BIBLIOTECZKA MATEMATYCZNA

POD REDAKCJĄ TADEUSZA SIERZPUTOWSKIEGO i EDWARDA SZPILRAJNA

7

Dr MICHAŁ KERNER

MAKSIMA I MINIMA W DZIEDZINIE GEOMETRII

KSIĄŻNICA-ATLAS
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA

BIBLIOTECZKA MATEMATYCZNA
POD REDAKCJĄ TADEUSZA SIERZPUTOWSKIEGO i EDWARDA SZPILRAJNA
7

Dr MICHAŁ KERNER

MAKSIMA i MINIMA W DZIEDZINIE GEOMETRII

KSIĄŻNICA - ATLAS
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA

2688

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

E VII

... królowa Dydo
Przypłynęła do Libów i tam z wielką biedą
Wytargowała sobie taki ziemi kawał,
Któryby się wołową skórą nakryć dawał.
Na tym kawałku ziemi stanęła Kartago.

(Pan Tadeusz, księga IV).

§ 1. **Wstęp.** Chcąc określić w sposób jednoznaczny jakąkolwiek figurę lub bryłę geometryczną, musimy podać pewną, ściśle określoną liczbę jej elementów. Np. dla określenia trójkąta trzeba podać trzy jego elementy, czworokąt określamy przy pomocy pięciu elementów, kulę przy pomocy jednego, itp. Przez elementy można przy tym rozumieć nie tylko boki i kąty, ale także takie wielkości, jak obwód, pole, objętość itd. Aby więc nie wpadać w sprzeczność z utartym zwyczajem w użyciu wyrazu „element", będziemy raczej mówili o *parametrach,* określających figurę lub bryłę geometryczną.[1] Parametry te są liczbami: mamy tu na myśli nie boki same, lecz ich długości, nie kąty, lecz ich miary. Toteż mówiąc, że w trójkącie mamy bok dany, będziemy zawsze myśleli, że długość boku jest dana. Stosując wprowadzony termin, powiemy, że trójkąt wyznacza się za pomocą trzech parametrów, czworokąt za pomocą pięciu, kula za pomocą jednego itp.

Może się jednak zdarzyć, że ilość danych parametrów jest mniejsza, aniżeli ta, której potrzeba dla określenia figury. Niech, np. w trójkącie będą dane tylko dwa boki. Teraz już figura nie jest określona jednoznacznie. Istotnie, można zbudować nieskończenie wiele trójkątów o dwóch bokach danych. Jeśli, podobnie jak w tym przykładzie,

[1] Pamiętać należy, że bardzo rozpowszechniony w matematyce termin „parametr" używany też bywa w innych znaczeniach.

ilość parametrów danych nie wystarcza do określenia figury lub bryły, istnieje, na ogół rzecz biorąc, nieskończenie wiele figur lub brył, posiadających te parametry. Mamy więc tu do czynienia z nieskończoną *klasą* figur lub brył.

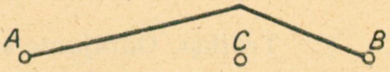
Rozważając taką klasę figur o liczbie parametrów danych, nie wystarczających do określenia figury, możemy postawić zagadnienie pewnego specjalnego typu. Weźmy pod uwagę jeszcze jeden parametr badanej figury. Wartość tego parametru nie jest określona: może on przybierać dla różnych figur różne wartości. Otóż zadajemy pytanie, dla której z tych figur wartość tego parametru będzie największa lub najmniejsza. Pytamy np., który z trójkątów o dwóch danych bokach posiada największe pole; tutaj trzecim parametrem, którego największej wartości szukamy, jest pole. W ten sposób powstaje zagadnienie o *maksimum* lub też o *minimum* w geometrii. Często dla objęcia obydwu terminów razem mówi się w matematyce o *ekstremum* (po łacinie: maximum = największe, minimum = najmniejsze, extremum = skrajne).

Od razu na wstępie chcielibyśmy zwrócić uwagę czytelnika na to, że ekstremum nie zawsze musi istnieć. To znaczy, że nie zawsze musi istnieć figura, dla której pewien parametr osiąga wartość największą lub najmniejszą. Weźmy np. pod uwagę prostokąty o jednym boku danym i szukajmy wśród nich takiego, który by posiadał największe lub najmniejsze pole. Oczywiście nie znajdziemy ani jednego, ani drugiego, gdyż zmieniając bok nie dany prostokąta, możemy uczynić jego pole zarówno dowolnie wielkim, jak i dowolnie małym. Mówimy, że pole jego zarówno nie jest ograniczone od góry, jak i od dołu.[1] Oczywiście wielkość

[1] Pole prostokąta, jak też wszystkie na ogół wielkości w geometrii elementarnej, są dodatnie, a więc z natury rzeczy większe od zera. Jeśli więc mówimy o „ograniczeniu od dołu", mamy tu na myśli „ograniczenie od dołu przez liczbę dodatnią".

nie ograniczona od góry nie może osiągać maksimum, a nie ograniczona od dołu nie może osiągać minimum.

Może się jednak zdarzyć, że nawet wielkość ograniczona od dołu nie posiada minimum, i analogicznie, ograniczona od góry — nie posiada maksimum. Podamy bardzo prosty przykład wielkości ograniczonej od dołu, a nie osiągającej minimum. Istotnie, niech będą dane dwa punkty A i B (rys. 1), oraz punkt C na łączącym je odcinku. Należy znaleźć najkrótszą linię, łączącą A i B, i nie przechodzącą przez C. Jest to zagadnienie o minimum długości linii, łączącej A i B. Otóż długość dowolnej takiej linii jest większa od długości odcinka AB, a tym samym ograniczona od dołu. A jednak długość ta nie osiąga minimum, gdyż z jednej strony musi być większa od długości odcinka AB, z drugiej zaś strony może się dowolnie mało od niej różnić. Nie ma więc najkrótszej linii, łączącej A z B i omijającej C.



Rys. 1.

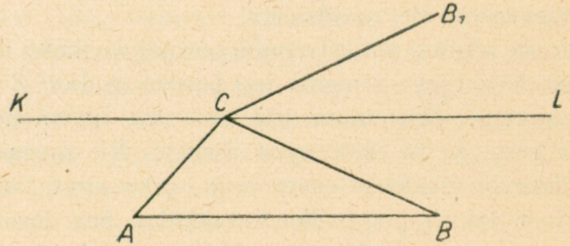
Mamy tu zupełnie podobną sytuację, jak gdybyśmy szukali najmniejszej liczby (niekoniecznie całkowitej), większej od 5, lub też największej liczby, mniejszej od 5. Liczb takich oczywiście nie znajdziemy.

Często się zdarza, że ekstremum pewnej wielkości istnieje, natomiast dowód jego istnienia jest bardzo trudny. Z drugiej strony szukanie ekstremum jest znacznie ułatwione, jeśli wiemy z góry, że to ekstremum istnieje. Nie mogąc przytoczyć dowodu istnienia ekstremum, jako zbyt trudnego, będziemy w takich przypadkach zakładali bez dowodu, że ekstremum istnieje. Będziemy jednak w każdym przypadku wyraźnie to zaznaczali, aby czytelnik mógł sobie zdać sprawę z niezupełności dowodu. Mimochodem zaznaczymy, że tzw. ,,dowody istnienia", to znaczy dowody, że pewien przedmiot badań matematycznych istnieje, nastręczają często dość duże trudności w porównaniu z innymi dowodami tej samej dziedziny. Omijać ich jednak w zasadzie nie można, gdyż naraziłoby to nas na badanie takich przedmiotów matematycznych, jak np. trójkąt, w którym jeden bok jest większy od sumy dwóch pozostałych.

§ 2. **Trójkąt. Odbijanie się światła.** Weźmy pod uwagę klasę wszystkich trójkątów o danym boku i danym polu. Powstaje pytanie, w którym z tych trójkątów obwód jest najmniejszy. Oczywiście wyjdzie na to samo, gdy będziemy szukali trójkąta, w którym suma dwóch boków nie danych jest najmniejsza, gdyż bok trzeci jest we wszystkich trójkątach ten sam. Odpowiedź na postawione pytanie daje nam

Twierdzenie 1. *Ze wszystkich trójkątów o danym boku i danym polu najmniejszy obwód (lub też najmniejszą sumę dwóch boków pozostałych) posiada trójkąt równoramienny, w którym bok dany jest podstawą.*

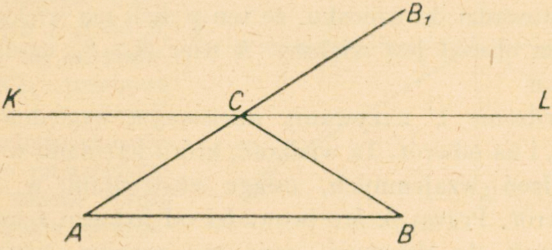
Podamy dowód tego twierdzenia bez szczegółów, pozostawiając je czytelnikowi. Niechaj trójkąt ABC (rys. 2)



Rys. 2.

będzie dowolnym trójkątem o boku AB danym i polu danym. Oczywiście wysokość trójkąta jest przez to też dana.

