BERT — PIERWSZE WIADOMOŚCI Z GEOMETRYI DOŚWIADCZALNEJ

Szanownemu Professorowi
S. Dicksteinowi
pracę tę ofiarować poważa się

30.X.96. [illegible]

Pierwsze wiadomości

Z GEOMETRYI DOŚWIADCZALNEJ.

Paweł Bert.

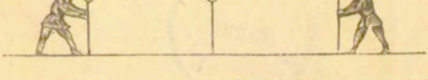
Pierwsze wiadomości
Z GEOMETRYI DOŚWIADCZALNEJ

w zastosowaniu do mierzenia odcinków,
powierzchni i objętości

ze 141 drzeworytami w tekście

spolszczył

S. Srebrny.



WARSZAWA.
Nakładem Księgarni
Teodora Paprockiego i S-ki,
41. Nowy-Świat 41.

1897.

Дозволено Цензурою.

Варшава, 12 Марта 1896 года.

Druk. Artyst. Saturnina Sikorskiego, Nowy-Świat 47.

Słowo wstępne tłomacza.

Nie ulega chyba żadnej wątpliwości, że umysł dziecka bardzo dobrze reaguje na rzeczy i zjawiska konkretne. Geometrya jest nauką abstrakcyjną, początki jej wszakże można uczynić konkretnymi, jeżeli pojmować je będziemy jako naukę mierzenia.

Tak też pojmował początki geometryi autor niniejszej książeczki i na tem tle ją napisał. Skoro więc zgodzimy się na ten pogląd Berta, to należy początki geometryi włączyć do rozkładu przedmiotów nauki przedszkolnej i podawać je dzieciom od lat 8 do 10.

Tą mianowicie myślą kierowany, przedsięwziąłem pracę nad przyswojeniem naszej literaturze pedagogicznej książeczki Berta.

Pierwsze lekcye „Geometryi Poglądowej“ dobrze nadają się do wykładu dzieciom, bawiącym podczas feryj letnich na wsi; zajmą one niewątpliwie młodociane umysły i będą raczej dla nich rozrywką, niż nauką.

Inteligentne matki mogą same, bawiąc się ze swemi pociechami, dać im początkowe wiadomości zgeometryi, które posłużą później jako dobra podwalina do nauki systematycznej, nie przeciążając przytem ani umysłu abstrakcyą, ani pamięci mnóstwem faktów.

Książeczka Berta w ręku dobrego nauczyciela lub nauczycielki powinna wzbudzić w dzieciach zamiłowanie do nauk ścisłych i zarazem nie nużyć ich, lecz bawić.

Drobne zmiany, jakie poczyniłem w tej książce, polegają na ściślejszem, o ile możności, wysłowieniu niektórych twierdzeń i poprawieniu kilku figur.

Dziewiątą część, traktującą o mierzeniu gruntów i zdejmowaniu planów, pozwoliłem sobie uzupełnić objaśnieniem kilku szczegółów, przypuszczając, że tym sposobem jaśniej wyłożony zostanie ten, bądź co bądź, zawiły i mniej dla umysłu dziecięcego dostępny rozdział. Do uzupełnienia tego zachęciła mię okoliczność, że przy początkowem nauczaniu geometryi bardzo rzadko udaje się nam wykonywać z dziećmi pomiary z powodu nastręczających się trudności technicznych, jak brak przyrządów, wolnego placu i t. d.

Warszawa, w marcu 1896 r.

Tłomacz.

Przedmowa autora.

Często, i nie bez zdziwienia, zdarzało mi się konstatować u dzieci naszych szkół elementarnych małe zamiłowanie do nauki geometryi. Powiadam „nie bez zdziwienia“, ponieważ zdawałoby się, iż dzieci, te istoty tak wielbiące wszystko to, co jest konkretnem powinnyby bardzo łatwo zasmakować w nauce tego przedmiotu, ćwiczącego w rozumowaniu o rzeczach dotykalnych i prowadzącego do poznania faktów, spotykanych na każdym prawie kroku codziennego życia.

Szukając przyczyn tej anomalii, znalazłem je w sposobie wykładu pierwszych zasad nauki geometryi; właściwa bowiem nauka zasad i elementarnych faktów poprzedzana bywa nieskończonym szeregiem określeń, które w żaden sposób nie mogą zainteresować młodocianego słuchacza. Książka, którą mam w tej chwili przed sobą i która polecona została przez ministeryum oświaty, wymienia tych nazw *sto ośmdziesiąt dwie*, zanim przystępuje do właściwego wykładu geometryi! Większość autorów skraca, co prawda, znacznie ten, że się tak wyrażę, słownik, lecz mimo to pozostaje on jeszcze zbyt długi i zbyt wyczerpujący. Co gorsze, podręczniki te podają z całą drobiazgowością pewniki, które stają się kompletnie bezsensownymi, jeżeli je nie dość ściśle sformułujemy, dziecko jednakże musi balast ten zapamiętać.

Dalej, a to jest bardzo ważne, autorowie tych książeczek silą się na ścisłe określenie punktu, linii i powierzchni, co zawsze wywiera na mnie wrażenie kompletnego sprowadzania dzieci z drogi, na którą wprowadzić je raczej należy. Bo jakże można przypuścić, że dziesięcioletnie dziecko jest w stanie pojąć, ż powierzchnia ma tylko dwa wymiary, że ćwiartka papieru nie ma grubości? A linia! A punkt! Że punkt wcale nie ma wymiarów — to można powiedzieć myślicielowi, ale nigdy dziecku! Nauczyciel powiada: „punkt nie ma żadnego wymiaru“ i na potwierdzenie słów swoich kreśli na tablicy kółko, mające 50 centymetrów średnicy!

To jeszcze nie wszystko: trzeba się dalej nauczyć, co to jest *założenie*, co *twierdzenie*, *wniosek*, *twierdzenie pomocnicze*, — ponieważ wszystkie te dla ucznia dziwolągi powtarzają się w książce na każdym kroku. Nareszcie po przezwyciężeniu tych trudności przystępujemy do właściwej geometryi. A więc naprzód jest teorya równoległych, następnie prostopadłych, później nieco kwestya przystawania trójkątów i ich podobieństwo. I przez cały ten czas nauki uczeń, natężając umysł nad temi bardzo jasnemi i ścisłemi, ale niezwykle suchemi rozumowaniami, pomimo woli zadaje sobie pytanie, do czego to wszystko ma służyć. Mija lekcya za lekcyą, a on nie czuje się bardziej zaawansowanym, niż był w pierwszym dniu wykładu;

po upływie roku czynności mierniczego, który wykonywa pomiary odcinków, kątów i powierzchni, — kamieniarza i cieśli, mierzących objętości, są dla niego jeszcze krainą nieznaną. A przecież to jest właściwy cel, do którego ten uczeń zmierza, zarówno z powodu potrzeb zawodowych w jego przyszłości, jak z powodu biegu rozumowania jego młodocianego umysłu, rwącego się do wszystkiego, co konkretne. A tu tymczasem karmią go wyłącznie abstrakcyą, albo też przedstawiają mu fakty konkretne, lecz bez istotnego, rzeczowego znaczenia. Bo jakże zainteresować się może dziecko badaniem okręgu koła, przechodzącego przez trzy wierzchołki trójkąta, albo kwestyą podziału odcinka w stosunku skrajnym i średnim! Później może go to zająć, lecz w początkowym kursie nie widzi on w tem żadnego pożytku i machinalnie uczy się na pamięć twierdzeń i dowodzeń.

Ja postąpiłem zupełnie w inny sposób: zmierzam wprost do celu, a celem nauczania geometryi w szkołach początkowych jest podanie sposobów mierzenia otaczających nas przedmiotów, a nie poznawanie własności i wzajemnych stosunków figur płaskich i brył. Otaczające nas przedmioty są trojakiego rodzaju: linie, powierzchnie i objętości. Od razu uprzystępniam wykład w ten sposób, ażeby dziecko już na trzeciej lub czwartej lekcyi umiało zmierzyć wysokość drzewa lub domu. W ten sposób dochodzi ono do praktycznego rezultatu i interesuje się przedmiotem.

Określenia napotyka ono w miarę, jak się daje uczuć ich potrzeba; tak samo dzieje się z dowodzeniami elementarnych własności figur.

Przedewszystkiem zrobią mi zarzut, że niektórym z mych dowodzeń brak ścisłości i że w nich przyjęto za prawdę twierdzenia, których w początkowej geometryi zwykle się dowodzi. Odpowiem na ten zarzut, że te domniemane dowodzenia nie są wcale takiemi w rzeczywistości, ponieważ zasadzają się zawsze na najczystszych, nie dających się dowieść prawdach, czyli na t. zw. *postulatach*.

Zamiast przyjmować za punkt wyjścia postulat Euklidesa, jak to się zwykle robi, ja biorę inny, niekiedy bardziej złożony, lecz ani trochę więcej, ani trochę mniej oczywisty, ani trudniej, ani łatwiej dający się dowieść. Następnie zarzucą mi może, że porządek mych lekcyj dziwnie różni się od klasycznego. Tak na przykład już od czwartej lekcyi mówię o figurach podobnych, podczas gdy teorya podobieństwa figur zwykle odniesiona jest znacznie dalej; ja też nie stwarzam teoryi i zadawalniam się tylko odezwaniem do zdrowego rozsądku mych słuchaczy i oczywistością faktów.

Na ten i na wszelkie inne tego rodzaju zarzuty odpowiem tytułem mej książeczki: „Pierwsze Wiadomości“ — i dodam jeszcze, że jedno z dwojga: albo dziecko będzie miało do swej dyspozycyi kilkanaście lekcyj, jakieś pół roku, do nauczenia się początków geometryi, tak, że zaledwie zdołam je nauczyć rzeczy pożytecznych, „praktycznych“, ciągle kierując jego sposób sądzenia o rzeczach do elementarnych prawd tej nauki, — lub też dziecko ma przed sobą więcej czasu, kiedy wyjdzie poza ramy początkowej nauki; w drugim roku nauczania trzeba będzie uciec się do metody klasycznej, do ścisłego dowodzenia i do długiego szeregu rozmaitych własności linij, figur płaskich i brył.

Lecz wtedy taki systematyczny podział na serye zajmie ucznia, ponieważ ten ostatni już odczuje jego pożyteczność: otóż i znów mamy tęż samą zasadę.

A więc, jeżeli w zwykłym wykładzie geometryi wylicza się trzy wypadki przystawania trójkątów, dziecko się nudzi: cóż go to obchodzi? Lecz jeżeli ono, ucząc się z mych „Pierwszych Wiadomości", napotka dwa z tych wypadków, których dowodzenia były mu już podane w swojem miejscu, czyli właściwie w dwóch różnych miejscach, wtedy ono samo poczuje potrzebę uporządkowania swych wiadomości i nauczenia się od razu wszystkich wypadków przystawania trójkątów.

Moja książeczka jest więc jednocześnie pracą przygotowawczą do systematycznej nauki, zaś dla całej masy uczniów szkół elementarnych stanowi pracę zwartą i dającą im zasadnicze wskazówki nauki geometryi, które w życiu okażą się im niezbędnemi.

Melburn, w lutym 1886 r.

Paweł Bert.

PIERWSZE WIADOMOŚCI

z

GEOMETRYI DOŚWIADCZALNEJ.

1-a lekcya.

Określenia.

Wyraz *„geometrya“* składa się z dwóch wyrazów greckich: *ge* — ziemia i *metreo* — mierzę.

Geometrya więc jest nauką o mierzeniu. Po szczególe geometrya uczy nas mierzyć odległości, inaczej *rozciągłości linijne*, powierzchnie — *rozciągłości kwadratowe* i objętości — *rozciągłości sześcienne*.

N. p. gdyby nas zapytano, ile jest *metrów liniowych* od jednego końca izby szkolnej do drugiego, to wtedy mielibyśmy za zadanie zmierzyć odległość; mierzylibyśmy powierzchnię, gdyby chodziło o dowiedzenie się, ile *metrów kwadratowych* zawiera podłoga tej izby; wreszcie zajęlibyśmy się mierzeniem objętości, gdybyśmy chcieli przekonać się o ilości *metrów sześciennych* powietrza, znajdującego się w izbie.

Istnieją dwa rodzaje rozciągłości linijnych.

Jedne mierzymy przy pomocy *odcinków czyli części linij prostych* (fig. 1), t. j. takich linij, za pomocą których można *celować*, jak za pomocą *liniału* (fig. 3), drugie — przy pomocy części *linij krzywych* (fig. 2).

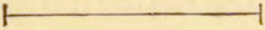


Fig. 1. — Odcinek linii prostej.

Fig. 2. — Część linii krzywej.

Istnieją trzy rodzaje powierzchni.

Powierzchnią płaską, czyli *płaszczyzną* nazywamy taką powierzchnię, do której linia prosta przystaje wszystkimi punktami (fig. 4) we wszystkich kierunkach, n. p. karta papieru, tablica, podłoga, sufit i t. d. są częściami płaszczyzn.

Fig. 3.—Odcinkiem linii prostej nazywamy część takiej linii, za pomocą której można celować, jak za pomocą liniału.

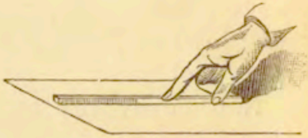


Fig. 4. — Powierzchnią płaską, czyli płaszczyzną, nazywamy taką powierzchnię, do której linia prosta przystaje we wszystkich kierunkach.

Powierzchnią krzywą nazywamy taką powierzchnię, do której linia prosta nie przystaje we wszystkich kierunkach, n. p. rura (fig. 5), walec — są częściami powierzchni krzywych, albowiem linia prosta styka się z niemi we wszystkich punktach, skoro ją przyłożymy wzdłuż powierzchni, skoro zaś przyłożymy ją wpoprzek, zetknięcie nastąpi tylko w jednym punkcie.

Powierzchnią kulistą albo *okrągłą* nazywamy taką powierzchnię, z którą linia prosta nie styka się w żadnym kierunku, n. p. jajko (fig. 6), globus.

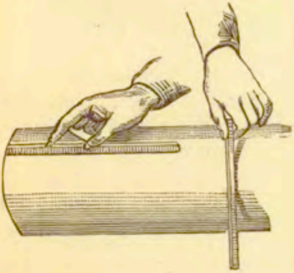


Fig. 5. — Powierzchnią krzywą nazywamy taką powierzchnię, do której linia prosta nie przystaje we wszystkich kierunkach.

Fig. 6. — Powierzchnią kulistą albo okrągłą nazywamy taką powierzchnię, z którą linia prosta nie styka się w żadnym kierunku.

Istnieją także trzy rodzaje objętości.

Jedne są ograniczone ze wszystkich stron częściami płaszczyzn (fig. 7), inaczej są to bryły, do każdej ściany których można przyłożyć kartkę papieru bez zgięcia, n. p. pudełko od cygar, kość do gry, paka i t. d.

Inne są ograniczone częściami płaszczyzn i powierzchni krzywych, n. p. kawał ściętego kloca (fig. 8), żelazny walec i t. d. Ćwiartka papieru, przytknięta do dwu końców klocka, zetknie się z nimi we wszystkich punktach, skoro zaś tę ćwiartkę przyłożymy do części jego środkowej, zetknięcia zupełnego nie będzie.

Fig. 7. — **Bryła,** ograniczona ze wszystkich stron częściami płaszczyzn.

Fig. 8. — **Bryła,** ograniczona częściami płaszczyzn i częścią powierzchni krzywej.

Fig. 9. — **Bryła,** ograniczona powierzchnią kulistą.

Wreszcie trzeciego rodzaju objętości są ograniczone bądź ze wszech, bądź z kilku stron powierzchniami okrągłemi, do których nie przystaje kartka papieru bez zgięcia, w jakikolwiek bądź sposób chcielibyśmy to uczynić.

Widzicie, że staram się bezskutecznie zrobić to na globusie (fig. 9), lub na pomarańczy.

A więc **geometrya** *uczy nas mierzyć części wszelkiego rodzaju linij, powierzchni i objętości.*

Rozpoczniemy naukę od linij prostych, powierzchn' płaskich i objętości (brył), ograniczonych płaszczyznamı. Następnie przystąpimy do mierzenia linij krzywych powierzchni krzywych i okrągłych, objętości (brył) krzywych i okrągłych.

Ograniczoną część płaszczyzny nazywamy *figurą płaską*. Figury płaskie mogą być ograniczone częściami linij prostych, tak zwanymi *odcinkami*, n. p. ćwiartka

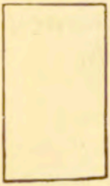


Fig. 10. — Figura płaska, ograniczona odcinkami linij prostych.

Fig. 11. — Figura płaska, ograniczona linią krzywą.

Fig. 12. — Figura płaska, ograniczona linią krzywą i odcinkiem linii prostej.

papieru (fig. 10), albo linią krzywą, n. p. koło (fig. 11), lub też linią krzywą i odcinkiem prostej, n. p. półkole (fig. 12).

CZĘŚĆ I.

Mierzenie długości przy pomocy odcinków linij prostych.

2-a lekcya.

Mierzenie odcinka, którego obydwa krańce są dostępne.

Zmierzyć jakąbądź wielkość — znaczy dowiedzieć się, ile razy w niej zawiera się inna wielkość, dobrze nam znana i przyjęta za *jednostkę miary*.

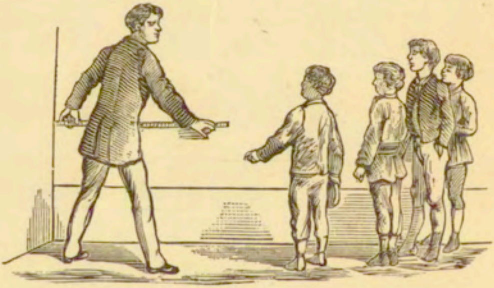


Fig. 13. — Mierzenie długości izby szkolnej.

A więc zmierzyć długość izby szkolnej – znaczy dowiedzieć się, ile razy w niej się zawiera *jednostka miary długości,* zwana **metrem** (fig. 13).

Oto macie metr, podzielony na 10 decymetrów albo 100 centymetrów. Nic prostszego, jak zmierzyć długość izby szkolnej.

Biorę metr i przykładam go do listwy u podłogi, począwszy od któregokolwiek końca (fig. 13), i przechodzę z nim kolejno do drugiego końca izby.

Przypuśćmy, że metr mieści się w długości listwy 8 razy i zostaje się niezmierzona jeszcze część listwy, równa 65 centymetrom. Wnoszę więc, że długość izby szkolnej równa się 8 metrom 65 centymetrom.

Gdybyśmy chcieli zmierzyć nie małą długość, ale n. p. odległość od tego miejsca do kościoła, który znajduje się na drugim końcu wsi, lub wreszcie bok wielkiego placu, wówczas nie trudzilibyśmy się dwieście albo trzystakrotnem przykładaniem metra, lecz użylibyśmy t. zw. *łańcucha mierniczego* (fig. 14),

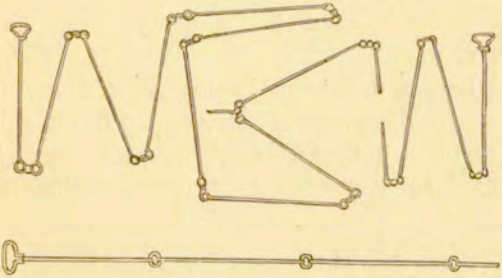


Fig. 14. — Łańcuch mierniczy.

10 metrów długiego *). W ten sposób mieć będziemy 10 razy mniej przestanków i postąpimy tak, jak postępują miernicy.

Powyższe mierzenie było bardzo łatwe, dlatego, że mogliśmy iść od jednego krańca izby do drugiego, nie opuszczając odcinka, który zamierzaliśmy zmierzyć i który łączy te dwa krańce, *punktami* zwane.

Ale czy można zmierzyć długość, nie mając tego ułatwienia?

3-a lekcya.

Mierzenie odcinka, którego tylko jeden kraniec jest dostępny.

