54.

NOTE SUR LES HYPERDÉTERMINANTS.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tome XXXIV. (1847), pp. 148—152.]

I. SOIT V une fonction homogène de x, y de $2p^{\text{ième}}$ ordre. En égalant à zéro les coefficients différentiels du $p^{\text{ième}}$ ordre de cette fonction, pris par rapport à x, y, et en éliminant ces variables, on obtiendra entre les coefficients de la fonction un nombre p d'équations. Or parmi ces équations il y aura toujours une seule du second ordre, savoir

$$B(U, U) = 0$$

(suivant la notation dans mon mémoire sur les hyperdéterminants, t. XXX. [(1846), 16]. Par exemple, en écrivant t au lieu de $x : y$ on a identiquement

$$\begin{aligned} &c\,(at+b)\\ -&b\,(bt+c)\\ =&(ac-b^2)\,t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\quad et \quad)(at^2+2bt+c)\\ -&(4dt+2e)(bt^2+2ct+d)\\ +&(3ct+2d)(ct^2+2dt+e)\\ =&(ae-4bd+3c^2)\,t^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\quad gt^2 \qquad\qquad\qquad)(at^3+3bt^2+3ct+d)\\ -&(\ 6ft^2+\ 3gt \qquad\ \ )(bt^3+3ct^2+3dt+e)\\ +&(15et^2+18ft+6g)(ct^3+3dt^2+3et+f)\\ -&(10dt^2+15et+6f)(dt^3+3et^2+3ft+g)\\ =&(ag-6bf+15ec-10d^2)\,t^5, \end{aligned}$$

et ainsi de suite: il ne reste qu'à déterminer la loi des coefficients numériques des facteurs à gauche. Pour cela, représentons par $A, B, C, \ldots$ les coefficients de $(1+s)^{2p}$, et par $A', B', C', \ldots$ les coefficients de $(1-s)^{-p}$. On aura pour ces nombres le système suivant:

$$\begin{array}{lll} +A'A, & & \\ -A'B, & -B'A, & \\ +A'C, & +B'B, & +C'A, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \pm I, & \pm K, & \pm L \ldots \end{array}$$

Les nombres $I, K, L \ldots$ de la dernière ligne seront à déterminer au moyen d'une autre règle: il faut faire évanouir les sommes des nombres dans la même ligne verticale, ces nombres étant pris avec leurs signes actuels. Je suis parvenu par *induction* à ces formules, mais il ne serait pas, je crois, très difficile de les démontrer directement.

Il me paraît possible que tous les hyperdéterminants qui se rapportent à la fonction V, puissent être trouvés en éliminant entre les équations (en nombre de p) dont il s'agit, et cela dans le cas où U est de l'ordre $2p$ ou $2p+1$; au moins cette règle se vérifie pour les fonctions de deuxième, troisième et quatrième ordres, et cela paraissait (à priori) moins probable pour les dérivées d'un degré plus élevé que pour celles du second degré, pour lesquelles, comme on vient de le voir, il est effectivement vrai.

Cela étant, il y aura seulement un nombre p de dérivées indépendantes pour les fonctions du $2p^{\text{ième}}$ et du $(2p+1)^{\text{ième}}$ ordre: conclusion que je ne puis pas démontrer.

II. Soit $\nabla = 6abcd + 3b^2c^2 - a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$, et représentons par ∇_1 le déterminant formé avec les coefficients différentiels du second ordre de ∇ par rapport à a, b, c, d, on aura

$$\nabla_1 = 3\nabla^2$$

(propriété qui a un rapport singulier avec celle qu'a démontrée M. Eisenstein par rapport aux coefficients du premier ordre de la même fonction ∇). La démonstration que je puis donner de ce théorème est à la vérité assez compliquée, mais je ne vois pas d'autre. En mettant

$$p = \tfrac{2}{3}(bd - c^2), \quad q = \tfrac{1}{3}(bc - ad), \quad r = \tfrac{2}{3}(ac - b^2),$$

