O funkcyach Fuchsa dwu zmiennych zespolonych.

Przez

S. Kępińskiego.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 4. listopada 1895 r.
ref. czł. Karliński.

§. 1.

Zadaniem mojem w tej pracy jest rozważyć dokładnie, w jakim zakresie istnieją pewne funkcye dwu zmiennych, których badaniem zajął się przed kilkunastu laty prof. Fuchs.

Aby rzecz jaśniej przedstawić, podam naprzód kilka historycznych uwag.

W pierwszej z dwu not, drukowanych w „*Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* 1880“ p. t. „*Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale etc. entstehen*“ (p. 170 i n.), określa prof. Fuchs nowy dział funkcyi, które tworzy na podstawie rozwiązań równań różniczkowych, jednorodnych, rzędu drugiego, w ten sam sposób, w jaki się tworzy funkcye Abelowe na podstawie funkcyi algebraicznych.

Niech więc y_1, y_2 przedstawiają dwa rozwiązania, od siebie liniowo niezależne, równania różniczkowego:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p\frac{dy}{dz} + qy = 0, \tag{1}$$

gdzie p, q są funkcyami wymiernemi zmiennej z, a mianowicie [1]:

$$p=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1-k_i'-k_i''}{z-e_i},$$

(2)

$$q=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{i=n}}\left[\sum\frac{k_i'k_i''(e_i-e_1)\ldots(e_i-e_{n-1})}{z-e_i}+k_n'k_n''+Az^{n-4}+\ldots+N\right],$$

zaś

$$\sum_{i=1}^{i=n}(k_i'+k_i'')=n-1.$$

Przy pomocy funkcyi y_1, y_2 utwórzmy wyrażenia:

(3)
$$\int_{\zeta_1}^{z_1}y_1\,dz+\int_{\zeta_2}^{z_2}y_1\,dz=u_1$$

$$\int_{\zeta_1}^{z_1}y_2\,dz+\int_{\zeta_2}^{z_2}y_2\,dz=u_2,$$

w których krańce dolne ζ_1, ζ_2 są liczbami stałemi. Wówczas równania te określają pewne związki między z_1 i z_2 a u_1 i u_2 i właśnie wyrażenia

(4) $$z_1+z_2=F_1(u_1,\,u_2),\ z_1\,.\,z_2=F_2(u_1,\,u_2)$$

przedstawiają funkcye, które były przedmiotem badań prof. Fuchsa, a które dlatego nazywam funkcyami Fuchsa dwu zmiennych zespolonych.

Obszerniej badał te funkcye prof. Fuchs w pracy: *Über eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen*" (Crelle's Jour. t. 89, str. 151) i krótkiej nocie, umieszczonej w temże piśmie t. 90, str. 71—73.

Głównym celem tych rozpraw jest znalezienie warunków koniecznych i wystarczających, pod któremi owe funkcye symetryczne z_1+z_2 i $z_1\,.\,z_2$ (4) są funkcyami jednowartościowemi zmiennych u_1 i u_2.

W pracy tej zaszła pewna niedokładność, wyświetlona następnie w zupełności w szeregu znakomitych prac Poincare'go [2]) i Kleina [3]),

---

[1]) Porówn. moją rozpr.: „O całkach rozw. równ. różn. etc." (Rozpr. wydz. mat.-przyr. tom XXV p. 264, rozdz. I).

[2]) Poincaré: Fonctions fuchsiennes. Acta math. t. I, III.

[3]) Klein: Math. Ann. t. 24 p. 214 (Fussnote); Autographirte Vorlesungen über Diffgl. I,

o której tu wspominam jedynie dlatego, że się stała źródłem błędu i niepotrzebnych zastrzeżeń w innej pracy, którą nam się niżej zająć wypadnie.