Wyjdźmy na równinę przed to bagnisko. Po tej stronie jest wielka topola. Idź, Erneście, wbij ten kołek w punkcie po drugiej stronie bagniska (fig. 15). Czy możesz zmierzyć odległość od spodu kołka do spodu topoli, inaczej długość odcinka, łączącego te dwa punkty?

— Tak, panie; należy tylko przeciągnąć między kołkiem a topolą sznurek i zmierzyć jego długość za pomocą metra.

— Bardzo dobrze, mój chłopcze, lecz przypuszczam, że nie masz dostatecznie długiego sznurka dla połączenia topoli z kołkiem. Czy możesz jednakże zmierzyć odległość wzajemną tych dwu przedmiotów? Je-

*) U nas długość łańcucha mierniczego równa się 5 *sążeniom*, podzielonym na 7 ogniw, każde po jednej stopie; dawniej zaś używano łańcucha długości 5 *prętów*, podzielonego na 10 *pręcików*. 1 pręcik wynosił $1^1/_2$ stopy nowopolskiej, a więc pręt miał 15 stóp nowopolskich).

steś w kłopocie i nie dziwi mnie to. A jednak zadanie jest dość łatwe.

Fig. 15. — Mierzenie odległości od spodu kołka do spodu topoli.

Wytknijmy na ziemi od spodu topoli linię prostą AB, i odmierzmy na niej przy pomocy łańcucha mierniczego 20 metrów od punktu A (spód topoli) do B i w tym ostatnim wbijmy kołek (fig. 16).

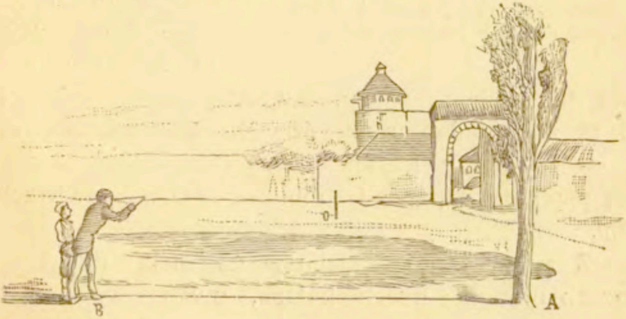


Fig. 16. — Mierzenie kąta OBA, którego wierzchołek jest B.

Nakreślmy na kartce papieru (fig. 17) odcinek *ab*, długości 20 centymetrów; sto razy przeto wzięty odcinek *ab* przedstawia nam długość odcinka AB.

Stańmy w punkcie B i zegnijmy ćwiartkę papieru w ten sposób, aby się utworzył taki *kąt*, że, skoro trzymać będziemy papier poziomo, jeden skraj (*bok*, *ramię*) kąta wskazywać będzie spód topoli A, drugi zaś — spód kołka O (fig. 16). Jeżeli przyłożę ten kąt jednem ramieniem do odcinka *ab*, tak, aby jego *wierzchołek* był w punkcie *b*, to drugie ramię wyznaczy mi kierunek prostej *bm* (fig. 17). Dalej stańmy u spodu topoli i przygotujmy z ćwiartki papieru taki kąt, abyśmy, umieściwszy go poziomo, wierzchołkiem naprzeciw źrenicy naszego oka, widzieli w kierunku jednego ramienia kołek wbity w B, w kierunku drugiego — kołek wbity w O. Jeżeli teraz przeniosę ten kąt na papier, tak, aby jego wierzchołek był w *a*, a jedno ramię przyjęło kierunek *ab*, drugie — wyznaczy kierunek *an*. Oczywiście, że punkt *o* na papierze odpowiada punktowi O na powierzchni ziemi.

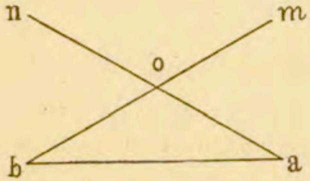


Fig. 17. — **Kreślenie** małego **trójkąta abo, zmniejszonej kopii wielkiego trójkąta ABO** na powierzchni ziemi, którego **wierzchołki** są w punktach A, B i O.

Z powyższego widzimy, że mała figura *abo* o trzech bokach i trzech kątach, zwana w geometryi *trójkątem*, jest przeniesionym na papier obrazem, portretem, wielkiej figury, wielkiego trójkąta ABO, wytkniętego na ziemi. Te dwie figury są zupełnie do siebie podobne, jak zmniejszony rysunek ćwiartki papieru, domu, konia, pługa jest podobny do ćwiartki papieru, domu, konia, pługa w naturze. Jest to, inaczej powiedziawszy, zmniejszony wizerunek tej samej figury.

I tak, jeżeli na zupełnie proporcyonalnym portrecie konia (fig. 18), biorąc możliwie dokładną miarę,

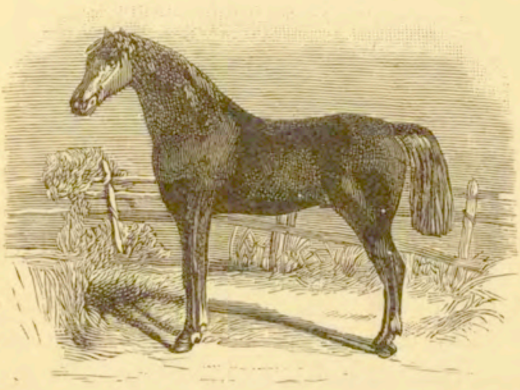


Fig. 18. – Portret konia.

znajdziemy, że przednia łapa jest 10 razy mniejsza, niżeli takaż łapa żywego zwierzęcia, będziemy mieli prawo wnioskować, że tylna łapa jest również 10 razy mniejsza, aniżeli takaż w rzeczywistości; to samo da się powiedzieć o łbie, uszach, ogonie i t. d.

Wróćmy do naszych trójkątów *abo* i ABO. Powiedzieliśmy, że *ab* zawiera 20 cm., a AB – 20 metrów. Innemi słowy—odcinek *ab* jest 100 razy mniejszy niż AB, przeto i *ao* musi być 100 razy mniejszy niż AO, który jest długością, daną do zmierzenia.

Przypuśćmy, że, zmierzywszy dokładnie odcinek *ao*, znaleźliśmy, iż on równa się 14 centymetrom 8 milimetrom .czyli 0,148 metra. Pomnożywszy tę liczbę przez 100, znajdziemy 14,8 metra. Taka więc jest szukana odległość spodu topoli A od spodu kołka O.

4-a lekcya.

Mierzenie wysokości drzewa.

Wykonamy teraz coś, co wydaje się jeszcze trudniejszem. Spojrzcie na naszą wysoką topolę, my jesteśmy u jej stóp. Czy możecie zmierzyć jej wysokość lub długość, jeżeli chcecie tak nazwać? Tu znowu mamy do zmierzenia odcinek linii prostej, którego dolny kraniec jest dostępny. Jestem przekonany, że niektórzy z was nie zawahaliby się wcale wspiąć się na wierzchołek drzewa z postronkiem i w ten sposób zmierzyć wysokość topoli. Jest to doświadczenie niebezpieczne, a co ważniejsza, nie zawsze pewne.

Otóż niema nic prostszego, jak zmierzyć tę wysokość bez wspinania się na drzewo. Naprzód pokażę wam, co należy w tym celu zrobić, a następnie wytłómaczę wam to postępowanie. Pójdźcie ze mną.

Ale przedewszystkiem przyjrzyjcie się nader prostemu przyrządowi, który przygotowuję. Biorę ćwiartkę papieru jednakowej długości i szerokości, przeginam ją, jak na figurze 19, w ten sposób, że bok AB przystaje do boku AC. Tak więc widocznie podzieliłem kąt A na dwie równe części.

A teraz idźmy. Znajdujemy się w odległości kilkudziesięciu metrów od spodu topoli. Umieść, Jakóbie, utworzoną w ten sposób połowę kąta A przed swem okiem tak, ażeby bok AC miał kierunek ściśle *poziomy* (fig. 20), i patrz w kierunku boku AD. Czy widzisz wierzchołek topoli?—Widzę.—A czy bok AD trafia dokładnie w niego? — Nie. Wierzchołek topoli jest znacznie wyżej. — W takim razie oddal się o kilka metrów. A cóż teraz? — Jest nieco niżej, ale jeszcze nie wprost boku AD. — Cofnij się więc jeszcze. — A! teraz, panie, wierzchołek topoli jest dokładnie na przedłużeniu boku AD. — Tak, masz racyę. Oznacz więc na ziemi miejsce, gdzie stoisz, i zmierz za pomocą metra odległość oznaczonego punktu od spodu topoli. Twierdzę, że wysokość drzewa będzie ściśle równa zmierzonej odległości, jeżeli do niej dodasz odległość twego oka od powierzchni ziemi.

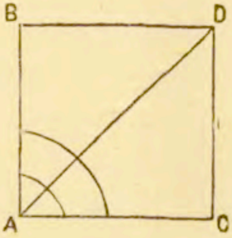


Fig. 19. — Podział kąta A na dwie równe części.

Cóż teraz wypadnie? Dajmy na to, że odległość, o której wyżej była mowa, jest 15,75 metra, oddalenie twego oka od powierzchni ziemi 1,25 metra, a więc wysokość topoli równać się będzie:

15,75 metra + 1,25 metra = 17 metrom.

Jak widzicie, zadanie to jest bardzo łatwe.

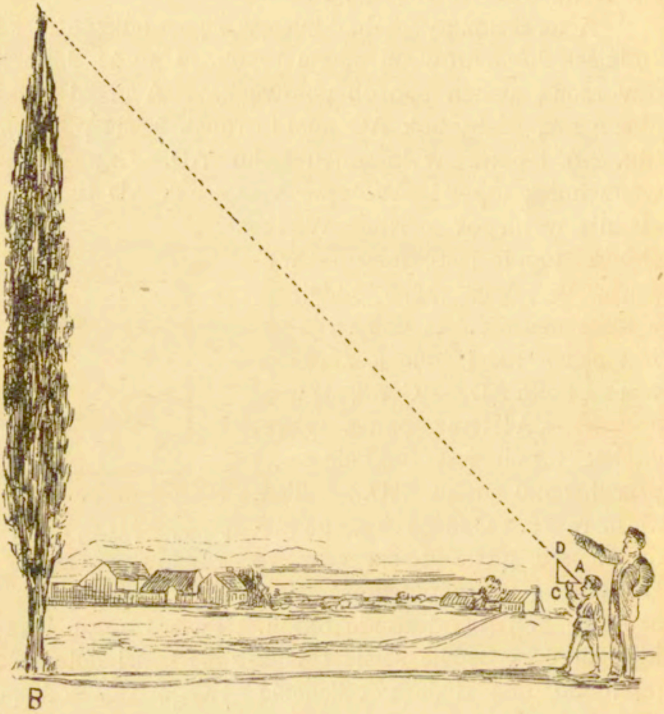


Fig. 20. — Mierzenie wysokości drzewa.

5-a lekcya.

Mierzenie wysokości drzewa (*dalszy ciąg*).

A teraz postarajmy się zrozumieć to, cośmy zrobili. Wejdźmy do klasy i zbliżmy się do tablicy. Kreślę topolę BCD (fig. 21), następnie Jakóba i jego

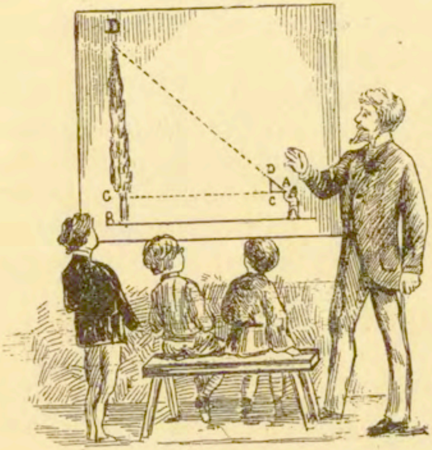


Fig. 21. — Mierzenie wysokości drzewa: dowodzenie.

ćwiartkę papieru, w sposób wiadomy przegiętą, z wierzchołkiem kąta w punkcie A. Przedłużam obydwa boki kąta; jeden dosięgnie wierzchołka topoli w punkcie D, a drugi jej pnia w C. Powiadam, że odległość AC, która, jak wiemy, stanowi 15,75 met., jest równa CD. Przypomnijmy sobie teraz, w jaki sposób przygotowaliśmy nasz przyrządzik, nasz kąt papierowy. Kąt ten był połową kąta naszej ćwiartki papieru (fig. 19). Innemi słowy — był on połową kąta t. zw. w geometryi *prostym*.

Przyjrzyjmy się bliżej takiemu kątowi. Biorę ćwiartkę papieru, zginam ją w ten sposób, że brzeg AB przepołowia się, następnie rozginam ją: otrzymuję zgięcie PM, które tworzy z linią AB dwa kąty *a* i *b* (fig. 22). Te dwa kąty są widocznie równe, ponieważ przy zaginaniu ćwiartki boki ich dokładnie przystają do siebie. Takie kąty, jak *a* i *b*, nazywają się w geometryi *prostymi*, a bok PM (zgięcie) nazywa się *prostopadłym* do każdego z pozostałych boków AP i PB.

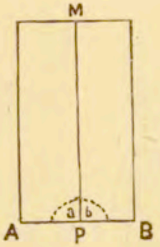


Fig. 22. — Kąty a i b są kątami prostymi.

Oczywiście topola jest prostopadłą do linii poziomej, za pomocą której celował Jakób do punktu C, albowiem jest ona zupełnie prostą i pionową, a przeto kąt C jest prostym, kąt zaś A jest połową kąta prostego.

Dalej weźmy znów ćwiartkę papieru, o równej długości i szerokości, która, jak widzicie, ma cztery kąty proste, i przegnijmy ją w ten sposób, ażeby bok AB przystawał do boku AD (fig. 23), następnie prze-

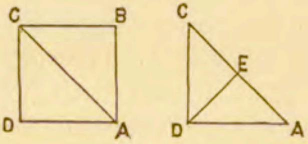


Fig. 23 i 24. — Bok CD równa się bokowi DA.

tnijmy ją wzdłuż zgięcia AC, otrzymamy w ten sposób 2 trójkąty ACD i ACB. Wiadomo, że w trójkącie ACD (fig. 24) kąt D jest prostym, a A jest połową kąta prostego. Przegnijmy teraz nasz trójkąt w ten sposób, ażeby bok DA przyjął kierunek boku DC. Patrzcie jaki ciekawy wynik! Punkt A pada na punkt C, a bok AC łamie się w punkcie E na dwie równe części, ściśle do siebie przystające. Czegóż to dowodzi? To dowodzi, że bok AD równa się DC lub, jeżeli chcecie wyrazić się ogólnie, doświadczenie powyższe wskazuje, że *w trójkącie, który ma jeden kąt prosty, a drugi równy połowie kąta prostego, oby-dwa boki, obejmujące kąt prosty, są sobie równe.*

Spojrzmy teraz na tablicę (fig. 21). Czy trójkąt ACD nie ma jednego kąta prostego C, a drugiego równego połowie kąta prostego A ? A więc mamy prawo twierdzić, że bok AC równa się CD, a co idzie za tem, że nasza topola ma 15,75 metrów wysokości wraz z 1,25 metra, wyrażającym wysokość Jakóba, licząc od jego oka do powierzchni ziemi.

Oto, czego chciałem dowieść i co, mam nadzieję, zostało przez wszystkich dobrze zrozumiane.

6-a lekcya.

Mierzenie wysokości drzewa (*inny sposób*).

— No cóż, Henryku, czy, ojciec twój, który rok rocznie skupuje topole, używa do mierzenia ich wysokości tego prostego sposobu, który wam poprzednio wyłożyłem?

— Tak, panie, ale on to czasami inaczej robi, i ten sposób jest jeszcze łatwiejszy.

— I jakżeż to, chłopcze?

— Kiedy słońce świeci, ojciec mierzy długość cienia, rzucanego przez topolę, następnie wtyka laskę w ziemię, mierzy długość jej cienia i utrzymuje, że zna już wysokość topoli (fig. 25).

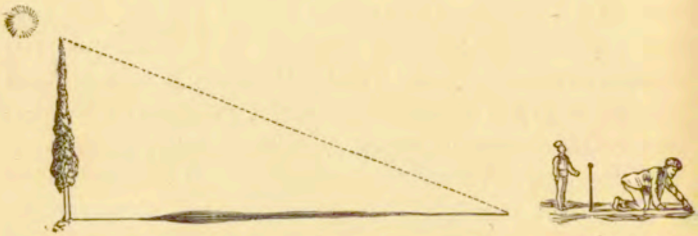


Fig. 25. — Mierzenie wysokości drzewa za pomocą mierzenia długości cienia.

— Bardzo dobrze, i ojciec twój ma racyę. Ale czy mógłbyś mi wytłómaczyć, dlaczego tak jest?

— Nie, panie.

— A jednak powinieneś był się domyśleć, jeżeliś dobrze uważał na poprzednie objaśnienia.

Nakreślmy na tablicy odcinek AB, wyobrażający topolę, i drugi *ab*, wyobrażający laskę, oraz ich cienie BC i *bc* (fig. 26); jeżeli połączymy w myśli wierzchołek topoli i laski z końcami ich cieni, to otrzymamy dwa trójkąty ABC i *abc*. Widocznem jest, że dwa te trójkąty są podobne we wszystkich swych częściach: mały trójkąt jest zmniejszoną kopią dużego. A więc, jeżeli n. p. bok *bc* jest dwanaście razy mniejszy niż bok BC, bok *ab* będzie również 12 razy mniejszy, niż bok AB; innemi słowy, jeżeli cień, rzucany przez laskę, jest 12 razy mniejszy od cienia, rzucanego przez drzewo, to i laska będzie tyleż razy mniejszą od drzewa.

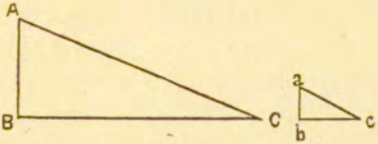


Fig. 26. – AB topola, BC jej cień; ab laska, bc jej cień.

Ojciec twój zna już naprzód długość swej laski; jeżeli więc zmierzył cienie, rzucane przez topolę i laskę, to mu bardzo łatwo przyszło poznać wysokość drzewa.

Wysokość drzewa będzie tyle razy większa od długości laski, ile razy długość cienia, rzucanego przez topolę, jest większa niż długość cienia, rzucanego przez laskę.

7-a lekcya.

Mierzenie odcinka, którego obydwa krańce są niedostępne.

Przystąpimy teraz do rozwiązania nieco trudniejszego zadania.

Zmierzyliśmy szerokość bagniska i wysokość topoli, inaczej zmierzyliśmy *odległość dwóch punktów, z których jeden był dostępny* (spód topoli) *a drugi niedostępny* (kołek po drugiej stronie bagniska, wierzchołek topoli).

Czy można zmierzyć odległość dwóch niedostępnych punktów?

Widzicie tam daleko na skraju wielkiego placu te dwa kopce, dość od siebie odległe. Czy moglibyście zmierzyć odległość tych dwu kopców, gdyby rzeka przerzynała ten plac, a więc kopce były niedostępne? Mojem zdaniem tak, i oto chcę wam pokazać, jak rozwiązać to prawdziwie ciekawe zadanie.

Wytknijmy pod oknami izby szkolnej odcinek linii prostej n. p. 25 metrów długi (fig. 27) i oznaczmy go CD. W punktach C i D wbijmy kołki.

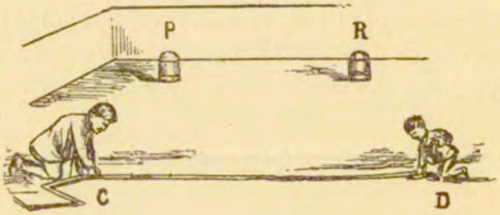


Fig. 27. — Mierzenie odległości PR kopców P i R (1-szy okres).

Spojrzcie! Na ćwiartce papieru kreślę odcinek równy 25 centymetrom (fig. 29) i oznaczam jego punkty końcowe przez *c* i *d*; odcinek ten przedstawia nam sto razy zmniejszony odcinek CD, wytknięty na ziemi.

