O wpływie temperatury na ruch zegarów a zwłaszcza chronometrów

podał

Ludwik Birkenmajer.

(Rzecz przedłożona na posiedzeniu d. 3 Lutego 1896).

W ciągu doświadczeń wahadłowych, jakie w sierpniu i październiku z. r. wykonałem był wspólnie z prof. Fr. Karlińskim w celu wyznaczenia natężenia siły ciężkości w Krakowie (jakoteż dwóch innych miejscowościach W. X. Krak.) przyrządem pomysłu pułkown. Sternecka, najwięcej zachodu, że nie powiem kłopotu, sprawiała konieczność bardzo dokładnego wyznaczania ruchu zegaru (H) będącego częścią składową rzeczonego przyrządu. Rozpatrując bowiem oddzielnie wpływ wielorakich czynności i pomiarów tworzących całość tych doświadczeń na wynik końcowy, t. j. na szukany czas wahnienia wahadeł Sterneckowskich, znajduje się, że zachowując należyte środki ostrożności, daje się ów czas wyznaczyć z niepewnością nie przekraczającą dwóch lub trzech dziesięciomilionowych części jednej sekundy (2—3 jednostki na siódmem miejscu dziesiętnem), jeżeli tylko niepewność ruchu zegaru nie przekroczy wartości $\pm 0^{\cdot s}01$ na dobę. Jakoż w narzędziu, o którem mowa, możliwy — choć nieprawdopodobny — błąd 1^s (na dobę) ruchu zegaru musiałby wywołać w ostatecznym rezultacie błąd aż 59ciu jednostek siódmego miejsca dziesiętnego, a więc bardzo już znaczny. Wprawdzie po obserwatoryach, gdzie prowadzone są regularne wyznaczenia stanu głównego zegara, a co zatem, zmienne stany i ruchy wszystkich innych zegarów tak wahadłowych jakoteż chronometrów są utrzymywane w ciągłej ewidencyi, wyznaczenie ruchu głównego zegaru aż po 0.^{s}01 (zawsze na dobę) nie nastręcza żadnych trudności, jeżeli tylko kompensacya tego ostatniego jest należyta; w innych jednak miejscowościach niema tej dogodności, a oddający się pomiarom jest zmuszony w takich razach wyznaczać ruch zegaru *H* za pomocą własnych na miejscu obserwacyj. Sprawa utrudnia się jeszcze bardziej skutkiem okoliczności, iż zegar *H* nie daje się porównywać bezpośrednio z niebem: wraz z całym przyrządem Sterneckowskim musi bowiem znajdować się on w piwnicy (celem zabezpieczenia największej stałości temperatury), podczas gdy narzędzie służące do wyznaczania czasu (luneta przejściowa) musi być umieszczone na powierzchni ziemi w lokalu mającym otwór wzdłuż większej części południka. Wobec tego nieuniknione jest pośrednictwo przenośnego zegaru, a więc chronometru, który utrzymując ruch zegaru *H* w nieustannej (podczas doświadczeń) kontroli, sam musi być, pośrednio lub bezpośrednio, porównywany wprost z niebem. Upragniona dokładność rezultatu zawisła więc w przeważnej części od dokładności z jaką ruch chronometru — ewentualnie jego zmiana — jest znany. Okoliczność, że właściwe doświadczenia wahadłowe, podczas których jedynie zależy na bardzo dokładnej znajomości ruchów obu zegarów, trwają zazwyczaj tylko jeden albo dwa dni i że doświadczenia te powinny być, ze względu na ich dokładność, wykonane jak najściślej pomiędzy dwoma astronomicznemi wyznaczeniami stanów chronometru, tuż przed ich rozpoczęciem i po ich ukończeniu, wywołuje nową trudność, a w ślad zatem otwiera źródło mniejszej lub większej niedokładności całego pomiaru. Przypuściwszy bowiem nawet, iż obydwa wieczory pomiędzy którymi robiono doświadczenia, były pogodne, że więc w godzinach późno wieczornych względnie nocnych, raz i drugi powiodło się wyznaczenie stanu chronometru przez bezpośrednie obserwacye astronomiczne, to i wówczas wątpić należy, ażali ruch tego zegaru, wyprowadzony z przeciągu czasu obejmującego co najwyżej dwie doby, dawałby się podać z dokładnością aż po 0.^{s}01 sięgającą, a to nawet używając lepszych lunet przejściowych. Jeżeli po obserwatoryach ruch zegarów daje się wyznaczyć z dokładnością 0.^{s}01, niekiedy nawet większą, to prócz dobroci i s t a ł o ś c i przyrządów w tym celu używanych (koła południkowe z chronografami elektrycznymi) pochodzi to właśnie ztąd, iż pomiędzy jednem a drugiem oznaczeniem czasu upływa nieco dłuższy przeciąg czasu, pospolicie tydzień a niekiedy i więcej. Dobroć kompensacyi zegaru wahadłowego daje natenczas ustaloną rękojmię znacznej dokładności międzyległych stanów zegarów interpolacyjnie oznaczonych, a względnie zmiennych ruchów z trzech sąsiednich oznaczeń czasu tak samo wyprowadzonych dla dowolnej chwili pośredniej.

Z powyższego wynika, iż posługując się chronometrami w celach, o których tutaj mówimy, odpada znaczna część przytoczonych dopiero korzyści zegarów wahadłowych dobrze skompensowanych. A jednak użycie pierwszych bywa częstokroć nieuniknione, jak np. w żeglarstwie, nie mówiąc już o ściśle naukowych celach mniej związku mających z praktyczną stroną życia ludzkiego. W najlepszych nawet dzisiaj chronometrach, a są niemi właśnie chronometry okrętowe, nie zdołano sporządzić kompensacyi, którąby zbliżała się do doskonałości kompensacyi rtęciowej u nowoczesnych zegarów wahadłowych; ruch chronometru, chociażby najskrupulatniej wyznaczony bezpośrednio przed wyruszeniem okrętu w podróż, nie jest identyczny z ruchem jego podczas podróży, odbywającej się częstokroć wśród najróżniejszych temperatur; zatem extrapolacyjnie obliczane stany jego na pełnem morzu oddalają się coraz bardziej od prawdziwych, w miarę czasu trwania podróży. Podczas doświadczeń wahadłowych, które przedewszystkiem mam tutaj na oku, nie znajduje się obserwator wprawdzie w przymusowem (jak na okręcie) położeniu, extrapolowania czyto stanów czy ruchów swojego chronometru, wyznaczając je w najniepomyślniejszym razie zawsze jeszcze zwykłym rachunkiem interpolacyjnym, wszelako ma się tu do czynienia z żądaniem znacznie większej niż tam dokładności. Gdy, jak to już wspomniałem, ruch chronometra wyprowadzony z dwóch obserwacyj odległych od siebie co najwyżej o dwie doby, (wypełnione właśnie doświadczeniami wahadłowemi) nie może być dokładnym aż po $0.^s01$, gdy zresztą możność takich dwóch obserwacyj zawisła od pogody wieczornej, często niedopisującej, nie pozostaje nic innego, jak rzeczone doświadczenia wykonać pomiędzy dwoma oznaczeniami czasu dość bliskiemi początkowi i zakończeniu tamtych, ale więcej niż dwie doby od siebie odległemi. Prawda, że w takim razie wprowadza się znowu drobną wątpliwość pochodzącą ztąd, iż wówczas szukany ruch chronometru (a w ogóle zegaru) w ciągu owych dni identyfikujemy widocznie ze średnim jego ruchem z przeciągu całego tygodnia, którego częścią są te dwa dni: przypuszczenie, które nie zawsze jest bezpieczne nawet w przypadku dobrych chronometrów z powodu niezupełnej ich kompensacyi. Uchylenie rzeczonej wątpliwości, jeżeli nie zupełne, to przynajmniej w największej jej części, byłoby niezawodnie rzeczą bardzo pożądaną; jedyną zaś, jak mniemam, do tego celu wiodącą drogą może być ustalenie empirycznego związku pomiędzy ruchem chronometru a jego temperaturą, związku, któryby m. i. umożliwiał w każdym pojedynczym przypadku znalezienie istotnego ruchu zegaru dla każdej chwili pośredniej ze znanego średniego ruchu jakoteż z równoczesnych zmian temperatury. Ta właśnie kwestya stanowi przedmiot artykułu niniejszego. Zamierzając w najbliższej przyszłości przedstawić Akademii sprawozdanie z dotychczasowych rezultatów doświadczeń wahadłowych, o których na wstępie, a zarazem mając nadzieję, że podobne doświadczenia będą niebawem wykonane w innych miejscowościach naszego kraju, wydawało mi się stosowne i pożyteczne, jedno i drugie poprzedzić załatwieniem sprawy, od której dokładność otrzymywanych rezultatów w przeważnej części jest zawisłą.

2. Znany jest dobrze objaw, że tak chronometry, jak nawet najlepiej skompensowane zegary wahadłowe posiadają, *ceteris paribus*, w ciągu roku ruch mniej lub więcej zmienny, jakoteż, że maximum i minimum tego ruchu (dodatne lub ujemne) przypada na lato i zimę, a więc na pory extremów temperatury powietrza. Pod tym względem dane wypływające z bezpośrednich obserwacyj nieba bywały niekiedy dość wymowne, aby na ich podstawie módz się pokusić o przedstawienie empiryczne związku pomiędzy ruchem zegaru a temperaturą otoczenia. Istniały też, mniej lub więcej pomyślne próby, ażeby uwzględnić zarazem drobniutki wpływ zmian w ciśnieniu powietrza na tę samą ilość obserwacyjną (tak n. p. w Berlińskiem obserwatoryum astronomicznem). Jeżeli mimo to wspomniane usiłowania pozostają dotąd odosobnione i nie znalazły wielu naśladowców po obserwatoryach jakoteż pokrewnych zakładach naukowych, to przyczyna tego leży niezawodnie w słabej wyrazistości związku przyczynowego pomiędzy dwoma szeregami ilości ustawicznie zmiennych: temperatury otoczenia i sporadycznie wyznaczanych ruchów badanego zegaru. Próby ustalenia takiego związku, zasadzające się na najbliższej tu myśli: porównywania ruchów zegarowych ze średnią temperaturą otoczenia w tym samym przeciągu czasu, stawały zazwyczaj wobec tak nieprzeźroczystej łączności funkcyjnej obydwu szeregów liczb, że musiały zniechęcić, choć może niesłusznie, do wszelkich dalszych w tej mierze usiłowań. Można bowiem zapytywać, czy przez wprowadzenie tych dwu właśnie elementów obserwacyjnych, kwestya, o którą chodzi, została należycie sformułowaną do rachunkowego jej traktowania, czy też nie. Według mojego sposobu widzenia rzeczy, odpowiedź na to może być tylko przeczącą. Nasamprzód ruch zegaru nie dostrzega się wcale bezpośrednio: jest on bowiem już wynikiem rachunku opartego na liczbach obserwacyjnych, tj. na stanach zegarów, sporządzonym *a priori* przypuszczając dokładną stałość tego ruchu w obrębie uważanego czasu. Gdzie więc, jak w omawianej kwestyi, rozchodzi się o drobniutkie zmienne ilości pozostające same już przez się w dość zawikłanym związku przyczynowym ze zmien-

nością temperatury, wikłamy sprawę znalezienia zależności zmiennego ruchu zegaru od zmiennej z czasem temperatury, przypuszczeniem obcem samej sprawie. Innemi słowy przesądzamy z góry, że pochód zmiennych z czasem stanów zegaru daje się graficznie przedstawić w postaci linii łamanej, poskładanej z samych prostych kawałków, i co szczególna, zmieniających rzekomo z nagła swój kierunek właśnie podczas obserwacyj wyznaczających stan zegaru. Daleko przecież naturalniej i bezpieczniej będzie każdą z tych zmiennych ilości uważać konsekwentnie za funkcyę ciągłą drugiej, a pochód zmiennych stanów graficznie przedstawiać linią krzywą, zbliżoną do prostej, nie zaś łamaną, zmieniającą nagle kierunek w miejscach, którym istota zjawiska nie naznacza żadnego szczególniejszego stanowiska. Błąd stanu zegaru, mogący wyniknąć z takiego uważania rzeczy, będzie zapewne niekiedy znikomy, częściej jednak dostatecznie wielki, aby pomniejszyć wartość liczb ścisłych obserwacyj (jak np. w pracach katalogowania gwiazd stałych), a łatwo zobaczyć, że błąd będzie największy, gdy pomiędzy dwoma wyznaczeniami czasu krzywa stanów zegarowych posiadać będzie punkt przegięcia (infleksyi).

