails sur la loi de variabilité, parce que mon seul but, en faisant cette communication, est de faire connaître les principes sur lesquels repose la démonstration du théorème de Newton, démonstration qui a, depuis près deux siècles, échappé aux recherches des géomètres.