Teraz staję w punkcie C (fig. 28) i z kawałka papieru wycinam taki kąt, ażeby jedno jego ramię było skierowane do punktu D, a drugie wskazywało lewy kopiec P.

Przenoszę mój kąt papierowy na papier (fig. 29), umieszczając jego *wierzchołek* w punkcie *c*, tak, żeby ramię, które poprzednio wskazywało punkt D, przyjęło kierunek *cd*; drugie ramię wyznaczy mi kierunek *cm*. Oczywiście, że kopiec P winien się znajdować na tej prostej. Ale gdzie?

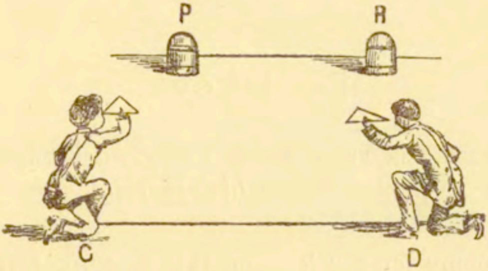


Fig. 28. — Mierzenie odległości PR kopców P i R (2-gi okres).

Stańmy teraz w punkcie D (fig. 28). Zróbmy znowu taki kąt z papieru, ażeby, celując jednem jego ramieniem do punktu C, drugie wskazywało kopiec P, i umieśćmy go na

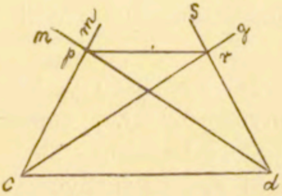


Fig. 29. — Kreślenie figury, która jest zmniejszoną kopią wielkiej, wytkniętej na powierzchni ziemi.

naszym papierze tak, jak poprzednio, tylko wierzchołkiem w punkcie *d*, otrzymamy wtedy prostą *dn*, na której znowu znajdować się powinien kopiec P. Ponieważ kopiec P musi znajdować się jednocześnie na dwu prostych *cm* i *dn*, a więc miejscem jego będzie punkt *p*, w którym te proste *się przecinają*. W ten więc sposób znaleźliśmy na naszym rysunku miejsce lewego kopca.

8-a lekcya.

Mierzenie odcinka, którego obydwa krańce są niedostępne (*dalszy ciąg*).

Zróbmy teraz z kopcem R to samo, cośmy wprzódy zrobili z kopcem P. Dwie miary kątów, dwa celowania, jedno z punktu C, drugie z D, sprowadza nas do oznaczenia na papierze miejsca punktu, który odpowiada kopcowi R.

Obecnie połączmy za pomocą odcinka linii prostej dwa punkty *p* i *r*. Oczywiście, że mała figura *cdpr* na papierze jest zmniejszoną kopią wielkiej, wytkniętej na ziemi.

Jest to obraz zmniejszony w stosunku 25 metrów do 25 centymetrów, t. j. zmniejszony 100 razy, albowiem *cd* jest odcinkiem sto razy mniejszym, niż CD; a więc i *pr* musi być sto razy mniejsze niż PR.

Przypuśćmy, że znalazłem, iż długość *pr* równa się 0,126 metra. Pomnożywszy liczbę tę przez 100, otrzymamy 12,6 metra, która przedstawia szukaną odległość dwóch niedostępnych kopców.

W ten sam sposób możemy znaleźć długość odcinków CP, CR, DP, DR, należy tylko w tym celu zmierzyć odcinki *cp*, *cr*, *dp*, *dr* i pomnożyć otrzymane wyniki przez 100. Nic nad to prostszego.

Znajdźmy teraz bezpośrednio odległość kopców P i R. Otrzymujemy liczbę 12,1 metra. Omyliliśmy się o 50 centymetrów.

Zkąd powstała ta omyłka? Czyśmy źle rozumowali? Nie. Nasze przyrządy były zbyt grube, za mało ścisłe; wycinając nasze kąty, robiliśmy je albo zbyt małymi, albo zbyt wielkimi.

Ażeby wykonać powyższe mierzenie dokładniej, należy mieć przyrządy ściśle wykonane. Nauczymy się używać ich przy mierzeniu gruntów.

Ale pojmujecie chyba, że to nie wpływa na sposób rozumowania: postępuje się zawsze jednakowo.

Jednakże nie żałuję, żem wam wyjaśnił, iż często można wykonać pomiar bez wielkich omyłek, posiłkując się tylko kawałkiem papieru.

W ten sposób skończyliśmy z mierzeniem długości odcinków, albowiem zmierzyliśmy: 1) odcinek, którego dwa krańce są dostępne; 2) odcinek, którego jeden kraniec jest niedostępny i 3) odcinek, którego obydwa krańce są niedostępne.

Obecnie przejdziemy do mierzenia powierzchni figur płaskich, ograniczonych odcinkami linij prostych.

CZĘŚĆ II.

Mierzenie figur płaskich, ograniczonych odcinkami linij prostych.

9-a lekcya.

Prostokąt. — Kwadrat.

Biorę ćwiartkę papieru (fig. 30-*a*).

Cztery jej kąty są, jak widzicie, kątami *prostymi*. Cztery boki tej ćwiartki nie są równe: dwa są większe,

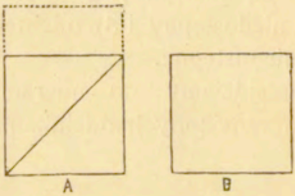


Fig. 30. — A—prostokąt; B—kwadrat.

dwa mniejsze; lecz dwa mniejsze, zarówno jak dwa większe, są sobie równe. Bardzo łatwo sprawdzić to, zginając ćwiartkę papieru, jak wskazano na figurze 30. Taka figura płaska zowie się **prostokątem**.

Przegiąwszy prostokąt, jak wyżej wskazano, odcinam część pozostałą, wolną, nie przykrytą, a której obwód na rysunku oznaczony został z trzech stron punktami.

Rozgiąwszy napowrót ćwiartkę, otrzymuję figurę (fig. 30-*a*), która ma cztery kąty proste i której cztery boki są równe; to stało się widocznem, gdy zrównałem dwa większe boki z mniejszymi.

Taka figura nazywa się **kwadratem**.

Kwadrat, którego bok równa się metrowi, nazywa się *metrem kwadratowym*.

Niech kwadrat, nakreślony na tablicy, będzie metrem kwadratowym. Dzielę każdy jego bok na dziesięć równych części—na decymetry. Jeżeli przeciwległe punkty podziału połączę za pomocą odcinków linij prostych, to otrzymam pewną ilość kwadratów, których boki są równe decymetrowi (fig. 31). Taki kwadrat nazywa

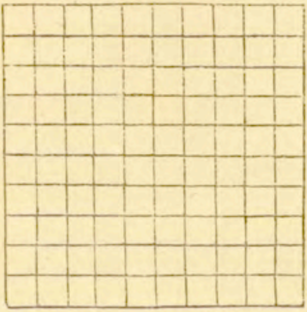


Fig. 31. — **Metr kwadratowy** (zmniejszony), podzielony na sto **decymetrów kwadratowych.**

się *decymetrem kwadratowym*. Ile ich tam jest? Przypatrzywszy się figurze, widzimy, że została ona podzielona na 10 pasów, po 10 decymetrów kwadratowych w każdym, a więc metr kwadratowy zawiera 10 decymetrów kwadratowych $\times 10$ czyli 100 decymetrów kwadratowych.

Tak samo decymetr kwadratowy, czyli kwadrat, którego bok równa się decymetrowi, albo 10 centymetrom, zawiera $10 \times 10 = 100$ centymetrów kwadratowych i t. d.

Zmierzyć powierzchnię znaczy znaleźć, ile ona zawiera metrów, decymetrów, centymetrów i milimetrów kwadratowych.

10-a lekcya.

Mierzenie powierzchni prostokąta.

Mam kompletną grę w domino. Dzielę każdy kamień na 2 równe części, z których każda jest kwadratem o boku równym przypuśćmy centymetrowi, inaczej jest to centymetr kwadratowy.

Fig. 32 — **Prostokąt**, którego powierzchnia równa się czterem centymetrom kwadratowym (zmniejszonym).

Kładę 4 takie kwadraty, jeden obok drugiego (fig. 32), otrzymuję w ten sposób prostokąt, złożony z czterech centymetrów kwadratowych, którego przeto powierzchnia równa się 4 centymetrom kwadratowym (co od tej chwili oznaczać będziemy przez 4 c. k.).

Pod moim pierwszym szeregiem mieszczę drugi, również z 4-ch pół-kamieni dominowych złożony. Jest to także prostokąt (fig. 33), którego powierzchnia oczywiście równa się 2 razy po 4 c. k., to jest 8 c. k. Podobnież na rysunku (fig. 34) widzimy trzeci prostokąt, utworzony z 3 szeregów, z których każdy składa się z 4 c. k.; przeto jego powierzchnia równa się $4 \times 3 = 12$ c. k.

Fig. 33. — **Prostokąt**, którego powierzchnia równa się ośmiu centymetrom kwadratowym (zmniejszonym).

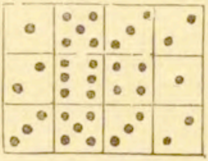


Fig. 34. — **Prostokąt**, którego powierzchnia równa się dwunastu centymetrom kwadratowym (zmniejszonym).

Widzicie więc, że wogóle, chcąc zmierzyć powierzchnię prostokąta, obliczyłem, ile centymetrów zawiera każdy z dwu nierównych jego boków i pomnożyłem jedną z tych dwu liczb przez drugą.

W celu zastosowania znajdźmy powierzchnię tej oto prostokątnej ćwiartki papieru. Większy jej bok równa się 16 cm., mniejszy — 12 cm., więc powierzchnia tej ćwiartki papieru będzie $16 \times 12 = 192$ c. k.

A teraz uczynimy te kwestye bardziej złożonemi, albowiem rzadko się zdarza, że obydwa boki naszej ćwiartki zawierają całkowitą ilość centymetrów.

Biorę prostokąt, złożony z 12 c. k., t. j. z 12 pół-kamieni dominowych; przykładam do mniejszego boku prostokąta 3 kawałki, z których każdy otrzymany został przez przecięcie na 2 równe części pół-kamienia dominowego: każdy z tych kawałków jest oczywiście połową kwadratowego centymetra. Cała więc powierzchnia nowego prostokąta (fig. 35) równać się będzie

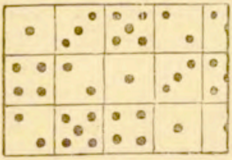


Fig. 35. – **Prostokąt**, którego powierzchnia równa się trzynastu i pół centymetrom kwadratowym (zmniejszonym).

$$12 \text{ c. k.} + 1\frac{1}{2} \text{ c. k.} = 13\frac{1}{2} \text{ c. k.}$$

Jak wiecie, centymetr kwadratowy zawiera 100 milimetrów kwadratowych, a więc $\frac{1}{2}$ c. k. równa się 50 mm. k., przeto powierzchnia naszego prostokąta równać się będzie:

$$1300 \text{ mm. k.} + 50 \text{ mm. k.} = 1350 \text{ mm. k.}$$

Z drugiej strony widzicie, że długość prostokąta jest $4\frac{1}{2}$ cm. to jest 40 mm. + 5 mm. = 45 mm., szerokość zaś, która pozostała bez zmiany, —3 cm., co stanowi 30 mm. Jeżeli teraz pomnożę dwie te liczby, otrzymam $45 \times 30 = 1350$ t. j. ściśle tę samą liczbę kwadratowych milimetrów, którą dopiero co znalazłem.

A zatem, *chcąc zmierzyć powierzchnię prostokąta, należy pomnożyć przez siebie liczby, przedstawiające długość większego i mniejszego jego boku*.

Przytem trzeba dobrze uważać, ażeby obydwa boki były wyrażone w jednościach jednogatunkowych i nie mnożyć przypadkiem n. p. liczby centymetrów przez liczbę milimetrów.

Zastosowania.

1. Oto inna ćwiartka papieru. Jej długość równa

się 18,4 cm., to jest 184 mm., jej szerokość 13 cm., to jest 130 mm.; powierzchnia więc tej ćwiartki stanowi:

$$184 \times 130 = 23920 \text{ mm. k.}$$

Wiemy zaś, że 100 mm. k. stanowią 1 c. k., a 100 c. k. — 1 d. k., możemy przeto powiedzieć, że powierzchnia naszej ćwiartki papieru równa się:

2 d. k. 39 c. k. 20 mm. k.

2. Zmierzyć powierzchnię tablicy. Jej długość równa się 1,35 m., to jest 135 cm., jej wysokość — 0 95 m., to jest 95 cm.; przeto jej powierzchnia stanowi:

$$135 \times 95 = 12825 \text{ c. k., czyli}$$

1 m. k. 28 d. k. 25 c. k.

Mierzenie powierzchni kwadratu.

Biorę mój prostokąt, złożony z 3 szeregów po 4 półkamieni dominowych, i przykładam czwarty szereg do nich podobny (fig. 36). Oczywiście utworzyłem w ten sposób kwadrat, albowiem cztery jego boki są równe.

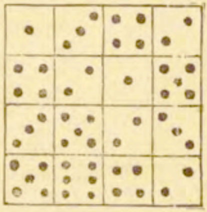


Fig. 36. — **Kwadrat,** którego powierzchnia równa się szesnastu centymetrom kwadratowym (zmniejszonym).

Powierzchnię tego kwadratowego prostokąta mierzymy tak samo, jak zwykłego prostokąta, mnożąc długość jego przez szerokość. Ale tu długość i szerokość są jednakowe, powierzchnia przeto będzie 4×4 (albo jak się zwykle pisze 4^2), t. j. 16 centymetrów kwadratowych.

A więc, *powierzchnię kwadratu otrzymujemy, mnożąc przez siebie liczbę, wyrażającą długość jednego jego boku.*

Już spotkaliśmy się z zastosowaniem tego prawidła, dzieląc metr kwadratowy na sto decymetrów kwadratowych, decymetr kwadratowy na sto centymetrów kwadratowych i t. d.

Przy tej sposobności zauważę, że nie należy mieszać decymetra kwadratowego z dziesiątą częścią metra kwadratowego, jak to czynią ludzie, mało zastanawiający się nad tem, co robią. Dziesiąta część metra kwadratowego równa się dziesięciu kwadratowym decymetrom. Innemi słowy, n. p.

1,1 m. k. = 1 m. k. + 10 d. k.

11-a lekcya.

Równoległobok.

Przystępujemy obecnie do mierzenia powierzchni innej figury o czterech bokach; mierzenie to będzie bardzo interesujące, albowiem, znając je, będziemy w stanie mierzyć powierzchnie wszelkich figur płaskich, ograniczonych odcinkami linij prostych.

Figura (fig. 37), którą widzicie tu narysowaną na dużym arkuszu papieru, nazywa się **równoległobokiem** t. j. „*figurą, której przeciwległe boki są równoległe*".

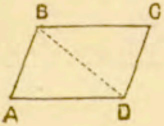


Fig. 37. — Równoległobok.

Mówimy, że dwie proste są *równoległe*, gdy leżą na jednej płaszczyźnie i są ciągle od siebie w równej odległości, co dowodzi, że takie proste nigdy się nie spotykają, jakkolwiek daleko byśmy je przedłużali w jedną lub drugą stronę.

A więc AB i CD, również AC i BD są równoległe.

Przetnijmy nasz równoległobok wzdłuż odcinka BD, zwanego *przekątną*, w ten sposób zostanie on podzielony na dwa trójkąty ABD i BCD. Jeżeli połóżymy trójkąt ABD na BCD tak, żeby bok AD przystał ściśle do CB (punkt A do punktu C, punkt D do punktu B), to przekonamy się, że i bok AB ściśle przystanie do CD; a ztąd widzimy, *że w równoległoboku przeciwległe boki są nie tylko równoległe, lecz także równe* (patrz lekcyę 13-tą).

12-a lekcya.

Mierzenie powierzchni równoległoboku.

Obecnie, skoro poznaliśmy dobrze kształt równoległoboku, przystąpmy do mierzenia jego powierzchni.

Nakreślmy na papierze równoległobok ABCD (fig. 38).

Zróbmy dwa zgięcia prostopadłe do boku CD, jedno przez punkt C, drugie przez punkt D, inaczej, poprowadźmy dwie proste prostopadłe w punktach C i D do boku CD.

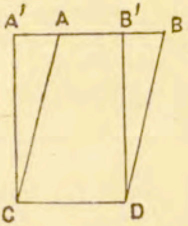


Fig. 38. — Mierzenie powierzchni równoległoboku.

Dwa te zgięcia spotkają bok AB i jego przedłużenie w dwóch punktach A' i B' i utworzą prostokąt A'B'CD. Powierzchnia tego prostokąta, jak wiemy, ma za miarę iloczyn boku CD przez A'C.

Powiadam, że równoległobok ABCD ma tę samą powierzchnię, co prostokąt A'B'CD. Znając tę ostatnią, poznamy również powierzchnię równoległoboku.

Dowieść powyższego będzie nam bardzo łatwo: obie nasze figury mają część wspólną AB'CD. Część ta wraz z trójkątem A'AC stanowi prostokąt, a wraz z trójkątem B'BD — równoległobok. Jeżeli tedy powierzchnie tych dwu trójkątów są równe, to i powierzchnie prostokąta i równoległoboku będą także równe.

Odetnijmy nożyczkami trójkąt B'BD, przyłóżmy linijkę do boku A'B' i przesuwajmy wzdłuż niej nasz odcięty trójkąt bokiem B'B tak długo, dopóki punkt D nie padnie na punkt C. W tym samym czasie punkt B padnie na A i B' na A', albowiem boki BD i AC, tudzież B'D i A'C są podczas przesuwania trójkąta ciągle równoległe.

W ten przeto sposób trójkąty przystały do siebie, a więc ich powierzchnie są równe i dlatego powierzchnie naszego prostokąta i równoległoboku są także równe.

Powierzchnię tedy równoległoboku otrzymamy, mnożąc długość odcinka CD przez długość odcinka A'C.

Odcinek A'C, prostopadły do jednego z ramion CD równoległoboku, nazywa się jego *wysokością*, zaś bok CD zowie się *podstawą* równoległoboku.

Powiadamy, że powierzchnia równoległoboku jest iloczynem długości boku, przyjętego za podstawę, przez długość prostopadłej, spuszczonej na nią z jakiegokolwiek punktu przeciwległego boku, zwanej wysokością równoległoboku.

Albo krócej: *powierzchnia równoległoboku jest iloczynem podstawy jego AD przez wysokość BE* (fig. 39), co napiszemy w ten sposób:

S (powierzchnia) = B (podstawa) $\times$ H (wysokość).

Ta sama reguła stosuje się i do prostokąta (fig. 40). Tu jeden bok jest podstawą, a prostopadły do niego — wysokością.

Toż samo powiemy i o kwadracie (fig. 41); w nim podstawa równa się wysokości.

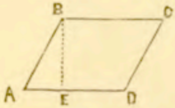


Fig. 39. — Równoległobok.

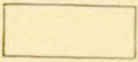


Fig. 40. — Prostokąt.

Fig. 41. — Kwadrat.

A więc umiemy już obecnie mierzyć powierzchnię równoległoboku. Ale zanim przejdziemy do dalszych badań, musimy zrobić pewne spostrzeżenie, bez którego moglibyśmy dojść do fałszywych wniosków.

Wziąłem za podstawę mojego równoległoboku bok CD, bo było mi tak wygodniej przy kreśleniu. Lecz mógłbym również dobrze wziąć za podstawę bok AC (fig. 42). W tym wypadku wysokością byłby odcinek DC', i mógłbym w ten sam jak poprzednio sposób dowieść, że prostokąt C'A'BD ma taką samą po-

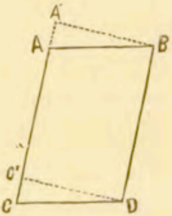


Fig 42. — Równoległobok o podstawie AC i wysokości DC'.

wierzchnię, jak równoległobok CABD. Powierzchnia tej ostatniej figury będzie iloczynem podstawy AC przez wysokość DC'.