Wobec tego wierzchołek C leży na prostej KL równoległej do AB i odległej od AB o daną wysokość trójkąta. Przez B_1 oznaczymy punkt symetryczny z punktem B względem prostej KL. Łamana ACB_1 ma długość równą długości łamanej ACB. A więc suma boków AC i CB osiąga minimum,



Rys. 3.

gdy łamana ACB_1 jest najkrótsza. To zaś ma miejsce, gdy łamana staje się odcinkiem linii prostej (rys. 3). Czytelnik dowiedzie, że wtedy trójkąt ACB jest równoramienny, c. b. d. o.

Z dowiedzionego twierdzenia łatwo wynika

Twierdzenie 1'. *Ze wszystkich trójkątów o danym boku i danym obwodzie (lub też danej sumie dwóch pozostałych boków) największe pole posiada trójkąt równoramienny, w którym bok dany jest podstawą.*

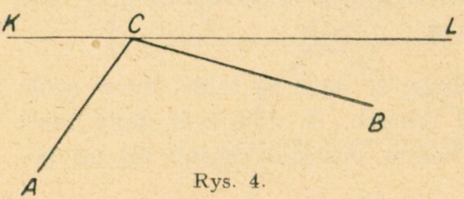
Zakładamy tu oczywiście, że dane są takie, by w ogóle istniały trójkąty o tych danych. A więc bok dany musi być mniejszy od sumy boków pozostałych lub też od połowy obwodu.

Dla dowodu rozważmy dwa różne trójkąty T_0 i T o boku danym i obwodzie danym, przy czym T_0 niech będzie równoramienny. Oznaczmy przez P_0 i P ich obwody, a przez

S_0 i S ich pola. Oczywiście $P_0=P$. Chcemy dowieść, że $S_0>S$. Otóż zbudujmy trójkąt równoramienny T_1 o boku danym, o polu $S_1=S$, a obwód jego oznaczmy przez P_1. W myśl twierdzenia 1 trójkąt ten ma mniejszy obwód, niż T, tzn. $P_1<P$, czyli $P_1<P_0$. Z drugiej strony porównanie trójkątów równoramiennych T_0 i T_1 o danej podstawie prowadzi do wniosku, że ten z nich ma większe pole, w którym obwód jest większy. A więc $S_0>S_1$, czyli $S_0>S$, c. b. d. o.

Twierdzenie 1′ nazywamy *wzajemnym* względem twierdzenia 1, i na odwrót. Ta wielkość, która jest dana w jednym z twierdzeń wzajemnych, osiąga ekstremum w drugim, i na odwrót. Prawo, które prowadzi od jednego z twierdzeń wzajemnych do drugiego, zwie się *prawem wzajemności*. Oczywiście, by prawdziwość jednego z twierdzeń wzajemnych pociągała za sobą prawdziwość drugiego, musi być spełniony pewien dodatkowy warunek. W naszym przykładzie warunkiem tym było to, że w dwóch trójkątach równoramiennych o równych podstawach większemu obwodowi odpowiada większe pole.

Z twierdzeniem 1 związane jest blisko zagadnienie geometryczne, znajdujące ilustrację w dziedzinie optyki. Dana jest na płaszczyźnie prosta KL i dwa punkty A i B po jednej jej stronie (rys. 4). Należy połączyć punkty A i B najkrótszą linią, posiadającą punkt wspólny z prostą KL. Jeśli punktem tym jest C, to oczywiście części linii, łączące A z C oraz C z B muszą być odcinkami linii prostej.

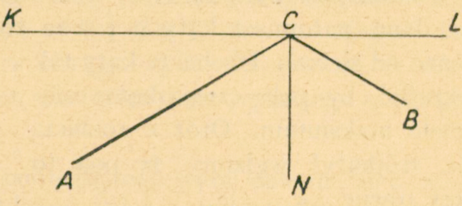


Rys. 4.

Mamy więc to samo zagadnienie, co w twierdzeniu 1, z tą tylko różnicą, że punkty A i B nie muszą leżeć w tej samej odległości od prostej KL. Czytelnik dowiedzie, że w łamanej najkrótszej obydwie części

AC i CB tworzą równe kąty z prostą KL (rys. 5), a co za tym idzie, i z prostą CN, prostopadłą do niej w punkcie C.

Ostatnia własność jest charakterystyczna dla promienia świetlnego, odbijającego się od zwierciadła płaskiego. Jeśli KL będziemy uważali za przekrój zwierciadła, to promień świetlny, wychodzący z A, odbijający się od zwierciadła, i trafiający do punktu B, musi biec po łamanej ACB (rys. 5). Stąd wniosek, że promień świetlny, który ma przejść z A do B, odbijając się od zwierciadła KL, przebywa najkrótszą z możliwych dróg. Przebywa ją oczywiście w najkrótszym możliwie czasie. Mamy tu szczególny przypadek tzw. *optycznej zasady Fermata*,[1] według której (z pewnymi zastrzeżeniami) światło biegnie z punktu do punktu po takim torze, wzdłuż którego zużywa na to najmniej czasu.



Rys. 5.

§ 3. **Czworokąt przegubowy.** Z czterech boków można budować nieskończenie wiele czworokątów, o ile tylko największy z tych boków jest mniejszy od sumy trzech pozostałych. Wszystkie te czworokąty można zrealizować w ten sposób, że łączy się cztery pręciki o danej długości przegubami. Zmieniając kąt pomiędzy dwoma z tych pręcików, przekształcamy w sposób ciągły cały czworokąt. Dlatego też czworokąt o bokach danych, lecz o kątach zmiennych nazywamy *czworokątem przegubowym*. (Mamy tu w gruncie rzeczy do czynienia nie z jednym czworokątem, lecz z całą ich klasą).

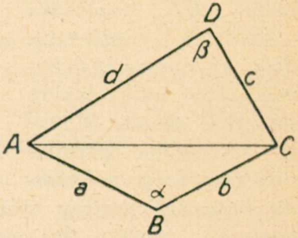
Można dowieść, że jeden i tylko jeden z czworokątów

[1] Fermat — matematyk francuski z XVII wieku, którego nazwisko zdobyło sobie najszerszy rozgłos dzięki pracom z dziedziny teorii liczb.

o bokach danych daje się wpisać w okrąg. Do dowodu tego wrócimy nieco niżej. Teraz zaś udowodnimy

Twierdzenie 2. *Ze wszystkich czworokątów o danych bokach (następujących po sobie w określonej kolejności) największe pole ma czworokąt wpisany w okrąg.*

Uważajmy boki a, b, c, d czworokąta $ABCD$ (rys. 6) za dane, natomiast kąty α i β za zmienne (oczywiście zależne od siebie). Trzeba te kąty tak określić, by pole czworokąta osiągnęło maksimum. Otóż z rozbicia na trójkąty[1] widzimy, że pole to jest równe



Rys. 6.

$$S = \tfrac{1}{2}\, ab \sin\alpha + \tfrac{1}{2}\, cd \sin\beta. \tag{1}$$

Z drugiej strony wyznaczenie kwadratu przekątnej AC za pomocą twierdzenia Carnot'a z obydwu trójkątów i przyrównanie otrzymanych wyrażeń prowadzi do równości

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta, \tag{2}$$

skąd

$$\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{4} = \tfrac{1}{2}ab\cos\alpha - \tfrac{1}{2}cd\cos\beta. \tag{3}$$

Lewą stronę tej równości oznaczamy przez k (możemy uważać k za liczbę daną). Równości (1) i (3) podnosimy stronami do kwadratu i dodajemy stronami:

$$S^2+k^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\tfrac{1}{4}c^2d^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta) -$$
$$- \tfrac{1}{2}abcd(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

---

[1] Zauważymy, że także czworokąt wklęsły daje się rozbić na dwa trójkąty.

Stosując znane tożsamości trygonometryczne, otrzymujemy

$$S^2 = \tfrac{1}{4}a^2b^2 + \tfrac{1}{4}c^2d^2 - k^2 - \tfrac{1}{2}abcd\cos(\alpha+\beta).$$

Z wzoru tego widzimy, że pole S będzie największe, gdy $\cos(\alpha+\beta)$ osiągnie wartość najmniejszą. Wartością najmniejszą funkcji cos jest -1, którą to wartość funkcja osiąga dla kąta równego 180^0. W naszym przypadku kąt $\alpha+\beta$ może istotnie być równy 180^0; ma to miejsce dla czworokąta wpisanego w okrąg, i tylko dla takiego. A więc pole S osiąga maksimum dla czworokąta wpisanego w okrąg, c. b. d. o.