Powtóre, obserwowane stany zegarów nie są ilościami zawisłemi bezpośrednio od momentalnej temperatury otoczenia, ale już ostatecznym wynikiem sumowania się mnóstwa nieskończenie małych, lecz rożnych przyrostów stanu zegaru, z których każdy odpowiada odmiennej wogóle temperaturze. Zachodzi tu oczywiście przypadek ustawicznego niejako całkowania przez zegar drobnych a nieustannie zmiennych wpływów, które nań z zewnątrz działają. Dołączmy do tego po trzecie szczegół nie podrzędny, iż chwilowa temperatura otoczenia zegaru nie jest identyczna z decydującą tu temperaturą jego wnętrza i że w pochodzie obydwu, prócz odmiennych amplitud, występuje mniejsza lub większa różnica fazy, a będziemy mieli dość zupełny obraz czynników, z którymi w każdem ścislejszem badaniu ruchów zegaru liczyć się należy. Dodajmy nadto, że jeżeli nasze starania nie mają mieć jedynie teoretycznego znaczenia, ale owszem praktyczną wartość, to należy wreszcie obmyśleć przepis, któryby dozwolił wywody teoretyczne szybko i dogodnie zastosować w każdym konkretnym przypadku. Sprawę wikła najbardziej okoliczność wymieniona powyżej na trzeciem miejscu, tj. znajomość i niejako ciągła ewidencya temperatury, tudzież zmian jej we wnętrzu narzędzia: rzecz wielce kłopotliwa, gdybyśmy zamierzali ją osiągnąć na drodze bezpośrednich a względnie częstych odczytywań termometru tam umieszczonego i to tak w dzień, jak w nocy. Mam nadzieję poniżej na konkretnym przykładzie wykazać, że wyznaczywszy dwie stałe każdego zegaru raz na zawsze, uprzątniemy przedewszystkiem trudność dopiero co wymienioną, a równocześnie załatwimy się z właściwem zadaniem w sposób zupełnie wystarczający we wszelkich zastosowaniach praktycznych.

Poniższe rozważania, wywołane rzeczywistą potrzebą szczegółowej analizy ruchu zegaru funkcyonującego podczas jednej części naszych doświadczeń wahadłowych, tyczą się chronometru okrętowego Bliss and Creighton N. 1097, New York, (własność gabinetu fizyki kraj. śred. Szkoły rolniczej w Czernichowie), będą jednak miały, *mutatis mutandis*, zastosowanie do każdego innego zegaru. Różnica będzie mogła zasadzać się jedynie na odmiennych wartościach dwóch stałych, o których już wyżej wspomniałem, a które będą tem samem niejako charakterystyką danego narzędzia, przyczem wielce prawdopodobną jest rzeczą, że w różnych egzemplarzach chronometrów okrętowych (skutkiem stereotypowych tam dwóch osłon drewnianych i jednakowej postaci właściwego narzędzia) jedna z tych stałych (μ) będzie jednakowa.

3. Moje poszukiwania odnoszą się do szeregu faktycznych stanów chronometru począwszy od pierwszych dni sierpnia aż niemal po koniec października 1895, a odpowiadających zmianie temperatury wynoszącej przeszło 20^0 C; powtóre tyczą się związku pomiędzy wewnętrzną a zewnętrzną temperaturą. Zacznę od ostatnich.

Pod koniec listopada 1895 przytwierdzono mały termometr rtęciowy (który dozwalał oceniać jeszcze $^1/_{20}{}^0$ C., a którego poprawka punktu zera poprzednio starannie wyznaczoną została), do kapsli mosiężnej, osłaniającej właściwy mechanizm zegaru, tak iż bańka termometru pozostawała z kapslą w bezpośredniem zetknięciu. Przez trzy poprzedzające tygodnie, chronometr pozostawał stale w pokoju średnio opalanym, zamknięty w podwójnem swem pudle drewnianem i umieszczony w zamkniętej szafie, zkąd tylko raz na dobę o stałej porze (10^h p. m.) wyjmowałem go dla nakręcenia. Dnia 28 listopada wieczorem, po zapewnieniu się kilkakrotnem, iż wnętrze chronometru przybrało bardzo stałą temperaturę $+ 17{\cdot}25^0$ C. (odczytywania wewnętrznego termometru odbywały się przez szybę szklaną pudła wewnętrznego), przeniesiono narzędzie, zamknąwszy osłony, do zimnej sionki, gdzie już poprzednio umieszczono większy termometr i kilkakrotnie odczytano. W ciągu obserwacyj trwających tylko dwie godziny, temperatura sionki była bardzo stała i wynosiła $+ 0{\cdot}20^0$ C.; drobniutka i przemijająca jej chwiejność (od $+ 0{\cdot}15$ do $+ 0{\cdot}3$), wywoływaną była najwidoczniej jedynie kilkakrotnem wchodzeniem mojem tam i wychodzeniem z małą lampą w ręku w celu odczytania temperatury wnętrza chronometru. Tak odczytane temperatury i równoczesne czasy odczytań podaję w następującem zestawieniu:

Czas	Temperatura wewnętrzna	Czas upłyniony $(=t)$ w godzinach
$10^h 30^m$ p. m.	$+17{\cdot}25^0$ C.	0·000
10 50 „	$16{\cdot}40^0$ „	0·333
11 20 „	$13{\cdot}80^0$ „	0·833
12 0 m. n.	$11{\cdot}10^0$ „	1·500
12 30 a. m.	$9{\cdot}45^0$ „	2·000
∞	$0{\cdot}20^0$ „	∞

temperatura zewnętrzna $+0{\cdot}20^0$ C.

Ostatni wiersz tabliczki jest wyrazem znanego postulatu stosującego się do każdego procesu ostygania, iż ciało stygnąc w nieograniczonem otoczeniu o stałej temperaturze, przybierze ostatecznie tę samą temperaturę. Doświadczenie skrócono rozmyślnie do czasu dwugodzinnego z obawy, iż po znacznie dłuższym przeciągu czasu temperatura otoczenia mogłaby zmienić się o ilość nie dającą się już pominąć wobec różnicy obu temperatur tymczasem bardzo zmalałej.

Oznaczając przez v temperaturę wewnętrzną w chwili t (wyrażonej w godzinach), przez a, b, μ trzy stałe, z których pierwsze dwie zależne są jedynie od początkowych temperatur stygnącego ciała i otoczenia, ostatnia zaś wyłącznie od jakości ciała, które się oziębia, mamy, jak wiadomo z klasycznych poszukiwań Fourier'a[1]),

$$v = a + b \,.\, K\left(\frac{\mu}{\sqrt{t}}\right) \tag{1}$$

gdzie K jest funkcyą zwaną niekiedy funkcyą Kramp'a, dającą się określić równaniem

$$K(\theta) = \frac{2\,.}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-z^2}\, dz. \tag{2}$$

Jest to ta sama funkcya (jednej zmiennej niezależnej θ), którą się napotyka w rachunku prawdopodobieństwa, w metodzie najmniejszych kwadratów, a wreszcie w teoryi refrakcyi astronomicznej. Obszerne tablice gotowych jej wartości, odpowiadających wartościom argumentu θ, których kolejne różnice wynoszą 0·01, znajdują się m. i. w efemerydach *Berliner Jahrbuch* na rok 1835. Zobaczymy dalej, iż dla celu, o który tutaj chodzi, wystarcza najzupełniej mała tabliczka zajmująca mniej

---

[1]) Zob. n. p. W. Thomson On the Secular Cooling of the Earth, Transactions of the Royal Society of Edinbourgh 1862, reproduk. w Thomson and P. G. Tait Treatise on natural Philosophy, 2nd edition, Vol. II (Appendix).

niż $^1/_{100}$ część objętości tamtych; to skłoniło mnie do załączenia jej przy końcu niniejszej pracy razem z tabliczką wartości powinowatej funkcyi k (θ), której znaczenie i użyteczność poniżej wyjaśnię.

Liczby spostrzeżone pozwalają wyznaczyć wartości trzech stałych równania (1). Ponieważ stałych mamy tylko trzy, zaś danych obserwacyjnych sześć (wliczając dane 6go wiersza), pozostaje niejaka swoboda w ich wyborze do rzeczonego celu. Korzystając na razie z pierwszego, czwartego i ostatniego wiersza, tudzież zważając, że $K(0) = 0$, $K(\infty) = +1$, otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} a + b &= 17{\cdot}25 \\ a + b\,K(\theta') &= 11{\cdot}10 \\ a &= 0{\cdot}20, \end{aligned}$$

gdzie położono dla krótkości $\theta' = \frac{\mu}{\sqrt{1{\cdot}5}} = \mu\frac{\sqrt{6}}{3}$. Pierwsze i trzecie z tych równań warunkowych daje natychmiast $a = +0{\cdot}20$, $b = + +17{\cdot}05$, poczem drugie stanie się

$$K(\theta') = \frac{10{\cdot}90}{17{\cdot}05} = 0{\cdot}6393,$$

a że tej wartości funkcyi K odpowiada według tablic argument $\theta' = 0{\cdot}6460$, więc $\mu = 0{\cdot}6460\frac{\sqrt{6}}{2} = 0{\cdot}7912$. Porównanie tego pierwszego rachunku z obserwacyą przedstawia się, jak następuje:

	Obserw.	Rachun.	Obs.-Rach.	θ	$K(\theta)$
1.	17·25	17·25	0·00	∞	1·000
2·	16·40	16·66	— 0·26	1·3704	0·947
3.	13·80	13·62	+ 0·18	0·8669	0·787
4.	11·10	11·10	0·00	0·6460	0·639
5.	9·45	9·96	— 0·51	0·5594	0·572
6.	0·20	0·20	0·00	0·0000	0·000;

w pierwszym, czwartym i szóstym wierszu różnica (Obs.-Rach.) jest zerem, gdyż właśnie trzy odpowiadające im dane obserwacyjne posłużyły do wyznaczenia stałych a, b, μ. Dołączone w ostatnich dwóch kolumnach wartości $\theta = \frac{\mu}{\sqrt{t}}$ i $K(\theta)$ są potrzebne do rachunku poprawniejszych wartości tych stałych, o czem zaraz.

Jak widać z tabliczki, rachunek zgadza się dobrze z obserwacyą, lubo stałe, we wzór (1) wchodzące, wyznaczone zostały tylko z połowy danych obserwacyjnych. Ponieważ zależało mi na bezpiecznem ustaleniu wartości stałej μ badanego narzędzia, przystąpiłem, jak zwykle w takich razach, do poprawienia znalezionych dopiero wartości na a, b, μ (lubo na pierwszych dwóch mi nie zależało, odłączyć ich jednak od μ nie było można) za użyciem wszystkich danych obserwacyjnych. Różnicowanie związku (1) względem wszystkich trzech parametrów a, b, μ daje

$$\Delta a + K(\theta).\,\Delta b + \frac{2b}{\sqrt{\pi t}}.e^{-\theta^2}.\,\Delta\mu = \Delta v\,,$$

podług czego, za wstawieniem wartości z każdego wiersza poziomego (Δv jest właśnie różnicą pomiędzy obserwacyą a rachunkiem), utworzymy sześć równań:

$$\Delta a + 1{\cdot}000\ \Delta b + 0{\cdot}000\ \Delta\mu = 0{\cdot}00$$

itd., które po wyrównaniu metodą najmniejszych kwadratów i rozwiązaniu trzech ostatecznych równań warunkowych dostarczają szukanych najprawdopodobniejszych poprawek

$$\Delta a = -0{\cdot}01,\quad \Delta b = +0{\cdot}19,\quad \Delta\mu = -0{\cdot}0120,$$

a te dołączone (ze swymi znakami) do prowizorycznych wartości na a, b, μ dają nareszcie

$$a = +0{\cdot}19,\quad b = +17{\cdot}24,\quad \mu = 0{\cdot}7792.$$

Tak w tym, jak i wszystkich podobnych razach można spokojnie poprzestać na dwóch miejscach dziesiętnych parametru μ, a o jego tylko wartości tutaj chodziło; prosty więc wzór

$$v = +0{\cdot}19 + 17{\cdot}24\ K\left(\frac{0{\cdot}78}{\sqrt{t}}\right)$$

przedstawia nadspodziewanie dobrze liczby pochodzące z bezpośredniej obserwacyi, skoro pozostałe jeszcze drobne niezgodności

$$-0{\cdot}18,\quad -0{\cdot}07,\quad +0{\cdot}27,\quad -0{\cdot}12,\quad -0{\cdot}48,\quad +0{\cdot}01$$

nie przekraczają zwykłej wielkości błędów przypadkowych (z wyjątkiem może przedostatniej różnicy, gdzie skutkiem niezbędnego pospiechu w odczytywaniu wewnętrznego termometru przy pudle na moment tylko otwartem, mogła się łatwo wśliznąć drobna pomyłka).