Mianowicie, odpowiednio do wartości, które przyjmują z_1 i z_2 w punktach osobliwych równania różniczkowego (1), rozróżnia prof. Fuchs l. c. rozmaite przypadki. W jednym z tych przypadków rozważa pytanie, kiedy funkcya automorficzna $z=\varphi(\eta)$ jest funkcyą jednowartościową zmiennej $\eta=\frac{y_2}{y_1}$. Owóż, jako odpowiedź na to pytanie, stawia prof. Fuchs twierdzenie: „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $z=\varphi(\eta)$ była funkcyą jednowartościową, jest, aby w punktach osobliwych nie była rozgałęziona“. Jak wiadomo, jest to tylko warunkiem koniecznym, potrzeba bowiem jeszcze innych warunków dodatkowych, tyczących się t. z. parametrów akcessorycznych [1]).

Aby ten punkt jaśniej przedstawić, pozwolę sobie przytoczyć następujący przykład.

Niech

$$z=\varphi(\eta)$$

przedstawia funkcyę modułową, o której na pewno wiemy, że jest jednowartościowa i że jako naturalną granicę posiada np. oś rzeczywistą płaszczyzny η, tj., że istnieje w jednej tylko np. górnej połowie tej płaszczyzny. Połowę tę płaszczyzny można przy pomocy funkcyi

$$\eta=\int^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

(gdzie k, potrzeba jeszcze odpowiednio dobrać), odtworzyć czyli odwzorować na prostokąt, którego wierzchołkami są punkty $\pm K$, $\pm K+iK'$, w przypuszczeniu, że $4K$, $2iK'$ są peryodami powyższej całki.

Analitycznie znaczy to, żeśmy zamiast η wprowadzili zmienną ξ. Tym sposobem otrzymujemy znowu funkcyę jednowartościową

$$z=\varphi_1(\xi),$$

która istnieje tylko wewnątrz owego prostokąta, a więc jako granicę naturalną posiada obwód tego prostokąta.

Ów prostokąt odtwórzmy nareszcie na pierścień kołowy n-krotnie pokryty. Możemy tego dokonać przy pomocy funkcyi

$$\xi=\frac{k'}{2\pi n}\log\zeta.$$

---

[1]) Por. moją, wyżej cytowaną pracę, w której te warunki są w krótkości przytoczone.

Tym sposobem otrzymamy z funkcyi, $\varphi_1(\xi)$ funkcyę

$$z = \varphi_2(\zeta),$$

istniejącą wewnątrz owego pierścienia, która na jego polu widocznie nie posiada żadnych punktów rozgałęzienia (znajdować się one mogą na kołach ograniczających pierścień, stanowiących naturalną granicę, a więc poza które wyjść nie możemy) — a przecież, z powodu n-krotnego pokrycia pierścienia, jest wielowartościowa. I w istocie dla wartości ζ przed i po obiegu około punktu zerowego przyjmuje ξ dwie różne od siebie wartości: ξ i $\xi + \frac{ik'}{n}$, dla których znowu η, a więc także, ogólnie mówiąc, i z dwie różne wartości mogą otrzymywać.

W krótkim czasie potem ogłosił prof. Fuchs nową pracę: „*Über Functionen zweier Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebener Functionen entstehen*“ (*Abh. der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*, t. 27, 1881), w której rozważa funkcye F_1, F_2, jeszcze ogólniejsze od poprzednich, biorąc jako podstawę funkcye y_1, y_2, w pewien sposób określone, lecz niekoniecznie czyniące zadość równaniom różniczkowym (1).

W rozprawie tej wprowadza znowu autor jako konieczny warunek jednowartościowości funkcyi F_1, F_2 jednowartościowość albo nawet dwuwartościowość funkcyi $z = \varphi(\eta)$, gdzie $\eta = \frac{y_2(z)}{y_1(z)}$, lecz wskutek ogólniejszego w tej pracy założenia nie zastanawia się już nad tem, kiedy funkcya $z = \varphi(\eta)$ jest jedno — a kiedy dwuwartościowa. Wskutek tego ta rozprawa jest bez zarzutu i jako najbardziej wyczerpująca w tym przedmiocie, stanowić dla mnie będzie punkt wyjścia.