Wrócimy teraz do zapowiedzianego wyżej dowodu, że z czterech boków można zbudować jeden i tylko jeden czworokąt wpisany w okrąg (o ile w ogóle można zbudować czworokąt). Jeżeli czworokąt wpisany w okrąg istnieje, to musi być spełniona równość (2), w której kąt β zastąpiono przez $180^0 - \alpha$. Z równości tej otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Czytelnik założy, że bok a jest większy od każdego z pozostałych boków b, c, d, lecz mniejszy od ich sumy $b+c+d$, i dowiedzie, że wielkość po prawej stronie równości jest zawarta między -1 a $+1$. Wobec tego otrzymujemy na kąt α jedną wartość α_0, zawartą między 0^0 a 180^0. A więc może istnieć tylko jeden czworokąt, zbudowany z boków a, b, c, d. Że taki czworokąt naprawdę istnieje, przekonamy się w następujący sposób. Zbudujemy trójkąt o bokach a, b i kącie zawartym między nimi α_0, oraz trójkąt o bokach c, d i kącie zawartym między nimi $\beta = 180^0 - \alpha_0$. Ponieważ równość (2) będzie w tym przypadku spełniona, więc trzecie boki trójkątów będą równe sobie, a trójkąty po przyłożeniu do siebie utworzą czworokąt wpisany w okrąg.

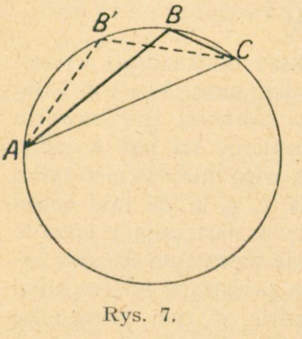
§ 4. **Wielokąty wpisane w okrąg.** Zajmiemy się teraz zbadaniem, dla jakiego wielokąta o danej liczbie boków, wpisanego w dany okrąg, pole i obwód osiągają maksimum.

Oznaczmy liczbę boków przez n. Wielokąt o n bokach nazwiemy krótko n-kątem. Zaczniemy od rozstrzygnięcia sprawy maksimum pola, udowadniając

Twierdzenie 3. *Ze wszystkich n-kątów wpisanych w dany okrąg największe pole ma n-kąt foremny.*

Przyjmiemy bez dowodu, że wśród n-kątów wpisanych w okrąg istnieje wielokąt, posiadający największe pole (dowód ten pomijamy, jako zbyt trudny). Zaznaczmy, że wskutek tego dowód twierdzenia 3 jest niekompletny (patrz wstęp).

Oznaczmy przez W_{max} n-kąt o największym polu wpisany w okrąg K (wskaźnik $_{max}$ ma przypominać o maksimum). Twierdzę, że wszystkie boki W_{max} są sobie równe. Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest. W takim razie można znaleźć w wielokącie dwa kolejne boki nierówne AB i BC (rys. 7). Łączymy A z C odcinkiem linii prostej. Pole całego wielokąta (nie narysowanego) ulegnie powiększeniu, jeśli powiększymy pole trójkąta ABC. To zaś łatwo uczynić przez przeniesienie wierzchołka B do środka B' łuku ABC. Istotnie, trójkąt równoramienny $AB'C$ będzie miał większą wysokość, a zatem i większe pole, niż ABC. Ponieważ wielokąt W_{max} miał posiadać największe pole, więc założenie, że nie wszystkie jego boki są równe, prowadzi do sprzeczności. Skoro zaś boki są równe, wówczas n-kąt W_{max} wpisany w okrąg musi być foremny, c. b. d. o.



Rys. 7.

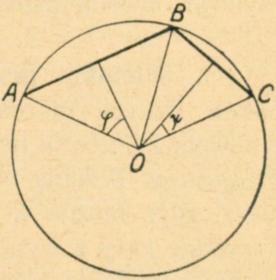
Gdybyśmy odrzucili założenie o istnieniu n-kąta o największym polu, twierdzenie 3 nie byłoby przez nas dowiedzione. Natomiast dowiedlibyśmy słabszego twierdzenia, że

n-kąt nieforemny, wpisany w okrąg, nie może mieć największego pola.

Przechodzimy do sprawy maksimum obwodu, udowadniając

Twierdzenie 4. *Ze wszystkich n-kątów wpisanych w dany okrąg największy obwód ma n-kąt foremny.*

Przyjmiemy znów bez dowodu, że wśród n-kątów wpisanych w okrąg istnieje wielokąt, posiadający największy obwód, i oznaczymy go przez $W_{\max}$. Dla dowodu twierdzenia 4 wystarczy wobec tego dowieść, że n-kąt nieforemny nie może mieć największego obwodu. Chcemy, jak wyżej, dowieść, że wszystkie boki $W_{\max}$ są sobie równe. Gdyby tak nie było, znalazłyby się dwa kolejne boki nierówne AB i BC (rys. 8). Wykażemy, że wówczas przeniesienie wierzchołka B do środka łuku ABC spowodowałoby powiększenie sumy boków AB i BC, a zatem i całego obwodu. Oznaczmy połowę kąta AOB przez φ, a połowę kąta BOC przez ψ. Wówczas kąt $\varphi+\psi$ nie zależy od położenia wierzchołka B i równy jest połowie kąta AOC. Oznaczając przez R promień okręgu, znajdujemy łatwo długość części obwodu ABC:



Rys. 8.

$$2\,R\sin\varphi+2\,R\sin\psi=4\,R\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\,.$$

W myśl uwagi o kącie $\varphi+\psi$ położenie punktu B na łuku ABC wpływa tylko na ostatni czynnik $\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$ wyrażenia po prawej stronie. Czynnik ten osiąga maksimum równe 1, gdy $\frac{\varphi-\psi}{2}=0$, czyli $\varphi=\psi$. A więc długość łamanej

ABC osiąga maksimum, gdy wierzchołek *B* leży w środku łuku *ABC*. Założenie, że boki *AB* i *BC* są nierówne, pozwala więc na powiększenie długości łamanej *ABC*, czego chcieliśmy dowieść. Reszta dowodu, jak dla twierdzenia 3, dotyczącego maksimum pola.

Czytelnik udowodni sam

Twierdzenie. *Ze wszystkich n-kątów opisanych na danym okręgu najmniejsze pole i obwód ma n-kąt foremny.*

Zwrócimy tylko uwagę na to, że obydwie części tego twierdzenia (dotyczące pola i obwodu) sprowadzają się wzajemnie do siebie dzięki temu, że pole równe jest iloczynowi obwodu przez połowę (danego) promienia okręgu.

§ 5. **Wielokąt przegubowy.** Podobnie jak z czterech boków danych można zbudować czworokąt przegubowy, z dowolnej liczby n boków da się zbudować *wielokąt (n-kąt) przegubowy*. Posiada on jeszcze większy stopień nieokreśloności, gdyż można w nim w pewnych granicach zmieniać wszystkie kąty z wyjątkiem trzech. Te trzy kąty określone są przez podanie wszystkich innych, i mogą być wyznaczone zarówno konstrukcyjnie, jak i trygonometrycznie.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia wielokąta przegubowego o największym polu, przypomnimy czytelnikowi pojęcie *wielokąta wypukłego*. Wiemy, że wielokąt[1] dzieli płaszczyznę na część wewnętrzną (wnętrze) i zewnętrzną (przez wielokąty rozumiemy tu tylko takie, które nie przecinają samych siebie). Z wielu definicji wielokąta wypukłego przyjmiemy następującą:

---

[1] Przez wielokąt rozumiemy tu zamkniętą linię łamaną (nazywaną często obwodem wielokąta, który to termin zachowujemy dla długości tej linii), nie zaś część płaszczyzny zawartą wewnątrz linii. Przez pole wielokąta rozumiemy pole części płaszczyzny, ograniczonej przez wielokąt.

wielokątem wypukłym nazywamy taki, w którym żaden odcinek, łączący dwa wierzchołki, nie zawiera punktów zewnętrznych względem wielokąta.

To znaczy, że dowolny odcinek, łączący dwa wierzchołki, zawiera tylko punkty wewnętrzne lub punkty samego wielokąta. Jeżeli przedłużymy dowolny bok wielokąta wypukłego do linii prostej, wówczas wielokąt będzie leżał po jednej stronie tej prostej.

Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy *wklęsłym*. Łącząc odpowiednio dobrane wierzchołki wielokąta wklęsłego odcinkami, utworzyć można wielokąt wypukły, obejmujący dany wielokąt wklęsły.[1] Przedłużmy jeden z tych odcinków (łączący dwa określone wierzchołki A i B) do linii prostej. Stwierdzimy po pierwsze, że wielokąt wypukły, a zatem i wielokąt wklęsły, będzie leżał po jednej stronie prostej AB. Następnie stwierdzimy, że odcinek AB będzie zawierał punkty zewnętrzne względem wielokąta wklęsłego. A zatem żadna z dwóch części, na które punkty A i B dzielą wielokąt wklęsły, nie pokrywa się z odcinkiem AB. Wnioskujemy stąd, że

dowolny wielokąt wklęsły posiada dwa wierzchołki takie, że żadna z dwóch części, na które te wierzchołki dzielą wielokąt, nie pokrywa się z łączącym te wierzchołki odcinkiem, a obydwie części leżą po jednej stronie prostej, łączącej wierzchołki.

