94.

NOTE SUR L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLI. (1851), pp. 57—65.]

SOIT, pour observer autant que possible la symétrie:

$$Su = \sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$Cu = \cos\operatorname{am}\frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$Gu = \Delta\operatorname{am}\frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$\alpha = k + \frac{1}{k}, \qquad \tfrac{1}{2}\upsilon = \frac{K}{\sqrt{k}}, \qquad \tfrac{1}{2}\delta = \frac{K + iK'}{\sqrt{k}};$$

et soit pour abréger:

$$Su = x, \quad Sv = y, \ \&\text{c}.$$

$$Cu = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{k}\right)} = X_{,},$$

$$Gu = \sqrt{(1 - kx^2)} = X_{,,},$$

$$Cu\,Gu = \sqrt{(1 - \alpha x^2 + x^4)} = X_{,}X_{,,} = X.$$

Cela posé, les méthodes d'Abel donnent les expressions suivantes de sin am d'une somme quelconque d'arcs: savoir

$$S(u + v + \ldots) = (-1)^{n-1}\frac{[\theta,\ \theta^3, \ldots \theta^{2n-1},\ \Theta\ ,\ \theta^2\Theta, \ldots \theta^{2n-4}\Theta]}{[1,\ \theta^2, \ldots \theta^{2n-2},\ \theta\Theta,\ \theta^3\Theta, \ldots \theta^{2n-3}\Theta]},$$

pour un nombre *impair* $2n-1$ d'arcs, et

$$S(u+v+\dots)=-\frac{[1,\ \theta^2,\dots\ \theta^{2n},\ \theta\Theta,\ \theta^3\Theta,\dots\ \theta^{2n-3}\Theta]}{[\theta,\ \theta^3,\dots\ \theta^{2n-1},\ \Theta,\ \theta^2\Theta,\dots\ \theta^{2n-2}\Theta]}$$

pour un nombre pair $2n$ d'arcs. Dans ces expressions les symboles dans lesquelles entrent les lettres θ, Θ, sont censés représenter les déterminants, dont on obtient les termes en changeant successivement ces lettres en x, X; y, Y; &c.

J'ai trouvé qu'on a aussi

$$C(u+v+\dots)=\frac{[\Theta_{,},\ \theta^2\Theta_{,},\dots\ \theta^{2n-2}\Theta_{,},\ \theta\Theta_{,,},\ \theta^3\Theta_{,,},\dots\ \theta^{2n-3}\Theta_{,,}]}{[1,\ \ \theta^2,\ \dots\ \theta^{2n-2},\ \ \theta\Theta,\ \theta^3\Theta,\dots\ \theta^{2n-3}\Theta]}$$

pour un nombre impair $2n-1$ d'arcs, et

$$C(u+v+\dots)=\frac{[\theta\Theta_{,},\ \theta^3\Theta_{,},\dots\ \theta^{2n-1}\Theta_{,},\ \Theta_{,,},\ \theta^2\Theta_{,,},\dots\ \theta^{2n-2}\Theta_{,,}]}{[\ \theta,\ \ \theta^3,\ \dots\ \theta^{2n-1},\ \ \Theta,\ \theta^2\Theta,\dots\ \theta^{2n-2}\Theta]}$$

pour un nombre pair $2n$ d'arcs. Les valeurs correspondantes de $G(u+v+\dots)$ se trouvent en échangeant les symboles $\Theta_{,}$ et $\Theta_{,,}$.

Particulièrement pour la somme de trois arcs on a :

$$S(u+v+w)=\frac{-[\theta,\ \theta^3,\ \Theta]}{[1,\ \theta^2,\ \theta\Theta]},$$

$$C(u+v+w)=\frac{[\Theta_{,},\ \theta^2\Theta_{,},\ \theta\Theta_{,,}]}{[1,\ \theta^2,\ \theta\Theta]},$$

$$G(u+v+w)=\frac{[\Theta_{,,},\ \theta^2\Theta_{,,},\ \theta\Theta_{,}]}{[1,\ \theta^2,\ \theta\Theta]}.$$