W następnych kilku latach, pomimo konkursu króla szwedzkiego, ogłoszonego w Acta mathem. (VII, 2, 1885), mającego na celu dalsze rozwinięcie funkcyi Fuchsa (dwu zmiennych), — o ile mi wiadomo — nic się ważniejszego w tym przedmiocie nie pojawiło, wyjąwszy kilka twierdzeń Fuchs'a, stosujących się do funkcyi o więcej, jak dwu zmiennych.

Dopiero w r. 1890 ukazała się obszerniejsza praca p. Lohnsteina: „*Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche Integrale besitzen, durch deren Umkehrung sich eindeutige Functionen ergeben*“ (Inaugural-dissertation, Berlin), w której powyżej omawiany błąd znowu się zjawia. W pracy tej, jak zresztą jej tytuł wskazuje, są rozwinięte szczegółowiej twierdzenia Fuchs'a w zastosowaniu do równań różniczkowych (1). Głównie idzie tu wprawdzie o wyliczenie wszystkich takich równań różniczkowych, których całkami są funkcye algebraiczne, a więc które prowadzą do szczególnych funkcyj Abelowych, jednak w pierwszych kilku rozdziałach jest także mowa o jednowartościowości funkcyi $z = \varphi(\eta)$. Tak n. p. czytamy: „*wir machen zuerst Annahme, dass für alle endlichen singulären Punkte* (nawet wtedy, kiedy ich liczba jest większa od 3) *die Wurzeln der determinierenden Fundamenthalgleichung der Differentialgleichung* (1) *die Form* $k_i' = -1 + \frac{1}{n}$, $k_i'' = -1 + \frac{2}{n}$, *für* $z = \infty$ *die Form* $k_n' = 1 + \frac{1}{n}$, $k_n'' = 1 + \frac{2}{n}$ *haben. Dann ist klar, dass z eine eindeutige Function von* η *ist* (zob. str. 15 i następne). I t. d.

Z powodu tych niedokładności wypowiedział prof. Klein w swoich wykładach [1]) następującą uwagę: „*hiernach scheint es sehr zweifelhaft, ob Angaben des Herrn Fuchs über die Functionen* F_1, F_2 *irgend zutreffend sind, bezw. welche Bedeutung sie haben mögen.*

Ta uwaga spowodowała mnie, do bliższego i szczegółowego zajęcia się owemi funkcyami. I w istocie na pierwszy rzut oka nie jest jasne, jak daleko sięga wpływ zachodzących niedokładności; potrzeba było je i z niemi związane niepotrzebne zastrzeżenia usunąć, aby znaleźć prawdziwy zakres i znaczenie funkcyi F_1, F_2.

Sądzę, że zdołałem otrzymać zupełną na to pytanie odpowiedź, którą przedstawię w następnych ustępach.

§. 2.

W tym celu przytoczę naprzód w związku z sobą warunki Fuchsa, wzięte z rozprawy: „*Über Functionen zweier Variabeln* etc.“ *(Abh. d. k. G. zu Göttingen*, 1881) i objaśnię je kilku słowami.

a) Rozwijając funkcye (4) na szeregi, przy pomocy równania (3), dla takich wartości u_1, u_2, dla których z schodzi się z punktami osobliwymi równania różniczkowego (1), dochodzi się do wniosku, że

wykładnik najniższej potęgi w rozwinięciu funkcyi

$$ay_1 + by_2,$$

gdzie a, b są stałemi) posiada dla punktu osobliwego równania (1), który leży w odległości skończonej, postać:

$$\frac{-n+1-k}{n},$$

[1]) Klein, Diffgl. Heft II p. 87. 1891.

zaś w punkcie $z = \infty$ postać:

$$\frac{n+1-k}{n}.$$

(zob. l. c. str. 9, 32, 38).

b) Funkcya

$$z = \varphi(\eta)$$

$\left[\eta = \frac{y_2}{y_1}\right]$ nie może być więcej jak dwuwartościowa. O potrzebie tej własności można się przekonać, rozważając takie systemy wartości u_1, u_2, dla których z_1, z_2 czynią zadość równaniu:

$$\begin{vmatrix} y_1(z_1) & y_1(z_2) \\ y_2(z_1) & y_2(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

(zob. str. 14, 21).

c) Wprowadzając tę nową zmienną η w równania (3), otrzymuje się [na podstawie b)] równania:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\eta_1} \sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta + \int_{\varepsilon_2}^{\eta_2} \sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta = u_1$$

(3')

$$\int_{\varepsilon_1}^{\eta_1} \eta \sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta + \int_{\varepsilon_2}^{\eta_2} \eta \sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta = u_2.$$

(zob. str. 24).

d) Co się tyczy funkcyi $\psi(\eta)$, to posiada ona następujące własności:

α) Jest jednowartościowa.