13-a lekcya.

Mierzenie powierzchni trójkąta.

Weźmy znów nasz równoległobok ABCD (fig. 43) i połączmy za pomocą odcinka dwa punkty A i D, to jest poprowadźmy przekątną równoległoboku. W ten sposób utworzyliśmy dwa trójkąty ADC i ADB, których suma powierzchni stanowi powierzchnię równoległoboku.

Dwa te trójkąty mają po 3 odpowiednio równe boki. W samej rzeczy AB równa się CD, AC równa się BD (patrz lekcyę 11-tą), AD jest bok dla tych trójkątów wspólny.

Twierdzę więc, że dwa te trójkąty są sobie równe i mają równe powierzchnie. Ażeby tego dowieść, przetnijmy nasz równoległobok wzdłuż przekątnej AD. Otrzymane trójkąty oznaczam przez ACD i A'BD' (fig. 44). Połóżmy jeden trójkąt na drugi tak, żeby bok A'B przyjął kierunek boku DC (fig. 45); jeżeli punkt B padnie na punkt C, to wówczas punkt A' musi paść na D, albowiem A'B = CD.

Koniecznem wtedy będzie, żeby punkt D' padł na A; gdyby on bowiem wypadł na prawo lub na lewo od punktu A, to wówczas trzeci bok A'D' musiałby być bądź krótszym, bądź dłuższym od AD, co naturalnie być nie może, ponieważ AD i A'D' stanowią na pierwszym naszym rysunku jeden odcinek (przekątną) (fig. 43).

A więc trójkąty ACD i ABD mają jednakowe powierzchnie, i, co za tem idzie, powierzchnia każdego z nich równa się połowie powierzchni równoległoboku ABCD.

Tak więc każdy trójkąt ACD można przekształcić na równoległobok; w tym celu dostatecznem jest przez dwa krańce jednego boku, n. p. przez A i D, przeprowadzić dwie równoległe po jednej do każdego z dwóch pozostałych boków.

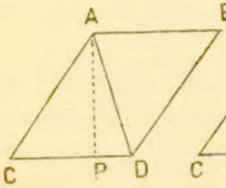


Fig. 43. — Równoległobok, podzielony za pomocą przekątnej na dwa trójkąty.

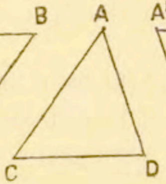


Fig. 44. — Dwa równe trójkąty, z których każdy stanowi połowę obok umieszczonego równoległoboku.

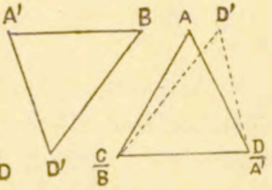


Fig. 45. — Dowodzenie równości obok umieszczonych trójkątów przez nakładanie jednego na drugi.

Powierzchnia tego równoległoboku, jak wiemy, równa się, albo ma za miarę iloczyn jednego z boków n. p. CD przez odpowiednią wysokość AP (fig. 43), powierzchnia przeto trójkąta ma za miarę połowę tego iloczynu.

Ztąd otrzymujemy regułę: *powierzchnia trójkąta jest połową iloczynu jego podstawy przez wysokość*, co napiszemy:

$$\text{S (powierzchnia)} = \frac{\text{B (podstawa)} \times \text{H (wysokość)}}{2}$$

14-a lekcya.

Mierzenie powierzchni jakiejkolwiek figury płaskiej.

Umiejąc znajdować powierzchnię trójkąta, możemy mierzyć powierzchnię każdej figury, choćby najbardziej nieforemnej, ograniczonej odcinkami linij prostych.

Kreślę na tablicy jakąkolwiek figurę płaską ograniczoną odcinkami linij prostych (fig. 46). Biorę wewnątrz tej figury jakikolwiek punkt O i łączę go ze wszystkimi wierzchołkami A, B, C i t. d. Otrzymałem szereg trójkątów ABO, BCO, CDO i t. d. Dostatecznie będzie zmierzyć powierzchnię każdego z nich, dodać je, a w rezultacie otrzymamy całkowitą powierzchnię figury. Jest to rzecz cierpliwości i nic więcej.

W końcu chcę wam jeszcze parę słów powiedzieć o mierzeniu powierzchni bardzo często spotykanej w praktyce figury, która zowie się **trapezem**.

Trapez jest figura płaska o czterech bokach, z których dwa są równoległe, tak zwane *podstawy* trapezu, a dwa drugie nierównoległe. Oto macie trapez ABCD (fig. 47).

Oczywiście, że taka figura może być podzielona za pomocą *przekątnej* BC na dwa trójkąty, powierzchnia zaś trapezu stanowi sumę powierzchni tych dwu trójkątów.

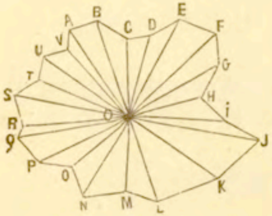


Fig. 46. — Powierzchnia figury płaskiej nieforemnej.

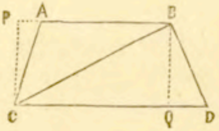


Fig. 47. — Trapez.

Powierzchnia trójkąta ACB ma za miarę iloczyn podstawy AB przez połowę wysokości CP, co napiszemy: $AB \times \frac{CP}{2}$; powierzchnia zaś trójkąta CBD równa się $CD \times \frac{BQ}{2}$. Ale $CP = BQ$, albowiem dwie proste AB i CD są równoległe, a więc są od siebie równo odległe; powierzchnię przeto trójkąta CBD można wyrazić przez $CD \times \frac{CP}{2}$.

I tak, powierzchnia trapezu, jako równa sumie powierzchni dwóch wzmiankowanych trójkątów, będzie:

$$AB \times \frac{CP}{2} + CD \times \frac{CP}{2} \text{ albo } (AB + CD) \times \frac{CP}{2}.$$

Innemi słowy: *powierzchnia trapezu równa się sumie jego podstaw, pomnożonej przez połowę wysokości*.

Wyrazić to możemy przy pomocy wzoru:

$$S = (B + b) \times \frac{H}{2},$$

w którym S oznacza powierzchnię, B większą podstawę, b—mniejszą podstawę, a H—wysokość trapezu.

CZĘŚĆ III.

Mierzenie objętości bryl, ograniczonych częściami powierzchni płaskich (ścianami) i odcinkami linij prostych (krawędziami).

15-a lekcya.

Sześcian.

Spojrzcie na tę kostkę do gry (fig. 48); ma ona sześć *ścian*, możecie się przekonać, że każda z tych ścian jest kwadratem, t. j. czworobokiem o równych bokach i prostych kątach. Taką bryłę nazywamy **sześcianem**.

Zbadajmy ten sześcian (fig. 49). Ściany *a* i *b* są

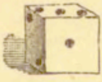


Fig. 48. — Kość do gry — sześcian.

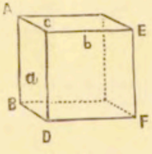


Fig. 49. — Sześcian.

kwadratami, bok AB kwadratu *a* równa się bokowi CD, zaś bok CD równa się bokowi EF kwadratu *b*. Tak samo AC = CD = CE i t. d. Innemi słowy, dwa kwadraty *a* i *b* są równe, albowiem ich boki są równe. Przekonamy się łatwo, że każdy z pozostałych kwadratów jest równy *a*.

A więc **sześcian** *jest to bryła o sześciu równych kwadratowych* **ścianach** *i o dwunastu równych* **krawędziach**.

Za jedność objętości w układzie metrycznym przyjmuje się *metr sześcienny,* to jest sześcian, którego każda *krawędź* równa się metrowi liniowemu.

16-a lekcya.

Mierzenie objętości prostego równoległościanu.

Kładę jedną kostkę do gry na drugiej (fig. 50). W ten sposób otrzymuję bryłę, której dwie ściany po-

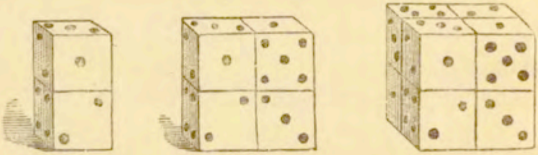


Fig 50, 51 i 52. — Mierzenie objętości równoległościanu prostego.

ziome są kwadratami, a cztery pionowe — prostokątami.

Taką bryłę nazywamy **równoległościanem prostym**.

Równoległościan — albowiem pionowe i poziome krawędzie tej bryły są równoległe.

Prosty — albowiem pionowe krawędzie, spotykając się z poziomemi, tworzą kąty proste.

Jak więc zmierzyć objętość równoległościanu prostego, inaczej jak dowiedzieć się, ile on zawiera metrów, decymetrów, centymetrów i milimetrów sześciennych?

Umiemy już mierzyć długość krawędzi, powierzchnię ścian; jakże za pomocą tych danych określić objętość bryły?

Przypuśćmy, co jest bardzo prawdopodobne, że kostki nasze mają boki równe centymetrowi: są to więc centymetry sześcienne. Ponieważ ten prosty równoległościan, który dopiero co zbudowałem, składa się z dwóch kostek, jedna na drugiej, więc jego objętość równa się 2 centymetrom sześciennym. Jeżeli dalej złożę równoległościan z 4-ch kostek (fig. 51), objętość jego równać się będzie 4 c. s.; jeżeli złożę równoległościan z 8 kostek (fig. 52), jego objętość będzie 8 c. s. i t. d.

Przypatrzmy się temu bliżej.

Pierwsza bryła miała 2 c. wysokości, 1 c. szerokości i 1 c. długości; iloczyn $2 \times 1 \times 1 = 2$ przedstawia nam ściśle ilość centymetrów sześciennych, zawartych w moim równoległościanie.

Druga bryła miała 2 c. wysokości, 2 c. szerokości i 1 c. długości; iloczyn $2 \times 2 \times 1 = 4$ przedstawia ilość zawartych w niej centymetrów sześciennych.

Trzecia bryła miała 2 c. wysokości, 2 c. szerokości i 2 c. długości; iloczyn $2 \times 2 \times 2 = 8$ jest znów miarą objętości tej bryły, wyrażoną w centymetrach sześciennych.

A więc, *chcąc otrzymać objętość równoległościanu prostego, należy pomnożyć przez siebie trzy liczby, wyrażające trzy jego wymiary: wysokość, szerokość i długość.*

I tak: Objętość=Długość×Szerokość×Wysokość, a że Długość × Szerokość jest, jak wam dowiodłem, miarą powierzchni podstawy równoległościanu przeto objętość równoległościanu prostego zmierzymy, mnożąc powierzchnię jego podstawy przez wysokość.

Miarę tę można przedstawić za pomocą następującego wzoru:

V (objętość)=B (powierzchnia podstawy)×H (wysokość).

Zastosowanie.—Jako zastosowanie powyższej reguły, zmierzmy objętość izby szkolnej albo inaczej dowiedzmy się, ile w niej mieści się powietrza. Długość izby jest 8,75 m., szerokość—6,85 m., wysokość—4,1 m.

Powierzchnia podstawy równa się:

875×685=599 375 c. k.,

a objętość równa się:

599 375×410=245 743 750 c. s.

Zmierzmy teraz objętość sążnia drzewa, który mi złożono na podwórzu.

Długość równa się 3,35 m., wysokość 1,25 m., a szerokość lub grubość 0,75 m., objętość przeto jest:

335×125×75=3 140 625 c. s.

17-a lekcya.

Mierzenie objętości sześcianu.

Jak wiemy, *sześcian* jest równoległościan, którego trzy wymiary są sobie równe. Taki równoległościan widzieliście już, był on złożony z 8-iu kostek do gry (fig. 52). Objętość tedy sześcianu znajdziemy, zmierzywszy długość jednej krawędzi i wziąwszy otrzymany wynik trzy razy jako czynnik.

— Przykład: Oto mam tekturowe pudełko, które ma kształt sześcianu. Krawędź tego pudełka równa się 18 c., a co idzie za tem, objętość będzie:

$$18 \times 18 \times 18 = 5832 \text{ c. s.}$$

Zauważcie teraz, że metr sześcienny ma krawędź równą metrowi, t. j. 10 decymetrom, sam przeto metr sześcienny zawiera:

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ d. s.}$$

Tak samo decymetr sześcienny, którego bok równa się 10 centymetrom, zawiera:

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ c. s. i t. d.}$$

Tak przeto metr sześcienny, mający 1000 d. s., z których każdy zawiera 1000 c. s., równa się

$1000 \times 1000 =$ milionowi centymetrów sześciennych.

W ten sposób liczba 3 140 625 c. s., którą znaleźliśmy, mierząc objętość sążnia drzewa, może być napisana w kształcie prostszym:

3 m. s. 140 d. s. 625 c. s.

Tak samo objętość izby szkolnej 245 743 750 c. s. można napisać w kształcie:

245 m. s. 743 d. s. 750 c. s.

18-a lekcya.

Mierzenie objętości prostego trójkątnego graniastosłupa.

Przetnijmy równoległościan (fig. 53) płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź CG i punkt B. W rezultacie otrzymamy dwie bryły (fig. 54 i 55), ograniczone z dołu i z góry trójkątami. Każda z tych brył zowie się **graniastosłupem trójkątnym**.

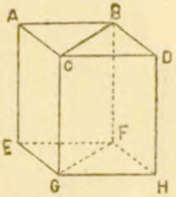


Fig. 53. — **Równoległościan** prosty, podzielony na dwa graniastosłupy trójkątne proste.

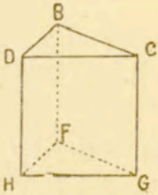


Fig. 54. — **Graniastosłup** trójkątny prosty.

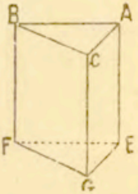


Fig. 55. — **Graniastosłup** trójkątny prosty.

(Każdy z tych dwu graniastosłupów jest połową obok stojącego równoległościanu.)

Obydwa, otrzymane sposobem powyższym, graniastosłupy są sobie równe, albowiem wszystkie ich części składowe są odpowiednio równe, AB=CD, EG=HF, BF=CG, BC i GF są *krawędzie* wspólne. Każdy przeto z tych graniastosłupów, jako połowa naszego równoległościanu, ma objętość równą połowie jego objętości, to jest połowie iloczynu powierzchni podstawy równoległościanu przez wysokość. Lecz wysokość graniastosłupa jest ta sama co równoległościanu, a podstawa jest połową jego podstawy, albowiem przekątna dzieli prostokąt na dwa równe trójkąty, możemy przeto powiedzieć, że *objętość trójkątnego graniastosłupa ma za miarę iloczyn powierzchni jego podstawy przez wysokość.*

19-a lekcya.

Mierzenie objętości jakiegokolwiek prostego graniastosłupa.

Rozważaliśmy dotąd graniastosłupy z podstawami kwadratowemi lub prostokątnemi. Ale możemy wziąć za podstawy bardziej złożone figury (fig 56). Takie bryły będą miały za miarę objętości iloczyny powierzchni swych podstaw przez odpowiednie wysokości.

W samej rzeczy: jeżeli poprowadzę odcinki BE i B'E', otrzymam trójkątny graniastosłup A B E A' B' E', który ma za miarę objętości iloczyn powierzchni podstawy ABE przez wysokość AA'.

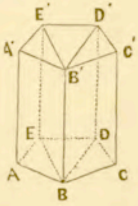


Fig. — 56. Graniastosłup pięciokątny prosty.

Przeprowadzając odcinki BD i B'D', otrzymamy drugi trójkątny graniastosłup BEDB'E'D', którego objętość równa się BDE×BB' i t. d.

Objętość przeto całego graniastosłupa otrzymamy, *mnożąc* sumę powierzchni trójkątów, t. j. *powierzchnię podstawy graniastosłupa przez wysokość*, która jest jednakową dla wszystkich składowych trójkątnych graniastosłupów.

Wszystko to, co wam powiedziałem o objętości równoległościanów i graniastosłupów *prostych*, t. j. takich, których krawędzie są prostopadłe do podstaw, jak nić, na której końcu wisi ciężarek (pion), do powierzchni stawu, sprawdza się i dla tychże brył *pochyłych*. Miarą objętości takich brył jest również iloczyn powierzchni podstawy przez wysokość, t. j. przez najkrótszą odległość, AJ ich obu podstaw (fig. 57). Dowodzenie tej prawdy byłoby dość zawiłe i dlatego je opuszczam.

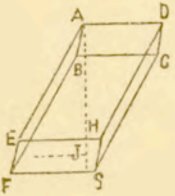


Fig. 57. — **Równoległościan pochyły.**

20-a lekcya.

Mierzenie objętości ostrosłupa.

Ostrosłupem nazywamy bryłę, mającą za *podstawę* jakikolwiek wielokąt i której wszystkie krawędzie schodzą się w jednym punkcie, zwanym *wierzchoł-*

kiem. Oto macie ostrosłup DEFGH (fig. 58). *Podstawą* jego jest czworokąt EFGH, a *wysokością* — prostopadła DP, spuszczona z wierzchołka D na podstawę.

Łatwo dowieść, że ostrosłup jest trzecią częścią równoległościanu ABCDEFGH (fig. 59), mającego z nim wspólną podstawę i wysokość.

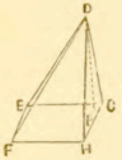


Fig. 58. — Ostrosłup

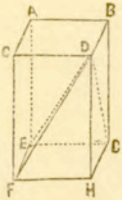


Fig. 59. — Ostrosłup jest trzecią częścią równoległościanu (wogóle graniastosłupa).

Powyższe twierdzenie stosuje się do wszelkich ostrosłupów, *prostych i pochyłych.*

A więc. *objętość graniastosłupa otrzymujemy, mnożąc powierzchnię jego podstawy przez wysokość; objętość zaś ostrosłupa równa się trzeciej części iloczynu powierzchni jego podstawy przez wysokość.*

Wszystkie bryły, ograniczone odcinkami linij prostych i częściami powierzchni płaskich, mogą być zawsze rozłożone na równoległościany, graniastosłupy i ostrosłupy.

Umiejąc przeto mierzyć objętość tych trzech brył, możemy zmierzyć objętość jakiejkolwiek bryły, o ile, rozumie się, ona jest ograniczona odcinkami linij prostych i częściami płaszczyzn. Bywa to niekiedy mozolne i długotrwałe, ale zawsze cel może być osiągnięty.

CZĘŚĆ IV.

Mierzenie długości odcinków (części) linij krzywych.

21-a lekcya.

Zasada mierzenia długości odcinka linii krzywej.

Kreślę na tablicy linię krzywą, zupełnie falistą; widocznem jest, że nie mogę zmierzyć długości jej odcinka za pomocą przyłożenia metra.

Jak tedy postąpić?

Pierwszy nader prosty i zarazem nader dokładny sposób mierzenia odcinka linii krzywej jest następujący. Do początkowego punktu A odcinka krzywej (fig. 60) przykładamy szpagat i przeciągamy go wzdłuż

Fig. 60. — Mierzenie odcinka linii krzywej.

wszystkich fal odcinka aż do końcowego jego punktu D. Wyprostowując następnie szpagat, otrzymujemy odcinek linii prostej, który wskazuje nam długość AD.

Lecz sposobu powyższego nie zawsze użyć można. W praktyce uważamy linię krzywą jako złożoną z maleńkich odcinków prostych AB, BC, CD i t. d., bardzo krótkich, które dotykają krzywej bądź swemi krańcami (wtedy odcinek taki nazywa się **cięciwą** fig. 62), bądź w jednym punkcie (wtedy odcinek taki nazywa się **styczną** fig. 61).

Fig. 61. — Styczna.

Fig. 62. — Cięciwa.

Następnie mierzymy każdy z tych odcinków, a suma ich da nam w przybliżeniu długość krzywego odcinka.

Widocznem jest, że im krótsze i liczniejsze są cięciwy, tem bardziej zbliżają się one do krzywej i tem bardziej suma ich zbliża się do szukanej długości.

22-a lekcya.

Mierzenie długości obwodu koła.