on obtient

$$\nabla_1 = 81 \begin{vmatrix} a^2\ , & ab\ , & ac-3r, & ad+9q \\ ba\ , & b^2+2r, & bc-q\ , & bd-3p \\ ca-3r, & cb-q\ , & c^2+2p, & cd \\ da+9q, & db-3p, & dc\ , & d^2 \end{vmatrix}$$

où le déterminant ne contient que les termes du quatrième ou troisième degré en p, q, r, et en développant on a

$$\begin{aligned}\nabla_1 = 81\,\{&9(pr-q^2)^2 - 2a^2p^3 - 2d^2r^3 - 12q(abp^2+cdr^2) - 18q^2(b^2p+c^2r) \\ &- 6(pr+q^2)(acp+bdr) - 2adq(3pr-q^2) - 18bcq(pr+q^2)\},\end{aligned}$$

d'où, en réduisant au moyen des expressions

$$ap = -(2bq + cr), \quad dr = -(2cq + bp), \quad ad = bc - 3q,$$

on tire $\nabla_1 = 81\{9(pr - q^2)^2 + 4(b^2p + 2bcq + c^2r)(pr + q^2) + 6q^2(3pr - q^2)\}$,

ou enfin, au moyen de $2(b^2p + 2bcq + c^2r) = -3pr$:

$$\nabla_1 = 243(pr - q^2)^2 = 3\nabla^2;$$

voilà l'équation qu'il s'agissait à démontrer.

III. En considérant $a:d$, $b:d$, $c:d$ comme représentants les trois coordonnées d'un point, ou, si l'on veut, des fonctions linéaires de ces coordonnées, l'équation $\nabla = 0$ appartient évidemment à une surface développable (de quatrième ordre). Mais la condition pour que l'équation $U = 0$ (V étant une fonction homogène de quatre variables) appartienne à une surface développable, est, que le déterminant formé avec les coefficients différentiels du second ordre de la fonction, s'évanouisse (théorème de M. Hesse, t. XXVIII. [(1844) pp. 97—107, "Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung"]). Donc il faut que ∇_1 s'évanouisse au moyen de $\nabla = 0$, c'est-à-dire, il faut que ∇_1 contienne le facteur ∇; ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation qui vient d'être présentée. Mais il ne peut être prouvé de cette manière que l'autre facteur doit aussi se réduire à ∇, et même cela n'est pas vrai si ∇_1 vient d'une fonction d'un plus haut degré que le quatrième.

Il suit de cela qu'en supposant toujours que les coefficients soient des fonctions linéaires des coordonnées, le résultat $\Theta = 0$ de l'élimination de x, y entre $\dfrac{dU}{dx} = 0$, $\dfrac{dU}{dy} = 0$ appartient toujours à une surface développable. De même l'élimination de x, y entre les trois équations $\dfrac{d^2U}{dx^2} = 0$, $\dfrac{d^2U}{dx\,dy} = 0$, $\dfrac{d^2U}{dy^2} = 0$ conduit aux équations de l'arête de rebroussement de la surface, et de plus, en éliminant entre les équations $\dfrac{d^3U}{dx^3} = 0$, $\dfrac{d^3U}{dx^2\,dy} = 0$, $\dfrac{d^3U}{dx\,dy^2} = 0$, $\dfrac{d^3U}{dy^3} = 0$, on obtient les points de rebroussement de l'arête de rebroussement. Cela conduit à quelques résultats remarquables.

Par exemple, la surface développable dont l'équation est

$$\nabla = 6abcd + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - a^2d^2,$$

a pour arête de rebroussement la courbe dont les équations (équivalentes à deux équations seulement) sont $bd - c^2 = 0$, $ad - bc = 0$, $ac - b^2 = 0$, ce qui est une *courbe du troisième ordre* seulement. Car en considérant deux quelconques de ces trois équations, par exemple celles-ci: $bd - c^2 = 0$, $ad - bc = 0$, ces équations appartiennent à deux surfaces du second ordre qui ont en commun la droite $d = 0$, $c = 0$: cela s'accorde avec un résultat que j'ai donné dans mon mémoire sur les surfaces développables dans le journal de M. Liouville [t. X. (1845), 30].