β) Punkty n i e i s t o t n i e o s o b l i w e funkcyi $z = \varphi(\eta)$ pozostają takimiż dla funkcyi $\psi(\eta)$. Jeżeli nadto punkt $\eta = \infty$ jest takim nieistotnie osobliwym punktem funkcyi $z = \varphi(\eta)$, to wyrażenia: $\eta^3 \sqrt{\psi(\eta)}$, albo ewentualnie $\eta^{\frac{5}{2}} \sqrt{\psi(\eta)}$ są w okolicy punktu $\eta = \infty$ funkcyami jednowartościowemi skończonemi i różnemi od zera, stosownie do tego, czy $z = \varphi(\eta)$ jest dla $\eta = \infty$ funkcyą jednowartościową, czy też dwuwartościową.

(zob. l. c. str. 33).

e) Nad punktami i s t o t n i e o s o b l i w y m i, z powodu ich doniosłej ważności, zastanowimy się bliżej.

Z równań (3') wynika

$$\sqrt{\psi(\eta)} = y_1 \frac{dz}{d\eta},$$

albo, z uwagi, że

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{y_1^2}{y'_2 y'_2 - y_2 y'_1} = c y_1^2 e^{\int p\,dx},$$

$$\sqrt{\psi(\eta)} = c y_1{}^3 \prod_{i=u}^{i=n-1} (z-e_i)^{1-k'_i-k''_i}. \qquad (5)$$

Możemy zawsze przyjąć, że

$$k'_i < k''_i,$$

a więc, że według a)

$$k' = \frac{-n-k+1}{n}, \qquad (6)$$

gdzie $k=0$, albo też jest liczbą całkowitą dodatną. Lecz według (b) jest

$$k''_i - k'_i = \frac{m}{n},$$

gdzie $m = 1$, albo $m = 2$. Mamy więc według (5):

$$\sqrt{\psi(\eta)} = (z-e_i)^{\frac{1-m-k}{n}} \mathfrak{P}(z-e_i),$$

gdzie $\mathfrak{P}(z-e_i)$ oznacza szereg potęgowy argumentu $(z-e_i)$.

Ponieważ wykładnik $\frac{1-m-k}{n}$ może otrzymywać, jak z powyższego wynika, tylko wartości ujemne lub, co najwyżej, wartość zero, więc także w punktach osobliwych jest $\sqrt{\psi(\eta)}$ od zera różne. A zatem funkcya $y_1 \frac{dz}{d\eta} = \sqrt{\psi(\eta)}$ nie jest dla żadnego punktu osobliwego równą zeru; innemi słowy:

$$\frac{1}{\psi(\eta)} \text{ jest funkcyą całkowitą.}$$

f) Można okazać (por. Lohnstein str. 12, 13), że dla punktów istotnie osobliwych funkcyi $z = \varphi(\eta)$, otrzymuje funkcya $\psi(\eta)$ wartości nieskończenie wielkie. Punkty te są więc tylko biegunami funkcyi $\psi(\eta)$.

g) Według e) i f) jest więc

$$\frac{1}{\psi(\eta)} = G(\eta)$$

funkcyą całkowitą wymierną.

§. 3.

Tym sposobem prof. Fuchs okazał, że całki

$$\int y_1\, dz,\ \int y_2\, dz$$

przechodzą, przez wprowadzenie zmiennej η, na całki

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{G(\eta)}},\ \int \frac{\eta d\eta}{\sqrt{G(\eta)}},$$

gdzie, jak zauważyliśmy pod (g), $G(\eta)$ jest funkcyą całkowitą wymierną.