Krzywa, którą dopiero co widzieliście, jest nieforemną. Istnieją przecież krzywe zupełnie foremne, których długość można znaleźć, nie używając sposobu, jaki wam przed chwilą wskazałem. Nie mierzy ich się przez użycie przyrządów, lecz przy pomocy obliczenia.

Najprostszą z tych krzywych jest **obwód (okrąg)** koła.

Biorę kawałek szpagatu, jeden jego koniec umieszczam w punkcie O (fig. 63), a kawałkiem kredy, umocowanym w drugim końcu, kreślę na tablicy linię krzywą, dobrze wyprężywszy sznurek.

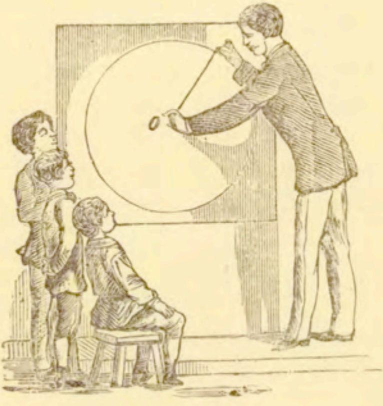


Fig. 63. — Kreślenie okręgu koła.

W ten sposób nakreśliłem *okrąg koła*. Powierzchnię, zawartą wewnątrz krzywej, nazywamy **kołem**, samą zaś krzywą — **okręgiem koła**, stały punkt O — **środkiem**, długość szpagatu — **promieniem**, a podwójną jego długość — **średnicą**.

Widzicie więc, że *okręgiem koła nazywamy linię krzywą, której wszystkie punkty są równoodległe od środka*.

Jeżeli wiadomą nam jest długość promienia, to możemy znaleźć długość okręgu koła.

Biorę mój kawał szpagatu, mój promień, i usiłuję zmierzyć za pomocą niego długość okręgu, nakładając go na niego. Przekonywacie się, że promień mieści się na okręgu 6 razy i jeszcze zostaje się reszta. To samo dzieje się z każdym okręgiem, niezależnie od długości promienia. Długość każdego okręgu jest nieco większa niż sześciokrotny promień, albo, innemi słowy, niż trzykrotna średnica.

Geometrowie dowiedli za pomocą długiego i złożonego rozumowania, którego w tym pierwszym roku nauki nie bylibyście w stanie pojąć, że długość okręgu koła równa się iloczynowi długości jego średnicy przez 22, podzielonemu przez 7 albo iloczynowi średnicy przez 3,14

Tę liczbę 3,14 przyjęto oznaczać za pomocą greckiej litery π (pi). Możemy zatem napisać:

Okrąg koła=średnicy $\times$ π czyli podwójnemu promieniowi $\times$ π albo w skróceniu:

$$C \text{ (okrąg koła)} = 2R \text{ (średnica)} \times \pi,$$

co zazwyczaj piszemy:

$$C=2\pi R.$$

Gdy chodzi o prędkie obliczenie, można powiedzieć, że długość okręgu jest trzykrotną długością średnicy i odwrotnie długość średnicy jest trzecią częścią długości okręgu. Jednakże takie wysłowienie będzie bardzo niedokładne.

Zmierzmy na przykład długość okręgu, który nakreśliłem na tablicy.

Szpagat, który przedstawiał promień, miał 37 c. długości, a zatem okrąg koła powinien się równać:

$$37 \text{ c.} \times 2 \times 3,14 = 232,36 \text{ c.}$$

Wyjdźmy na podwórze. Ocembrowanie naszego wodotrysku (fig. 64) jest okręgiem koła, otaczam je szpagatem, za pomocą którego mierzę jego obwód i w rezultacie otrzymuję 3,768 metra. Z tego wnioskuję, że średnica ocembrowania jest

Fig. 64. — Mierzenie obwodu ocembrowania wodotrysku.

$$\frac{3,768 \text{ m.}}{3,14} = 1,2 \text{ metra.}$$

23-a lekcya.

Mierzenie kątów.

Obecnie powiem wam o mierzeniu innego rodzaju wielkości, która nie jest ani odcinkiem, ani powierzchnią, ani objętością.

Będziemy mówili o mierzeniu **kąta**.

Oczywiście, że są kąty większe i mniejsze, t. j. takie, których oddalenie boków (otwory) jest większe lub mniejsze.

Kąt H (fig. 67) jest większy niż kąt E (fig. 66) i mniejszy niż kąt A (fig. 65).

Fig. 65. — Kąt rozwarty.

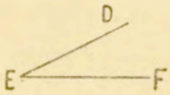


Fig. 66. — Kąt ostry.

Fig. 67. — Kąt prosty.

Spojrzcie na topole, wzdłuż rzeki stojące (fig. 68). Niektóre z nich, a nawet większa ich część, są zupełnie proste, ściśle pionowe. Inne zostały przez wiatr mniej lub więcej pochylone i wskutek tego tworzą z powierzchnią ziemi różne kąty.

Spojrzcie na drogę, która przerzyna pagórek (fig. 69); ona widocznie nie jest poziomą, tem bardziej nie

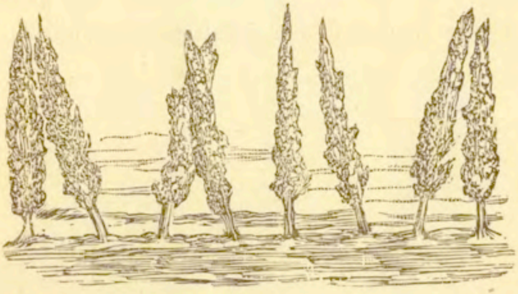


Fig. 68. — Topole, tworzące z powierzchnią ziemi różne kąty.

jest pionową, natomiast tworzy z poziomem pewien kąt.

Fig. 69. — Droga, tworząca z poziomem pewien kąt.

Spojrzcie teraz na dachy szkoły i kościoła (fig. 70) Ten ostatni jest bardziej nachylony, niż pierwszy; pochyłość jego jest znaczniejsza; kąt, który on tworzy z poziomem, jest większy, niż kąt dachu szkolnego z poziomem.

Dobrze rozumiecie, że niezbędnem jest mieć jednostkę miary, którąby dała nam możność ścisłego mierzenia kątów.

Znacie już pewien kąt, mianowicie **kąt prosty** (fig. 71). Przypominacie sobie, że jest to jeden z kątów (fig. 72),

Fig. 70. — Dach kościoła i szkoły. Pierwszy tworzy z poziomem większy kąt niż drugi.

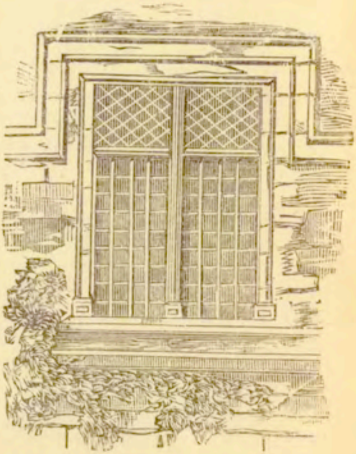


Fig. 71. — Kąt prosty, utworzony przez poziomą i pionową część ramy okiennej.

utworzonych przez dwie spotykające się proste z warunkiem, że kąty po obu stronach prostej AB są równe.

Kąt E (fig. 66), mniejszy od kąta prostego H (fig. 67), nazywa się **kątem ostrym**; kąt A (fig. 65), większy od kąta prostego H (fig. 67), nazywa się **kątem rozwar-**

tym. Oto są nazwy, które do pewnego stopnia cechują wielkość kąta. Ale to nie wystarcza, trzeba nam większej ścisłości.

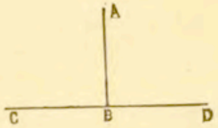


Fig. 72. — Dwa kąty proste.

24-a lekcya.

Mierzenie kątów i łuków.

Nakreślmy koło (fig. 73) i przetnijmy je za pomocą dwóch prostopadłych średnic AB i CD. Okrąg został w ten sposób podzielony na cztery równe części AC, CB, BD, DA, albo, jak się mówi w geometryi, na cztery równe *łuki*.

Przyjęto dzielić okrąg koła na 360 równych łuków, zwanych *stopniami*. Tak więc każdy z naszych czterech łuków zawiera:

$$\frac{360}{4}=90 \text{ stopni.}$$

Mówi się zatem, że każdy z czterech, utworzonych przez dwie prostopadłe, kątów zawiera 90 stopni (pisze się 90^0); kąty te są proste, *a więc kąt prosty ma* 90^0. Połowa kąta prostego (MOA) będzie miała 45^0; kąt ostry (POA), który kreślę dowolnie, niech ma, przypuśćmy, 25^0; kąt ostry (QOA) niech ma 68^0; kąt rozwarty (ROA) 138^0 i t. d.

Tak więc wartość kątów zmienia się od 0^0 (wówczas kiedy boki kąta zlewają się z sobą) do 180^0 (kiedy jeden bok kąta stanowi przedłużenie drugiego). Widzicie zatem, że możemy oznaczyć z największą ścisłością wielkość jakiegobądź kąta.

Znajomość wielkości kątów daje nam możność mierzenia długości łuków. Kreślę, przypuszczam, łuk AB (fig. 74) promieniem równym 24 c. i, korzystając z przyrzą-

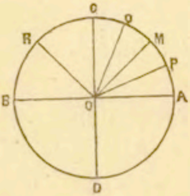


Fig. 73. — Mierzenie kąta.

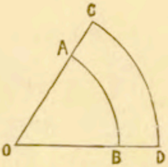


Fig. 74. — Mierzenie łuku.

du, o którym wam później powiem, przekonywam się, że kąt AOB ma 60^0. 60 jest szósta część 360; łuk więc AB stanowić będzie szóstą część okręgu koła. A że długość naszego okręgu jest:

$$24c \times 2\pi = 24c \times 2 \times 3{,}14 = 150,\ 72c.,$$

długość przeto łuku sprostowanego AB stanowi

$$\frac{150,\ 72c.}{6} = 25,\ 12c.$$

Jeżeli teraz promieniem 30-centymetrowym nakreślę łuk CD, zawarty między ramionami tegoż kąta, mającego również 60^0, to CD będzie szóstą częścią okręgu koła o promieniu równym 30 c., czyli że łuk sprostowany:

$$CD = \frac{30\,c \times 2 \times 3{,}14}{6} = 31{,}4\ c.$$

CZĘŚĆ V.

Mierzenie powierzchni płaskich, ograniczonych liniami krzywemi.

25-a lekcya.

Mierzenie powierzchni koła.

Ażeby się nauczyć mierzyć powierzchnie płaskie, ograniczone liniami krzywemi, zaczniemy od najprostszego wypadku, mianowicie od mierzenia powierzchni koła.

Oto mamy koło ze środkiem w punkcie O (fig. 75).

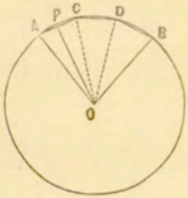


Fig. 75. — Mierzenie powierzchni koła.

Przypuśćmy, że rozważam okrąg koła jako niezliczoną ilość maleńkich odcinków linij prostych AC, CD, DE i t. d., maleńkich *cięciw* i że łączę krańce tych cięciw ze środkiem za pomocą promieni.

Widocznem jest, iż powierzchnia koła prawie równać się będzie sumie powierzchni wszystkich małych, w ten sposób utworzonych trójkątów. Powiedziałem „prawie“, albowiem brakować tu będzie maleńkich powierzchni, zawartych między cięciwami a odpowiednimi łukami; skoro jednakże przypuścimy, że nasze cięciwy są bardzo, bardzo maleńkie, to powierzchnie te nie będą miały znaczenia.

Czemuż się równa powierzchnia każdego trójkąta?

Wiemy dobrze, że jest to połowa iloczynu wysokości trójkąta przez jego podstawę. Podstawą jest w tym wypadku maleńka cięciwa, która prawie styka się z łukiem; wysokością odcinek OP, który staje się promieniem, gdy cięciwa AC, malejąc, styka się z łukiem.

W ten sposób powierzchnia każdego z tych maleńkich trójkątów będzie połową iloczynu odpowiedniej cięciwy przez promień.

A więc powierzchnia koła, która jest sumą tych wszystkich małych trójkątów, będzie widocznie połową iloczynu sumy wszystkich cięciw przez promień.

Że zaś suma tych wszystkich małych cięciw jest okrąg koła, przeto *powierzchnia koła ma za miarę połowę iloczynu okręgu przez promień.*

Okrąg koła, jak wiemy, jest $2\pi R$, powierzchnia więc będzie:

$$\frac{2\pi R \times R}{2} = \pi R \times R,$$

gdzie R promień koła, co napiszemy

$$\pi R^2.$$

Zastosowanie. Zmierzymy powierzchnię ocembrowania wodotrysku. Widzieliśmy (str. 61), że jego średnica jest 1,2 m.; promień więc jest 60 c., a powierzchnia

$$60 \times 60 \times 3{,}14 = 113\,04 \text{ c. k.}$$

Wiemy, że

1 decymetr kwadratowy $= 10 \times 10 = 100$ c. k.,

1 metr kwadratowy $= 10 \times 10 = 100$ d. k.

czyli $100 \times 100 = 10000$ c. k.

Powierzchnia tedy naszego ocembrowania równa się 1 metrowi kwadratowemu, 13 decymetrom kwadratowym 4 centymetrom kwadratowym, albo w skróceniu

1 m. k. 13 d. k. 4 c. k.

26-a lekcya.

Mierzenie powierzchni jakiejkolwiek figury płaskiej, ograniczonej linią krzywą.

Weźmy teraz jaką bądź figurę, ograniczoną linią krzywą (fig. 76), figurę jaką zazwyczaj znajdujemy w naturze, kiedy mierzymy grunt, otoczony rzeką albo krętą drogą. Zastosujemy do mierzenia powierzchni tej figury taki sposób, jak powyższy.

Poprowadźmy w tym celu wewnątrz figury jakikolwiek odcinek AF, następnie zastąpmy naszą krzywą przez nieograniczony szereg bardzo małych odcinków AB, BC, CD, DE, i t. d. i nakoniec spuśćmy z punktów B, C, D, E, G, H.... prostopadłe do AF.

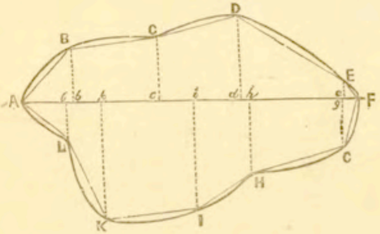


Fig. 76. — Mierzenie powierzchni figury płaskiej, ograniczonej linią krzywą.

Oczywiście, że cała nasza figura składa się w ten sposób z pewnej bardzo dużej ilości trapezów BCbc, CDcd i t. d. oraz czterech trójkątów skrajnych ABb, ALl, FEe, FGg. Miarą powierzchni każdego trapezu jest iloczyn połowy sumy podstaw przez wysokość, a więc powierzchnia BCbc będzie:

$$\frac{Bb+Cc}{2} \times bc,$$

powierzchnia CDcd będzie:

$$\frac{Cc+Dd}{2} \times cd \text{ i t. d.}$$

Po zmierzeniu powierzchni wszystkich trapezów i dodaniu powierzchni czterech małych skrajnych trójkątów ABb, ALl, FEe, FGg, otrzymamy wartość powierzchni figury, choćby ona była jak najbardziej złożoną.

CZĘŚĆ VI.

Mierzenie objętości brył, ograniczonych powierzchniami płaskiemi i krzywemi.

27-a lekcya.

Walec.

Oto widzicie kawałek rury od pieca (fig. 77), którą z obydwu stron nakrywam ćwiartkami tektury; otwory rury są jednakowe, albowiem dwie ćwiartki papieru, które są kołami, mają jednakowe powierzchnie. Mogę wzdłuż całej krzywej powierzchni poprowadzić odcinki linij prostych jednakowej długości, równoległe do siebie i prostopadłe do dwóch ćwiartek tektury. Podobna bryła nazywa się **walec**.

Taki walec jest najbardziej foremny i nazywa się *walcem* **prostym** *o podstawie* **kołowej**. Drugi kawałek rury (fig. 78) jest pochyło z obu stron ścięty, w ten wszakże sposób, że dwie zamykające go powierzchnie tekturowe są równoległe. To jest **walec pochyły** *o podstawie* **nie kołowej.**

Nakoniec trzeci kawałek rury (fig. 79) jest nie tylko jak poprzedni pochyło ścięty, ale także zgnieciony

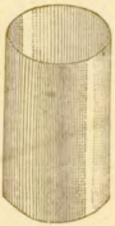


Fig. 77. — Walec prosty o podstawie kołowej.

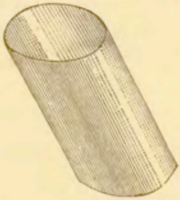


Fig. 78. — Walec pochyły.

Fig. 79. — Walec o podstawie jakiejkolwiek.

w ten sposób, że dwa jego otwory nie są kołami, ale jakiemikolwiek figurami, bądź co bądź równemi.

To jest **walec** w najogólniejszem znaczeniu tego wyrazu, bez oznak szczególnych, jest to wogóle krzywa bryła, po której bocznej powierzchni można poprowadzić równe i równoległe odcinki i zakończona dwiema jednakowemi krzywemi.

28-a lekcya.

Mierzenie objętości walca.

Zastosujmy do zmierzenia objętości walca taki sam sposób, jaki nam posłużył do zmierzenia powierzchni koła.

Zamieńmy linie krzywe w podstawach walca na szereg małych odcinków prostych AB, BC, CD....; A'B', B'C', C'D'...... (fig. 80). Połączywszy punkty A z A', B z B', C z C' i t. d., otrzymam graniastosłup.

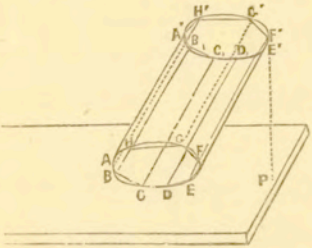


Fig. 80. — Mierzenie objętości walca.

Jeżeli przypuszczę, że odcinki AB, A'B i t. d. stają się bardzo licznymi, a co za tem idzie, bardzo małymi to oczywiście, że one coraz bardziej zbliżają się do zetknięcia z okręgami kół i wreszcie sumy ich staną się tej samej długości, co okręgi kół. W tym samym czasie boczna powierzchnia graniastosłupa zbliży się do powierzchni walca, słowem graniastosłup zetknie się z walcem. Objętość graniastosłupa ma za miarę iloczyn powierzchni podstawy przez wysokość; objętość przeto walca ma za miarę ten sam iloczyn, co napiszemy:

$$V\ (\text{objętość}) = B\ (\text{podstawa}) \times H\ (\text{wysokość}).$$

Skoro walec jest *pochyły*, to trzeba dołożyć nieco starań do ścisłego zmierzenia wysokości. Umieszczamy walec na stole albo na ziemi (fig. 81) i za pomocą pionu mierzymy odległość AP, która będzie widocznie wysokością walca. Gdy walec jest **prosty** (fig. 82), wysokość jego równa się długości, albowiem

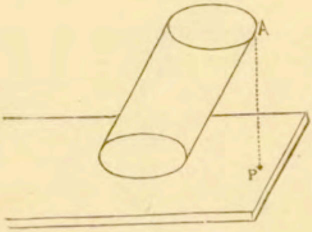


Fig. 81. — Walec pochyły.

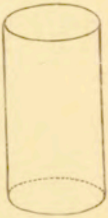


Fig. 82. — Walec prosty w podstawie kołowej.

wszystkie odcinki prostych, poprowadzone wzdłuż krzywej powierzchni, prostopadle do podstaw, są równe.

Objętość prostego walca o podstawach kołowych równać się tedy będzie:

$$V = \pi R^2 \times H.$$

Zastosowanie. Zmierzmy objętość naszej rury od pieca. Przy pomocy sznurka mierzę jej obwód, który stanowi 37,68c.

