85.

OBSERVATIONS SUR UN ARTICLE DE M. POULAIN.

[*Les Mondes*, XI. (1866), pp. 435—437.]

C'EST avec une vive satisfaction que j'ai trouvé dans *les Mondes* le compte rendu fait par M. Poulain de mon travail sur le théorème de Newton. Je m'estime fort heureux d'avoir rencontré dans le savant membre de la compagnie de Jésus un interprète aussi fidèle. L'exposition ne laisse rien à désirer en fait de précision et de clarté. Permettez-moi de prendre moi-même la parole dans votre journal, pour ajouter quelques nouveaux développements propres à faire voir toute l'étendue de la théorie en question.

Et tout d'abord, ne voulant pas m'attribuer ce qui appartient à autrui, je tiens à faire remarquer que le théorème nommé par moi *Newton's complete rule* a été donné par Newton lui-même. Je l'appelle ainsi pour le distinguer de l'autre, que je nomme par opposition *Newton's incomplete rule*. C'est ce dernier théorème seul qui a occupé l'attention de Maclaurin, Waring, Euler, et de tous les autres auteurs qui ont voulu traiter cette question. Voilà pourquoi on l'a désigné de préférence sous le nom de *théorème de Newton*. Newton commence par énoncer la règle imparfaite qui, suivant la remarque de M. Poulain, n'est que le corollaire du théorème premier. Mais après cet énoncé et quelques applications numériques, il ajoute le théorème dans sa forme complète. Il est très-curieux de remarquer comment ce théorème paraît se lier dans l'esprit de Newton au théorème de Descartes. Il semble avoir eu l'idée que, dans un certain sens transcendant, chaque variation de signes des coëfficients simples peut être regardée comme indiquant une racine positive, et chaque permanence, comme indiquant une racine négative. Seulement il distingue chacune de ces espèces de racines en réelles et imaginaires. Les racines *positives-imaginaires* correspondent aux *doubles-variations*, et les racines *négatives-imaginaires* aux *permanences-variations*.

2°. En consultant le *syllabus* cité par M. Aug. Poulain, on trouvera que j'ai donné une démonstration rigoureuse du théorème 2^e, non-seulement pour le cas auquel se borne mon habile commentateur, c'est-à-dire le cas où γ_r désigne la fraction $\dfrac{m-r+1}{m-r}$, mais, en général, pour chaque valeur de γ_r qui satisfait à l'équation $2-\gamma_r=\dfrac{1}{\gamma_{r+1}}$ à la condition toutefois que γ_r reste positif pour toutes les valeurs de r comprises entre 1 et m, ces limites étant exclues. Cela revient à dire qu'on peut poser $\gamma_r = \frac{\mu - r + 1}{\mu - r}$, pourvu que μ ait une valeur réelle quelconque, non comprise entre 0 et m, mais pouvant d'ailleurs être une de ces valeurs limites. On voit donc qu'en réalité je démontre un théorème troisième, qui devient le deuxième si l'on attribue à μ une de ses valeurs limites, la valeur m.

Dans la troisième partie d'un travail inséré par moi dans les *Philosophical Transactions* de l'année dernière, j'avais à traiter les caractères invariantifs qui servent à distinguer exactement les trois cas offerts par les équations du cinquième degré. Cette fois encore je suis tombé sur des formules renfermant un paramètre pouvant prendre des valeurs arbitraires entre certaines limites. Il y a là, en ce qui concerne les *criteria*, un phénomène jusqu'alors inconnu dans les fastes de l'algèbre.

On trouvera un exemple de l'utilité du théorème troisième dans la partie mathématique de l'*Educational Times* du mois d'avril de cette année.

3°. Il reste encore une remarque importante à faire sur l'application des théorèmes deuxième et troisième; c'est que, à la formule

$$pP(\mu) - pP(\lambda) = (\lambda, \mu) + 2K, \qquad (\beta)$$

on doit ajouter la formule également importante

$$vP(\lambda) - vP(\mu) = (\lambda, \mu) + 2K', \qquad (\gamma)$$

qui se déduit de la précédente quand on change x en $-x$ dans l'équation donnée. Ces deux formules (β) et (γ) donnent des limites tout à fait indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'on peut comparer le théorème ainsi présenté à un fusil à deux coups: si l'un des canons rate, l'autre peut atteindre le but. Il va sans dire que la formule (γ) peut se démontrer directement sans se servir de (β).

4°. Il existe une méthode pour modifier les énoncés des formules (β) et (γ). Au point de vue théorique elle me paraît utile parce qu'elle fournit le moyen de se passer du mot gênant *variation-permanence*, en remplaçant cette combinaison mêlée par une *double-variation*.

Remarquons que si la succession $\begin{vmatrix} a, & b \\ A, & B \end{vmatrix}$ est une *double-permanence*, $\begin{vmatrix} a, & b \\ aA, & bB \end{vmatrix}$ le sera aussi. Mais si $\begin{vmatrix} a, & b \\ A, & B \end{vmatrix}$ est une variation-permanence, $\begin{vmatrix} a, & b \\ aA, & bB \end{vmatrix}$ change de caractère et devient une *double-variation*. Donc si l'on substitue des éléments cubiques aux éléments quadratiques, en écrivant

$$\psi^r y = f^r y \cdot \phi^r y = (f^r y)^3 - \gamma_r f^{r-1} y \cdot f^r y \cdot f^{r+1} y,$$

et si l'on fait porter les symboles V, P, non plus sur la série des ϕ, mais sur celle des ψ, les formules (β) (γ) deviendront

$$pP(\mu) - pP(\lambda) = (\lambda, \mu) + 2K, \tag{B}$$

$$vV(\lambda) - vV(\mu) = (\lambda, \mu) + 2K'. \tag{C}$$

5°. La série ψ donne lieu à un nouveau théorème. Remarquons que le théorème de Budan s'exprime indifféremment par la formule

$$p(\mu) - p(\lambda) = 2A,$$

ou bien

$$v(\lambda) - v(\mu) = 2A. \tag{D}$$

A l'aide de la série des ψ, on peut modifier ces formules; car en rapportant les signes P et V à ces nouvelles quantités, on peut établir les formules

$$\frac{p(\mu) + P(\mu) - p(\lambda) - P(\lambda)}{2} = (\lambda, \mu) + L,$$

ou bien

$$\frac{v(\lambda) + V(\lambda) - v(\mu) - V(\mu)}{2} = (\lambda, \mu) + L, \tag{E}$$

L étant un nombre entier positif quelconque, pair ou impair.

La démonstration et quelques corollaires simples de cette proposition (E) sont donnés dans le *Philosophical Magazine* du mois de mai de cette année, [p. 542, below].

6°. Les quatre formules (β), (γ), (B), (C) peuvent être réunies avec avantage dans la pratique, quand on opère avec la méthode dite de Fourier servant à séparer les racines d'une équation.

P.S. J'ajoute un exemple de l'importance du paramètre arbitraire que j'ai introduit parmi les *criteria*.

Prenons l'équation

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

ou bien

$$x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + 1.2.3\ldots n = 0.$$

Avec la règle de Newton, on trouvera pour la série des éléments quadratiques

$$1;\ -1;\ 1;\ 1;\ldots;\ 1,$$

et de cette série on ne peut conclure qu'à l'existence d'une seule paire de racines imaginaires. Mais avec l'aide du théorème général, on obtient

$$1;\ 0;\ 0;\ldots;\ 0;\ 1,$$

et cette nouvelle série prouve que toutes les racines, à l'exception d'une seule, quand n est impair, sont imaginaires.