Oznaczając teraz przez u temperaturę otoczenia (uważaną dotąd za stałą), przez V początkową temperaturę wewnętrzną (tj. biorąc $t = 0$) i zważając, że ilość μ zależną jest jedynie od stopnia „liniowego" przewodnictwa ciepła, nie zależy zaś ani od temperatur, ani od czasu, będzie najpierw

(3) $$v = u + (V - u)\, K\left(\frac{0{\cdot}78}{\sqrt{t}}\right) = u + (V - u)\, K(\theta),$$

gdzie $\theta = \frac{\mu}{\sqrt{t}}$, $\mu = 0{\cdot}78$ wprowadzamy dla większej zwięzłości pisania. Ztąd mamy na wyrażenie momentalnej chyżości zmian temperatury v

$$\frac{dv}{dt} = (V - u)\, K'(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (V - u)\, e^{-\theta^2} \frac{d\theta}{dt},$$

gdzie K' wyobraża pochodną funkcyi K względem jej argumentu θ, zaś u równoczesną z v temperaturę otoczenia. Jeżeli zaś samo u będziemy uważali za zmiennie z czasem, to mnożąc ostatnie wyrażenie przez dt i całkując je w granicach od t_o do t, otrzymamy

$$v = C' + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_o}^{\theta} (V - u)\, e^{-\theta^2} d\theta,$$

a tutaj C' jest stałą całkowania, zaś θ_0 wartością ilorazu $\frac{\mu}{\sqrt{t}}$ gdy $t = t_o$. Dla $t = 0$ (więc $\theta = \infty$) ma być $v = V$, zatem

$$V = C' + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_2}^{\infty} (V - u)\, e^{-\theta^2} d\theta,$$

co odejmując od poprzedniego, znajdujemy

(4) $$v = V - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta}^{\infty} (V - u)\, e^{-\theta^2} d\theta,$$

gdzie temperatura u już sama występuje jako funkcya czasu t, a tem samem zmiennej θ. Przy zastosowaniach będzie dogodnie uważać tę funkcyę za agregat złożony z części stałej m (w danym więc razie, choć niekoniecznie, przedstawiającej średnią temperaturę otoczenia w przeciągu pewnego czasu) i z wyrazu zmiennego, odpowiadającego chwianiu się temperatury zewnętrznej. Pisząc więc stosownie do tego

(5) $$u = m + \psi(t), \qquad \text{tj. } u = m + \psi\left(\frac{\mu^2}{\theta^2}\right),$$

będziemy mieli nasamprzód

$$v = V - (V - m) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \psi\left(\frac{\mu^2}{\theta^2}\right) e^{-\theta^2} d\theta,$$

a że

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\theta}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta = 1 - K(\theta)$$

[z powodu że $K(\infty) = +1$], przeto redukując i zmieniając głoskę integracyjną na z

$$v = m + (V - m)\,K(\theta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} \psi\left(\frac{\mu^2}{z^2}\right) e^{-z^2}\, dz, \qquad (6)$$

związek całkiem podobny do pierwotnego (ważnego gdy u stałem) z przydatkiem tylko ostatniej integralnej.

W rzadkich, a zawsze unikanych przypadkach nagłej zmiany temperatury otoczenia, zwłaszcza znaczniejszej, funkcya ψ staje się wprawdzie przerwano-ciągłą (np. dla $t = \tau$), lecz wówczas wzór (3) pozwoli znaleść wartość v, gdyby istotnie na tem zależało. W tym celu wystarczyłoby ustęp integracyjny czasu t rozłożyć na dwa: pierwszy od $t = 0$ do $t = \tau$ z początkową temperaturą wnętrza $= V$, a z temperaturą zewnętrzną $= u$, jakoteż na drugi od $t = \tau$ do $t = t$ z początkową temperaturą wnętrza $= u_1 + (V - u_1)\,K\left(\frac{\mu}{\sqrt{\tau}}\right)$, z temperaturą zaś zewnętrzną $= u_2$. W szczegóły takie, jakoteż i inne podobne, mogące interesować teoretyka, nie byłoby zresztą na miejscu tutaj się wdawać, skoro celem naszym nie ilość v lecz inna, już bezpośrednio od niej zależna.

Najważniejszym dla nas będzie przypadek, gdy temperatura zewnętrzna podlega prostej zmianie peryodycznej z okresem czy to dziennym, czy też rocznym, a łatwo spostrzedz, że z praktycznego punktu widzenia zwłaszcza pierwszy z nich zasługuje na bliższe zbadanie. Przypuszczenie to odpowiada swobodnemu, albo prawie swobodnemu dostępowi zewnętrznego powietrza do zegaru, w swoich osłonach na pewnem stałem miejscu pozostającego i może być zastosowane do wszelkich zegarów porą letnią, o każdej zaś porze roku do zegarów pozostających w lokalach nie opalanych. Widocznie bowiem same ściany takiego lokalu są niczem więcej, jak nową (3cią czy 4tą) osłoną mechanizmu zegarowego, zkąd wniosek, iż związki dopiero wyprowadzone nie przestaną wówczas obowiązywać, jeżeli tylko w jakości lokalu nie zajdzie żadna ważniejsza zmiana i jeżeli wartość stałej ilości μ zostanie wyznaczona. W takich warunkach znajdują się np. zegary wahadłowe po obserwatoryach astronomicznych.

Biorąc na uwagę okres dzienny zmian temperatury zewnętrznej, zobaczymy, że funkcya ψ jest Bessel'owską sumą kilku wyrazów o budowie $a_1 \sin(pt + q_1)$, $a_2 \sin(2pt + q_2)$ itd., gdzie współczynniki a_1, a_2, ... w razie normalnego przebiegu zmian ciepłoty szybko maleją. Zapewne nikt jeszcze nie zadał sobie bezowocnego trudu posuwania dokładności rachunku aż po za trzy wyrazy, skoro np. przy skrupulatniejszych nawet poszukiwaniach meteorologicznych jedynie dwa wyrazy peryodyczne się uwzględnia. W celach korekcyjnych, o które wyłącznie nam się tutaj rozchodzi, będzie nawet i ta dokładność praktycznie zbyteczną, tem zaś bezpieczniej wolno nam będzie poprzestać na pierwszym a zarazem najgłówniejszym wyrazie okresu, ile że wszelka osłona znacznie pomniejsza nawet wybitne amplitudy zmian okresowych, a mniejsze wprost zaciera. Wystarczy wspomnieć o płytkości warstwy ziemi, pod którą znikają całkowicie dzienne zmiany ciepłoty powietrza.

Biorąc $\psi(t) = a \sin(pt + q)$, gdzie $p = \frac{2\pi}{24}$ (więc $= 15^0$ w zwykłych jednostkach kątowych), będzie więc według poprzedniego

$$v = m + (V - m)\,K(\theta) + \frac{2a\cos q}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin\frac{\mu^2 p}{z^2} e^{-z^2}\,dz$$

$$+ \frac{2a\sin q}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\frac{\mu^2 p}{z^2} e^{-z^2}\,dz,$$

zkąd po wprowadzeniu dostawy kąta podwójnego na miejsce wstawy i dostawy kąta pojedynczego, jakoteż po łatwej redukcyi

$$v = m + (V - m)\,K(\theta) + a\cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz$$

$$+ a\sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos\frac{2\mu^2 p}{z^2} e^{-z^2}\,dz.$$

Tutaj m jest już średnią (24-godzinną) temperaturą dzienną, a połówką amplitudy głównej w dziennym ruchu temperatury zewnętrznej, q kątem zawisłym od chwili, w której przyjmujemy wśród doby $t = 0$; przypominamy wreszcie, iż za jednostkę czasu przyjęto tutaj godzinę czasu średniego.

Ostatni wzór znacznie się uprości, jeżeli początek czasu tak dobierzemy, aby kąt q był $= \frac{\pi}{4}$. Wówczas odpada ostatnia integralna, zaś przedostatnia po rozłożeniu jej według

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-z^2}\,dz = 1 - K(\theta)$$

i po łatwej przeróbce poprzedniego równania doprowadza do związku

$$v = \left(m + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \left[V - \left(m + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right] K(\theta), \qquad (7)$$

którego postać różni się od (3) tem jedynie, iż zamiast temperatury stałej u występuje teraz średnia (24-godzinna) dzienna, powiększona 0·707 częścią półamplitudy dziennej: wynik dość ciekawy i nieprzewidywany [1]. Będzie to jednak prawdziwe pod warunkiem, że rachubę czasu (wśród doby średniej) tak ustalimy, aby kąt q posiadał wartość równą, a przynajmniej bardzo bliską $\frac{\pi}{4}$. W ciepłej połowie roku spełnia się ten warunek niemal dokładnie, jeżeli czas liczymy nie od północy, lecz od południa do następnego południa (tj. astronomicznie); a i w pozostałej części roku rzeczony warunek spełni się w dostatecznem przybliżeniu. Biorąc bowiem $u = m + a \sin (pt + q)$, gdzie przy ruchu dziennym $p = \frac{2\pi}{24}$, otrzymujemy na maximum i minimum temperatury zewnętrznej warunek

$$\frac{du}{dt} = ap \cos (pt + q) = 0,$$

zkąd $pt + q = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$, a że maximum temperatury zewnętrznej w klimacie naszym przypada w pobliżu 3^h p. m. (z niewielką na obie strony oscyllacyą), t. j. dla $t = 3$ według przyjętego przed chwilą sposobu liczenia, więc z warunku na maximum wynika bezpośrednio

$$\frac{2\pi}{24} \cdot 3 + q = \frac{\pi}{2}, \quad \text{tj. } q = \frac{\pi}{4},$$

jak tego właśnie sobie życzyliśmy. Rozumie się samo przez się, iż średnia dzienna m musi odpowiadać temu samemu sposobowi liczenia czasu, tj. odpowiadać dobie rozpoczynającej się w południe, a kończącej się na południu dnia następnego. W tem co nastąpi, będę używał gwoli większej zwięzłości wzoru

$$v = \alpha + \beta K(\theta), \qquad (7')$$

---

[1]) Zauważę, że przyjmując we wzorze Besselowskim dwa wyrazy peryodyczne i rozkładając dwie pojawiające się wówczas całki sposobem podobnym jak dopiero, a wreszcie wyznaczając stosownie kąt q, otrzymać można wzór wprawdzie teoretycznie dokładniejszy, praktycznie jednak zbyteczny.

gdzie obie ilości α, β, zmienne od dnia do dnia, określone są równaniami

(8) $$\beta = m + \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \beta = V - a.$$

W razie konkretnych zastosowań można zawsze pozbyć się ilości V, jeżeli tylko narzędzie nie będzie narażane na sztuczne zmiany warunków swego otoczenia. Zważmy najpierw, iż zmienna v na końcu uważanej doby przybiera wartość $\alpha + \beta K\left(\frac{\mu}{\sqrt{24}}\right)$, gdzie współczynnik ilości β każdego narzędzia można podać, jeżeli już poprzednio jego stała μ została wyznaczoną. Oznaczywszy rzeczony współczynnik krótko przez ρ, mamy wartość v na końcu pierwszej doby, a więc na początku drugiej, równą $\alpha + \beta\rho$, tj. według (8) równą $(1 - \rho)\alpha + \rho V$. Jeżeli więc dla szeregu kolejno po sobie następujących dni ilość α będzie posiadała wartości α_1, α_2, α_3, ..., temperatura początkowa V zaś wartości V_1, V_2, V_3, ... , to rozumując jak przed chwilą, dojdziemy z łatwością do następującego zestawienia:

Dzień	α	V (temp. dla $t=0$)	V^1 (temp. dla $t=24^h$)
1szy	α_1	V_1	$(1-\rho)\alpha_1 + \rho V_1 = V_2$
2gi	α_2	V_2	$(1-\rho)\alpha_2 + \rho V_2 = V_3$
3ci	α_3	V_3	$(1-\rho)\alpha_3 + \rho V_3 = V_4$

itd., zkąd kolejno

$$V_2 = (1 - \rho)\alpha_1 + \rho V,$$
$$V_3 = (1 - \rho)[\alpha_2 + \rho\alpha_1] + \rho^2 V_1,$$
$$V_4 = (1 - \rho)[\alpha_3 + \rho\alpha_2 + \rho^2\alpha_1] + \rho^3 V_1,$$

itd., zaś ogólnie

$$V_n = (1 - \rho)[\alpha_{n-1} + \rho\alpha_{n-2} + \rho^2\alpha_{n-3} + \ldots\ldots + \rho^{n-2}\alpha_1] + \rho^{n-1} V_1.$$

W rzeczywistości współczynnik ρ będzie zawsze małym ułamkiem (dodatnym), którego wyższe potęgi nie wywierają już wpływu na ilości V_n, tak że nawet wobec wymagań daleko posuniętych, trzy, a najwyżej cztery wyrazy tego rozwinięcia w zupełności wystarczą; że zaś wówczas dodajnik $\rho^{n-1} V_1$, praktycznie biorąc, nie będzie się różnił od zera, przeto prościej

(9) $$V_n = (1-\rho)\alpha_{n-1} + \rho(1-\rho)\alpha_{n-2} + \rho^2(1-\rho)\alpha_{n-3} + \ldots\ldots$$

albo cofając wszystkie wskaźniki o $(n - 1)$

(9′) $$V_1 = (1 - \rho)\alpha_0 + \rho(1 - \rho)\alpha_{-1} + \rho^2(1 - \rho)\alpha_{-2} + \rho^3(1 - \rho)\alpha_{-3} + \ldots,$$

gdzie zazwyczaj tylko trzy, a najwyżej cztery pierwsze wyrazy mogą mieć praktyczne znaczenie.