W dalszym ciągu rozważymy oddzielnie dwa przypadki.

I) Funkcya $z = \varphi(\eta)$ nie posiada żadnego punktu istotnie osobliwego. Wtedy n i e jest także $\eta = \infty$ punktem istotnie osobliwym, a więc, według (α, β), funkcya $G(\eta)$ jest funkcyą całkowitą wymierną stopnia 5-go albo 6-go. Wówczas mamy do czynienia z całkami Abelowemi rodzaju $p = 2$ (hypereliptycznemi), których odwrotność prowadzi do funkcyj Abelowych. Te właśnie przypadki stanowią główny cel badania pracy Dra Lohnsteina.

II) Jeżeli funkcya $z = \varphi(\eta)$ posiada punkt istotnie osobliwy, to zawsze można, przy pomocy podstawienia liniowego, do tego doprowadzić, że nim będzie punkt $\eta = \infty$. Lecz dla takiego punktu otrzymuje całka

$$\int (ay_1 + by_2)\, dz = \int \frac{a + by}{\sqrt{G(\eta)}}\, d\eta$$

wartość nieskończenie wielką, albowiem tor całkowania na płaszczyźnie z jest nieskończenie długi (por. Lohnstein, l. c. str. str. 15). Stąd wynika, że funkcya $G(\eta)$ może być, co najwyżej, stopnia 3-go

$$G_3(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3,$$

w przeciwnym bowiem razie $\displaystyle\int \frac{a + b\eta}{\sqrt{G(\eta)}}\, d\eta$ byłaby wszędzie skończona.

Ale i na odwrót na podstawie I) wnosimy, że jeżeli $G(\eta)$ nie jest stopnia 5-go albo 6-go, to funkcya $z = \varphi(\eta)$ posiada przynajmniej jeden punkt istotnie osobliwy.

Stosownie do wartości, które przyjmować mogą spółczynniki α, β, γ, δ funkcyi $G(\eta)$, rozróżnimy s i e d m przypadków:

1) $G(\eta) = \alpha$,
2) $G(\eta) = \alpha + \beta\eta$,
3) $G(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2$, $(\gamma\alpha - \beta^2) \gtrless 0$,
4) $G(\eta) = (a + b\eta)^2$, t. j. $(\gamma\alpha - \beta^2) = 0$,
5) $G(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$,
6) $G(\eta) = (a + b\eta)(c + d\eta)^2$,
7) $G(\eta) = (a + b\eta)^3$.

Nadto zauważymy, że, wprowadzając we wyrażenie (5, str. 217) $\psi(\eta) = \frac{1}{G(\eta)}$, otrzymamy następujący związek między rozwiązaniami równania różniczkowego (1):

$$y_1^6 \cdot G\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = R(z)^{\frac{1}{r}}, \tag{7}$$

w którym $R(z)$ przedstawia funkcyę wymierną zmiennej z, zaś r oznacza liczbę całkowitą.

Ważny ten związek, zresztą dobrze znany, pozwoli nam ocenić, w których przypadkach istnieją funkcye Fuchsa F_1, F_2. Do takich bowiem związków odnosi się następujące jego twierdzenie (Crelles J. t. 81 str. 127): „jeżeli zdarzy się, że forma podwójna, stopnia wyższego niż drugi, której zmiennemi są całki równania różniczkowego (1), od siebie linijowo niezależne, jest równa pierwiastkowi z funkcyi wymiernej, to owo równanie (1) posiada tylko rozwiązania algebraiczne".