Pour réduire ces expressions à une forme qui soit encore applicable au cas où deux quelconques des quantités u, v, w sont égales, il n'y a qu'à multiplier les termes des fractions à droite par

$$\Omega=\frac{-(xY+yX)(yZ+zY)(zX+xZ)}{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)};$$

cela donne, après une réduction un peu difficile :

$$-\Omega\,[\ \theta,\quad \theta^3,\quad \Theta\ ]=(xYZ+yZX+zXY)-xyz\,(\alpha-x^2-y^2-z^2+x^2y^2z^2),$$

$$\Omega\,[\Theta_{,},\ \theta^2\Theta_{,},\ \theta\Theta_{,,}]=(1-kx^2y^2z^2)\,X_{,}Y_{,}Z_{,}-\frac{1}{k}(yzX+zxY+xyZ)\,X_{,,}Y_{,,}Z_{,,},$$

$$\Omega\,[\Theta_{,,},\ \theta^2\Theta_{,,},\ \theta\Theta_{,}]=\left(1-\frac{1}{k}x^2y^2z^2\right)X_{,,}Y_{,,}Z_{,,}-k\,(yzX+zxY+xyZ)\,X_{,}Y_{,}Z_{,},$$

$$\Omega\,[\ 1,\quad \theta^2,\quad \theta\Theta]=1-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2+\alpha x^2y^2z^2-xyz(xYZ+yZX+zXY),$$

de manière qu'en écrivant

$$M = 1 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 + \alpha x^2y^2z^2 - xyz\,(xYZ + yZX + zXY),$$

on a

$$S\,(u+v+w) = \frac{xYZ + yZX + zXY - xyz\,(\alpha - x^2 - y^2 - z^2 + x^2y^2z^2)}{M},$$

$$C\,(u+v+w) = \frac{(1 - kx^2y^2z^2)\,X_{\prime}Y_{\prime}Z_{\prime} - \frac{1}{k}(yzX + zxY + xyZ)\,X_{\prime\prime}Y_{\prime\prime}Z_{\prime\prime}}{M},$$

$$G\,(u+v+w) = \frac{\left(1 - \frac{1}{k}x^2y^2z^2\right)X_{\prime\prime}Y_{\prime\prime}Z_{\prime\prime} - k\,(yzX + zxY + xyZ)\,X_{\prime}Y_{\prime}Z_{\prime}}{M}.$$

Les mêmes formules peuvent être trouvées plus simplement en écrivant $u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\delta$, $v + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\delta$ au lieu de u, v. La somme $u + v + w$ se change par là en $u + v + w + (v + \delta)$, et les fonctions $S\,(u+v+w)$, $C\,(u+v+w)$, $G\,(u+v+w)$ deviennent $S\,(u+v+w)$, $-C\,(u+v+w)$, $-G\,(u+v+w)$. De plus x, $X_{\prime}$, $X_{\prime\prime}$, X et y, $Y_{\prime}$, $Y_{\prime\prime}$, Y se changent en $-\frac{1}{x}$, $\frac{-i}{\sqrt{k}}\,\frac{X_{\prime\prime}}{x}$, $i\sqrt{k}\,\frac{X_{\prime}}{x}$, $\frac{X}{x^2}$ et $-\frac{1}{y}$, $\frac{-i}{\sqrt{k}}\,\frac{Y_{\prime\prime}}{y}$, $i\sqrt{k}\,\frac{Y_{\prime}}{y}$, $\frac{Y}{y^2}$, et l'on a

$$S\,(u+v+w) = -\begin{vmatrix} x^2, & 1, & -xX \\ y^2, & 1, & -yY \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

$$C\,(u+v+w) = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} x^2X_{\prime\prime}, & X_{\prime\prime}, & kxX_{\prime} \\ y^2Y_{\prime\prime}, & Y_{\prime\prime}, & kyY_{\prime} \\ Z_{\prime}, & z^2Z_{\prime}, & zZ_{\prime\prime} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

$$G\,(u+v+w) = k\begin{vmatrix} x^2X_{\prime}, & X_{\prime}, & \frac{1}{k}xX_{\prime\prime} \\ y^2Y_{\prime}, & Y_{\prime}, & \frac{1}{k}yY_{\prime\prime} \\ Z_{\prime\prime}, & z^2Z_{\prime\prime}, & zZ_{\prime} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

Ces formules conduisent aux formes réduites que l'on obtient en multipliant par le facteur beaucoup plus simple

$$\Omega_{\prime} = -\frac{xY + yX}{x^2 - y^2}.$$

En passant, il y a à noter les équations identiques

$$\frac{(yZ + zY)(zX + xZ)}{(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}\begin{vmatrix} x, & x^3, & X \\ y, & y^3, & Y \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}, \text{ \&c.}$$

auxquelles conduit la méthode qui vient d'être expliquée. Aussi en multipliant les valeurs de $C(u+v+w)$, $G(u+v+w)$ on obtient l'équation