Wracając do wielokąta przegubowego, udowodnimy

Twierdzenie 5 *(Cramera)*[2]. *Ze wszystkich wielokątów o danych bokach (następujących po sobie w określonej kolejności) największe pole ma wielokąt wpisany w okrąg.*

---

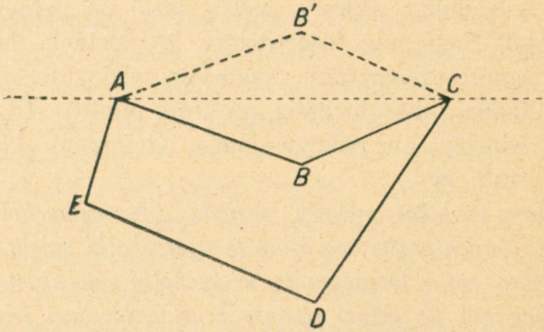
[1] Kwestia ta omówiona jest obszerniej w książeczce S. Straszewicza: *O wielobokach* (Biblioteczka Matematyczna nr 2), § 5, twierdzenie 12.

[2] Cramer — matematyk szwajcarski z XVIII wieku, znany z prac, dotyczących rozwiązywania układów równań liniowych i teorii tzw. wyznaczników.

Twierdzenie to zakłada oczywiście, że wielokąt posiada co najmniej cztery boki. Dla czterech boków zostało ono dowiedzione w § 3. Że z danych boków można w ogóle zbudować wielokąt wpisany w okrąg (o ile w ogóle można zbudować wielokąt), wyniknie z poniższego dowodu twierdzenia 5. Wielokąt taki daje się zbudować tylko jeden, lecz dowód tego (zresztą bardzo intuicyjnego) faktu wykracza poza ramy, zakreślone dla niniejszej książeczki.

Przyjmujemy bez dowodu, że wśród wielokątów o danych bokach istnieje wielokąt o największym polu. Oznaczmy go przez W_{max}. Dowiedziemy, że W_{max} musi być wpisanym w okrąg.

Przede wszystkim W_{max} musi być wielokątem wypukłym. Przypuśćmy przeciwnie, że jest wklęsłym (rys. 9,

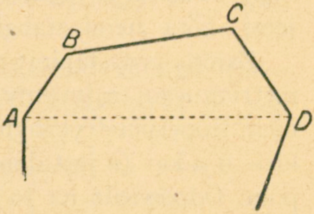


Rys. 9.

wielokąt $ABCDEA$, narysowany linią nie przerywaną). W takim razie możemy znaleźć dwa wierzchołki, np. A i C, takie, że cały wielokąt leży po jednej stronie prostej AC, a żadna z części ABC i $AEDC$, na które punkty A i C dzielą wielokąt, nie pokrywa się z odcinkiem AC. Pole wielokąta W_{max} równe jest różnicy dwóch pól $AEDCA$ i $ABCA$. Jeżeli zastąpimy jedną z części, np. ABC, przez łamaną $AB'C$

symetryczną do niej względem prostej AC, otrzymamy wielokąt $AB'CDEA$ o tych samych bokach, a polu równym sumie wymienionych dwóch pól, a zatem większym od pola wielokąta W_{max}. A więc można utworzyć wielokąt o tych samych bokach i większym polu, niż W_{max}, co przeczy określeniu W_{max}. Założenie, że W_{max} jest wklęsły, prowadzi zatem do sprzeczności. Wielokąt maksymalny W_{max} musi być więc wypukły.

Teraz dowiedziemy, że W_{max} musi być wpisany w okrąg. Obierzmy w nim cztery dowolne kolejne wierzchołki $ABCD$ (rys. 10). Twierdzę, że muszą one leżeć na jednym okręgu. Przypuśćmy, że tak nie jest, i połączmy pierwszy wierzchołek A z czwartym D odcinkiem linii prostej. Wobec wypukłości wielokąta odcinek ten podzieli go na dwie części, z których jedna jest czworokątem $ABCD$. Gdyby wierzchołki $ABCD$ nie leżały na jednym okręgu, można by było w myśl twierdzenia 2 zastąpić czworokąt $ABCD$ przez inny, o tych samych bokach, lecz większym polu. Pole całego wielokąta W_{max} uległoby powiększeniu, co przeczy jego określeniu. A więc cztery kolejne wierzchołki muszą leżeć na jednym okręgu.



Rys. 10.

Obierzmy sobie teraz trzy kolejne wierzchołki i poprowadzimy przez nie okrąg. Czwarty z kolei wierzchołek musi leżeć na tym okręgu. Ponieważ drugi, trzeci i czwarty leży na tym okręgu, więc i piąty z kolei musi na nim leżeć. W ten sposób przekonamy się kolejno, że wszystkie wierzchołki leżą na tym samym okręgu, c. b. d. o.

---

[1] Izoperymetryczny = o równym obwodzie (z greckiego).

Z dowodu twierdzenia 5 wynika, że z danych boków daje się zbudować wielokąt wpisany w okrąg. Istotnie, przypuściwszy, że istnieje wielokąt o największym polu, dowiedliśmy, że musi on być wpisanym w okrąg. (Dowód bezpośredni, nie korzystający z założenia o istnieniu maksymalnego wielokąta, jest dość trudny).

§ 6. **Zagadnienie izoperymetryczne dla wielokątów.** Zagadnienie izoperymetryczne[1] polega na znalezieniu linii zamkniętej o danym odwodzie, która by ograniczała możliwie największe pole. Historia tego zagadnienia sięga aż do legendy o królowej Dydonie, która uzyskała szmat ziemi, dający się „nakryć" skórą wołową. Dydona kazała pociąć skórę na wąskie pasy i otoczyć nimi możliwie duże pole. Stąd związek z zagadnieniem izoperymetrycznym. Na objętej skórą ziemi stanąć miała według legendy Kartagina.

Zanim przystąpimy do właściwego zagadnienia izoperymetrycznego, zajmiemy się zbliżonym do niego zagadnieniem izoperymetrycznym dla wielokątów. W tym przypadku idzie o n-kąt (n jest dane) o danym obwodzie i największym polu. Odpowiedź na to zagadnienie daje

Twierdzenie 6 ***(Zenodora).***[1] *Ze wszystkich n-kątów o obwodzie danym największe pole ma n-kąt foremny.*

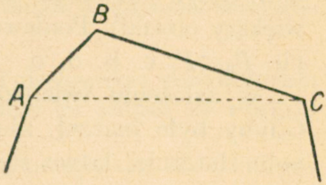
Przyjmijmy bez dowodu, że n-kąt o największym polu istnieje. Oznaczmy go przez W_{max}. Twierdzę przede wszystkim, że W_{max} jest wielokątem wpisanym w okrąg. Istotnie, gdyby tak nie było, moglibyśmy w myśl twierdzenia 5 zbudować wielokąt o tych samych bokach (a więc i tym samym obwodzie), a większym polu. Wynika stąd również, że W_{max} jest wielokątem wypukłym.

Twierdzę następnie, że W_{max} jest wielokątem równo-

---

[1] Zenodor — matematyk grecki z II wieku przed Nar. Chr.

bocznym (ma wszystkie boki równe sobie). Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest. W takim razie wielokąt $W_{\max}$ posiada 2 boki sąsiednie nierówne. Niech to będą boki AB i BC (rys. 11). Połączmy A i C odcinkiem linii prostej. Wobec wypukłości $W_{\max}$ odetnie on trójkąt ABC (nierównoramienny). Możemy zastąpić ten trójkąt przez trójkąt równoramienny o tej samej podstawie AC i tej samej sumie boków AB i BC. Trójkąt równoramienny będzie posiadał w myśl twierdzenia 1' większe pole. W ten sposób powiększy się także pole całego wielokąta $W_{\max}$, przy czym obwód jego nie ulegnie zmianie, co przeczy określeniu $W_{\max}$. Wobec tego wielokąt $W_{\max}$ musi mieć wszystkie boki równe.



Rys. 11.

Wynika stąd, że $W_{\max}$ jest wielokątem foremnym (jako wielokąt wpisany w okrąg o równych bokach), a to jest tezą twierdzenia 6.

Twierdzeniem wzajemnym do niego jest

Twierdzenie 6'. *Ze wszystkich n-kątów o danym polu najmniejszy obwód ma n-kąt foremny.*

Aczkolwiek twierdzenie to wydaje się prostym wnioskiem z poprzedniego, to jednak przytoczymy dowód jego w całości.