Egalement, en considérant une équation de quatrième degré en t, on obtient une surface développable.

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3)^2 = 0,$$

qui a pour arête de rebroussement la courbe du sixième ordre exprimée par les équations $ae - 4bd + 3c^2 = 0$, $ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$. Je n'ai pas complètement réussi à expliquer pourquoi cette courbe du sixième ordre a une osculatrice développable, seulement du sixième ordre, mais cette réduction s'opère en partie au moyen des points de rebroussement de la courbe, qui se trouvent au moyen des équations $at+b=0$, $bt+c=0$, $ct+d=0$, $dt+e=0$. Pour savoir à combien de points ces équations correspondent, il faut remarquer que, a, b, c, d, e étant des fonctions linéaires des coordonnées, on aura toujours entre ces quantités une équation linéaire telle que

$$Aa+Bb+Cc+Dd+Ee=0,$$

où A, B, ... sont des constantes. Donc, en éliminant a, b, c, d, e, on obtient $A-Bt+Ct^2-Dt^3+Et^4=0$, équation du quatrième ordre, et à chaque valeur de t il correspond un des points dont il s'agit; donc la courbe du sixième ordre a quatre points de rebroussement.

Également la surface développable qui correspond à une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre, est de l'ordre $2(m-1)$; l'arête de rebroussement est de l'ordre $3(m-2)$, et il y a dans cette courbe un nombre $4(m-3)$ de points de rebroussement. Il faut toujours se rappeler que ces surfaces développables ne sont pas les surfaces développables les plus générales qui existent de l'ordre $2(m-1)$, excepté dans le cas des surfaces développables du quatrième ordre.

IV. Il vaut peut-être la peine de donner en passant une démonstration de ce théorème de M. Chasles: "Le plan qui passe par trois points qui se meuvent avec des vitesses uniformes dans trois droites quelconques, enveloppe une surface développable du quatrième degré." En effet, en supposant que $\alpha:\delta$, $\beta:\delta$, $\gamma:\delta$; $\alpha':\delta'$, $\beta':\delta'$, $\gamma':\delta'$; $\alpha'':\delta''$, $\beta'':\delta''$, $\gamma'':\delta''$, soient des fonctions linéaires du temps ((δ, δ', δ'') peuvent être constants, ou, si l'on veut, des fonctions linéaires du temps, ce qui correspond à un cas un peu plus général que celui de M. Chasles), on peut prendre ces valeurs pour coordonnées des trois points mobiles. Donc, en prenant $x:w$, $y:w$, $z:w$ pour coordonnées d'un point quelconque du plan, on obtient l'équation de ce plan, en égalant à zéro le déterminant formé avec les valeurs x, y, z, w; α, β, γ, δ; α', β', γ', δ'; α'', β'', γ'', δ''; ce qui donne une équation de la forme $a+3bt+3ct^2+dt^3=0$, a, b, c, d étant des fonctions linéaires de x, y, z, w; et cela suffit pour démontrer le théorème dont il s'agit.

V. En finissant j'indiquerai un principe de classification des courbes à double courbure qui me paraît être de quelque importance; savoir, on pourra distinguer les courbes qui ne peuvent pas être l'intersection *complète* de deux surfaces, de celles qui peuvent l'être. Par exemple, en faisant passer par une courbe donnée du troisième ordre deux surfaces du second ordre, la courbe n'est pas l'intersection complète des deux surfaces; celles-ci se coupent dans cette courbe et dans une certaine droite. Quel est le théorème analogue pour les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre? Peut-on, par exemple, toujours combiner avec une courbe donnée d'un ordre quelconque, une autre courbe qui est l'intersection complète de deux surfaces, de manière que l'ensemble des deux courbes soit une intersection complète de deux surfaces? Et si non: de quelle manière trouvera-t-on les équations générales d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ ordre? Quel est le degré de généralité de ces équations? Il y a une foule d'autres questions qu'on pourrait ici proposer. J'ai proposé une question analogue dans le point de vue analytique, mais elle est restée sans réponse.