Promień obwodu rury będzie:

$$\frac{37{,}68c}{2\times 3{,}14}=6c.$$

A więc powierzchnia podstawy jest:

$$\frac{37{,}68\times 6}{2}=113{,}04 \text{ c. k.}$$

Z drugiej strony długość rury jest 75 centymetrów, szukana przeto objętość równa się:

$113{,}04\times 75=8478$ centymetrom sześciennym

albo 8 d. s. 478 c. s.

29-a lekcya.

Stożek. Mierzenie objętości stożka.

Oto macie głowę cukru (fig. 83).

Mogę przyłożyć linię prostą w pewnym kierunku, która zetknie się z całą krzywą jej powierzchnią, ale ta prosta przejdzie bezwarunkowo przez wierzchołek głowy cukru.

Podstawą tej głowy cukru jest koło.

Prostopadła, spuszczona z *wierzchołka* S (fig. 84) głowy cukru na jej podstawę, mająca spodek w środku O koła, służącego jej za *podstawę*, nazywa się *wysokością*.

Taka bryła jak głowa cukru nazywa się **stożkiem**. Jest to najbardziej foremny stożek, zwie się on *stożkiem* **prostym o** *podstawie* **kołowej**.

Robię teraz tutkę z papieru bez szczególnego starania. Jest to także stożek, ale jego podstawa nie jest kołem, i prostopadła padnie zewnątrz podstawy. To jest *stożek* **pochyły** *o podstawie* **niekołowej** (fig. 85).

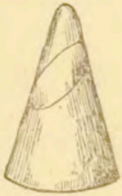


Fig. 83. — Głowa cukru (stożek).

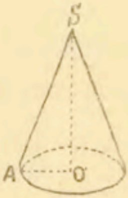


Fig. 84. — Stożek prosty o podstawie kołowej.

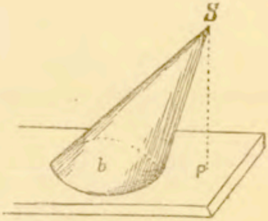


Fig. 85. — Stożek pochyły.

Mógłbym bardzo urozmaicać kształt podstawy stożka, jak to zrobiłem z podstawą walca.

Stożek przeto ma dwie cechy charakterystyczne: po 1-e ma w podstawie figurę krzywolinijną; po 2-e — taką boczną powierzchnię, po której można poprowadzić linie proste, wszystkie przechodzące przez wierzchołek.

Objętość stożka. Zmierzymy objętość stożka tak samo, jak to uczyniliśmy z walcem. Walec przekształciliśmy na graniastosłup, stożek przekształcimy na ostrosłup (fig. 86).

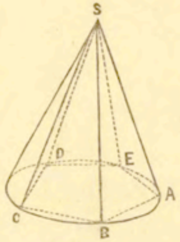


Fig. 86. — Mierzenie objętości stożka.

Objętość ostrosłupa jest trzecią częścią iloczynu powierzchni jego podstawy przez wysokość. Objętość więc stożka będzie:

$$V\ (\text{objętość}) = \frac{B\ (\text{podstawa}) \times H\ (\text{wysokość})}{3}$$

Objętość głowy cukru, prostego stożka o podstawie kołowej, napiszemy:

$$V = \frac{\pi R^2 \times H}{3},$$

gdzie R jest promień podstawy stożka, a H — wysokość.

CZĘŚĆ VII.

Mierzenie powierzchni, ograniczonych powierzchniami okrągłemi.

30-a lekcya.

Kula.

Istnieje bardzo wiele brył, ograniczonych powierzchniami okrągłemi; jedne z nich są foremne, to jest mogące mieć nazwy geometryczne, drugie są mniej lub więcej nieforemne. Prawie wszystkie ciała w przyrodzie należą do tej ostatniej kategoryi. Takie bryły spotykamy często w świecie zwierzęcym; nasza głowa, ciało nasze są to bryły, ograniczone powierzchniami okrągłemi. Przeciwnie w świecie roślinnym spotykamy stożki i walce.

Ze wszystkich tych brył powiem wam tylko o jednej, z powodu jej ważności; bryłą tą jest **kula**.

Powiedzieliśmy, że koło jest figurą ograniczoną linią krzywą, której wszystkie punkty są równo odległe od jednego, znajdującego się wewnątrz koła i zwanego środkiem.

Kulą nazywamy bryłę, ograniczoną powierzchnią, której wszystkie punkty są w równej odległości od jednego, znajdującego się wewnątrz kuli, również zwanego środkiem.

Promieniem kuli nazywamy odcinek, łączący jej środek z jakimkolwiekbądź punktem powierzchni. *Średnicą* zaś — podwójny promień.

Z powyższego określenia kuli wypada, że gdy przetniemy ją płaszczyzną, przechodzącą przez środek, otrzymamy zawsze koło, którego promień będzie ten sam co promień kuli. Takie koła nazywamy **wielkiemi** dla odróżnienia od kół **małych**, które otrzymujemy, przecinając kulę płaszczyznami, nie przechodzącemi przez jej środek (fig. 87).

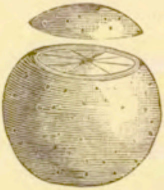


Fig. 87. — Kula.

31-a lekcya.

Powierzchnia i objętość kuli.

Powierzchnia kuli. Za pomocą rozumowań zbyt trudnych, abym mógł je wam wyłożyć w bieżącym roku, można dowieść, że *powierzchnia kuli równa się cztery razy wziętej powierzchni jej koła wielkiego.*

Widzieliśmy, że powierzchnia koła równa się πR^2, powierzchnia przeto kuli:

$$S = 4\pi R^2$$

Objętość kuli. Weźmy na powierzchni kuli szereg punktów, bardzo do siebie blizkich A, B, C... (fig. 88). Połączmy je odcinkami linij prostych, tudzież każdy z nich ze środkiem kuli S.

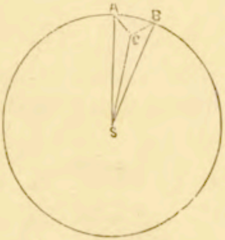


Fig. 88. — Mierzenie objętości kuli.

W ten sposób zbudowaliśmy wielką ilość małych trójkątnych ostrosłupów, których wierzchołki są w środku kuli.

Objętość każdego z tych małych ostrosłupów ma za miarę trzecią część iloczynu powierzchni podstawy przez wysokość. Jeżeli przypuścimy, że liczba tych ostrosłupów jest niezmiernie wielką, ich podstawy zetkną się z powierzchnią kuli, a wysokości z promieniem kuli.

Suma ich będzie objętością kuli, która ma za miarę:

$$V\,(\text{objętość}) = S\,(\text{powierzchnia}) \times \frac{1}{3} R\,(\text{promień}),$$

a że

$$S = 4\pi R^2$$

więc

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$$

co można napisać

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Zastosowanie. Zmierzmy powierzchnię a następnie objętość naszego globusa.

Powierzchnia. Otaczam za pomocą sznurka równik globusa; widzicie, że obwód jego jest 94,2 c, à więc promień równa się

$$\frac{94{,}2 \text{ c.}}{2 \times 3{,}14} = 15 \text{ c.}$$

Dalej powierzchnia wielkiego koła jest

$$94{,}2 \times \frac{15}{2} = 706{,}5 \text{ k. c.},$$

a powierzchnia kuli wynosi

$$706{,}5 \text{ k. c.} \times 4 = 2826 \text{ k. c.}$$

Objętość. Stosownie do tego, co wam wyżej powiedziałem, objętość naszego globusa otrzymamy, mnożąc jego powierzchnię przez trzecią część promienia, a więc będzie

$$2826 \times \frac{15}{3} = 14130 \text{ s. c.}$$

albo 14 s. d. 130 s. c.

Do tego samego rezultatu dojdziemy, używając wzoru

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

który da

$$V = \frac{4}{3} \pi \times 15 \times 15 \times 15 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 3375 = 14130 \text{ s. c.}$$

CZĘŚĆ VIII.

Kreślenie figur geometrycznych.

32-a lekcya.

Przyrządy do kreślenia używane.

Zasadnicze przyrządy, których się używa do kreślenia figur geometrycznych, są: liniał, ekierka, cyrkiel przenośnik.

Liniał (fig 89) jest to płaska linijka, zamiast której używać można także tak zwanej kantówki, mającej kształt graniastosłupa o podstawie kwadratowej.

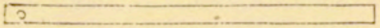


Fig. 89. – Liniał.

Ekierka albo *węgielnica* (fig. 90) jest to trójkąt, mający kąt prosty, t. z. trójkąt prostokątny. Można także zrobić węgielnicę z dwóch przecinających się pod kątem prostym liniałów (fig. 91). Węgielnica jest bardzo dogodna do kreślenia kąta prostego.

Cyrkiel jest utworzony z dwóch nóżek mosiężnych albo stalowych, połączonych z sobą jak ostrza

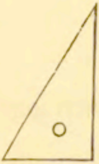


Fig. 90. — Ekierka.

Fig. 91. — Ekierka z dwu liniałów.

nożyczek. W wielu cyrklach jedna nóżka jest ruchoma i może być zastąpiona przez t. z. *ołównik* (fig. 92).

Nakoniec *przenośnik* (fig. 93) jest to przezroczysta tafelka rogowa, mająca kształt półkola. Półokrąg jest

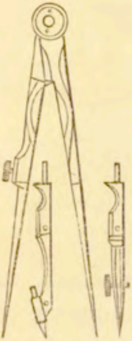


Fig. 92. — Cyrkiel. Ołównik. Grafion.

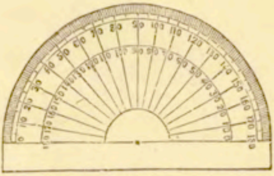


Fig. 93. — Przenośnik.

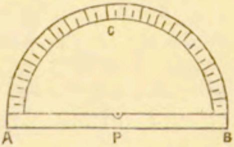


Fig. 94. — Przenośnik.

podzielony na 180 równych części albo stopni, i podziałki połączone są ze środkiem półkola. Bywają także przenośniki, wykrojone z miedzi lub mosiądzu (fig. 94).

33-a lekcya.

Kreślenie prostych równoległych i prostopadłych.

Proste. Ażeby nakreślić prostą, przykładamy do papieru liniał i prowadzimy wzdłuż skraju tegoż ołówek, pióro lub *grafion* (fig. 95).

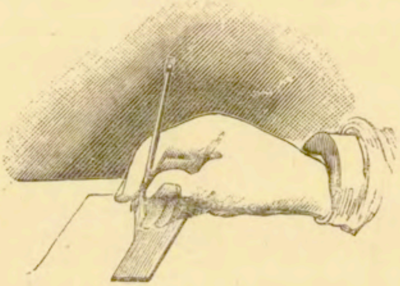


Fig. 95. — Kreślenie prostej za pomocą liniału.

Robotnicy, a szczególniej malarze zazwyczaj kreślą tak długie odcinki, że nie mogą posługiwać się liniałem. I dlatego naciągają sznurek między dwiema tyczkami, i sznurek ten daje im żądaną prostą.

Ogrodnicy przechodzą wzdłuż wyprężonego sznurka z tyczką kańczastą i w ten sposób wytykają odcinek linii prostej na ziemi.

Malarze smarują sznurek kredą wyprężają go, biorą w palce w jednem miejscu (fig. 96) odciągają go nastę-

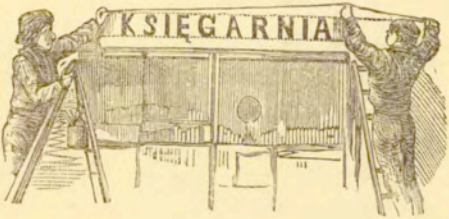


Fig. 96. — Sposób kreślenia odcinka linii prostej, używany przez malarzy.

pnie pozwalają mu wrócić do pierwotnego położenia i w ten sposób otrzymują biały ślad kredowy, przedstawiający odcinek linii prostej.

Linie równoległe. Niech będzie dana prosta K'D', do której chcę poprowadzić równoległą przez punkt A.

Przykładam do prostej K'D' jeden z większych boków ekierki (fig. 97), a drugi opieram na liniale MN.

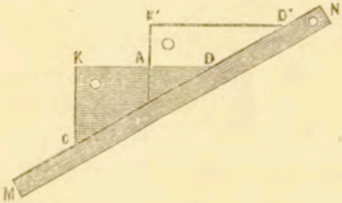


Fig. 97 — Kreślenie równoległych.

Następnie przesuwam ekierkę po liniale tak długo, dopóki ona nie spotka punktu A. Przez ten punkt prowadzę prostą KD, która będzie do danej równoległą.

Jest ona w rzeczywistości równoległą do K'D', albowiem wszystkie jej punkty są w równej odległości od odpowiednich punktów K'D', jeżeli tylko prawidłowo poruszana była ekierka.

Linie prostopadłe. Ażeby przez punkt dany na prostej poprowadzić do niej prostopadłą, przykładamy do danej prostej ekierkę, jak wskazuje (fig. 98).

Ażeby spuścić prostopadłą do danej prostej AB z punktu C, zewnątrz niej leżącego, można także korzystać z ekierki (fig. 99).

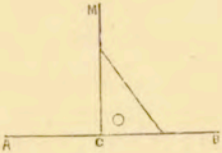


Fig. 98. — Kreślenie prostopadłej do danej prostej w danym jej punkcie za pomocą ekierki.

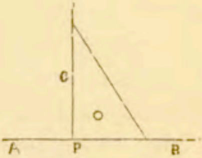


Fig. 99. — Kreślenie prostopadłej do danej prostej przez punkt zewnętrzny za pomocą ekierki.

Do kreślenia prostopadłych można również użyć przenośnika. Dwie prostopadłe tworzą cztery kąty proste, z których każdy równa się 90^0; żeby więc przez punkt P na danej prostej poprowadzić do tej ostatniej prostopadłą należy przyłożyć do niej przenośnik średnicą tak, aby środek półkola przypadł w punkcie P (fig 100).

Powyższe postępowania są tak proste, że niema potrzeby objaśniania ich; nie zawsze jednak dają one zupełnie ściste rezultaty i dlatego lepiej jest użyć cyrkla i linijki.

Przez punkt C, dany na prostej AB, poprowadzić do niej prostopadłą.

Odkładamy na prawo i na lewo od punktu C równe odcinki CM i CN (fig. 101); uczynić to można bardzo dokładnie, wziąwszy jednakową rozwartość cyrkla. Następnie z punktów M i N promieniem większym niż MC albo CN kreślimy dwa okręgi kół, które przecinają się w punkcie D. Prosta DC jest szukaną prostopadłą.

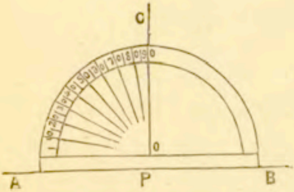


Fig. 100. — Kreślenie prostopadłej do danej prostej w danym jej punkcie za pomocą przenośnika.

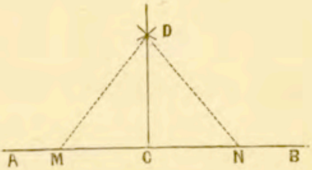


Fig. 101. — Kreślenie prostopadłej do danej prostej w danym jej punkcie za pomocą cyrkla i linijki.

Ażeby się o tem przekonać, przeginam figurę wzdłuż prostej DC. Oczywiście, że punkt N padnie na M, albowiem CN = CM i DN = DM jako promienie dwóch kół o równych promieniach. Dwa przeto kąty koło punktu C są równe, a więc proste, a, co za tem idzie, prosta DC jest prostopadła do AB.

Z punktu D, danego zewnątrz prostej AB, spuścić do niej prostopadłą.

Z punktu D (fig. 102) dość dużym promieniem kreślę okrąg koła, który przetnie prostą AB w punktach M i N; następnie z punktów M i N tym samym promieniem kreślę dwa okręgi, które przejdą przez punkt D i przetną się w punkcie E. Przez dwa punkty D i E prowadzę prostą, która będzie szukaną prostopadłą.

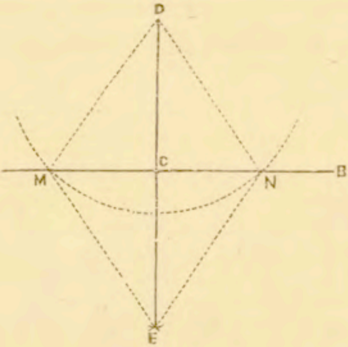


Fig. 102. — Kreślenie prostopadłej do danej prostej przez punkt zewnętrzny za pomocą cyrkla i linijki.

Rzeczywiście, jeżeli przegnę figurę wzdłuż prostej AB, to punkt E padnie na D, albowiem ND = NE i MD = ME, a więc cztery kąty około punktu C są kątami prostymi, a prosta DC prostopadłą do AB.

Ta prostopadła DC jest najkrótszą odległością punktu D od prostej AB, albowiem oczywistem jest, że każda pochyła, z punktu D do prostej AB poprowadzona, jest dłuższa niż prostopadła DC.

Powyższe dowodzenie przekonywa nas prócz tego i o tem, że dwie pochyłe DM i DN, równo odległe (CM = CN) od spodka C prostopadłej CD, są równe.

34-a lekcya.

Podział odcinka linii prostej na równe części.

Znaleźć środek odcinka AB, inaczej podzielić go na dwie równe części.

Z punktów A i B (fig. 103) promieniem większym niż połowa odcinka AB kreślę dwa okręgi kół, które przetną się w punktach C i D. Połączywszy punkty C i D znajdę punkt P przecięcia się odcinków CD i AB, który jest środkiem tego ostatniego.

Rzeczywiście, jeżeli przegnę figurę wzdłuż prostej CD, to punkt B padnie na A, albowiem DB = DA i CB = CA, a więc PA = PB.

Podział odcinka na 4, 8, 16 i t. d. równych części. Dzielimy naprzód odcinek sposobem wyżej wskazanym na 2 równe części (fig. 104) AP = PB, następnie dzielimy AP na 2 równe części AM = MP itd.

Podział odcinka na ilekolwiek równych części. Przypuśćmy, że mamy podzielić odcinek AB na 5 równych części (fig. 105). Przez punkt A prowadzę jakąkolwiek prostą AC, odkładam na niej 5 dowolnych równych odcinków AD = DE = EF = FG = GH i łączę punkt B z punktem H.

Przez punkty D, E, F, G prowadzę równoległe do BH, otrzymuję w ten sposób punkty *d*, *e*, *f*, *g* prze-

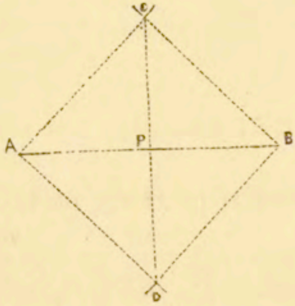


Fig. 103. — Podział odcinka na dwie równe części.

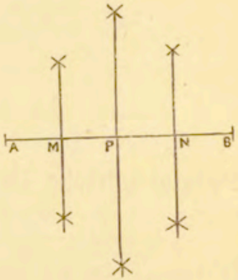


Fig. 104. — Podział odcinka na cztery równe części.

cięcia się tych równoległych z odcinkiem AB, które są punktami podziału tego odcinka na 5 równych części.

Gdyby te części nie były równe, na przykład gdyby odcinek *de* był większy niż *ef* (fig. 106), to oczy-

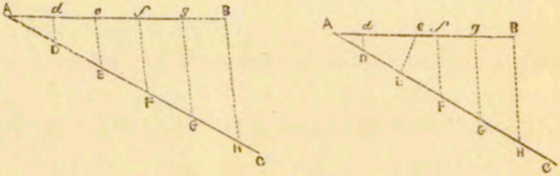


Fig. 105 i 106. — Podział odcinka na ilekolwiek równych części.

wiście proste eE i fF nie byłyby równoległe; że zaś proste te były kreślone równolegle, przeto $de = ef$ (fig. 105).

35-a lekcya.

Kreślenie figur, ograniczonych odcinkami linij prostych.