Weźmy pod uwagę dwa różne n-kąty W_0 i W o danym polu, przy czym W_0 niech będzie foremny. Oznaczmy przez P_0 i P ich obwody, a przez S_0 i S ich pola. Zakładamy, że $S_0=S$; chcemy dowieść, że $P_0<P$. Dla dowodu zbudujmy wielokąt foremny W_1 o obwodzie $P_1=P$; niech S_1 oznacza jego pole. Wielokąty W_1 i W mają równe obwody, a jeden z nich (W_1) jest foremny. W myśl twierdzenia 6 pole S_1

wielokąta W_1 musi być większe od pola S wielokąta W, czyli $S < S_1$. Wobec tego, że $S_0 = S$, mamy $S_0 < S_1$. Biorąc pod uwagę foremność wielokątów W_0 i W_1, wnioskujemy, że analogiczna nierówność $P_0 < P_1$ ma miejsce i dla obwodów (gdyż wielokąt foremny o większym polu posiada większy obwód). Ponieważ z założenia $P_1 = P$, więc ostatecznie $P_0 < P$, c. b. d. o.

W założeniu twierdzenia 6 liczba n boków była dana. Gdyby było inaczej, nie istniałby wielokąt o największym polu. Istotnie, łatwo się przekonać, że przy danym obwodzie pole wielokąta foremnego jest tym większe, im większa jest ilość boków. Powiększając więc n, moglibyśmy tworzyć wielokąty o coraz to większym polu.

§ 7. **Prawo wzajemności.**[1] W §§ 2 oraz 6 mieliśmy pary twierdzeń wzajemnych. W obydwu przypadkach, opierając się na jednym twierdzeniu, dowodziliśmy twierdzenia wzajemnego jednakową metodą. Postaramy się ująć przejście od twierdzenia danego do wzajemnego w formie ogólnej. Korzystając z wyniku, w ten sposób osiągniętego, będziemy mogli w przyszłości opuszczać dowody twierdzeń wzajemnych.

Weźmy pod uwagę pewną klasę figur geometrycznych W (w ostatnim przykładzie były to n-kąty). Mogłyby to być również bryły geometryczne lub nawet twory spoza dziedziny geometrii, jak np. ciała fizyczne; jednak dla ustalenia uwagi mówimy tu tylko o figurach geometrycznych. Każdej z figur W niechaj odpowiadają dwie liczby P i S (w omówionym przykładzie: obwód i pole n-kąta).

W klasie figur W niech się zawiera klasa węższa figur W_m, które nazwiemy figurami ekstremalnymi (w przykładzie były to n-kąty foremne). Założymy przy tym, że znajomość liczby P lub S pozwala nam określić w zupełności figurę W_m, jak to ma miejsce dla obwodu lub pola w przypadku n-kąta foremnego.

Przy tym znaczeniu figur W i W_m oraz wielkości P i S słuszne jest

[1] Czytelnik może opuścić § 7, przechodząc bezpośrednio do § 8.

Prawo wzajemności:

Założenie 1. *Ze wszystkich figur W, dla których P jest dane, największe S ma figura W_m.*

Założenie 2. *Z dwóch figur W_m ta ma większe P, która ma większe S.*

Teza. Ze wszystkich figur W, dla których S jest dane, najmniejsze P ma figura W_m.

Dowód tego prawa będzie niemal dosłownym powtórzeniem dowodu twierdzenia 6'. Przeprowadzimy go jednak ze względu na jego abstrakcyjność.

Niech W i W_0 będą dwiema równymi figurami W, z których druga należy do klasy W_m (jest figurą ekstremalną). Figurze W odpowiadają liczby P i S, a figurze W_0 liczby P_0 i S_0. Zakładając, że $S_0=S$, chcemy dowieść, że $P_0<P$. Otóż weźmy pod uwagę figurę ekstremalną W_1, której odpowiadają liczby P_1 i S_1, i dla której $P_1=P$. Porównanie figur W i W_1 prowadzi na zasadzie założenia 1 do nierówności $S<S_1$. Wobec $S_0=S$ otrzymujemy $S_0<S_1$. Na zasadzie założenia 2 wnioskujemy stąd, że $P_0<P_1$. Ponieważ zaś $P_1=P$, więc $P_0<P$, c. b. d. o.

Należy się zastrzec, że prawo wzajemności, wypowiedziane przez nas, jest właściwie tylko bardzo szczególnym przypadkiem prawa tak nazywanego w matematyce.

§ 8. **Zagadnienie izoperymetryczne dla dowolnych linii.** W § 6 wspomnieliśmy o właściwym zagadnieniu izoperymetrycznym, lub, jak je niekiedy nazywają, zagadnieniu Dydony. Polega ono na znalezieniu linii zamkniętej (łamanej lub krzywej) o danym obwodzie, która by ograniczała największe pole. Jest to oczywiście zagadnienie innego typu niż rozważane w § 6, gdyż tam zakres badania ograniczał się do wielokątów o danej z góry liczbie boków. Tu natomiast ograniczenie to odpada.

Będziemy tu rozważać tzw. *krzywe zamknięte zwykłe*, tj. krzywe, które 1) są zamknięte (podobnie jak okrąg, trójkąt, elipsa itp.), 2) nie przecinają samych siebie (w przeciwieństwie np. do cyfry „8"). Są to takie linie, które dają się otrzymać z okręgu przez wyginanie i rozciąganie, jednak bez rozrywania i bez stykania różnych jego punktów. Każda linia zamknięta zwykła dzieli płaszczyznę na dwie części: wewnętrzną i zewnętrzną.

W dalszym ciągu tego paragrafu, mówiąc o liniach, będziemy mieli na myśli wyłącznie linie zamknięte zwykłe.

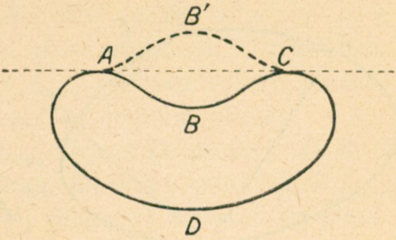
Aby nie przerywać biegu dowodu poniższego twierdzenia, wtrącimy tu kilka słów o liniach *wypukłych*. Przyjmiemy następującą ich definicję: *linię zamkniętą nazywamy wypukłą, jeżeli żaden odcinek linii prostej, łączący dwa punkty linii, nie zawiera punktów zewnętrznych.*

To znaczy, że dowolny odcinek, łączący dwa punkty linii, zawiera tylko punkty wewnętrzne oraz punkty samej linii. Dla wielokąta daliśmy w paragrafie 6 nieco inne określenie wypukłości (w którym rola wierzchołków została wyróżniona); można jednak łatwo dowieść, że obydwa określenia są dla wielokątów równoważne.

Linię zamkniętą, która nie jest wypukłą, nazywamy *wklęsłą*. Będzie nam poniżej potrzebna jedna własność linii wypukłej i jedna wklęsłej, zupełnie analogicznie do własności wielokątów, omówionych w § 5. Przyjmiemy je tu jednak bez dowodu, by nie odbiegać zbyt daleko od nakreślonego tematu.

Otóż *linie wypukłe posiadają tę własność, że przez każdy ich punkt można poprowadzić przynajmniej jedną prostą, nie zawierającą punktów wewnętrznych.* Oczywiście cała linia leży po jednej stronie takiej prostej. Dla okręgu prostymi tymi są styczne. W przypadku wielokąta przez punkt na boku przechodzi jedna taka prosta (przedłużenie boku), a przez wierzchołek nieskończenie wiele (wypełniają one kąty zewnętrzne wielokąta przy danym wierzchołku). Proste, przechodzące przez punkt linii wypukłej, i nie zawierające punktów wewnętrznych, zwą się *prostymi podpierającymi linię.*

Przechodzimy teraz do linii wklęsłych. Otóż *dowolna linia wklęsła posiada dwa takie punkty, że żadna z dwóch części, na które te punkty dzielą linię, nie pokrywa się z łączącym te punkty odcinkiem, a obydwie części leżą po jednej stronie łączącej punkty prostej* (patrz rys. 12). Prosta ta jest czymś analogicznym do prostej podpierającej linię wypukłą.



Rys. 12.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego:

Twierdzenie 7. *Ze wszystkich linii zamkniętych o danym obwodzie największe pole ogranicza okrąg.*

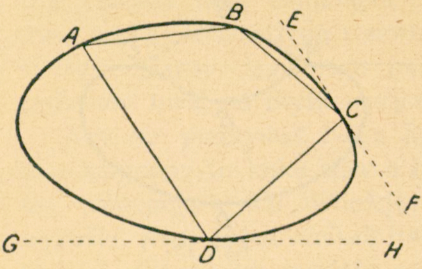
Dowód, który podamy, zawiera zasadnicze myśli dowodu Steinera,[1] przeszedł jednak tyle modyfikacyj, że pod względem szczegółów mocno się różni od oryginalnego dowodu steinerowskiego.