Tak np. w narzędziu szczegółowo przezemnie badanem jest $\mu = 0{\cdot}78$, zatem $\frac{\mu}{\sqrt{24}} = 0{\cdot}1592$, a skrócone tablice funkcyi Kramp'a dają interpolacyjnie wartość przynależną $\rho = K(0{\cdot}1592) = 0{\cdot}1781$, tak że w tym razie

$$V_1 = 0{\cdot}822\alpha_0 + 0{\cdot}146\alpha_{-1} + 0{\cdot}026\alpha_{-2} + 0{\cdot}005\alpha_{-3}, \qquad (9')$$

gdzie ostatni wyraz, nawet biorąc $\alpha_{-3} = 30^0$C., osiąga dopiero nieznaczną wartość $0{\cdot}15^0$C.

Zapomocą związku (9) daje się temperatura początkowa wnętrza narzędzia wynaleść szybko i łatwo ze znanych temperatur otoczenia w kilku najbliższych dniach poprzedzających, poczem wzór (7) czy (7') pozwoli znaleść zmienną wśród dnia wartość v i to rachunkiem bardzo krótkim, jeżeli mała tabliczka funkcyi K jest pod ręką, zkąd dla wszelkiego danego argumentu θ wystarcza wziąć wartość $K(\theta)$ z dokładnością dwóch, a najwyżej trzech miejsc dziesiętnych. Faktycznie biorąc, odpada i ta niedogodność, skoro nie o v nam się rozchodzi, lecz o wpływ tej zmiennej na zmienny stan zegaru, do czego teraz wprost już przystępujemy.

4) Oznaczając przez S stan zegaru przy pewnym czasie t, wiemy, iż pochodna $\frac{dS}{dt}$ przedstawia momentalny ruch zegaru w tym czasie. Wszelki mechanizm zegaru, złożony prawie wyłącznie z części metalowych mniej lub więcej podlegających zmianom postaci i objętości skutkiem zmian temperatury w swem wnętrzu, jest sam do pewnego stopnia termometrem metalowym. Przy pewnej, długi czas stałej temperaturze, będzie on tedy *ceteris paribus* posiadał ruch (np. p. d.) niezależny od czasu [1]), a wskazówki zegaru będą się poruszały ruchem jednostajnym (w zwykłem znaczeniu tego wyrazu). Skutkiem tego ewentualna zmiana „ruchu“ (tj. chyżości z którą stan zegaru się zmienia) a więc druga pochodna $\frac{d^2S}{dt^2}$ będzie wywoływana zmianą $\frac{dv}{dt}$ temperatury a nie samą temperaturą v, gdy zaś w zegarach nawet miernie skompensowanych zmiany ruchu są ilościami małemi drugiego rzędu w porównaniu ze stanem zegaru, będziemy mieli z dokładnością ilości trzeciego rzędu

---

[1]) Używając chronometrów zależałoby przedewszystkiem na dokładnem zbadaniu wpływu, jaki wywiera siła sprężystości różnych części sprężyny na ruch jego wśród doby. Nakręcanie chronometru stale o tej samej godzinie dnia będzie zapewne dopiero pierwszym postulatem, lecz nie jedynym.

(10) $$\frac{d^2S}{dt^2} = \lambda . \frac{dv}{dt},$$

gdzie współczynnik λ będący najczęściej bardzo małą ilością (dodatną lub odjemną) odgrywa rolę zupełnie podobną do współczynnika rozszerzalności termicznej ciał stałych. Na wyrażenie momentalnego ruchu otrzymamy całkowaniem

(11) $$\frac{dS}{dt} = \lambda_0 + \lambda v,$$

gdzie v jest jak zawsze momentalną temperaturą wnętrza, zaś λ_0 stałą całkowania, którąby się dała zdefiniować jako ruch zegaru (tutaj p. h., t. j. na dobę) w temperaturze trwale równej zeru. Powtórne całkowanie względem czasu daje zmienny stan zegaru

$$S = c'' + \lambda_0 t + \lambda \int v\, dt,$$

gdzie c'' jest stałą całkowania; jeżeli zaś S_0 będzie stanem zegaru w chwili $t = 0$, to wygodniej

$$S - S_0 = \lambda_0 t + \lambda \int_0^t v\, dt,$$

albo jeszcze z uwagi na (7')

(12) $$S - S_0 = (\lambda_0 + \alpha\lambda)\, t + \beta\lambda \int_0^t K(\theta)\, dt,$$

a pozostaje jeszcze tylko znaleść wartość ostatniej całki.

Oznaczając ją krótko głoską I, tj. kładąc

$$I = \int_0^t K\left(\frac{\mu}{\sqrt{t}}\right) dt = \int_0^t K\left(\frac{\mu}{\sqrt{z}}\right) dz,$$

mamy całkując naprzód nieoznaczenie przez części

$$\int K(x) dz = zK(x) - \int z\, dK(x) = zK(x) - \int z \frac{dK(x)}{dx} dx,$$

gdzie $x = \frac{\mu}{\sqrt{z}}$. Otóż na mocy (2), tj. definicyi funkcyi K mamy

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} . e^{-x^2},$$

a że ze związku pomiędzy x i z wynika $z = \mu^2 x^{-2}$, przeto

$$\int K(x)dz = zK(x) - \frac{2\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} \frac{dx}{x^2}.$$

Biorąc całkę w granicach od $z = 0$ do $z = t$ i zważając że granicami x będą wówczas ∞ i $\frac{\mu}{\sqrt{t}}$, tj. θ, otrzymamy

$$I = tK(\theta) - \frac{2\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^\theta e^{-x^2} \frac{dx}{x^2} = tK(\theta) + \frac{2\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{dx}{x^2},$$

gdyż $K(\infty)$ posiada skończoną wartość równą dodatniej jednostce.

Całkowaniem przez części otrzymamy nasamprzód

$$\int e^{-x^2} \frac{dx}{x^2} = -\int e^{-x^2}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} e^{-x^2} - 2\int e^{-x^2} dz,$$

biorąc więc w granicach od θ do ∞

$$\int_\theta^\infty e^{-x^2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\theta} e^{-\theta^2} - 2\int_\theta^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\theta} e^{-\theta^2} - 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$+ 2\int_o^\theta e^{-x^2} dx = \frac{1}{\theta} e^{-\theta^2} - \sqrt{\pi} K(\infty) + \sqrt{\pi} K(\theta),$$

tj. $\theta^{-1} e^{-\theta^2} - \sqrt{\pi}[1 - K(\theta)]$, gdyż $K(\infty) = +1$. Skutkiem tego będzie po należytych redukcyach

$$I = (t + 2\mu^2) K(\theta) + \frac{2\mu^2}{\theta\sqrt{\pi}} e^{-\theta^2} - 2\mu^2;$$

dzieląc to wyrażenie po obu stronach przez t i zważając że $\frac{\mu^2}{t} = \theta^2$, otrzymamy

$$\frac{I}{t} = (2\theta^2 + 1) K(\theta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \theta \,.\, e^{-\theta^2} - 2\theta^2,$$

a wprowadzając nową funkcyę jedynego argumentu θ

$$k(\theta) = (2\theta^2 + 1) K(\theta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \theta\, e^{-\theta^2} - 2\theta^2, \tag{13}$$

powinowatą, jak widać, z funkcyą Kramp'a $K(\theta)$, będzie najpierw

$$I = \int_o^t K(\theta) dt = t \,.\, k(\theta), \tag{14}$$

skutkiem czego równanie (12) zmieni się ostatecznie na

$$S - S_o = [\lambda_o + \lambda(\alpha + \beta k_\theta)] \,.\, t,$$

gdzie dla krótkości symbol k_θ stoi zamiast $k(\theta)$.

Wzór (14) jest rozwiązaniem przedłożonego zagadnienia ze stanowiska teoretycznego. Co do praktycznych jego zastosowań, sądzę, że zamieszczony poniżej *specimen* rachunkowy wywołany, jak rzekłem, rzeczywistą potrzebą, zdoła rzecz lepiej objaśnić niż wszelkie rozwlekłe wywody. Przywodząc kilka jeszcze szczegółów ograniczam się też jedynie do niezbędnych informacyj. Obie ilości tak λ_0 jak i λ odnoszą się do godzinnego ruchu zegaru, a to samo stosuje się do wyrażenia

$$\lambda_0 + \lambda(\alpha + \beta k_0),$$

które widocznie przedstawia średni godzinny (p. h.) ruch zegaru wśród pewnej uważanej doby, a mianowicie średni taki ruch pomiędzy 0^h i t^h tej doby. Otóż, skoro już sam ruch dzienny p. d.) zegarów bywa małą ilością, rachunek na podstawie wzoru (14) byłby niewygodny z powodu wielkiej małości obydwóch współczynników λ_0 i λ. Właściwiej będzie posługiwać się ilościami $r_0 = 24\lambda_0$, $r = 24\lambda$, mającemi to samo znaczenie dla doby średniej, co λ_0 i λ dla jednej godziny. Wzór (14), w którym godzina jest jednostką czasu, będzie w takim razie

$$(14') \qquad S - S_0 = \frac{1}{24}[r_0 + r(\alpha + \beta k_0)] \cdot t;$$

tutaj α i β znajdują się z odczytań termometru zewnętrznego (zobacz wyżej ust. 3), k_0 a raczej $k(\theta)$ jest wartością funkcyi k argumentu $\theta = \frac{\mu}{\sqrt{t}}$, wartość, którą każdym razem bierze się wprost z dołączonej tabliczki, zaś r_0 i r dwie ilości charakteryzujące wielkość ruchu zegaru na dobę. Obie dają się wyznaczyć jedynie za pomocą obserwacyj astronomicznych,, zwanych oznaczaniem czasu, z tą tylko różnicą, iż gdy pierwsza i większa z nich (r_0) zależna od budowy narzędzia, jego stopniowego zużywania się itd., lecz niezależna od termicznej jego jakości, będzie od czasu do czasu kontrolowana, druga (r) od pierwszej znacznie mniejsza [1]), wyznaczy się dla danego narzędzia raz na zawsze, a przynajmniej na tak długo, dopóki w samej wewnętrznej budowie zegaru, żadna ważniejsza zmiana nie zajdzie. Z poprzedniego wynika, że współczynnikowi r należy przyznać stałość niewątpliwie jeszcze większą, aniżeli np. kollimacyi w lunetach południkowych. Widać zresztą, iż wyznaczenie wartości współczynnika r musi się odbywać równocześnie z wyznaczaniem wartości ilości r_0, gdyż obie nie dadzą się w obser-

---

[1]) Przynajmniej dla zegarów o niezbyt wadliwej kompensacyi.

wacyach od siebie odłączyć. Natomiast odwracać tego zdania nie wolno o tyle, iż mając już z dostateczną ścisłością wyznaczoną wartość współczynnika r, potrzebujemy przy ponownej obserwacyi („oznaczania czasu") wyznaczyć już tylko ilość r_0, przyczem oczywiście muszą być znane dane termometryczne, od których α i β są zależne.