Trójkąt. *Zbudować trójkąt, znając trzy jego boki*. Niech *a*, *b*, *c* będą trzema bokami szukanego trójkąta (fig. 107). Kreślę odcinek DE, równy na przykład *a*, następnie z punktu D promieniem równym *b*, a z punktu E promieniem równym *c* kreślę dwa okręgi kół, które przetną się w punkcie F.

Połączywszy punkt F z punktami D i E, otrzymuję szukany trójkąt.

Rozwiązując powyższe zadanie, należy tak wybrać boki trójkąta, aby suma każdych dwóch boków była większa od trzeciego, w przeciwnym bowiem razie wspomniane dwa okręgi kół nie przetną się.

Zbudować trójkąt, znając jeden jego bok i dwa przyległe do niego kąty. Niech będzie a bok, a B i C dwa przyległe do niego kąty (fig. 108). Kreślę odci-

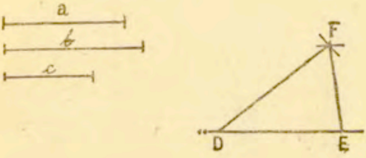


Fig. 107. — Kreślenie trójkąta z danych trzech jego boków.

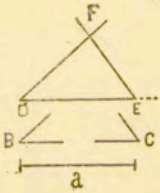


Fig 108. — Kreślenie trójkąta z danych dwóch jego kątów, przyległych do danego boku.

nek DE równy a, i przenośnikiem mierzę kąty B i C. U dwóch końców D i E odcinka DE buduję dwa kąty równe kątom B i C, a przedłużając ich boki, otrzymuję w przecięciu punkt F.

Trójkąt DEF jest trójkątem szukanym.

Zbudować trójkąt prostokątny, znając największy jego bok (przeciwprostokątną) i jeden z mniejszych boków (przyprostokątną). Niech a (fig. 109) będzie przeciwprostokątną, tak zwaną dlatego, że leży naprzeciwko prostego kąta w trójkącie, a b jedną z przyprostokątnych. Kreślę odcinek AB, równy a, i sposobem, wyżej wskazanym, znajduję jego środek O. Następnie z punktu O promieniem równym OA kreślę półokrąg koła, a z punktu B promieniem równym b przecinam ten półokrąg nowym; łącząc otrzymany punkt C z punktami A i B, znajduję żądany trójkąt ACB.

To zadanie doprowadza nas do bardzo ważnej własności półokręgu, mianowicie, że kąty w niego *wpisane* ADB, AEB, AGB i t. d. są kątami prostymi (fig. 110).

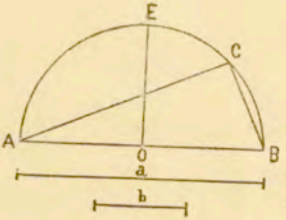


Fig. 109. — Kreślenie trójkąta prostokątnego z danej przeciwprostokątnej i jednej z przyprostokątnych.

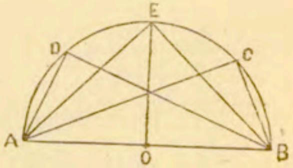


Fig. 110. — Kąty, wpisane w półokrąg koła, są proste.

Kwadrat. *Zbudować kwadrat, znając jego bok*. Niech AB (fig. 111) będzie tym bokiem. Przez punkt A prowadzę do niego prostopadłą AC równą AB, następnie z punktów C i B promieniem równym AB kreślę dwa okręgi kół, które przetną się w punkcie D; łącząc punkty C z D i D z B, otrzymuję szukany kwadrat.

Zbudować kwadrat, znając jego przekątną. Niech AB (fig. 112) będzie tą przekątną. Przez środek przekątnej prowadzę do niej prostopadłą MN i promieniem równym OA z punktu O opisuję okrąg koła, który przejdzie

Fig. 111. — Kreślenie kwadratu z danego jego boku.

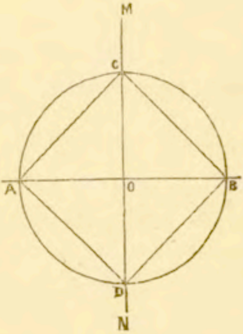


Fig. 112. — Kreślenie kwadratu z danej jego przekątnej.

przez A i B i przetnie MN w punktach C i D. Łącząc A i B z C i D, otrzymam szukany kwadrat. Jest to rzeczywiście kwadrat, albowiem wszystkie jego kąty są wpisane w półokręgi, a zatem są proste, boki zaś ma on równe.

Równoległobok. *Zbudować równoległobok, znając dwa jego boki nierównoległe a i b i kąt A, między nimi* *zawarty*. Kreślę (fig. 113) za pomocą przenośnika kąt równy kątowi A i przedłużam jego boki; następnie odkładam na jednym z nich odcinek AB równy a, na drugim zaś odcinek AC równy b' i przez punkt C prowadzę prostą równoległą do AB, zaś przez B—prostą równoległą do AC. Punkt D przecięcia się tych równoległych da nam czwarty wierzchołek równoległoboku.

Romb. Rombem nazywamy równoległobok, którego wszystkie cztery boki są równe. Przekątne rombu są do siebie prostopadłe.

Zbudować romb, znając jego przekątne.

Niech a i b będą przekątnemi (fig. 114). Przez środek O odcinka AB, równego przekątnej a, prowadzę do niego prostopadłą i odkładam na niej od punktu O

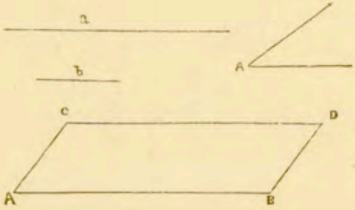


Fig. 113. — Kreślenie równoległoboku z danych dwóch jego nierównych boków i kąta.

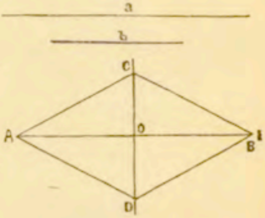


Fig. 114. — Kreślenie rombu z danych jego przekątnych.

z jednej i drugiej strony dwa odcinki OC i OD, z którego każdy jest połową przekątnej b. Łącząc kolejno cztery otrzymane punkty, mieć będziemy szukany romb.

36-a lekcya.

Ogólne zasady kreślenia figur foremnych, ograniczonych odcinkami linij prostych.

Wielokątami foremnymi nazywamy takie, które mają równe boki i kąty.

Dotąd z figur tych poznaliśmy trójkąt równoboczny i kwadrat.

Każdy wielokąt foremny może być *wpisany* do okręgu koła, to znaczy, że okrąg ten przechodzi przez wszystkie wierzchołki jego kątów. Z tego wypływa ogólna bardzo prosta metoda kreślenia wielokątów foremnych.

Pięciokąt. Zacznijmy od figury, mającej pięć boków i pięć kątów, którą nazywamy **pięciokątem.**

Kreślę okrąg koła (fig. 115). Pięć wierzchołków kątów foremnego pięciokąta dzieli ten okrąg na pięć

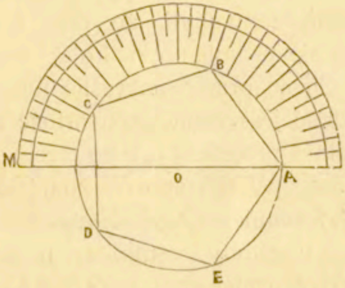


Fig. 115. — Kreślenie foremnego pięciokąta.

równych łuków, z których każdy, jak wiecie, zawiera

$$\frac{360^0}{5} = 72^0.$$

Przykładam dalej przenośnik w ten sposób, że jego środek wypada w środku koła O. Następnie szukam na przenośniku podziałki oznaczonej liczbą 72 i oznaczam punkt B, w którym podziałka ta spotyka okrąg koła w tym samym czasie, gdy punkt A przypada na początek albo, jak to mówią, na zero przenośnika. Łuk AB będzie piątą częścią okręgu koła i wskutek tego cięciwa AB będzie bokiem foremnego pięciokąta.

Teraz pozostaje mi tylko wziąć rozwartość cyrkla równą AD i czterokrotnie odłożyć ją jako cięciwę koła; punkty E, D, C będą wierzchołkami pięciokąta. Przenosząc rozwartość cyrkla po raz czwarty, natrafię na punkt B.

Sześciokąt. W ten sam sposób, jak pięciokąt, mogę nakreślić foremny sześciokąt. Zadanie to jest jeszcze łatwiejsze, niż poprzednie.

Łuk, odpowiadający bokowi foremnego sześciokąta, równa się 360^0, podzielonym przez 6, co stanowi 60^0; i tu więc można zastosować przenośnik.

Geometrowie zauważyli, że bok foremnego sześciokąta równa się promieniowi koła, do którego on jest wpisany. Chcąc przeto nakreślić foremny sześciokąt (fig. 116), dość jest wziąć rozwartość cyrkla równą promieniowi koła i przenieść ją jako cięciwę od A do B, od B do C i t. d. W ten sposób znajdziemy 6 wierzchołków kątów foremnego sześciokąta.

Ośmiokąt. Foremny ośmiokąt można nakreślić, mierząc kąt równy ósmej części 360^0, t. j. 45^0 czyli połowie kąta prostego.

Inaczej jeszcze można przejść do ośmiokąta od kwadratu (fig. 117). W tym celu należy nakreślić dwie przekątne kwadratu, przecinające się w punkcie O, od tego punktu cyrklem odłożyć na każdej przekątnej z obydwóch stron O połowę boku kwadratu, otrzymamy

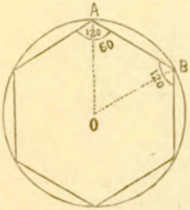


Fig. 116 — Kreślenie foremnego sześciokąta.

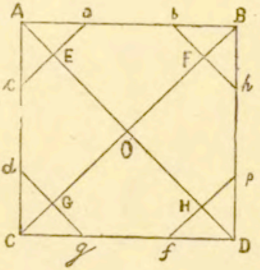


Fig 117. — Kreślenie foremnego ośmiokąta.

w ten sposób 4 punkty E, F. G, H. Poprowadziwszy przez te punkty równoległe do przekątnych, otrzymamy foremny ośmiokąt *bacdgfph*.

Za pomocą metody dzielenia łuku koła można nakreślić foremny **dziesięciokąt**, **dwunastokąt** i wogóle każdy foremny wielokąt.

37-a lekcya.

Zestawianie figur.

Zestawianiem figur posługują się przy wykonywaniu robót ornamentacyjnych, tapicerskich, przy układaniu posadzek i wprawianiu szyb kolorowych.

Figura z trójkątów. Można zestawiać figury z jakichkolwiek trójkatów (fig. 118), byleby one były sobie równe.

Figura z czworoboków. Można dalej zestawiać figury z równych równoległoboków (fig. 119), rombów, prostokątów i kwadratów (fig. 120).

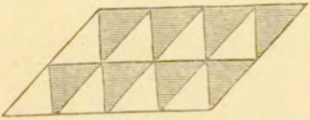


Fig 118. — Figura z trój-kątów.

Fig. 119. — Figura z równo-ległoboków.

Figura z pięciokątów. Nie można układać figur z foremnych pięciokątów, a oto powód: każdy kąt pięciokąta foremnego równa się 108⁰; gdybyśmy więc ułożyli jeden obok drugiego 3 takie kąty, otrzy-

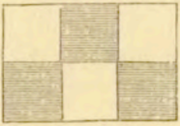


Fig. 120. — Figura z kwadratów.

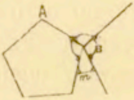


Fig. 121. — Z foremnych pięciokątów nie można układać figur.

malibyśmy razem 324⁰, czyli zbrakłoby do zapełnienia 360⁰ kąta równego 36⁰ (fig. 121); gdybyśmy zaś ułożyli w koło 4 kąty foremnego pięciokąta, co stanowi razem 432°, mielibyśmy o 72° więcej, niż potrzeba do zapełnienia czterech kątów prostych czyli 360°.

Figura z sześciokątów. Przeciwnie, foremny sześciokąt znajduje zastosowanie w układaniu figur n. p. w taflowaniu posadzek (fig. 122), albowiem kąt jego równa się 120°, a więc trzy, jeden obok drugiego ułożone, stanowią 360°, t. j. wypełniają cztery kąty proste.

Figura z ośmiokątów. Nie można układać posadzki z samych ośmiokątów foremnych albowiem kąt takiego wielokąta równa się 135°. Gdybyśmy więc ułożyli dwa jeden obok drugiego, to zbrakłoby 90° do 360°; musimy przeto między każde 4 ośmiokąty wkładać kwadrat, jak to widać na rysunku (fig. 123).

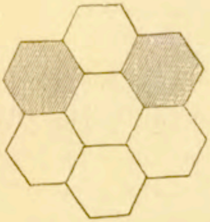


Fig. 122. — Figura z foremnych sześciokątów.

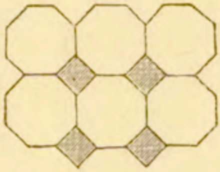


Fig. 123. — Figura z foremnych ośmiokątów i kwadratów.

Figura z dwunastokątów. Również z samych dwunastokątów nie można układać posadzek, albowiem kąt foremnego dwunastokąta równa się 150°, dwóch więc takich kątów za mało, a trzech za dużo do wypełnienia czterech kątów prostych. Wziąwszy dwa takie kąty, otrzymamy 300°, brakuje więc 60°; a że kąt foremnego trójkąta równa się właśnie 60°, należy

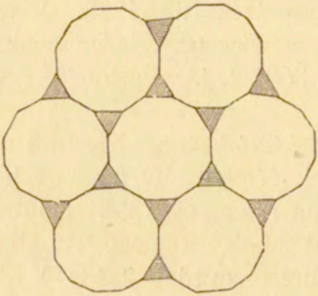


Fig. 124. — Figura z foremnych dwunastokątów i trójkątów.

więc do ułożenia posadzki umieścić między każdymi trzema dwunastokątami równoboczny trójkąt (fig. 124).

38-a lekcya.

Kreślenie kątów.

Nakreślić kąt równy kątowi danemu. Zadanie to można rozwiązać, stosując przenośnik; można jednakże osiągnąć cel, nie korzystając z tego przyrządu.

Niech N będzie kątem danym. Z punktu N (fig. 125) dowolnym promieniem kreślę łuk mp, następnie z punktu B prostej BA, która ma być jednym bokiem żądanego kąta, tym samym co poprzednio promieniem,

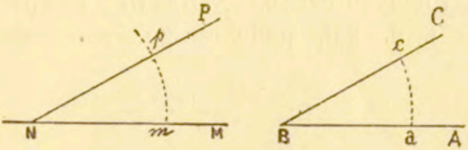


Fig. 125. — Kreślenie kąta, równego kątowi danemu.

kreślę łuk *ac* równy mp i łączę punkt *c* z B; w ten sposób otrzymuję kąt równy kątowi N, albowiem dwu tym kątom odpowiadają równe łuki kół o równych promieniach.

Podzielić kąt na dwie równe części. Zadanie to łatwo rozwiązać bądź za pomocą przenośnika, bądź za pomocą cyrkla i linijki.

Z punktu A promieniem dowolnym kreślę łuk MN (fig. 126) i podzieliwszy wiadomym sposobem od-

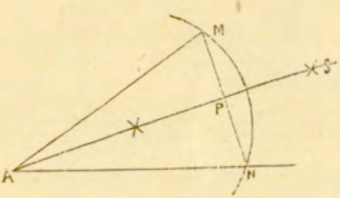


Fig. 126. — Podział kąta na dwie równe części.

cinek MN na dwie równe części, znajduję punkt P. Punkt ten łączę z wierzchołkiem kąta A i otrzymuję dwa kąty równe PAN=PAM, albowiem odpowiadają im dwa równe łuki.

W ten sam sposób można podzielić kąt na 4, 8 16 i t. d. równych części. Naodwrót, można podwoić, potroić i t. d. kąt, podwoiwszy, potroiwszy i t. d. łuk MN.

39-a lekcya.

Kreślenie kół.

Aby nakreślić na papierze koło danego promienia, stosujemy w sposób nader prosty cyrkiel, rozsuwając jego nóżki na długość promienia. W celu nakreślenia koła na powierzchni ziemi (fig. 127), wbijamy kołek, do któ-

Fig. 127. — Kreślenie okręgu koła.

rego przywiązujemy dowolnej długości sznurek, a do końca sznurka przymocowujemy tyczkę, która służy do nakreślenia okręgu koła.

Znaleźć środek danego okręgu. Łączę trzy punkty A, B, C (fig. 128), dowolnie obrane na okręgu. Przez środek AB prowadzę prostopadłą PM, na tej prostopadłej musi znajdować się środek, albowiem wszystkie jej punkty są równoległe od A i B. Tak samo przez środek BC prowadzę prostopadłą QN, na której również winien znajdować się środek. Jeżeli więc środek danego okręgu musi być jednocześnie na dwóch liniach prostych, to musi się znajdować w punkcie ich przecięcia się.

Przez trzy dane punkty przeprowadzić okrąg koła. Mamy tu to samo zadanie, co poprzednio, tylko inaczej wysłowione. Za pomocą dwóch odcinków AB i AC łączę trzy dane punkty A, B, C (fig. 129). Przez

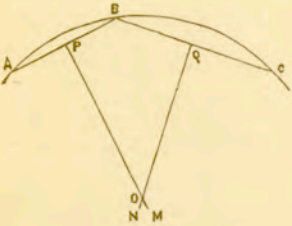


Fig. 128. — Znajdowanie środka danego okręgu.

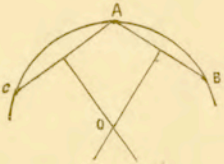


Fig. 129. — Kreślenie okręgu, przechodzącego przez trzy dane punkty.

środki AB i AC prowadzę prostopadłe, w których punkcie przecięcia się winien znajdować się środek

O szukanego okręgu. Z punktu tego promieniem OC=OA=OB kreślę szukaną linię krzywą.

Przez dany punkt na okręgu poprowadzić do niego styczną. Łączę dany punkt M ze środkiem O (fig. 130), następnie prowadzę przez punkt M prostopadłą do OM, która będzie szukaną styczną, albowiem ona styka się z okręgiem tylko w jednym punkcie M; wszystkie pochyłe jak OB są dłuższe niż prostopadła OM i dlatego punkt B nie znajduje się na okręgu koła.

Do danego trójkąta wpisać okrąg koła. To znaczy nakreślić okrąg koła, do którego boki trójkąta ĄB, BC, CA (fig. 131) byłyby stycznemi. Środek szu-

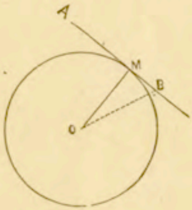


Fig. 130. — Kreślenie stycznej w punkcie danym na okręgu.

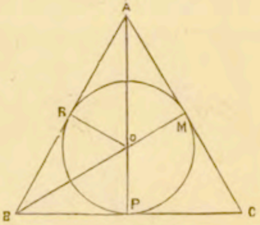


Fig. 131. — Kreślenie koła wpisanego w dany trójkąt.

kanego koła musi być równo odległy od trzech boków trójkąta.

Żeby rozwiązać to zadanie, dzielę kąty A i B na dwie równe części, za pomocą prostych AP i BM; środek koła wpisanego musi leżeć na obu tych prostych, a więc w punkcie ich wspólnego przecięcia się, to jest w punkcie O. Promieniem tego koła jest OR, prostopadła do AB.

CZĘŚĆ IX.

Pierwsze zasady mierzenia gruntów i zdejmowania planów.

40-a lekcya.

Określenia.

Wykonać pomiar gruntu znaczy obliczyć powierzchnię części roli, łąki, lasu i t. p., mających jako obwody odcinki bądź linij prostych, bądź krzywych.

Zdjąć plan jest to przedstawić te rozległe przestrzenie na arkuszu papieru ze ścisłem zachowaniem ich stosunkowej wielkości; inaczej dać znacznie zmniejszony ich obraz. Z tego określenia wypada, że wymiary planu figury równać się będą jej wymiarom rzeczywistym, jeżeli te pierwsze pomnożymy przez dowolnie obrane liczby, na przykład 500, 1000, 2000, gdy plan jest zrobiony, jak to się zwykle mówi na skalę 1 do 500, 1 do 1000, 1 do 2000.