Przede wszystkim przyjmujemy, jak poprzednio bez dowodu, że istnieje linia o danym obwodzie i największym polu, i oznaczamy ją przez L_{max}.

Udowodnimy, że L_{max} musi być linią wypukłą. Przypuśćmy przeciwnie, że linia L_{max} jest wklęsła (rys. 12, linia nie przerywana). W takim razie istnieją na linii L_{max} dwa punkty, np. A i C, takie, że linia L_{max} leży po jednej stronie prostej AC, a żadna z części ABC i ADC, na które punkty A i C dzielą linię L_{max}, nie pokrywa się z odcinkiem AC. Pole, ograniczone krzywą L_{max}, równe jest różnicy dwóch pól: pola figury, ograniczonej odcinkiem AC i jedną

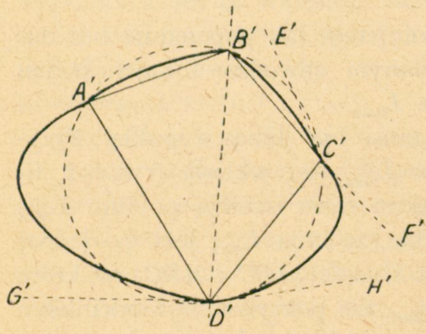
[1] Steiner — matematyk szwajcarski z pierwszej połowy XIX wieku.

z części, tj. ADC, oraz pola figury, ograniczonej odcinkiem AC i drugą z części, tj. ABC. Zastąpmy teraz łuk ABC przez łuk $AB'C$ symetryczny do niego względem prostej AC. Otrzymamy w ten sposób krzywą $AB'CDA$ o tym samym obwodzie, co L_{max}, a polu równym sumie wymienionych wyżej dwóch pól, a więc większym od pola L_{max}. To zaś przeczy określeniu linii L_{max}. Linia ta musi być zatem wypukła.



Rys. 13.

Obierzmy teraz na linii L_{max} cztery dowolne punkty A, B, C, D (rys. 13) i połączmy je kolejno odcinkami linii prostej. Otrzymamy czworokąt $ABCD$ wpisany w linię L_{max} i cztery figury, ograniczone cięciwami i łukami linii L_{max}. Nazwijmy dla krótkości te cztery figury księżycami. Pole, ograniczone linią L_{max} będzie równe wobec jej wypukłości sumie pola czworokąta i pól czterech księżyców. Chcę dowieść, że cztery dowolnie obrane punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu. Przypuśćmy, że tak nie jest. W takim razie możemy zastąpić czworokąt $ABCD$ przez czworokąt $A'B'C'D'$, wpisany w okrąg, i posiadający te same boki (rys. 14). Pole jego na zasadzie twierdzenia 2 jest większe od pola czworokąta $ABCD$. Otóż zbudujmy



Rys. 14.

cztery księżyce, oparte na bokach $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, i równe księżycom linii L_{max}. Otrzymamy nową linię L', złożoną z czterech łuków $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, o tym samym obwodzie, co L_{max} a polu większym. To zaś jest sprzeczne z określeniem linii L_{max}. A więc cztery punkty A, B, C, D muszą istotnie leżeć na jednym okręgu.

Obierzmy teraz na linii L_{max} trzy stałe punkty A, B, C i poprowadzimy przez nie okrąg. Dowolny punkt linii L_{max} musi leżeć (wobec dowiedzionej własności czterech jej punktów) na tym okręgu. Stąd wniosek, że wszystkie punkty linii L_{max} leżą na jednym okręgu. A że L_{max} jest linią zamkniętą, więc musi się pokrywać z całym okręgiem, dzięki czemu nasze twierdzenie zostało udowodnione.

Przekształcenie linii L_{max} na L' wymaga pewnej uwagi uzupełniającej. Idzie o to, czy otrzymamy w ten sposób linię, nie przecinającą samej siebie. Wszak mogłoby się zdarzyć, że cztery jej łuki wzajemnie by się przecinały i nie można by było mówić o jej polu (patrz warunek 2) str. 21). Otóż możliwość ta jest zazwyczaj pomijana w dowodzie Steinera. Aby dowieść, że cztery łuki krzywej L' nie mają istotnie ze sobą punktów wspólnych (poza końcami), skorzystamy z wypukłości pierwotnej krzywej L_{max}.

Dowiedziemy przede wszystkim, że dwa sąsiednie łuki, np. $B'C'$ i $C'D'$, nie mają punktów wspólnych (poza C'). W tym celu przez punkt C linii L_{max} poprowadzimy prostą podpierającą EF. Łuk BC znajdzie się wewnątrz kąta BCE, a łuk CD wewnątrz kąta DCF. Odłóżmy równe im kąty $B'C'E'$ i $D'C'F'$, obejmujące wewnątrz łuki $B'C'$ i $C'D'$. Przy przejściu od linii L_{max} do L' kąt BCD (mniejszy od półpełnego) przeszedł w kąt $B'C'D'$ (również mniejszy od półpełnego), a więc zmienił się mniej, niż o kąt półpełny. Wobec tego kąt zewnętrzny ECF (półpełny) zmienił się też mniej, niż o kąt półpełny (kąty BCE i DCF nie uległy zmianie). Wynika stąd, że ramiona $C'E'$ i $C'F'$ nie mogą zajść na siebie. A zatem, kąty $B'C'E'$ i $D'C'F'$ poza wierzchołkiem C' nie mają wspólnych punktów. To samo można powiedzieć o zawartych w nich łukach $B'C'$ i $C'D'$.

Aby dowieść, że łuki przeciwległe, np. $A'B'$ i $C'D'$, nie mają wspólnych punktów, wybierzmy z czterech kątów wypukłego czworokąta $ABCD$ kąt, który przy przekształceniu uległ zmniejszeniu; niech to będzie kąt CDA. W takim razie przekątna AC uległa zmniejszeniu, a co za tym idzie, i kąt przeciwległy ABC. Poprowadźmy przekątną przez wierzchołki B' i D' zmniejszonych kątów. Wreszcie poprowadźmy przez punkt D linii $L_{\max}$ prostą podpierającą GH i odłóżmy kąt $A'D'G'$, równy ADG. Kąt ADG zawiera łuk DA, a kąt $A'D'G'$ — łuk $D'A'$. Z rys. 13 widzimy, że

$$\sphericalangle CDA + \sphericalangle ADG < 180^0.$$

Tym bardziej więc (wobec zmniejszenia kąta ADC)

$$\sphericalangle C'D'A' + \sphericalangle A'D'G' < 180^0.$$

Wreszcie

$$\sphericalangle B'D'A' + A'D'G' < 180^0.$$

Stąd wniosek, że cały kąt $A'D'G'$ leży po jednej stronie prostej $B'D'$. To samo więc można powiedzieć o zawartym w nim łuku $D'A'$. Ponieważ łuk ten wybrany został zupełnie dowolnie spośród czterech łuków, więc każdy z tych łuków leży po jednej stronie prostej $B'D'$. Naturalnie łuki $D'A'$ i $A'B'$, zawierające A', leżą po jednej stronie, a łuki $B'C'$ i $C'D'$, zawierające C', po drugiej. Wobec tego pary łuków $A'B'$, $C'D'$ oraz $B'C'$, $D'A'$ nie mają punktów wspólnych, c. b. d. o.

Oprócz twierdzenia 7 (które uważamy za główny przedmiot rozważań niniejszej książeczki), prawdziwe jest także wzajemne

Twierdzenie 7'. *Ze wszystkich linii zamkniętych, ograniczających dane pole, najmniejszy obwód ma okrąg.*

Dla dowodu wystarczy powałać się na prawo wzajemności (§ 7) i uwzględnić okoliczność, że okrąg, ograniczający większe pole (πR^2) posiada większy obwód ($2\pi R$).

§ 9. **Dwa rodzaje zagadnień, dotyczących ekstremum.** Przyjrzyjmy się omówionym dotychczas zagadnieniom. Spostrzegamy, że ostatnie zagadnienie, gdzie szukaliśmy linii zamkniętej, spełniającej pewne warunki, różni się bardzo od wszystkich poprzednich zagadnień, w których szukaliśmy trójkąta, czworokąta lub ogólnie n-kąta o pewnych własnościach. Na czym polega różnica między obydwoma rodzajami zagadnień?

