92.

NOTE SUR UN SYSTÈME DE CERTAINES FORMULES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XXXIX (1850), pp. 14, 15.]

Les formules dont il s'agit se rapportent à la théorie de la composition des formes quadratiques. Je les présente ici pour faire voir la relation qui existe entre elles et quelques formules de mon mémoire sur les hyperdéterminants (t. XXX. p. 1), [16]. En adoptant la notation de ce mémoire, et en mettant

$$\left.\begin{aligned}
2A &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\122\end{matrix}\right\}, & 2B &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\222\end{matrix}\right\}, & 2C &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{211}\\222\end{matrix}\right\},\\
2A' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\212\end{matrix}\right\}, & 2B' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\222\end{matrix}\right\}, & 2C' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{121}\\222\end{matrix}\right\},\\
2A'' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\221\end{matrix}\right\}, & 2B'' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{111}\\222\end{matrix}\right\}, & 2C'' &= \left\{\begin{matrix}\overset{\dagger}{112}\\222\end{matrix}\right\},
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (1),$$

savoir, en mettant pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}
a &= 111, & e &= 112,\\
b &= 211, & f &= 212,\\
c &= 121, & g &= 122,\\
d &= 221, & h &= 222;
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2);$$

$$\left.\begin{aligned}
A &= ag - ce, & 2B &= ah + bg - de - cf, & C &= bh - df,\\
A' &= af - be, & 2B' &= ah + cf - bg - de, & C' &= ch - dg,\\
A'' &= fg - eh, & 2B'' &= ah + de - bg - cf, & C'' &= bc - ad,
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (3),$$

on aura identiquement:

$$\left.\begin{aligned}
AA' &= A''a^2 + 2B''ae + C''e^2,\\
AB' &= A''ac + B''(ag + ce) + C''eg,\\
AC' &= A''c^2 + 2B''cg + C''g^2;
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4);$$

$$\left.\begin{aligned} BA' &= A''ab + B''(af+be) + C''ef\,, \\ BB' + \Theta &= A''ad + B''(ah+de) + C''eh\,, \\ BB' - \Theta &= A''be + B''(bg+cf) + C''fg\,, \\ BC' &= A''cd + B''(ch+dg) + C''gh\,; \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5);$$

$$\left.\begin{aligned} CA' &= A''b^2 + \quad 2B''bf \quad + C''f^2\,, \\ CB' &= A''bd + B''(bh+df) + C''fh\,, \\ CC' &= A''d^2 + \quad 2B''dh \quad + C''h^2\,; \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6);$$

$$\Theta = B^2 - AC = B'^2 - A'C' = B''^2 - A''C'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\{a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde - 2bgcf - 2bgde - 2cfde + 4adfg + 4bech\}.$$

En regardant la seconde et la troisième des équations (5) comme équivalentes avec la seule équation $2BB' = A''(ad+be) + B''(ah+de+bg+cf) + C''(eh+fg)$, on trouvera que les systèmes (4, 5, 6) répondent à la transformation

$$A''z_1^2 + 2B''z_1z_2 + C''z_2^2 = (Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2)(A'y_1^2 + 2B'y_1y_2 + C'y_2^2)\ldots\ldots\ldots(8),$$
$$z_1 = ax_1x_2 + by_1x_2 + cx_1y_2 + dy_1y_2,$$
$$z_2 = ex_1x_2 + fy_1x_2 + gx_1y_2 + hy_1y_2,$$

qui appartient à une théorie dont celle des transformations linéaires n'est qu'un cas particulier.

Je profite de cette occasion pour donner une addition à la "Note sur les hyperdéterminants" (t. XXXIV.), [54]. J'y ai dit (§ III.) que je ne pouvais pas expliquer la raison de ce que la courbe du sixième ordre donnée par les équations $ae - 4bd + 3c^2 = 0$ et $ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0$, ait une osculatrice développable qui n'est que du sixième ordre, mais que cette réduction s'opérait en partie au moyen des quatre points de rebroussement de la courbe. En effet, cette courbe, considérée comme l'intersection de deux surfaces, l'une du second et l'autre du troisième ordre, a six droites que dans le mémoire [30] cité dans cette note j'ai nommé *droites par deux points*: cela suffit pour compléter la réduction dont il s'agit. M. Salmon, à qui je dois cette remarque, m'a fait voir aussi que l'expression que j'ai donnée pour le nombre des points de rebroussement de la courbe, dans le cas d'une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre, combinée avec les formules du mémoire mentionné, suffit pour former le tableau complèt des singularités de la famille de surfaces développables dont il s'agissait, savoir:

$$\begin{array}{ccccccc} m, & n, & r, & \alpha, & \beta, & g, & h, \\ 3(m-2), & m, & 2(m-1), & 0, & 4(m-3), & \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2), & \tfrac{1}{2}(9n^2 - 53n + 80), \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x, & y, \\ 2(n-2)(n-3), & 2(-1)(n-3). \end{array}$$

Ici, dans la ligne supérieure, $m, n, r, \alpha, \beta, g, h, x, y$ ont les mêmes significations que dans le mémoire dont je viens de parler; et dans la ligne inférieure, m est le degré de l'équation primitive.