$$C(u+v+w)\,G(u+v+w)=\frac{\Psi XYZ+\Lambda yzX+\mathrm{M}zxY+\mathrm{N}xyZ}{\{1-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2+\alpha x^2y^2z^2-xyz\,(xYZ+yZX+zXY)\}^2},$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
\Psi &= 1\ +y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-4\alpha x^2y^2z^2+x^2y^2z^2\,(x^2+y^2+z^2)+x^4y^4z^4,\\
\Lambda &= \Pi+2x^2Y^2Z^2,\\
\mathrm{M} &= \Pi+2y^2Z^2X^2,\\
\mathrm{N} &= \Pi+2z^2X^2Y^2,\\
\Pi &= -\alpha+2\,(x^2+y^2+z^2)-\alpha\,(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+(2\alpha^2-4)\,x^2y^2z^2\\
&\qquad +2x^2y^2z^2\,(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-\alpha x^2y^2z^2\,(x^2+y^2+z^2)-\alpha x^4y^4z^4.
\end{aligned}$$

Pour le cas de quatre arcs, je n'ai trouvé que le sin am de la *somme*. En effet on a

$$S(u+v+w+p)=-\begin{vmatrix}1, & x^2, & x^4, & xX\\ 1, & y^2, & y^4, & yY\\ 1, & z^2, & z^4, & zZ\\ 1, & t^2, & t^4, & tT\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}x, & x^3, & X, & x^2X\\ y, & y^3, & Y, & y^2Y\\ z, & z^3, & Z, & z^2Z\\ t, & t^3, & T, & t^2T\end{vmatrix}$$

où les termes de la fraction sont à multiplier par

$$\Omega=-\frac{(xY+yX)\,(xZ+zX)\,(xT+tX)\,(yZ+zY)\,(zT+tZ)\,(tY+yT)}{(x^2-y^2)\,(x^2-z^2)\,(x^2-t^2)\,(y^2-z^2)\,(z^2-t^2)\,(t^2-y^2)}.$$

Mais il est plus simple de se servir de la forme

$$S(u+v+w+p)=-\begin{vmatrix}x^4, & x^2, & 1, & -xX\\ y^4, & y^2, & 1, & -yY\\ 1, & z^2, & z^4, & zZ\\ 1, & t^2, & t^4, & tT\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}x^3, & x, & -x^2X, & -X\\ y^3, & y, & -y^2Y, & -Y\\ z, & z^3, & Z, & z^2Z\\ t, & t^3, & T, & t^2T\end{vmatrix}$$

que l'on obtient de la même manière que la forme analogue pour trois arcs. Ici le facteur est

$$\Omega_1=\frac{(yX+xY)\,(zT+tZ)}{(x^2-y^2)\,(z^2-t^2)},$$

et l'on obtient, toute réduction faite,

$$S(u+v+w+p)=\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} = {} & (1-x^2y^2z^2t^2)(xYZT+yZTX+zTXY+tXYZ) \\
& -\{(\alpha - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2 + x^2y^2z^2 - \alpha x^2y^2z^2t^2) \\
& \qquad \times (Xyzt + Ytzx + Ztxy + Txyz)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} = 1 & - x^2y^2 - x^2z^2 - x^2t^2 - y^2z^2 - z^2t^2 - t^2y^2 - (x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2)\,x^2y^2z^2t^2 \\
& + x^4y^4z^4t^4 + \alpha\,(x^2y^2z^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2) + \alpha\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)\,x^2y^2z^2t^2 \\
& + (2 - 2\alpha^2)\,x^2y^2z^2t^2 \\
& - (x^2Y^2 + y^2X^2)\,ztZT - (x^2Z^2 + z^2X^2)\,ytYT - (x^2T^2 + t^2X^2)\,yzYZ \\
& - (y^2Z^2 + z^2Y^2)\,xtXT - (z^2T^2 + t^2Z^2)\,xyXY - (t^2Y^2 + y^2T^2)\,xzXZ.
\end{aligned}$$

Il y a à remarquer qu'en employant la première valeur de $S(u+v+w+p)$ et le facteur correspondant, on aurait trouvé le même numérateur, et aussi le même dénominateur, ce qui donne lieu à des équations identiques, semblables à celles qui ont lieu pour le cas de trois arcs.