Mechanizm rachunkowy upraszcza się znacznie, jeżeli przysposobimy sobie gotowy wzór na 24-ro godzinną zmianę ΔS stanu zegaru. W tym celu potrzeba z równania (13) obliczyć (np. posiłkując się tablicą funkcyi K) przedewszystkiem wartość funkcyi $k(\theta)$ dla argumentu $\theta = \frac{\mu}{\sqrt{24}}$, poczem związek (14') dla $t = 24$ pozwoli wypisać szukany wzór

$$\Delta S = r_0 + r \,.\, \alpha + r k_0 \,.\, \beta ,$$

gdzie po wyznaczeniu już współczynnika r przez wcześniejsze obserwacye, wszystkie ilości prócz r_0 będą znane. Czynność oznaczania czasu za pomocą obserwacyi (w płaszczyźnie południka lub też poza nią), jest z naszego punktu widzenia wynajdywaniem wartości r_0. Znalazłszy tę ilość, możemy się posługiwać wzorem

$$\Delta S = r_0 + r(\alpha + k_0\, \beta)$$

w epokach po obserwacyi następujących, wyrażając w nim liczebnie wszystkie ilości, prócz α, β, a w ten sposób przysposobić go do szybkiego obliczania stanów zegaru w czasach, w których prócz t, obie ilości α, β, przybiorą pewne znane wartości. Indywiduum zegaru zbadanego przeze mnie (chronometr Bliss and C⁰), ma $\mu = 0{\cdot}78$, (zob. ust. 3) skutkiem czego $\frac{\mu}{\sqrt{24}} = 0{\cdot}1592$, więc według wzoru 13 $k(\theta) = 0{\cdot}312$; ponieważ zaś (zob. niżej ust. 5) znaleziono $r = -\,0\overset{s}{{\cdot}}1113$ (z niepewnością $\pm\, \overset{s}{0}{\cdot}008$), mamy dla 24⁰ godzinnej zmiany stanu tego zegaru wyrażenie

$$\Delta S = r_0 - 0{\cdot}1113\, \alpha - 0{\cdot}0347\, \beta ,$$

gdzie samą ilość r_0 należy uważać za stałą, przynajmniej w przeciągu czasu, pomiędzy jednem oznaczeniem czasu a bezpośrednio następującem. Ilość r_0 narzędzia o którem mowa, w ciągu trzech miesięcy r. 1895: od początku sierpnia do końca października posiadała wartość $+0\overset{s}{{\cdot}}8831$ z niepewnością, wynoszącą zaledwie $\pm\, \overset{s}{0}{\cdot}0052$. Na całej tej dość znacznej przestrzeni czasu da się więc ostatnie wyrażenie z korzyścią i dostateczną dokładnością zastosować, jeżeli tylko nie wykroczymy poza ograniczenia jego ważności, tj. jeżeli będziemy go używali jedynie do interpolacyi stanu zegaru pomiędzy jedną a drugą obserwacyą, chociażby dosyć odległą. Gdy bowiem zmienność obu ilości α i β jest peryodyczna nie zaś „wiekowa", — kiedy to pewna funkcya nieograniczenie wzrasta z czasem — nie zachodzi żadna obawa, aby pozostałe jeszcze drobne niepewności w wartościach współczynników przy α i β mogły z biegiem czasu wywołać w ΔS jaki znaczący błąd. Natomiast niewielki już błąd ilości r_0, pozbawionej czynnika peryodycznego, będzie się z upływem czasu statecznie sumował i może sprawić, że stan zegaru, obliczony na podstawie rzekomo stałej wartości r_0, po dłuższym przeciągu czasu dość znacznie się oddali od rzeczywistości. To wszystko ma się rozumieć o tych zastosowaniach, w których chodzi o możliwie dzisiaj największą dokładność obserwacyi i rachunku, jak np. podczas pracy wyznaczania wznoszeń prostych (AR) i katalogowego ich zestawiania. W znacznej ilości przypadków, gdzie czas obserwacyi wystarcza znać z dokładnością małoco większą niż pojedyncza sekunda (np. miejsca planet, komet itp.), będzie najczęściej dozwolonem posługiwać się wzorem na ΔS w przypuszczeniu stałości wyrazu r_0, tak że wówczas jedynie dwa argumenta α, β, — obydwa znane z bezpośrednich odczytań termometru zewnętrznego — wystąpią w króciutkim szablonie rachunkowym. W tem co dalej, nie wprowadzamy takiego przypuszczenia, lecz pozostajemy przy wymaganiu największej możebnej ścisłości, tem bardziej, że wówczas rachunek powiększa się tylko nieznacznie.

W kilku dniach bezpośrednio po sobie następujących i oddzielających od siebie dwa sąsiednie oznaczenia czasu, będzie

$$\Delta S_1 = r_0 + r\,(\alpha_1 + k'\,\beta_1)\,,$$
$$\Delta S_2 = r_0 + r\,(\alpha_1 + k'\,\beta_2)\,,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

itd., gdzie k' jest wartością funkcyi $k\,(\theta) = k\left(\frac{\mu}{\sqrt{t}}\right)$ przy $t = 24$. Suma tych równości daje na zmianę stanu zegaru w n całkowitych dobach zegaru

$$\Delta_n S = nr_0 + r\sum_1^n (\alpha + k'\beta) = nr_0\, r\,\Sigma\,(\alpha) + r\,k'\,\Sigma\,(\beta)\,,$$

gdzie sumowanie w razie potrzeby daje się wykonać szybko i wygodnie po przysposobieniu sobie wpierw małej tabelki wartości α i β. Wzór ostatni ma głównie przeznaczenie ułatwiać rachunek podczas wyznaczania ilości r_0 (ewent. także i r) z danego kompleksu obserwacyj, nie tyle zaś do odwrotnego procesu: obliczania $\Delta_n S$ z wiadomych już poprzednio r_0, r, gdyż przypuszczenie, jakoby n było liczbą dokładnie całkowitą, najczęściej nie spełni się w praktyce. W tem drugiem zastosowaniu można dwojako postąpić: możnaby najpierw szukać podobnego związku w przypuszczeniu, że n składa się z liczby całkowitej i ułamka, prościej jednak osiągnie się to samo, dołączając po prawej stronie dodajnik, zbudowany według (14'), a odpowiadający danemu ułamkowi jednej całkowitej doby. Przykład wzięty z rzeczywistości a poniżej umieszczony, dostarczy lepszej informacyi o trybie rachunkowym, aniżeli szczegółowe matematyczne dedukcye.

Należy mi jeszcze wspomnieć o sposobie obliczania potrzebnych tutaj ilości α i β. Co do pierwszej z nich, to widoczna, że chodzić może tylko o ilość a, gdyż, według pierwszego z równań (8), α jest agregatem dwóch ilości, z których pierwszej, tj. m (średnia temperatura 24^0 godzinna) dostarczą wprost protokóły obserwacyj meteorologicznych, ewent. zaś umyślne odczytania termometru, gdyby — co nierównie rzadziej się zdarzy — narzędzie miało pozostawać czas dłuższy w lokalach, zabezpieczonych od wpływu temperatury zewnętrznego powietrza (np. w piwnicach lub też w pokojach zimą opalanych). Otóż zważając, że a jest połówką amplitudy dziennego chwiania się temperatury, dalej, że maximum jej przypada około 3^h p. m., osiągniemy dokładność dla naszego celu najczęściej dostateczną, biorąc a równe połówce różnicy z temperatur o 3^h p. m. i 3^h lub 4^h a. m. dnia następnego (w przybliżeniu pora minimum). Postąpi się nieco bezpieczniej, biorąc średnią z 2^h, 3^h i 4^h p. m., jakoteż średnią z 3^h, 4^h i 5^h a. m. dnia następnego (kalendarzowego). Gdybyśmy jednak i tutaj pragnęli przestrzegać dokładności możliwie największej (co tylko wyjątkowo, przy bardzo skrupulatnem wyznaczaniu stanu lub ruchu zegaru zdarzyć się może), należałoby użyć znanych wyrażeń Bessela, pozwalających współczynnik a w równaniu oskulacyjnej sinusoidy $u = m + a \sin\left(pt + \frac{\pi}{4}\right)$ obliczyć metodą najmniejszych kwadratów ze wszystkich 24-ch godzinnych temperatur podczas uważanej doby zaregestrowanych. Oznaczając, jak pospolicie, rzymskiemi liczbami temperatury należące do godzin tym liczbom odpowiednich, znajdujemy $\left(q = \frac{\pi}{4}\right)$ z łatwością

$$\begin{aligned}12a =& (\mathrm{VIII}+\mathrm{XXII}-\mathrm{X}-\mathrm{XX}) \sin 15^0 + (\mathrm{VII}+\mathrm{XXIII}-\mathrm{XI}-\mathrm{XIX}) \sin 30^0 \\ &+(0+\mathrm{VI}-\mathrm{XII}-\mathrm{XVIII}) \sin 45^0 + (\mathrm{I}+\mathrm{V}-\mathrm{XIII}-\mathrm{XVII}) \sin 60^0 \\ &+(\mathrm{II}+\mathrm{IV}-\mathrm{XIV}-\mathrm{XVI}) \sin 75^0 + (\mathrm{III}-\mathrm{XV}) \sin 90^0.\end{aligned}$$

Przypominamy, iż rachuba czasu jest tutaj astronomiczna, tj. że wszystkim liczbom powyżej XII odpowiadają temperatury przedpołudniowe następującego dnia kalendarzowego.

Znalazłszy w ten lub ów sposób a w dniach, kolejno po sobie następujących, po pomnożeniu przez $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}707$ i dodaniu do m, otrzymujemy α dla dni, o które chodzi, poczem związek (9) dostarczy ilości V, a drugie z równań (8) daje wprost $\beta = (V-\alpha)$. W ten sposób otrzyma się wszystkie ilości, potrzebne do rachunkowego wyznaczenia wpływu temperatury na ruch danego zegaru, niedoskonale — jak najczęściej — skompensowanego.

Dodam nakoniec, że licząc się z okolicznością sporadycznego otwierania chronometru i pozostawiania go w tym stanie przez czas niejaki, godziny lub więcej, częstokroć w odmiennej niż wprzód temperaturze [1]), wykonałem jeszcze 29 listopada 1895 dodatkowe doświadczenie, w celu wyznaczenia wartości μ także i w takich przypadkach. Po tem, co się powiedziało w ustępie 3, byłoby zbyteczne przytaczać szczegóły tego prostego doświadczenia i liczby, które podobnym jak poprzednio sposobem doprowadziły mię do rzeczonej wartości (oznaczonej przez μ' dla odróżnienia jej od poprzedniej). Wartość μ' narzędzia, badanego przeze mnie okazała się bardzo bliską 0·16, z niepewnością nie większą nad $^1/_{20}$ część tej wartości. Nadmieniam jeszcze tylko, że nie chcąc odsłoniętego chronometru narażać na szybkie wówczas ostyganie w temperaturze bliskiej -1^0C, postarałem się o kapslę mosiężną, postaci i rozmiarów bardzo zbliżonych do samego chronometru, a umieściwszy wewnątrz niej termometr, postąpiłem zresztą jak podczas doświadczenia pierwszego. Wspomniana kapsla miała pokrywę ze szkła rzniętego, a i zresztą była dostatecznie wierną podobizną mosiężnej pokrywy samego chronometru, tak że w tym celu, o który tu chodzi, można było spokojnie poprzestać na wartości $\mu' = 0{\cdot}16$. Jest ona niemal piątą częścią wartości $\mu = 0{\cdot}78$; tyleż więc razy prędzej odbywa się proces przewodzenia ciepła w otwartem narzędziu, a to nam tłumaczy dostatecznie, jakie przeznaczenie i wartość mają obie jego drewniane osłony.

---

[1]) Np. podczas nocnych obserwacyj lunetą przejściową, kiedy to przy otwartej szczelinie południkowej, narzędzie pozbawione swych osłon szybko ostyga.

Skrócona tabliczka

wartości funkcyj $K(\theta)$ i $k(\theta)$.