Związki tego rodzaju zachodzą istotnie w przypadkach 2, 3, 4, 5, i 6, gdzie formy są stopnia wyższego jak drugi, mianowicie:

$$2')\ y_1^5(ay_1 + by_2) = R(z)^{\frac{1}{r}}$$

$$3')\ y_1^4(\alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_2^2) = R(z)^{\frac{1}{r}}$$

$$4')\ y_1^2(\alpha y_1 + \beta y_2) = R(z)^{\frac{1}{r}}$$

$$5')\ y_1^3(\alpha y_1^3 + \beta y_1^2 y_2 + \gamma y_1 y_2^2 + \delta y_2^3) = R(z)^{\frac{1}{r}}$$

$$6')\ y_1^3(ay_1 + by_2)(cy_1 + dy_2)^2 = R(z)^{\frac{1}{r}}.$$

Według powyższego twierdzenia winny mieć tu należące równania różniczkowe rozwiązania algebraiczne. Nie zgadza się to jednak z naszem założeniem pod II), że funkcya $z = \varphi(\eta)$ posiada przynajmniej jeden punkt istotnie osobliwy. Jest więc tylko jeden wniosek możliwy:

W przypadkach 2), 3), 4), 5) i 6) niema równań różniczkowych, czyniących zadość warunkom Fuchs'a wymienionym w ustępie 2-im. Innemi słowy, w tych przypadkach nie istnieją funkcye Fuchsa F_1, F_2 jednowartościowe.

Co się tyczy przypadków 1) i 7), to związek 7) redukuje się w nich do:

$$1') \; y_1 = R(z)^{\frac{1}{r}}$$

$$7') \; y_1(ay_1 + by_2) = R(z)^{\frac{1}{r}}.$$

Z powyżej przytoczonego twierdzenia Fuchsa i jego odwrócenia (por. l. c.) wynika, że równanie różniczkowe (1) posiada w tych przypadkach całki przestępne (nie algebraiczne).

I w istocie, używając równania (5), można łatwo w obu tych przypadkach znaleźć funkcyę wymierną $R(z)$. Jeżeli się nadto wyrazi funkcyę $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ przez z, to się otrzyma ogólną postać całek y_1, y_2 (por. Lohnstein l. c. §. 2, 3). Na podstawie zaś tych całek można znaleźć odpowiednie równania różniczkowe.

Owoż okazało się, że wszystkie te równania różniczkowe, z wyjątkiem jednego, o którem niżej, wyszukał i przytoczył jako przykłady sam prof. Fuchs; takich więc równań istnieje tylko kilka przypadków.

We wszystkich tych przypadkach otrzymuje się funkcye Fuchsa F_1, F_2 przy pomocy funkcyi podwójnie peryodycznych.

Pozostaje jeszcze do omówienia przypadek, który, jak wspomniałem, uszedł uwagi wzmiankowanych autorów. Jest on dlatego ważny, że jest jedynym przykładem na to, że funkcya $z = \varphi(\eta)$, posiadająca punkt istotnie osobliwy, jest dwuwartościowa, a pomimo tego funkcye $z_1 + z_2 = F_1$, $z_1 z_2 = F_2$ pozostają jednowartościowemi.

Jakoż, jak łatwo sprawdzić, stała c_2 równania różniczkowego, które się według powyższej reguły w przypadku (7') znajduje, może otrzymywać nie tylko wartość $c_2 = \frac{\pi i}{\omega}$, gdzie 2ω jest peryodem funkcyi podwójnie peryodycznej (por. Lohnstein str. 24, 25), ale także wartość $\frac{2\pi i}{\omega}$, (co właśnie powoduje, że $z = \varphi(\eta)$ jest funkcyą dwuwartościową).

Poprzedzające wyniki możemy ująć w następujące twierdzenie:

Warunki Fuchsa, odnoszące się do funkcyi dwu zmiennych, tworzących się na podstawie równań różniczkowych, jednorodnych, rzędu 2-go, oraz posiadających spółczynniki wymierne, są konieczne i wystarczające. Wyjąwszy przypadki algebraiczne, istnieje jednak tylko kilka takich równań różniczkowych. We wszystkich takich niealgebraicznych przypadkach można otrzymać funkcye Fuchsa przy pomocy funkcyj podwójnie peryodycznych i wszystkie te przypadki [z wyjątkiem jednego, kiedy $z=\varphi(\eta)$ jest dwuwartościowe], przytoczył już jako przykłady prof. Fuchs w drugiej nocie, drukowanej w rozprawach kr. towarzystwa getyngskiego w r. 1880-ym.