Często się zdarza, że powierzchnie, które mamy zmierzyć, nie są płaskie, lecz zawierają pagórki doliny i t. d. W tym ostatnim wypadku pomiar i zdjęcie planu przedstawiają dość dużą trudność. Dlatego też w roku bieżącym nie będę wam nic jeszcze o tem mówił, zajmę się natomiast wyłącznie pomiarami powierzchni płaskich.

Mierzenie tych powierzchni uskutecznia się na zasadzie metod, które wam już poprzednio wskazałem. Jeżeli powierzchnie są zbyt skomplikowane rozkłada my je wtedy na figury prostsze: prostokąty, równoległoboki, trapezy, trójkąty.

W naturze prawie że nie napotykamy bardziej złożonych powierzchni, niż te, o których wam mówiłem na czternastej i dwudziestej szóstej lekcyi.

Co się tyczy mierzenia kątów, odcinków i t. d. na powierzchni ziemi, nie dość jest mieć przenośnik i cyrkiel, potrzebne są wtedy specyalne przyrządy, których użycie powinno być znane mierniczym (geometrom).

W rezultacie wszystko sprowadza się do wytykania odcinków linij prostych, mierzenia ich długości, kreślenia prostopadłych i mierzenia kątów.

Do tych czynności służą trojakiego rodzaju narzędzia miernicze.

41-a lekcya.

Główne narzędzia miernicze.

1. **Wytykanie odcinków linij prostych**. Odcinki linij prostych oznaczamy na powierzchni ziemi za

pomocą tyczek (fig. 132). Są to możliwie proste baliki drewniane, do których wierzchołków przytwierdzane bywają kartki białego papieru. Celując okiem przez górny brzeg kartki, ustawiamy tyczki tak, aby kartki

Fig. 132. — Wytykanie odcinków linij prostych na powierzchni ziemi.

były na jednej wysokości i aby, stojąc za pierwszą, nie widzieć następnych; możemy wtedy twierdzić, że wszystkie tyczki znajdują się na linii prostej.

2. **Mierzenie odcinków**. Mówiłem wam już poprzednio o łańcuchu mierniczym. Składa się on z ruchomo spojonych z sobą ogniw, 20 centymetrów długości każde; długość całego łańcucha wynosi 10 metrów. Na końcach łańcucha znajdują się żelazne kółka, które mogą być zakładane na kołki. Skoro odcinek został wytknięty, wyciągamy wzdłuż niego łańcuch (fig. 133), zarzucając kółko na pierwszą tyczkę; po dokładnem wyprostowaniu całego łańcucha zatykamy w końcowym jego punkcie żelazny kołek, na który zakładamy początkowe kółko łańcucha, przenosząc go dalej wzdłuż wytkniętego odcinka; po dokładnem wyciągnięciu łańcucha wbijamy w ziemię drugi żelazny kołek, a postępując tak dalej, będziemy mogli po ilości kołków sądzić o długości odcinka, mianowicie odcinek zawierać będzie tyle dekametrów (10 metrów), ile użyliśmy żelaznych kołków.

3. **Mierzenie kątów.** Wszelkie kąty na powierzchni ziemi mogą być zmierzone za pomocą *stolika mierniczego*.

Fig. 133. — Mierzenie odcinków linij prostych na powierzchni ziemi.

Jest to osadzony na trójnogu mały stolik (fig. 134), do którego naklejamy dobrze wyciągnięty arkusz papieru, który winien mieć położenie poziome. Na blacie stolika na osi pionowej obraca się w płaszczyźnie poziomej linijka mosiężna, zakończona dwiema mniejszemi, przez których środek przechodzą szczeliny, tak zwane *przezierniki*, służące do dokładnego celowania okiem do bardzo odległych punktów. Te mniejsze linijki, połączone z większą za pomocą zawiasów, mogą przyjmować położenie pionowe i noszą nazwę *celowników*. Linijka, o której była mowa, wraz z celownikami nazywa się *alidadą*.

Przypuśćmy, że trzy tyczki stanowią wierzchołki trójkąta. Chcąc zmierzyć jeden z jego kątów, ustawiamy stolik w ten sposób, aby pionowa oś alidady przypadała w jednym wierzchołku trójkąta, a przez alidadę celujemy do drugiego i kreślimy na papierze za pomocą zwykłego liniału linię prostą; obracając alidadę i celując

Fig. 134. — Mierzenie kątów przy pomocy stolika mierniczego.

do trzeciego wierzchołka, znów kreślimy na papierze w sposób powyżej opisany prostą, która z pierwszą tworzy szukany kąt, przecinając się z nią w środkowym punkcie stolika. Kąt ten merzymy następnie za pomocą przenośnika.

Opisany powyżej sposób kreślenia kąta używany bywa przy zdejmowaniu planu, jak to zobaczycie później.

4. **Wytykanie prostopadłych**. Można wytknąć prostopadłą za pomocą samego stolika mierniczego, gdyż jego boki przyległe są ściśle do siebie prostopadłe.

Chcąc przeto oznaczyć kierunek prostej, prostopadłej do innej, już wytkniętej, dostatecznem będzie, aby jeden brzeg stolika szedł w kierunku wytkniętego odcinka, drugi wtedy wskaże kierunek do niego prostopadły. Lecz zazwyczaj do tego celu używana bywa *węgielnica miernicza* (fig. 135). Jest to ośmiokątny foremny graniastosłup miedziany, wewnątrz pusty, wzdłuż którego środków ścian przechodzą *przezierniki*.

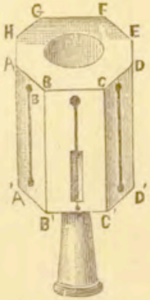


Fig. 135 — Węgielnica miernicza.

Ustawiwszy węgielnicę na trójnogu, celujemy przez dwa przeciwległe przezierniki wzdłuż tego odcinka, wytkniętego na powierzchni ziemi, do którego zamierzamy prowadzić prostopadłą; następnie, opuściwszy jeden przeziernik, przykładamy oko do następnego i znowu celujemy, wytykając odcinek na gruncie, który będzie do pierwszego prostopadły.

Jeżeli przechodzić będziemy od jednego przeziernika do bezpośrednio następnego, to wytkniemy odcinki tworzące kąt 45°, opuszczając zaś dwa przezierniki, otrzymamy kąt 135°.

Jeżeli teraz zechcemy spuścić prostopadłą do danej prostej z punktu, zewnątrz niej leżącego, postępujemy z węgielnicą wzdłuż danej linii tak, aby ona ciągle była widzianą przez dwa przeciwległe przezierniki i jednocześnie celujemy przez dwa prostopadłe do pierwszych przezierniki tak długo, dopóki nie dostrzeżemy punktu, z którego powinna być spuszczona prostopadła. Następnie pozostaje tylko wytknąć linię prostą.

Prócz opisanych istnieją inne jeszcze, bardziej złożone i dokładniejsze przyrządy, między innymi *grafometr*; lecz te przyrządy, o których wam wyżej mówiłem, zupełnie wystarczają do zwykłych pomiarów.

42-a lekcya.

Bezpośrednie kreślenie planu.

Za pomocą stolika mierniczego można nakreślić plan bezpośrednio, następnie dopiero zmierzyć powierzchnię otrzymanej figury i, znając skalę planu, obliczyć rzeczywistą wielkość części gruntu, przeniesionej na papier.

W tym celu należy ustawiać stolik kolejno we wszystkich wierzchołkach figury, wytkniętej na powierzchni ziemi (zmierzyć jej kąty), zaś za pomocą łańcucha zmierzyć długość wszystkich jej boków.

Przypuśćmy, że wytknięty kawałek gruntu ma kształt taki jak figura M (fig. 136). Przedewszystkiem ustawiam stolik w wierzchołku A i za pomocą linijki mierniczej (alidady) celuję w kierunkach AB i AH; kierunki te, które, przecinając się w punkcie *a*, tworząz kąt A (fig. 137), oznaczam na papierze liniami *ab* i *ah*. Następnie przenoszę stolik do wierzchołka B i mierzę długość wytkniętego odcinka AB, który niech zawiera 123 metry. Jeżeli plan mój ma być zrobiony na skalę 1 do 1000, w takim razie na ramieniu kąta *a*, odpowiadającym ramieniowi AB, odcinam od punktu *a* 123 milimetry; w ten sposób otrzymuję punkt *b*, który przedstawia punkt B figury na powierzchni ziemi. Z punktu B znów celuję w kie-

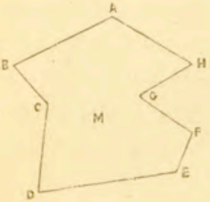


Fig. 136.—Figura na powierzchni ziemi, z której ma być zdjęty plan.

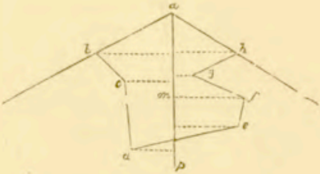


Fig. 137. — Plan, zdjęty z obok stojącej figury.

runkach BA i BC i w ten sposób kreślę na papierze ramię *bc* kąta *b*, równego kątowi B. Przenosząc stolik do punktu C i zmierzywszy długość odcinka BC równego n. p. 57 metrom, odcinam na dopiero co nakreślonem ramieniu kąta *b* część równą 57 milimetrom i tym sposobem otrzymuję punkt *c*.

Następnie w punktach D, E, G, H wykonywam takie same czynności, jakie uskuteczniłem w A, B i C i, jeżeli prowadziłem robotę dokładnie, bok *ha*, ostatnio otrzymany, powinien się zetknąć z bokiem *ah*, który nakreśliłem z samego początku.

W ten sposób nakreśliłem figurę *m*, która jest zmniejszonym obrazem, *planem*, figury M na gruncie.

Zmniejszenie to wykonane zostało według skali 1 do 1000, inaczej każdy milimetr na planie odpowiada metrowi na powierzchni ziemi. Ztąd też i każdy kwadratowy milimetr planu przedstawiać będzie kwadratowy metr gruntu.

Żeby teraz zmierzyć powierzchnię otrzymanej na papierze figury, prowadzimy n. p. przez wierzchołek *a* dowolną prostą i do niej spuszczamy prostopadłe z pozostałych wierzchołków figury, która w ten sposób zostanie podzielona na trzy trójkąty i pięć trapezów, których powierzchnię umiemy już obliczyć; pozostaje tylko dodać otrzymane wyniki, a od ich sumy odjąć powierzchnię trójkąta, mającego wierzchołek w *d* i nie objętego figurą.

Wypadek szczególny. Jeżeli wewnątrz figury na gruncie albo na jednym z jej boków znajduje się taki punkt, z którego widoczne są wszystkie jej wierzchołki, wtedy można sporządzić plan na stoliku mierniczym bez mozolnej wędrówki, o której wam poprzednio mówiłem.

Umieściwszy n. p. stolik wewnątrz figury ABCDE na gruncie (fig. 138), z obranego punktu celujemy kolejno do

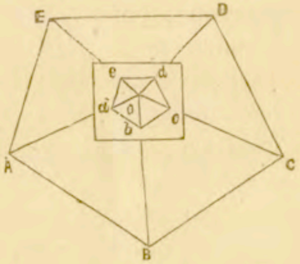


Fig. 138 — Szczególny wypadek zdejmowania planu.

wszystkich wierzchołków wielokąta i w ten sposób kreślimy kierunki O*a*, O*b*, O*c*, O*d*, O*e*, na gruncie zaś wytykamy i mierzymy odcinki OA, OB. OC, OD OE.

Jeśli chcemy plan przedstawić podług skali 1 do 1000, to na otrzymanych prostych O*a*, O*b*, O*c*, O*d*, O*e* odcinamy tyle milimetrów, ile metrów zawierają odpowiednie odcinki OA, OB, OC, OD, OE, a łącząc kolejno punkty: *a*, *b*, *c* *d*, *e*, otrzymujemy żądany plan.

43-a lekcya.

Pomiar właściwy.

Nie zawsze jednak możemy się posiłkować stolikiem mierniczym, gdy tymczasem mierzenie kątów zwykle nastręcza pewne trudności i wątpliwości.

Oto w jaki sposób najczęściej postępujemy. Wyjdźmy na plac, znajdujący się nawprost szkoły, zmierzmy jego powierzchnię i zdejmijmy z niego plan. Jak widzicie, plac ten jest dość nieforemny.

Wytknijmy naprzód dowolną prostą, przechodzącą przez punkt A, i zmierzmy za pomocą łańcucha odcinek jej AM (fig. 139); następnie znanym już sposobem wytknijmy za pomocą węgielnicy mierniczej prostopadłe, spuszczone z punktów B, C, D, E, F na odcinek AM.

W ten sposób figura nasza na gruncie zostanie podzielona na trzy trójkąty (AB*b*, AF*f*, PC*c*) i trzy trapezy (*b*BC*c*, *e*ED*d*, *f*FE*e*).

A teraz weźmy inne tyczki, wytknijmy i zmierzmy wszystkie boki (AB, BC, CD, DE, EF, FA) i wszystkie prostopadłe (B*b*, C*c*, D*d* E*e*, F*f*), jak również wszystkie części składowe odcinka AM (A*b*, *bf*, *fe*, *ed*), tudzież P*d*.

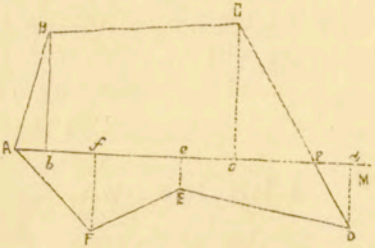


Fig. 139. — Pomiar figury na gruncie.

Zużyliśmy na to sporo czasu, lecz robota na gruncie skończona. Umieśćmy teraz na tym pobieżnie nakreślonym szkicu figury placu na odpowiednich bokach liczby, wyrażające ich długości.

Wróćmy obecnie do szkoły i zajmijmy się obliczeniem powierzchni placu, która oczywiście równać się będzie sumie powierzchni wszystkich trójkątów i trapezów mniej powierzchnia trójkąta PDd.

Otrzymujemy przeto kolejno:

Powierzchnia trójkąta $ABb = Bb \times {}^1/_2 Ab$,
— — $AFf = Ff \times {}^1/_2 Af$,
— trapezu $BbCc = (Bb + Cc) \times {}^1/_2 bc$,
— — $FfEe = (Ff + Ee) \times {}^1/_2 fe$,
— — $EeDd = (Ee + Dd) \times {}^1/_2 ed$.
— trójkąta $CcP = Cc \times {}^1/_2 Pc$.

Od tej sumy należy odjąć:

Powierzchnię trójkąta PD*d* = D*d* × $^1/_2$P*d*.

Pozostaje zastąpić powyższe odcinki odpowiedniemi liczbami, wykonać wskazane działania, aby otrzymać powierzchnię placu. I oto nasz pomiar skończony.

Teraz należy zdjąć plan. Nic nad to łatwiejszego. Najlepiej będzie użyć skali 1 do 1000, według niej bowiem najłatwiej obliczać.

Kreślę na papierze dowolnej długości linię prostą, wyobrażającą AM. Następnie odcinam na niej długości A*b*, *bf*, *fe*, *ed* 1000 razy zmniejszone i z punktów *b*, *f* *e*, *d* prowadzę do linii wyobrażajacej AM prostopadłe *b*B, *f*F, *e*E, *c*C, *d*D, zawierające odpowiednio tyle milimetrów, ile metrów zawierały one na gruncie. Otrzymane punkty kolejno łączę i znajduję plan placu.

44-a lekcya.

Trudności w szczególnych przypadkach.

Wzięliśmy powyżej wypadek bardzo prosty. Żadnej nie mieliśmy trudności w przejściu po placu we wszystkich kierunkach i w wytykaniu na nim prostych według życzenia.

Lecz gdyby należało zmierzyć na przykład las, przez który z trudnością można się przedostać, a co idzie za tem prawie niepodobieństwem jest wytknąć linię prostą, pytanie jak w takim wypadku postąpić?

I to również nie jest zbyt trudne. Jeżeli nie mogę wejść do lasu, okrążam go. W tym celu wytykam jeden z boków lasu AG (fig. 140); przedłużając go w obie strony, prowadzę dalej za pomocą węgielnicy mierniczej i wytykam prostopadłe do tego boku z punktów B i E, kończę zaś moją robotę przeprowadzeniem przez punkt D wspólnej prostopadłej do prostych ER i BM.

Tym sposobem wytknąłem naokoło lasu prostokąt MN*d*R. Oczywiście, że powierzchnia lasu równać się będzie powierzchni tego prostokąta, mniej suma powierzchni figur, zawartych między granicami lasu i obwodem prostokąta.

Powierzchnia prostokąta równa się, jak wiadomo, MR×MN. Co się tyczy powierzchni figur, o których wyżej była mowa, to te mogę obliczyć, podzieliwszy

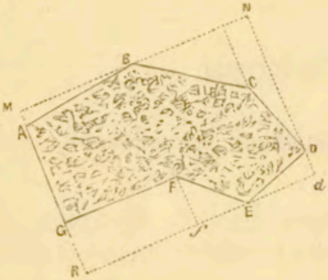


Fig. 140. — Pomiar gęstego lasu.

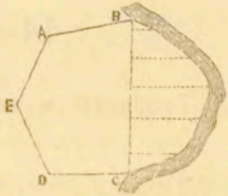


Fig. 141. — Pomiar gruntu, ograniczonego z jednej strony linią krzywą.

je na trójkąty i trapezy i zmierzywszy ich boki i odpowiednie prostopadłe, co polega wyłącznie na cierpliwości.

A teraz inna jeszcze trudność. Wszystkie mierzone dotąd powierzchnie były ograniczone odcinkami linij prostych. Jak postąpić w wypadku, gdy to będą linie krzywe?

Oto mamy na przykład (fig. 141) szkic posiadłości ziemskiej, której jeden kraniec stanowi rzeka. Przedewszystkiem przetnę ją na dwie części za pomocą linii prostej BC. Część ABCDE zmierzyć potrafię.

Co się zaś tyczy drugiej części, to mogę ją podzielić na bardzo wielką ilość trapezów, ponieważ bardzo małe części brzegów rzeki, pomimo ich falistości i krętości, mogą być uważane jako odcinki linij prostych.

Oczywiście, że pomiar mój będzie tem dokładniejszy, im ilość trapezów jest większa.

Dostrzeżone omyłki w druku.

Strona	wiersz od góry	wiersz od dołu	zamiast	powinno być
2	1	„	zgeometryi	z geometryi
4	12	„	ż	że
6	1	„	zarzut	zarzut,
12	„	1	rodzaiu	rodzaju
13	1	„	powierzchn	powierzchni
„	2	„	płaszczyznamı	płaszczyznami
„	3	„	krzywych	krzywych,
39	4	„	AC	BC
„	„	„	BD	AD
43	2	„	(fig. 43.	(fig. 43).
48	„	7	(fig. 50.	(flg 50).
58	10	„	(fig. 62,	(fig. 62),
64	„	1	(fig. 67,	(fig. 67),
75	2	„	sposób	sposób,
80	2	„	Mierzenie powierzchni,	Mierzenie powierzchni i objętości brył,
105	8	„	równolegle	równo odległe
112	„	8	merzymy	mierzymy.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ III.

Mierzenie objętości brył, ograniczonych częściami powierzchni płaskich (ścianami) i odcinkami linij prostych (krawędziami).

CZĘŚĆ IV.

Mierzenie długości odcinków (części) linij krzywych.

CZĘŚĆ V.

Mierzenie powierzchni płaskich, ograniczonych liniami krzywemi.

CZĘŚĆ VI.

Mierzenie objętości brył, ograniczonych powierzchniami płaskiemi i krzywemi.

CZĘŚĆ VII.

Mierzenie powierzchni i objętości brył, ograniczonych okrągłemi powierzchniami.

CZĘŚĆ VIII.

Kreślenie figur geometrycznych.

CZĘŚĆ IX.

Pierwsze zasady mierzenia gruntów i zdejmowania planów.