θ	$K(\theta)$	$k(\theta)$	θ	$K(\theta)$	$k(\theta)$
0·00	0·000	0·000	0·60	0·604	0·791
0·05	0·056	0·108	0·70	0·678	0·846
0·10	0·112	0·206	0·80	0·742	0·888
0·15	0·168	0·296	0·90	0·797	0·920
0·20	0·223	0·377	1·00	0·843	0·943
0·25	0·276	0·451	1·20	0·910	0·973
0·30	0·329	0·517	1·40	0·952	0·988
0·35	0·379	0·577	1·60	0·976	0·995
0·40	0·429	0·630	1·80	0·989	0·998
0·45	0·476	0·681	2·00	0·995	0·999
0·50	0·520	0·720	∞	1·000	1·000

Pierwsza z tych funkcyj, jest t. zw. funkcyą Kramp'a określoną równaniem

$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz .$$

Powinowata jej druga funkcya oznaczona tu symbolem $k(\theta)$, a określona równaniem

$$k(x) = (2x^2 + 1)\ K(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} - 2x^2 ,$$

nie nadarzała się — o ile mi wiadomo — dotąd w zastosowaniach. Mała tabelka, którą obliczyłem, daje jej wartości z dokładnością trzech miejsc dziesiętnych, tak że nawet po interpolacyi pośrednich wartości otrzyma się bezpiecznie dwie pierwsze cyfry dziesiętne, co do naszego zastosowania w zupełności wystarcza.

Użycie funkcyj K i k staje się zresztą zbyteczne, jeżeli zegar znajduje się przez czas dłuższy w otoczeniu, posiadającem temperaturę stałą albo prawie stałą, jak to np. się zdarza podczas doświadczeń wahadłowych, wykonywanych w piwnicach itp. lokalach. Wówczas dbając o to, aby przed rozpoczęciem doświadczeń zegar przez dłuższy czas (np. dobę lub więcej) pozostawał bez przerwy w lokalu, sprawi się, że temperatura v w ciągu samych doświadczeń nie będzie się ostatecznie różniła od u. Chronometry należy pozostawiać tam najpierw przez kilka godzin w zamkniętych okrywach drewnianych, a następnie otwarciem obu skrzynek, ułatwić metalowemu mechanizmowi ostateczne dostrojenie się do temperatury otoczenia.

Temperatura piwnic itp. miejsc ulega drobnym zmianom (w ogóle nieprawidłowym), które w takich, średnio głębokich lokalach wynoszą zazwyczaj $1/_2$ do $1\,1/_2{}^0$C. Na tę zmienność składają się dwie przyczyny: jedna pochodząca z dziennego ruchu temperatury powietrza, który ze znacznie zmniejszoną amplitudą i opóźnieniem fazy przedziera się nawet do głębszych i szczelnie zamkniętych piwnic (np. w Bielsku, w Krakowie obserwat.), a druga przygodna, wynikająca ze sporadycznego zaświecania i gaszenia tam lampy i świec, a wreszcie obecności samego obserwatora. W takich to okolicznościach średni ruch zegaru w ciągu pewego czasu (od 0 do t) będzie $\frac{1}{t}\int_0^t (r_0 + ru)\,dt = r_0 + r \cdot \frac{1}{t}\int_0^t u\,dt$,

gdzie współczynnik ilości r jest widocznie średnią w tym czasie temperaturą otoczenia. Jej wartość obliczona według wzoru S i m p s o n'a na kwadraturę przybliżoną

$$\text{śred.} = \frac{1}{3_n}\left[u_0 + 4(u_1 + u_3 + \ldots + u_{n-1}) + 2(u_2 + u_4 + \ldots + u_{n-2}) + u_n\right],$$

gdzie n musi być parzyste, będzie, jak łatwo dostrzedz, nierównie dokładniejsza od prostej średniej arytmetycznej.

Wyznaczenie współczynnika r
chronometru Bliss Nr. 1097.

5. Już powierzchowne rozpatrywanie ruchów (p.d.) tego narzędzia, idącego według czasu średniego, podczas lata i jesieni r. 1895, przekonało mię, że ruch jego jest zależny dość znacznie od temperatury, że mianowicie pospieszając w ogóle, spieszy on bardziej w temperaturach wyższych. Podobny objaw stwierdziłem (przynajmniej jakościowo), na innem podobnem znanem mi narzędziu, mianowicie chronometrze okrętowym Dent Nr. 25560 (własność krakowskiego obserwatoryum astronomicznego) i co szczególna, że w tym samym co i tamten kierunku, lubo pierwszy z nich posiada ruch odjemny a drugi dodatny. Ze spadkiem temperatury, tak tu jak tam, ruch dzienny, algebraicznie biorąc, stawał się większy, a co do pierwszego z nich, dawał się nawet ocenić w przybliżeniu ubytek ruchu dziennego na jakie $0\overset{s}{.}1$ ze wzrostem temperatury o 1^0C.

Chcąc zbadać bliżej tę rzecz ilościowo, zebrałem szereg obserwacyj, odnoszących się do stanów tego chronometru w znacznie różnych temperaturach, a otrzymanych bądź to za pomocą jego porównań z zegarami Obserwatoryum krakowskiego, których ruch był znany bardzo dokładnie, bądź też za pomocą bezpośrednich porównywań chronometru z niebem. Prof. Karliński raczył sam się zająć porównywaniem pozostawionego w obserwatoryum narzędzia, w lecie 1895 z zegarami miejscowymi.

Z udzielonych mi łaskawie obserwacyj, wprowadziłem do rachunku dane prof. Karlińskiego aż po dzień 21 sierpnia.

W końcu września przewiozłem chronometr do Czernichowa, gdzie ustawiłem w płaszczyźnie południka przenośne narzędzie przejściowe, wypożyczone mi uprzejmie przez Dyrekcyę Obserwatoryum krakowskiego i rozpocząłem spostrzeżenia przejść gwiazd stałych, względnie słońca każdego pogodnego wieczora, względnie południa.

Narzędzie to ma libellę z podziałami, których wartość w środku oznaczyłem jako $=3''.78$.

Wartości odstępów kątowych pomiędzy nitkami okularu wyznaczyłem z przeszło trzystu przejść. Redukcya na nitkę III-cią, tj. środkową dała ostatecznie wartości następujące:

Redukcya na nitkę III-cią

nitki I-ej	II-giej	IV-tej	V-tej
$+29^{s}\!\cdot\!73$	$+14^{s}\!\cdot\!51$	$-14^{s}\!\cdot\!99$	$-29^{s}\!\cdot\!30$ czasu średniego,

przyczem nitka I. jest ta, którą nasamprzód osiąga gwiazda w położeniu narzędzia „koło na zachód“. Kollimacya lunety c wypadła $= -10^{s}\!\cdot\!167$. Azymut narzędzia doznawał zrazu zmian znaczniejszych, zdaje się skutkiem niejednostajnego wysechania zaprawy cementowej, w której osadziłem jego podstawę, co jednak po kilku dniach ustąpiło, natomiast nachylenie osi instrumentu (libellą wyznaczone) trzymało się bardzo stale i wynosiło $13\cdot2''$, przyczem zachodni koniec osi znajdował się pod poziomem.

Pierwsza część obserwacyj zawiera stany chronometru Bliss, względem średniego czasu krakowskiego, druga względem średn. czasu Czernichowskiego; zaczem obie części nie dawały się połączyć w jednolitą całość rachunkową, gdyż różnica długości geograficznych Krakowa i Czernichowa nie była mi znaną z tą dokładnością, jakiej wymaga niniejsze poszukiwanie [1]). Oczywista, że ta okoliczność nie mogła

[1]) W roku 1888 oznaczyłem dość przybliżoną wartość tej różnicy (1 m. i 8—9 sek. na zachód), a to za pomocą obserwacyj zaćmień księżyców Jowisza. Jest ona w wielu razach zupełnie wystarczającą, tak np. przy obliczeniu czasu gwiazdowego w chwili średn. południa miejscowego, interpolacyi miejsc słońca itp.

mieć żadnego wpływu na rzecz, skoro ostatecznie rozchodzi się tutaj tylko o zmiany ruchu zegaru. Możnaby ją owszem uważać za dobrą sposobność do wyznaczenia dokładnej wartości wspomnianej różnicy, gdyby można się było całkiem spuścić na ruch chronometru podczas jego, co prawda niedalekiej, podróży, oraz sąsiednich jej kilku dni, w ciągu których ani tu, ani tam oznaczeń stanu zegaru nie było.

Ponieważ krakowskie stany chronometru datują się od 4 sierpnia począwszy, należy ilości α już na cztery dni wstecz obliczyć; zestawiamy je tutaj, wraz z pozostałemi ilościami, potrzebnemi do rachunku.

Data 1895	$\alpha = m + \frac{a}{\sqrt{2}}$	V	$\beta = V - a$
31 lipca	19·1 °C	— °C	— °C
1 sierpnia	17·6	—	—
2 „	19·3	—	—
3 „	19·9	—	—
4 „	21·7	19·65	−2·05
5 „	19·6	21·33	+1·73
6 „	18·1	19·89	+1·79
7 „	19·1	18·39	−0·71
8 „	18·1	18·95	+0·85
9 „	18·2	18·20	0·00
10 „	20·9	18·18	−2·72
11 „	22·6	20·41	−2·19
12 „	24·7	22·18	−2·52
13 „	16·6	24·22	+7·62
14 „	16·0	17·92	+1·92
15 „	15·2	16·31	+1·11
16 „	14·0	15·38	+1·38
17 „	14·7	14·23	−0·47
18 „	17·3	14·59	−2·71
19 „	18·7	16·80	−1·90
20 „	21·2	18·33	−2·87
21 „	23·0	20·67	−2·33

Sposób otrzymania ilości α podany jest w jednym z poprzedzających ustępów; ilości V obliczono następnie według wzoru (9″), poczem otrzymano ostatnią kolumnę przez proste odejmowanie.

Stany chronometru względem średniego czasu krakowskiego były:

1895, 4 sierpnia	10^h	35^m	0^s	($=10^h\cdot5833$)	.....	$S=+19^m$	$21\overset{s}{\cdot}7$
5 „	11	31	33	(11·5258)	.....		19·78
6 „	10	46	35	(10·7764)	.....		18·38
7 „	10	35	37	(10·5937)	.....		17·01
19 „	10	24	58	(10·4162)	.....		3·77
20 „	11	6	0	(11·1000)	.....		2·27
21 „	11	14	0	(11·2333)	.....		1·01

Tryb rachunkowy był następujący. Oznaczywszy przez S' stan zegaru (wzgl. czasu krak.) dnia 4 sierpnia w południe zegarowe, będzie:

Stan zegaru $^4/_8$, 0^h . . . . . . S'

w tym dniu $\alpha = 21\cdot7$, $\beta = -2\cdot05$

więc dzienna zmiana stanu zegaru $= r_0 + r(21\cdot7 + 0\cdot312 . -2\cdot05) = r_0 + 21\cdot06 r$

Stan $^5/_8$, 0^h . . . . . $S' + r_0 + 21\cdot06\, r$

$^5/_8$, $\alpha = 19\cdot6$, $\beta = +1\cdot73$

dzienna zmiana stanu $= r_0 + r(19\cdot6 + 0\cdot312 . 1\cdot73) = r_0 + 20\cdot13\, r$

Stan $^6/_8$, 0^h . . . . . $S' + 2r_0 + 41\cdot19\, r$

itd.

Tak licząc znajduję:

4 sierpnia,	0^h	.....	S'
5 „	„	.....	$S' + r_0 + 21\cdot06\, r$
6 „	„	.....	$S' + 2r_0 + 41\cdot19\, r$
7 „	„	.....	$S' + 3r_0 + 59\cdot85\, r$
19 „	„	.....	$S' + 15r_0 + 277\cdot74\, r$
20 „	„	.....	$S' + 16r_0 + 295\cdot85\, r$
21 „	„	.....	$S' + 17r_0 + 316\cdot15\, r$.

Porównanie chronometru Bliss z zegarami Obserwatoryum nie odbywały się w południe, ale wieczorem wymienionych tu dni, przeto do wypisanych powyżej stanów południowych należy dołączyć jeszcze zmiany, odpowiadające godzinom od południa upłynionym.