Zanalizujmy przede wszystkim zagadnienia, zawarte w paragrafach do 7 włącznie, a więc zagadnienia na poszukiwanie n-kąta. Jak tego wymaga samo postawienie zagadnienia o ekstremum, w zadaniach tych jest dana zawsze zbyt mała ilość parametrów, by określić daną figurę. A więc w twierdzeniu 1 w trójkącie jest dany tylko bok i pole; dla określenia trójkąta trzeba jeszcze *jednego parametru*, np. jakiegoś kąta; ten właśnie parametr określamy tak, by obwód osiągał minimum. W twierdzeniu 2 mamy dane w czworokącie cztery boki, podczas gdy dla wyznaczenia czworokąta trzeba pięciu danych; znowu *jeden parametr* jest niewiadomy. W zagadnieniach, dotyczących n-kąta wpisanego w okrąg dany, potrzeba znaleźć $n-1$ *parametrów*, by móc wyznaczyć n-kąt; możemy np. szukać $n-1$ boków n-kąta, co nam pozwoli z łatwością wyznaczyć n-kąt (ponieważ jest on wpisany w okrąg dany). W zagadnieniu o n-kącie przegubowym mamy dane n boków, podczas gdy dla wyznaczenia n-kąta trzeba mieć jeszcze $n-3$ *parametrów*, np. $n-3$ kolejnych kątów; pozostałe 3 kąty wyznaczymy łatwo konstrukcyjnie. W zagadnieniu izoperymetrycznym dla n-kąta mamy tylko jedną daną, tj. obwód; musimy wyznaczyć jeszcze $2n-4$ *parametrów*, by n-kąt był określony; może to być $n-1$ boków (ostatni bok wyznacza się z danego obwodu) oraz $n-3$ kolejnych kątów.

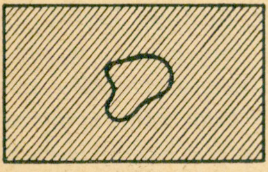
Zestawiając te spostrzeżenia, dochodzimy do wniosku, że w każdym z badanych przypadków musimy wyznaczyć *skończoną i zupełnie określoną liczbę parametrów*, by zadanie móc uważać za rozwiązane. Moglibyśmy też powiedzieć, że rozwiązanie każdego z tych zadań daje się przedstawić przy pomocy skończonej ilości punktów na płaszczyźnie. Tak, np. trójkąt daje się wyznaczyć przy pomocy trzech punktów (wierzchołków), n-kąt — przy pomocy n punktów. Co prawda punkty te nie mogą być zupełnie dowolne, gdyż szukane figury spełniają pewne warunki (dany bok, dany obwód itp.). Zagadnieniom tego typu poświęcony jest specjalny dział *rachunku różniczkowego,* obejmujący ogólne metody szukania maksimów i minimów. Metody te posiadają charakter analityczny (rachunkowy) i dają nam do ręki bardzo dogodne narzędzie praktyczne. Pod względem teoretycznym wymagają one jednak bardzo poważnych i często trudnych badań uzupełniających.

Przejdźmy teraz do ostatniego zagadnienia, to jest do zagadnienia izoperymetrycznego dla dowolnej linji. Tym razem trzeba wyznaczyć linię o danym obwodzie, o której kształcie z góry nic określonego nie wiemy. Jest rzeczą jasną, że za pomocą skończonej ilości parametrów nie można określić tej linii. Również, gdybyśmy chcieli tę linię wyznaczyć przy pomocy punktów, przekonalibyśmy się, że skończona ich liczba nie wystarczy. Gdybyśmy bowiem dowolnie gęsto (dowolnie blisko siebie) wykreślili punkty linii, to jednak linia nie byłaby jeszcze określona; pozostałyby do wyznaczenia łuki pomiędzy punktami.

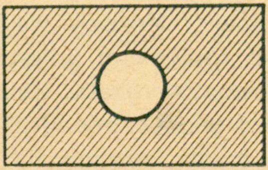
Tego rodzaju zagadnienia, w których szukaną jest linia nieznanego z góry kształtu, należą do innego typu, niż poprzednie, i są w zasadzie znacznie trudniejsze. Poświęcony im jest specjalny dział analizy matematycznej, tzw. *rachunek wariacyjny.* Nazwa jego pochodzi stąd, że badaną figurę poddajemy bardzo małym zmianom (tzw. wariacjom); jeżeli figura daje np. maksimum pola, to wszelkie zmiany powinny wywoływać zmniejszenie tego pola. To znaczy, że przyrost (wariacja) pola wskutek zmiany krzywej musi być ujemny. W ten sposób rozpoznajemy, dla jakiej figury w ogóle maksimum może mieć miejsce.

Rachunek wariacyjny tworzy bardzo obszerny dział analizy matematycznej. Od czasu jego powstania, tj. od wieku XVII (niedługo po stworzeniu rachunku różniczkowego i całkowego przez Newtona i Leibniza), opublikowano ogromną ilość prac monograficznych z jego zakresu (około 3000). Rachunek wariacyjny opiera się na innych działach analizy matematycznej; dlatego też, aby go studiować, należy przedtem gruntownie opanować przede wszystkim rachunek różniczkowy i całkowy oraz teorię tzw. równań różniczkowych.

§ 10. **Błony mydlane. Powierzchnie minimalne.** Twierdzenie 7 daje się zilustrować przy pomocy łatwego doświadczenia z błoną mydlaną. Weźmy w tym celu ramkę z wygiętego drutu (rys. 15) o kształcie jakiejkolwiek figury



Rys. 15.



Rys. 16.

płaskiej, np. prostokąta. Zanurzamy ją w roztworze mydła, dzięki czemu na ramce zostaje napięta płaska błona mydlana. Błona ta posiada własność kurczenia się i dlatego zawsze przybiera taki kształt, przy którym pole jej osiąga minimum. Kładziemy teraz na błonę cienką nierozciągliwą niteczkę, o kształcie linii zamkniętej (rys. 15). Następnie przekłuwamy igłą błonę wewnątrz nitki. Dzięki temu cała część wewnętrzna ulegnie zerwaniu. Pozostała poza nitką błona dąży w myśl powyższego do zajęcia minimum pola. Dzięki temu „otwór" wewnątrz nitki dąży do osiągnięcia maksimum pola. Ponieważ zaś długość nitki jest stała, więc nitka powinna przybrać kształt linii, która przy danym obwodzie ogranicza największe pole. W myśl twierdzenia 7 linią taką jest okrąg. Istotnie, doświadczenie potwierdza te przewidywania całkowicie (rys. 16).

Ramka prostokątna w powyższym doświadczeniu może być, jak zaznaczyliśmy, zastąpiona przez dowolną ramkę płaską. Błona napięta będzie również płaska. Jest to w związku z tym, że ze wszystkich powierzchni o konturze w kształcie linii płaskiej najmniejsze pole posiada powierzchnia płaska (część płaszczyzny). Jakiekolwiek wygięcie błony (odchylenie od płaszczyzny) wywołałoby powiększenie jej pola. Własność płaszczyzny osiągania minimum pola przy danym konturze przypomina własność prostej, będącej najkrótszą linią, łączącą dwa dane punkty.

Zastąpmy teraz ramkę płaską przez dowolną ramkę przestrzenną. Możemy więc nadać drutowi kształt dowolnej linii zamkniętej przestrzennej (nie leżącej w płaszczyźnie), np. czworokąta, którego cztery wierzchołki nie leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli ramkę taką zanurzymy w roztworze mydła, zostanie na niej napięta błona, jednak tym razem już nie płaska (płaska byłaby niemożliwa). Również i ta błona osiągnie minimum pola (przy danym konturze), co pozostaje w związku z jej dążeniem do kurczenia się. Omówione doświadczenie ilustruje następujące zagadnienie matematyczne: *mając daną linię zamkniętą w przestrzeni, znaleźć powierzchnię, mającą tę linię za kontur, i osiągającą najmniejsze pole ze wszystkich takich powierzchni*. Powierzchnię o tej własności nazywamy *powierzchnią minimalną*. Jest to na ogół powierzchnia krzywa. Tylko w przypadku konturu płaskiego jest ona płaska. A więc płaszczyzna jest szczególnym przypadkiem powierzchni minimalnej.

Teoria powierzchni minimalnych stanowi jeden z najpiękniejszych rozdziałów geometrii. W zasadzie jest ona jednak niedostępna dla badania środkami elementarnymi. Dlatego też musimy się ograniczyć do powyższej ilustracji przy pomocy błon mydlanych. W zasadzie wszelka błona mydlana ilustruje pewną powierzchnię minimalną, o ile tylko jest poddana z obydwu stron działaniu tego samego ciśnienia powietrza. Pewne odchylenie może jednak spowodować ciężar błony, zwłaszcza, jeśli jest ona nie dość cienka.

Zanim porzucimy temat powierzchni minimalnych, zrobimy pewne spostrzeżenie, dotyczące ich wygięcia. Ograniczymy się tu jednak do ujęcia intuicyjnego sprawy. Otóż przede wszystkim zauważymy, że wszelkie powierzchnie krzywe dzielą się w zasadzie na dwie grupy, jeśli idzie o charakter ich wygięcia.

Z jednej strony mamy takie powierzchnie, jak powierzchnia kulista, skorupa jajka, powierzchnia ziemi itp. O powierzchniach tego typu można powiedzieć, w którą stronę zwrócone są wypukłością. Jeśli wyobrazimy sobie w dowolnym punkcie tej powierzchni płaszczyznę styczną, a następnie będziemy przez ten punkt prowadzili przekroje płaszczyznami, prostopadłymi do płaszczyzny stycznej, to otrzymamy jako przekroje szereg linii, wygiętych w jedną i tę samą stronę. Od powierzchni takiej można łatwo odciąć płaszczyzną małą wypukłą czaszę, podobną do czaszy kulistej.

