80.

THÉORÈME D'ALGÈBRE ÉLEMENTAIRE.

[*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* LXI. (1865), pp. 282—283.]

Je demande la permission d'ajouter l'énoncé exact du théorème général auquel (sans le préciser) allusion a été faite dans les *Comptes rendus* de la séance du 19 juin dernier.

Désignons une quelconque des quatre combinaisons de signes

$$\begin{matrix} + + & + + & - - & - - \\ + + & - - & + + & - - \end{matrix}$$

par le mot *double permanence,* et une quelconque des combinaisons

$$\begin{matrix} + - & + - & - + & - + \\ + + & - - & + + & - - \end{matrix}$$

par le mot *varia permanence.*

Soit $fx = 0$ une équation algébrique du degré n; ν une quantité réelle qui n'est pas comprise *en dedans* des limites 0, $-n$ (bien entendu que les limites elles-mêmes ne sont pas exclues). Que $f^r x$ représente la quantité $\frac{d^r}{dx^r} fx$; $G_r x$ la quantité

$$(f^r x)^2 - \frac{\nu + r - 1}{\nu + r} f^{r-1} x \, . \, f^{r+1} x.$$

Formons la progression simultanée

$$\left.\begin{matrix} fx, & f^1x, & f^2x, & \ldots, & f^n x; \\ Gx, & G_1x, & G_2x, & \ldots, & G_n x. \end{matrix}\right\} \qquad \text{(P)}$$

Alors je dis: 1° qu'en faisant x croître de λ jusqu'à μ, le nombre de doubles permanences dans (P) ne peut pas décroître, et que le nombre de *varia* permanences ne peut pas croître;

2° Que le nombre des racines réelles de fx comprises entre λ et μ ne peut excéder ni le nombre des doubles permanences gagnées, ni le nombre des *varia* permanences perdues par (P) quand x passe de λ à μ.

3° On peut ajouter que la différence entre le premier et le second ou entre le premier et le troisième de ces nombres sera toujours un nombre *pair*.

Pour retrouver le théorème de Newton donné dans le chapitre intitulé *De formâ æquationis,* dans l'*Arithmétique universelle,* en tant qu'il se rapporte à la limite du nombre des racines négatives de fx, on prend $\nu = -n$, $\lambda = -\infty$, $\mu = 0$, et on fait le compte des doubles permanences gagnées; en tant qu'il se rapporte à la limite du nombre des racines positives, on prend $\nu = -n$, $\lambda = 0$, $\mu = \infty$, et on fait le compte des *varia* permanences perdues. Ainsi on obtient une règle qui est en effet identique avec celle de Newton, savoir: qu'en écrivant

$$fx = ax^n + nbx^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)cx^{n-2} + \ldots,$$

la progression simultanée,

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, \ldots, & l, \\ a^2, & b^2 - ac, & c^2 - bd, \ldots, & l^2 \end{matrix}\right\} \qquad (\mathrm{Q})$$

fournit, par ses doubles permanences et par ses *varia* permanences, des limites au nombre des racines négatives et positives respectivement de fx.

J'ajoute qu'en écrivant fx dans la forme beaucoup plus générale

$$ax^n + \frac{\nu}{i+1}bx^{n-1} + \frac{\nu(\nu+1)}{(i+1)(i+2)}cx^{n-2} + \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{(i+1)(i+2)(i+3)}dx^{n-3} + \ldots,$$

ou bien sous la forme

$$ax^n - \frac{\nu}{i+1}bx^{n-1} + \frac{\nu(\nu+1)}{(i+1)(i+2)}cx^{n-2} - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{(i+1)(i+2)(i+3)}dx^{n-3} + \ldots,$$

selon que ν est positif ou négatif, alors, pourvu que i soit un entier positif et ν une quantité réelle quelconque qui n'est pas comprise *en dedans* des limites i, $-n$, la progression (Q) sert toujours à limiter, comme auparavant, le nombre total des racines négatives et positives de fx.

Comme corollaire particulier on déduit que, sous les conditions supposées, la fonction hypergéométrique*

$$x^n + \frac{\nu}{i+1}x^{n-1} + \frac{\nu(\nu+1)}{(i+1)(i+2)}x^{n-2} + \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{(i+1)(i+2)(i+3)}x^{n-3} + \ldots$$

(sauf le cas où, ν étant $-n$ et i étant 0, cette fonction devient une puissance exacte) ne peut jamais avoir plus d'une seule racine réelle.

[* Cf. p. 513.]