Mamy 4 sierpnia, $t = 10\cdot5833$, $\alpha = 21\cdot7$, $\beta = -2\cdot05$, więc

$$\theta = \frac{0\cdot78}{\sqrt{10\cdot5833}} = 0\cdot240,\ k(\theta) = 0\cdot437 \text{ (z tabliczki), zatem}$$

$\alpha + \beta\, k(\theta) = 20\cdot81$, a szukany dodajnik

$$\frac{1}{24}\cdot(r_0+20{\cdot}81\,r)\,.\,10{\cdot}5833=0{\cdot}44097\,r_0+9{\cdot}175\,r,$$

a w taki sam sposób dochodzi się następującego zestawienia potrzebnych tu dodajników:

4	sierpnia	. . .	$0{\cdot}44097\,r_0 + 9{\cdot}175\,r$
5	„	. . .	$0{\cdot}48024\,r_0 + 9{\cdot}763\,r$
6	„	. . .	$0{\cdot}44902\,r_0 + 8{\cdot}476\,r$
7	„	. . .	$0{\cdot}44140\,r_0 + 8{\cdot}294\,r$
19	„	. . .	$0{\cdot}43401\,r_0 + 7{\cdot}751\,r$
20	„	. . .	$0{\cdot}46250\,r_0 + 9{\cdot}236\,r$
21	„	. . .	$0{\cdot}46805\,r_0 + 10{\cdot}302\,r.$

Dołączając te dodajniki do poprzednich ilości, utworzymy w ten sposób wyrażenia stanów zegaru w chwilach, w których rzeczywiście dokonano oznaczenia stanu, a to pozwala ustawić następujące równania:

$$\text{(A)}\left\{\begin{array}{lllll}
S' + 0{\cdot}44097\,r_0 & + & 9{\cdot}175\,r & = & +\,19^{\mathrm{m}}21\overset{s}{\cdot}17\\
S' + 1{\cdot}48024\,r_0 & + & 30{\cdot}823\,r & = & 19{\cdot}78\\
S' + 2{\cdot}44902\,r_0 & + & 49{\cdot}666\,r & = & 18{\cdot}38\\
S' + 3{\cdot}44140\,r_0 & + & 68{\cdot}144\,r & = & 17{\cdot}01\\
S' + 15{\cdot}43401\,r_0 & + & 285{\cdot}491\,r & = & 3{\cdot}77\\
S' + 16{\cdot}46250\,r_0 & + & 305{\cdot}086\,r & = & 2{\cdot}27\\
S' + 17{\cdot}46805\,r_0 & + & 326{\cdot}452\,r & = & 1{\cdot}01,
\end{array}\right.$$

albo wprowadzając zamiast S' wygodniejszą niewiadomą $\gamma_0=S'-19^{\mathrm{m}}1\overset{s}{\cdot}01$, dalej zamiast r_0 niewiadomą $\gamma_1=10\,r_0$, zamiast r niewiadomą $\gamma_2=100\,r$

$$\begin{array}{l}
\gamma_0 + 0{\cdot}044097\,\gamma_1 + 0{\cdot}09175\,\gamma_2 = 20\overset{s}{\cdot}16\\
\gamma_0 + 0{\cdot}148024\,\gamma_1 + 0{\cdot}30823\,\gamma_2 = 18{\cdot}77\\
\gamma_0 + 0{\cdot}244902\,\gamma_1 + 0{\cdot}49666\,\gamma_2 = 17{\cdot}37\\
\gamma_0 + 0{\cdot}344140\,\gamma_1 + 0{\cdot}68144\,\gamma_2 = 16{\cdot}00\\
\gamma_0 + 1{\cdot}543401\,\gamma_1 + 2{\cdot}85491\,\gamma_2 = 2{\cdot}76\\
\gamma_0 + 1{\cdot}646250\,\gamma_1 + 3{\cdot}05086\,\gamma_2 = 1{\cdot}26\\
\gamma_0 + 1{\cdot}746805\,\gamma_1 + 3{\cdot}26452\,\gamma_2 = 0{\cdot}00.
\end{array}$$

Równania te, odpowiadające przeszło 17-to dniowemu przeciągowi czasu wystarczyłyby najzupełniej do wyznaczenia ilości γ_1, a więc i ruchu r_0 ze znaczną dokładnością, gdyby temperatura była stałą, nie są zaś odpowiednie do wyznaczenia γ_2 (a więc i r) z powodu zbyt małych tutaj zmian temperatury. Pisząc je w postaci

$$\gamma_0 + 0{\cdot}044097\,\gamma_1 = 20{\cdot}16 - 0{\cdot}09175\,\gamma_2$$

itd. i uważając prawe strony za znane, wyrównywamy ten układ według zasad metody najmniejszych kwadratów, co prowadzi do dwóch równań

$$7{\cdot}00000\,\gamma_0 + 5{\cdot}71762\,\gamma_1 = 76{\cdot}320000 - 10{\cdot}74837\,\gamma_2\,,$$
$$5{\cdot}71762\,\gamma_0 + 8{\cdot}34582\,\gamma_1 = 19{\cdot}598232 - 15{\cdot}53738\,\gamma_2\,,$$

zkąd

$$\gamma_0 = +\,20{\cdot}4006 - 0{\cdot}03370\,\gamma_2\,,$$
$$\gamma_1 = +\,11{\cdot}62792 - 1{\cdot}83861\,\gamma_2\,.$$

Rachunek musiał być prowadzony — jak przy wszelkich metodycznych wyrównaniach — ze znaczniejszą ilością miejsc dziesiętnych, tem więcej, że wartości γ_0 i γ_1, dopieroco otrzymane wypadnie podstawić w podobne do (A) równania, wynikające z drugiej części obserwacyi. Ponieważ, jak zaraz zobaczymy, odpowiadają one temperaturom znacznie niższym, więc wspólnie z ostatnimi dwoma związkami wytworzą szereg warunkowych równań, całkiem odpowiednich do wyznaczenia ilości γ_2 zatem i r, o co właśnie i przedewszystkiem nam chodzi.

W tabelkach, które następują, zestawione są dane, odpowiadające drugiej części materyału obserwacyjnego (obserwacye w Czernichowie). Co do pierwszej, zauważę tylko, że wszystkie odczytane temperatury zostały powiększone o $+0{\cdot}13^0$C, tyle bowiem wynosi poprawka termometru czernichowskiego w porównaniu z krakowskim stacyjnym.

Data 1895	$\alpha = m + \frac{a}{\sqrt{2}}$	V	$\beta = V - \alpha$
20 września	14·6 ^{0}C	—	—
21 "	9·8	—	—
22 "	10·4	—	—
23 "	13·8	—	—
24 "	15·8	13·19	−2·61
25 "	16·3	15·32	−0·98
26 "	16·1	16·11	+0·01
27 "	17·5	16·09	−1·41
28 "	16·6	17·24	+0·64
29 "	16·6	16·69	+0·09
30 "	13·0	16·59	+3·59
1 październ.	17·3	13·63	−3·67

Data 1895	$\alpha = m + \frac{a}{\sqrt{2}}$	V	$\beta = V - \alpha$
2 październ.	18·6 °C	16·63	− 1·97
3 „	10·2	18·23	+ 8·03
4 „	14·6	11·61	− 2·99
5 „	10·1	14·06	+ 3·96
6 „	12·8	10·77	− 2·03
7 „	15·6	12·41	− 3·19
8 „	14·2	14·01	− 0·19
9 „	18·3	14·29	− 4·01
10 „	19·9	17·58	− 2·32
11 „	12·7	19·47	+ 6·77
12 „	9·5	13·85	+ 4·35
13 „	10·1	10·26	+ 0·16
14 „	11·1	10·10	− 1·00
15 „	12·0	10·89	− 1·11
16 „	12·1	11·79	− 0·31
17 „	5·4	12·05	+ 6·65
18 „	6·0	6·57	+ 0·57

Bezpośrednie porównania chronometru z niebem dały względem średniego czasu Czernichowskiego następujące stany zegaru:

				Stan
1895,	27 września dla	$9^h \cdot 74297$	.....	$+ 17^m\ 38^s \cdot 304$
	29 „ „	9·39442	.....	36·372
	7 październ. „	9·59925	.....	28·997
	8 „ „	9·63738	.....	28·175
	15 „ „	11·79880	.....	25·768
	18 „ „	10·35637	.....	24·440.

Stany te wyprowadzone są wyłącznie z wieczornych obserwacyj gwiazd stałych. Nie wciągam też do rzeczy obserwacyj z dni 1go i 5go października, były one bowiem skąpe i odbywały się przez chmury, tudzież obserwacyj późniejszych od 18go października.

Oznaczając przez S'' stan zegaru (wzgl. średn. czasu miejscowego) w południe zegarowe dnia 27go września, znajdzie się nasamprzód

		Stan
27 września, 0^h	.....	S''
29 „ „	.....	$S'' + 2\,r_0 + 33{\cdot}87$
7 październ. „	.....	$S'' + 10\,r_0 + 148{\cdot}63$
8 „ „	.....	$S'' + 11\,r_0 + 163{\cdot}23$
15 „ „	.....	$S'' + 18\,r_0 + 260{\cdot}21$
18 „ „	.....	$S'' + 21\,r_0 + 291{\cdot}34$,

poczem obliczają się wiadome dodajniki. Co do pierwszego np. wiersza mamy $t = 9{\cdot}74297$, $\alpha = 17{\cdot}5$, $\beta = -1{\cdot}41$, więc $\theta = \frac{0{\cdot}78}{\sqrt{t}} = 0{\cdot}250$, $k(\theta) = 0{\cdot}451$ (z tabliczki), zatem $\alpha + \beta\,k(\theta) = 16{\cdot}87$, a szukany dodajnik

$$\frac{1}{24}(r_0 + 16{\cdot}87\,r).\,9{\cdot}74297 = 0{\cdot}40596\,r_0 + 6{\cdot}847\,r$$

itd., a w ten sposób znajdziemy potrzebne nam dodajniki

27 września	.....	$0{\cdot}40596\,r_0 + 6{\cdot}847\,r$
29 „	.....	$0{\cdot}39143\,r_0 + 6{\cdot}513\,r$
7 październ.	.....	$0{\cdot}39997\,r_0 + 5{\cdot}660\,r$
8 „	.....	$0{\cdot}40156\,r_0 + 5{\cdot}682\,r$
15 „	.....	$0{\cdot}49162\,r_0 + 5{\cdot}674\,r$
18 „	.....	$0{\cdot}43151\,r_0 + 3{\cdot}590\,r$.

Dołączając te wyrażenia do stanów powyżej wypisanych i przyrównywając powstałe sumy do wartości stanów otrzymanych bezpośredniemi obserwacyami, utworzymy następujące równania warunkowe:

$$
\begin{aligned}
S'' + 0{\cdot}40596\,r_0 + 6{\cdot}847\,r &= +\,17^m\,38\overset{s}{\cdot}304\\
S'' + 2{\cdot}39143\,r_0 + 40{\cdot}398\,r &= 36{\cdot}372\\
S'' + 10{\cdot}39997\,r_0 + 154{\cdot}290\,r &= 28{\cdot}997\\
S'' + 11{\cdot}40156\,r_0 + 168{\cdot}912\,r &= 28{\cdot}175\\
S'' + 18{\cdot}49162\,r_0 + 265{\cdot}884\,r &= 25{\cdot}768\\
S'' + 21{\cdot}43151\,r_0 + 294{\cdot}930\,r &= 24{\cdot}440,
\end{aligned}
$$

albo wprowadzając zamiast S'' dogodniejszą w rachunku niewiadomą $\gamma'_0 = S'' - 17^m\,24\overset{s}{\cdot}440$, dalej zamiast r_0 niewiadomą $\gamma_1 = 10\,r_0$, zamiast r niewiadomą $\gamma_2 = 100\,r$ (ostatnie dwie te same więc co poprzednio dla stanów krakowskich)

$$\begin{aligned}
\gamma'_0 + 0{\cdot}040596\,\gamma_1 + 0{\cdot}06847\,\gamma_2 &= 13\overset{s}{\cdot}864\\
\gamma'_0 + 0{\cdot}239143\,\gamma_1 + 0{\cdot}40383\,\gamma_2 &= 11{\cdot}932\\
\gamma'_0 + 1{\cdot}039997\,\gamma_1 + 1{\cdot}54290\,\gamma_2 &= 4{\cdot}557\\
\gamma'_0 + 1{\cdot}140156\,\gamma_1 + 1{\cdot}68912\,\gamma_2 &= 3{\cdot}735\\
\gamma'_0 + 1{\cdot}849162\,\gamma_1 + 2{\cdot}65884\,\gamma_2 &= 1{\cdot}328\\
\gamma'_0 + 2{\cdot}143151\,\gamma_1 + 2{\cdot}94930\,\gamma_2 &= 0{\cdot}000\,,
\end{aligned}$$

przyczem trzecie miejsca dziesiętne prawych stron mają tylko rachunkową wartość. Podstawiając w tych równaniach za γ_1 wartość znalezioną poprzednio, tj.