Z drugiej strony występują takie powierzchnie, jak powierzchnia siodła. W tym przypadku nie możemy powiedzieć, w którą stronę zwrócona jest wypukłość powierzchni. Istotnie, przekrój podłużny siodła (od przodu do tyłu) jest linią wygiętą do góry, natomiast przekrój poprzeczny (z prawa na lewo) jest linią wygiętą ku dołowi. Nie ma tu już mowy o odcięciu czaszy płaszczyzną. Tego rodzaju powierzchnie, jak siodło, nazwijmy wyłącznie dla naszego użytku powierzchniami obustronnie wygiętymi. Nazwa bowiem przyjęta w matematyce wymagałaby przedwstępnych objaśnień, których chcemy uniknąć.

Oczywiście powyższe dwie kategorie nie obejmują wszystkich powierzchni. Nie mieści się bowiem w tej klasyfikacji przede wszystkim płaszczyzna, a następnie takie powierzchnie, jak powierzchnia walcowa i stożkowa. Dwie opisane kategorie tworzą jednak zasadniczy podział powierzchni. Wszystkie inne powierzchnie należy raczej traktować, jako twory wyjątkowe, stanowiące etap przejściowy od jednej kategorii do drugiej.

Otóż powierzchnie minimalne należą do kategorii drugiej, to jest są obustronnie wygięte (o ile oczywiście nie są płaskie). Ograniczymy się do wskazówki, dlaczego nie mogą należeć do kategorii pierwszej, pomijając wymienione powierzchnie przejściowe. Otóż, gdyby powierzchnia minimalna należała do pierwszej kategorii, można by było odciąć od niej płaszczyzną małą wypukłą czaszę. Po zastąpieniu powierzchni tej czaszy przez jej płaską podstawę pole powierzchni uległoby zmniejszeniu, co jest sprzeczne z określeniem powierzchni minimalnych.

O powierzchniach minimalnych można powiedzieć jeszcze więcej, a mianowicie, że stopień ich wygięcia w obydwie strony jest jednakowy. Aby zdaniu temu nadać określony sens, musielibyśmy się jednak nauczyć mierzyć stopień wygięcia powierzchni, co by nas zbyt daleko zaprowadziło. Wymieniona własność jest dla powierzchni minimalnych charakterystyczna; to znaczy, że powierzchnia, która w każdym swym punkcie jest jednakowo wygięta w obydwie strony, musi być powierzchnią minimalną.

§ 11. **Zagadnienie izoperymetryczne dla powierzchni.** Rozważmy powierzchnię zamkniętą typu kuli, to jest taką, która daje się uzyskać z powierzchni kulistej przez jej wyginanie i rozciąganie, lecz bez rozrywania i bez stykania różnych jej punktów. Powierzchnia taka dzieli przestrzeń na dwie części: wewnętrzną i zewnętrzną. Otóż zagadnienie izoperymetryczne dla powierzchni polega na tym, by *ze wszystkich powierzchni zamkniętych* omówionego typu, *posiadających dane pole, znaleźć tę, która ogranicza największą objętość.*

Ze względu na trudność zagadnienia nie możemy roztrząsać go szczegółowo. Ograniczymy się do podania wyniku badań na ten temat:

Twierdzenie 8. *Ze wszystkich powierzchni zamkniętych o danym polu największą objętość ogranicza powierzchnia kulista.*

Innymi słowy, ze wszystkich brył o danym polu powierzchni największą objętość posiada kula.

Z prawa wzajemności przy uwzględnieniu tego, że kula o większej objętości ma większe pole powierzchni, wynika

Twierdzenie 8′. *Ze wszystkich powierzchni zamkniętych, ograniczających daną objętość, najmniejsze pole posiada powierzchnia kulista.*

Podobnie, jak własność izoperymetryczna okręgu, również i treść twierdzenia 8′ daje się zilustrować przy pomocy zjawisk fizycznych. Istotnie, przyjrzyjmy się drobnej kropelce cieczy, spadającej swobodnie. Z jednej strony posiada ona określoną objętość. Z drugiej zaś strony wiemy, że dzięki spójności cieczy, której zewnętrznym wyrazem jest napięcie powierzchniowe, powierzchnia swobodna cieczy dąży do osiągnięcia najmniejszego możliwie pola. Wobec tego kropla powinna przybrać kształt, przy którym pole jej powierzchni osiągnie minimum, czyli, zgodnie z ostatnim twierdzeniem, kształt kulisty. Jak wiemy, doświadczenie to potwierdza.

Pewne odchylenia od kształtu kulistego, zwłaszcza dla kropel nie dość małych, spowodowane są ich ciężarem i oporem powietrza przy spadaniu (w braku drugiego odpadłoby również działanie zniekształcające pierwszego). Otóż istnieje sposób otrzymywania „kropel“ dowolnie dużych, i to w stanie spoczynku. Należy tylko jakimś sposobem wyrugować siły ciężkości.

W tym celu dobieramy roztwór wody (gęstość 1 g/cm^3) oraz zwykłego alkoholu (gęstość 0,8 g/cm^3) w ten sposób, by gęstość roztworu była równa gęstości oliwy (około 0,9 g/cm^3).

Do roztworu wpuszczamy przy pomocy pipety pewną ilość oliwy (kilka centymetrów sześciennych). Oliwa ta nie miesza się z roztworem i tworzy w nim jedno skupienie, o ile została wlana w sposób ostrożny. Ponieważ gęstość jej równa jest gęstości roztworu, więc znajduje się ona w równowadze obojętnej na dowolnym poziomie wewnątrz roztworu. Siły ciężkości zostały w ten sposób wyrugowane. Otóż doświadczenie potwierdza, że i taka „kropla", zgodnie z twierdzeniem 8′, przybiera kształt kuli.

Również i kształt Ziemi (jak też innych planet, księżyców, słońca) daje się wytłumaczyć przy pomocy własności izoperymetrycznej kuli. Zanim bowiem ziemia zastygła, tworzyła wielką „kroplę" cieczy, która osiągnęła kształt zbliżony do kuli. Odchylenie od kształtu kuli, polegające na spłaszczeniu (średnica biegunowa jest krótsza od średnicy równikowej) tłumaczy się łatwo ruchem obrotowym ziemi. Zresztą i to spłaszczenie daje się zilustrować przy pomocy kropli oliwy. Wystarczy przez oliwę przetknąć metalową oś pionową, a następnie obracać ją dokoła samej siebie. Dzięki tarciu oś porwie za sobą oliwę, a ta z powodu ruchu obrotowego przybierze kształt mniej lub więcej spłaszczony (zależnie od szybkości obrotu). Jest to tzw. doświadczenie Plateau.

Wreszcie rozporządzamy jeszcze inną ilustracją własności izoperymetrycznej kuli, a to przy pomocy baniek mydlanych. Wdmuchujemy w bańkę pewną masę powietrza, która stara się zająć możliwie dużą objętość. Powietrze to rozciąga błonę bańki, i po ustaleniu się ciśnienia w jej wnętrzu, osiąga pewną określoną objętość. Ponieważ zaś błona mydlana dąży do osiągnięcia minimum pola, więc bańka przyjmuje kształt kulisty. Pewne odchylenia od tego kształtu zawdzięczamy ciężarowi błony.

Oczywiście błona bańki nie jest powierzchnią minimalną, gdyż z obydwu jej stron panuje różne ciśnienie powietrza (wewnątrz większe). Dzięki temu powierzchnia bańki może być wypukła (zwrócona wypukłością na zewnątrz), co, jak wiemy, jest niemożliwe w przypadku powierzchni minimalnych.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że zagadnienie powierzchni minimalnych i zagadnienie izoperymetryczne dla powierzchni stanowią zagadnienia rachunku wariacyjnego nowego pod pewnym względem typu. Idzie tu bowiem o znalezienie nie linii, lecz powierzchni, dającej pewne ekstremum. Zaznaczyć należy, że zagadnienia te nastręczają daleko więcej trudności, niż poprzednie. Nie stanowią one jednak najdalej idących zagadnień rachunku wariacyjnego. Zawiera on bowiem całą skalę problematów, z których każdy następny jest ogólniejszy, a tym samym i trudniejszy od poprzedniego. Dwa typy, wspominane w niniejszej książeczce, stanowią dwa pierwsze stopnie tej skali.

Niektóre zagadnienia poruszone w niniejszej książeczce oraz zagadnienia pokrewne omówionę są w artykule O. Chisiniego: *Elementarna teoria izoperymetrów*, wchodzących w skład II tomu *Zagadnień dotyczących geometrii elementarnej* F. Euriquesa (przekład polski, Warszawa 1917).