Revenons à l'expression

$$\begin{vmatrix} x, & x^3, & X \\ y, & y^3, & Y \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} \frac{(yZ+zY)(zX+xZ)(xY+yX)}{(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)}$$

qui donne le numérateur de $S(u+v+w)$. En mettant $x^2 = a$, $\frac{1}{k}X = A$, &c. on voit qu'il s'agit d'effectuer la division de

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A \\ 1, & b, & B \\ 1, & c, & C \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

par le produit $(b-c)(c-a)(a-b)$, les fonctions A, B, C denotant des racines carrées de fonctions rationnelles d'une forme particulière. Or, en supposant toujours que les carrés de A, B, C soient des fonctions rationnelles, et d'ailleurs d'une forme quelconque, cela peut se faire dans tous les cas particuliers au moyen de l'équation identique

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A \\ 1, & b, & B \\ 1, & c, & C \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & a, & A^2 \\ 1, & b, & B^2 \\ 1, & c, & C^2 \end{vmatrix} (A^2+B^2+C^2+BC+CA+AB) - \begin{vmatrix} 1, & a, & A^4 \\ 1, & b, & B^4 \\ 1, & c, & C^4 \end{vmatrix}.$$

De même le dénominateur de $S(u+v+w)$ depend de l'équation analogue

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & aA \\ 1, & b, & bB \\ 1, & c, & cC \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & a, & aA^2 \\ 1, & b, & bB^2 \\ 1, & c, & cC^2 \end{vmatrix} (A^2+B^2+C^2+BC+CA+AB) - \begin{vmatrix} 1, & a, & aA^4 \\ 1, & b, & bB^4 \\ 1, & c, & cC^4 \end{vmatrix};$$

et le numérateur et le dénominateur de $S(u+v+w+p)$ dependent de l'équation

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA \\ 1, & b, & b^2, & bB \\ 1, & c, & c^2, & cC \\ 1, & d, & d^2, & dD \end{vmatrix} (A+B)(A+C)(A+D)(B+C)(B+D)(C+D)$$

$$= M \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^2 \\ 1, & b, & b^2, & bB^2 \\ 1, & c, & c^2, & cC^2 \\ 1, & d, & d^2, & dD^2 \end{vmatrix} - N \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^4 \\ 1, & b, & b^2, & bB^4 \\ 1, & c, & c^2, & cC^4 \\ 1, & d, & d^2, & dD^4 \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^6 \\ 1, & b, & b^2, & bB^6 \\ 1, & c, & c^2, & cC^6 \\ 1, & d, & d^2, & dD^6 \end{vmatrix},$$

dans laquelle

$$M = 2ab^2c^2 + \ldots + a^3b^2 + \ldots + a^3bc + \ldots + 3a^2bcd + \ldots,$$

$$N = (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+a^2) + (abc+bcd+cda+dab),$$

$$P = a+b+c+d,$$

et de l'équation

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A, & aA \\ 1, & b, & B, & bB \\ 1, & c, & C, & cC \\ 1, & d, & D, & dD \end{vmatrix} (A+B)(A+C)(A+D)(B+C)(B+D)(C+D)$$

$$= (a^2b^2 + \ldots + abc^2 + \ldots + 2abcd) \begin{vmatrix} 1, & a, & A^2, & aA^2 \\ 1, & b, & B^2, & bB^2 \\ 1, & c, & C^2, & cC^2 \\ 1, & d, & D^2, & dD^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & a, & A^4, & aA^4 \\ 1, & b, & B^4, & bB^4 \\ 1, & c, & C^4, & cC^4 \\ 1, & d, & D^4, & dD^4 \end{vmatrix};$$

mais je n'ai pas encore trouvé la loi générale de ces équations.

Pour faciliter l'usage des symboles S, C, G, je veux exprimer par cette notation les propriétés les plus simples des fonctions elliptiques. Cela me donnera aussi l'opportunité d'arranger d'une manière particulière les formules qui se rapportent à la somme ou à la différence de deux arcs. On a d'abord

$$C^2u = 1 - \frac{1}{k}\,.\,S^2u\,,$$

$$G^2u = 1 - k\,.\,S^2u\,,$$

$$S'u = Cu\,.\,Gu\,,$$

$$C'u = -\frac{1}{k}\,.\,Su\,.\,Gu\,,$$

$$G'u = -k\,.\,Su\,.\,Cu,$$

$$S\,(0) = 0, \qquad C\,(0) = 1, \qquad G\,(0) = 1,$$

$$S'\,(0) = 1, \qquad C'\,(0) = 0, \qquad G'\,(0) = 0,$$

$$S(-u) = -S\,(u), \qquad C\,(-u) = C\,(u), \qquad G\,(-u) = G\,(v),$$

$$S(\tfrac{1}{2}\upsilon) = \sqrt{k}, \qquad S(\tfrac{1}{2}\delta) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad S(\tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = \infty,$$

$$C(\tfrac{1}{2}\upsilon) = 0, \qquad C(\tfrac{1}{2}\delta) = \frac{ik'}{k}, \qquad C(\tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = \infty,$$