$$\gamma_1 = -\,11{\cdot}62792 - 1{\cdot}83861\,\gamma_2\,,$$

otrzymamy układ sześciu równań o dwóch niewiadomych γ'_0 i γ_2 (a właśnie ostatnia jest głównym celem naszego poszukiwania)

$$\begin{aligned}
\gamma'_0 - 0{\cdot}00616\,\gamma_2 &= +\,14{\cdot}3360\\
\gamma'_0 - 0{\cdot}03584\,\gamma_2 &= 14{\cdot}7126\\
\gamma'_0 - 0{\cdot}36923\,\gamma_2 &= 16{\cdot}6498\\
\gamma'_0 - 0{\cdot}40717\,\gamma_2 &= 16{\cdot}9927\\
\gamma'_0 - 0{\cdot}74103\,\gamma_2 &= 22{\cdot}8298\\
\gamma'_0 - 0{\cdot}99110\,\gamma_2 &= 24{\cdot}9204.
\end{aligned}$$

Kierunek, jaki nadaliśmy rachunkowi, miał widocznie na celu pozbycie się niewiadomej γ_1 w ostatecznych równaniach, wyznaczających γ_2 (a więc i r), gdyż współczynniki obu tych ilości wzrastają lub ubywają prawie proporcyonalnie. Wyrównanie ostatniego układu metodą najmniejszych kwadratów doprowadza do równań:

$$\begin{aligned}
6{\cdot}00000\,\gamma'_0 - 2{\cdot}55033\gamma_2 &= +\,110{\cdot}4413\\
-\,2{\cdot}55033\,\gamma'_0 + 1{\cdot}83483\gamma_2 &= -\,55{\cdot}2980\,,
\end{aligned}$$

zkąd

$$\gamma'_0 = +\,13{\cdot}677\,,\quad \gamma_2 = -\,11{\cdot}127\,,$$

z prawdopodobnymi błędami tych wartości $\Delta\gamma'_0 = \pm\,\overset{s}{0}{\cdot}450$ i $\Delta\gamma_2 = \pm\overset{s}{0}{\cdot}814$,

a szukana wartość będzie $r = -\,\overset{s}{0}{\cdot}11127 \pm 0{\cdot}00814$. Wartość γ_2 podstawiona w równania otrzymane dla γ_0 i γ_1 daje teraz

$$\gamma_0 = +\,20{\cdot}776\,,\quad \gamma_1 = +\,8{\cdot}8308\,,$$

a że $r_0 = \frac{1}{10}\gamma_1$, więc $r_0 = +\,\overset{s}{0}{\cdot}88308$. Ztąd wynika ostatecznie, że dla zmiennego z temperaturą ruchu (p. d.) chronometru będzie (w zaokrągleniu)

$$\frac{dS}{dt} = + 0{\cdot}8831 - 0{\cdot}1113 \,.\, v \,,$$

gdzie v jest momentalną temperaturą we wnętrzu narzędzia. Obowiązywać może ten wzór temperatury pomiędzy leżącej $+ 7^0$ a $+ 25^0$C, w tych bowiem granicach zmieniała się temperatura v podczas letnich porównań i jesiennych obserwacyj; najdokładniej będzie on rzecz przedstawiał w temperaturach pośrednich, a więc w pobliżu $+16^0$C. W (statecznej) temperaturze $+ 8^0$C ruch tego chronometru byłby tedy niemal zerem. Podczas doświadczeń wahadłowych (dnia 19 październ. i nast.) w piwnicy, dokąd chronometr zaraz po ukończeniu obserwacyj wieczorem dnia 18 października przeniesiono, była temperatura nader mało zmienna i wynosiła średnio b. blisko $+ 12{\cdot}8^0$C. Tej wartości odpowiada według powyższego wzoru ruch (p. d.) chronometru $= - 0{\cdot}^s54$, wcale więc zgodnie z wartością $- 0{\cdot}^s51$ (dokładniej $- 0{\cdot}512$), jaką dały bezpośrednie obserwacye z dni 18 i 23 października [1]), zamykające pomiędzy sobą przeciąg czasu, wypełniony doświadczeniami wahadłowemi. Ztąd wynika, że ruch chronometru dałby się podać w tych dniach prawie z dokładnością $0{\cdot}^s03$ nawet i wówczas, gdyby obserwacyi wieczorem d. 23 paźdz. nie było, okoliczność, która musi w nas wzbudzić zaufanie do znalezionej wartości $r_0 = + 0{\cdot}8831$, jako też jej znaczniejszej stałości.

Dwie pozostałe niewiadome będą

$$S' = + 19^m \; 1{\cdot}^s01 \; + 20{\cdot}^s776 = + 19^m \; 21{\cdot}^s786$$
$$S'' = = 17 \; 24{\cdot}440 \; + 13{\cdot}677 = + 17 \; 38{\cdot}117;$$

wartości na S', r_0 i r pozwalają teraz zobaczyć, z jaką dokładnością są spełnione równania (A). Pomijając $+ 19^m$ jako domyślne, otrzymuję

	Obserwacya		Rachunek		Obs. — Rach.
1.	21·^{s} 17	—	21·^{s} 15	—	+ 0·^{s} 02
2.	19· 78	—	19· 66	—	+ 0· 12
3.	18· 38	—	18· 42	—	− 0· 04
4.	17· 01	—	17· 24	—	− 0· 23
5.	3· 77	—	3· 65	—	+ 0· 12
6.	2· 27	—	2· 37	—	− 0· 10
7·	1· 01	—	0· 89	—	+ 0· 12

[1]) Te ostatnie w poprzednich rachunkach umyślnie nie użyte.

dokładność, jakiej w stanach zegaru na przestrzeni 17tu dni trudno lepszej wymagać. Suma kwadratów pozostałych różnic—uważając je za błędy przypadkowe — wynosi + 0·1081, prawdopodobny błąd któregokolwiek stanu zegaru ± 0·^{s}099, prawdop. błąd stałej γ_0 równy ± 0·^{s}056, a wreszcie taki sam błąd ilości r_0 tylko ± 0·^{s}0051. Świadczy to z jednej strony o znacznej dokładności krakowskich porównań, z drugiej zaś o dostatecznej poprawności znalezionego współczynnika temperatury $r = -$ 0·^{s}1113. Pozostałe drobne niezgodności rachunku z obserwacyą (z których tylko jedna — 0·^{s}23 przekracza możliwy błąd pojedynczego spostrzeżenia = ± 0·^{s} 14) mogą mieć zresztą swoją przyczynę w okolicznościach jeszcze innych niż sama temperatura, podczas gdy tutaj uważane były one wprost za przypadkowe błędy spostrzeżeń. W pierwszym rzędzie nasuwa się myśl, czy też może zmiany w ciśnieniu powietrza, nie wywierają drobniutkiego wpływu na ruch chronometru, jak to co do zegarów wahadłowych już dawniej stwierdzono; materyał obserwacyjny tutaj użyty jest jednak niedostateczny do przeprowadzenia tak subtelnego poszukiwania. Z innego znowu powodu nie wystarcza on do znalezienia różnicy długości geograficznych obu miejscowości, a mianowicie z powodu, że pomiędzy ostatnim stanem chronometru, jaki wzgl. czasu krakowskiego oznaczono (11 września) a pierwszym znalezionym względem średniego czasu czernichowskiego (27 września), upłynął nadto długi przeciąg czasu, ażeby módz zaufać interpolacyjnemu obliczeniu rzeczonej różnicy. Nadto sam materyał obserwacyjny, gdzie zmienność ruchu dziennego przekracza 1^s, o ile właściwym był do obliczenia wartości współczynnika r, o tyle mniej jest stosowny do wyznaczenia różnicy długości, skoro dokładność tej ostatniej zależy właśnie od jak największej stałości ruchu zegaru. Zresztą, jak rzekłem na wstępie, niniejsze poszukiwanie zostało wywołane specyalną potrzebą uchylania wpływu temperatury na ruch chronometru przedewszystkiem przy pomiarach wahadłowych, co do których jest nadzieja, że w bliskiej przyszłości zostaną wykonane systematycznie na licznych punktach naszego kraju. Jeżeli tego rodzaju praca, będąca wielkiej wagi dla geodezyi i fizyografii — a możnaby ją nazwać tryangulacyą grawitacyjną kraju — ma być przeprowadzona systematycznie, dokładnie, tudzież bez nadmiernego przeciążania się wieloraką czynnością obserwatora, wymaga ona uprzątnięcia już z góry licznych przyczyn niedokładności. Do nich w pierwszym rzędzie należy właśnie potrzeba dokładnej znajomości ruchu zegarów czynnych podczas rzeczonych pomiarów. O tem, aby obserwator, prócz właściwych pomiarów wahadłowych, miał na każdej stacyi oddawać się nowym obserwacyom astronomicznym, celem samoistnej kontroli swoich zegarów, nie ma co i myśleć. Przy największej nawet pilności i pracowitości musiałoby to pochłonąć tyle czasu, że dokonanie całej pracy, o której tu mowa, wymagałoby dla naszego kraju jakiego dziesiątka lat, jeżeli nie więcej.

Środek zastosowany — z najlepszym skutkiem — po raz pierwszy przez pułkown. Sterneck'a, przesyłania do każdej stacyi wahadłowej sygnałów czasu drogą telegraficzną ze stacyi centralnej („astronomicznej“) uchyla rzeczoną trudność prawie w zupełności. Pozostały przytem jeszcze trud dwukrotnego— w dniu pomiarów — przenoszenia chronometrów do miejscowej stacyi telegraficznej i z powrotem, byłby sam przez się wprawdzie nieznaczny, gdyby nie okoliczność, że przez to narzędzia te bywają narażane na nieuniknione zmiany temperatury a więc i ruchu, co tylko z uszczerbkiem dobroci ostatecznych rezultatów musi być połączone. Licząc się z tym szczegółem, nie sądzę, iżbym miał popadać w przesadę wymagania zbytecznej może, czy też illuzorycznej dokładności. Dość bowiem zważyć, iż pomiędzy porannymi i wieczornymi sygnałami telegraficznymi upływa zazwyczaj tylko 10—11 godzin, z nich zaś dwie niemal (tj. $\frac{1}{5}$ całości) są wypełnione transportem narzędzia do stacyi i napowrót, wśród temperatury niekiedy bardzo różnej od statecznej ciepłoty w lokalu obserwacyjnym. Proste rozumowanie poucza, że pominięcie tego wpływu wywołałoby w faktycznym ruchu zegaru błąd wynoszący około $\frac{3}{5}\, r \Delta u$ na dobę, w ostatecznym więc rezultacie $35{\cdot}3\, r \Delta u$ jednostek siódmego miejsca dziesiętnego. Gdy Δu (różnica temperatur piwnicy i zewnętrznego powietrza) równa się np. $\pm 8^0$C. — co nie będzie niczem nadzwyczajnem, zwłaszcza wiosną i wczesną jesienią — jakoteż jeżeli wartość $r = -0{\cdot}^s1113$, co odpowiadałoby używanemu przeze mnie chronometrowi, wynosiłby ten błąd 31 jednostek siódmego miejsca dziesiętnego, a naturalnie jeszcze więcej, używając chronometrów z większą niż $0{\cdot}^s11$ wartością współczynnika r. Zważając nadto na istnienie ponownej sposobności popełnienia analogicznego błędu, wywołanego pośrednictwem d r u g i e g o chronometru w centralnej stacyi, snadno pojmiemy, że skrupulatność co do tego punktu nie może być tutaj nigdy za wielką. Jest zaś widoczne, że t o źródło błędów obserwacyjnych tem szkodliwiej musi oddziałać na dokładność ostatecznych wyników, o ile wszystkie doświadczenia danej miejscowości w rezultacie końcowym byłyby z a r ó w n o t y m s a m y m b ł ę d e m skażone. Nie uchyli go więc konwencyonalne tworzenie średniej z wyników obserwacyi pojedynczych wahadeł, chociażby się ich miało znaczniejszą mnogość, a wewnętrzna ich zgodność świadczyć mogłaby jedynie o poprawności wszystkich części składowych pomiaru, z wyłączeniem oznaczenia ruchu zegaru. Mam przekonanie, że wprowadzenie ilości μ, r które można raz na zawsze bez trudu wyznaczyć dla każdego zegaru, uchylając największą część błędu, wynikającego z niedoskonałej kompensacyi chronometrów, może wyjść tylko na pożytek dokładności wahadłowych doświadczeń, a tem samem pomiarów natężenia siły ciężkości.