$$G(\tfrac{1}{2}\upsilon) = k', \qquad G(\tfrac{1}{2}\delta) = 0\,, \qquad G(\tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = \infty,$$

$$S(u + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \frac{\sqrt{k}\,.\,Cu}{Gu}\,, \qquad S(u + \tfrac{1}{2}\delta) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,.\,\frac{Gu}{Cu}\,,$$

$$C(u + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \frac{-k'}{\sqrt{k}}\,.\,\frac{Su}{Gu}\,, \qquad C(u + \tfrac{1}{2}\delta) = \frac{ik'}{k}\,.\,\frac{1}{Cu}\,,$$

$$G(u + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \frac{k'}{Gu}\,, \qquad G(u + \tfrac{1}{2}\delta) = \frac{-ik'}{\sqrt{k}}\,.\,\frac{Su}{Gu}\,,$$

$$S(u + \tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = -\frac{1}{Su}\,,$$

$$C(u + \tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = \frac{-i}{\sqrt{k}}\,.\,\frac{Gu}{Su}\,,$$

$$G(u + \tfrac{1}{2}\upsilon + \tfrac{1}{2}\delta) = i\sqrt{k}\,.\,\frac{Cu}{Su}\,,$$

$$S(u + m\upsilon + n\delta) = (-1)^{m+n}\,.\,Su\,,$$

$$C(u + m\upsilon + n\delta) = (-1)^{m}\,.\,Cu\,,$$

$$G(u + m\upsilon + n\delta) = (-1)^{n}\,.\,Gu\,.$$

Dans ces équations les symboles S, C, G, v, 8, k, k', i et S, G, C, 8, v, $\frac{1}{k}$, $\frac{ik'}{k}$, $-i$ peuvent être échangés les uns d'avec les autres. Les formules fondamentales qui se rapportent à deux arcs sont

$$S(u+v) = \frac{Su \,.\, Cv \,.\, Gv + Sv \,.\, Cu \,.\, Gu}{1 - S^2u \,.\, S^2v},$$

$$C(u+v) = \frac{Cu \,.\, Cv - \frac{1}{k} \,.\, Su \,.\, Gu \,.\, Sv \,.\, Gv}{1 - S^2u \,.\, S^2v},$$

$$G(u+v) = \frac{Gu \,.\, Gv - k \,.\, Su \,.\, Cu \,.\, Sv \,.\, Cv}{1 - S^2u \,.\, S^2v},$$

auxquelles on ajoutera :

$$C(u+v)\, G(u+v) = \frac{(1 + S^2u \,.\, S^2v)(Cu \,.\, Gu \,.\, Cv \,.\, Gv) - Su \,.\, Sv\,(\alpha - 2S^2u - 2S^2v + \alpha\, S^2u \,.\, S^2v)}{(1 - S^2u \,.\, S^2v)^2}.$$

Mais pour trouver toutes les formes différentes de ces équations, mettons pour abréger (en supposant comme auparavant $Su = x$, &c.):

$$\begin{aligned}
&A = xY \quad, && A' = yX,\\
&B = X_{,}Y_{,}, && B' = -\frac{1}{k}\, xyX_{,,}Y_{,,},\\
&C = X_{,,}Y_{,,}, && C' = -kxyX_{,}Y_{,},\\
&P = x^2 - y^2, &&\\
&Q = 1 - \frac{1}{k}\,x^2 - \frac{1}{k}\,y^2 + x^2y^2, &&\\
&R = 1 - kx^2 - ky^2 + x^2y^2, &&\\
&S = XY, && S' = -\frac{k'^2}{k}\,xy,\\
&T = xX_{,,}Y_{,}, && T' = -yY_{,,}X_{,},\\
&U = xX_{,}Y_{,,}, && U' = yY_{,}X_{,,},\\
&K = 1 - x^2y^2. &&
\end{aligned}$$

Alors on aura

$$S(u+v) = \frac{A + A'}{K} = \frac{P}{A - A'} = \frac{U + U'}{B - B'} = \frac{T - T'}{C - C'},$$

$$C(u+v) = \frac{B + B'}{K} = \frac{U - U'}{A - A'} = \frac{Q}{B - B'} = \frac{S + S'}{C - C'},$$

$$G(u+v) = \frac{C + C'}{K} = \frac{T + T'}{A - A'} = \frac{S - S'}{B - B'} = \frac{R}{C - C'},$$

et les valeurs correspondantes de $S(u-v)$, $C(u-v)$, $G(u-v)$ se trouveront en échangeant les signes de A', B', C', S', T', U'.

[Reverting to the functions sin am, cos am, Δ am, or say sn, cn, dn, instead of S, C, D, and introducing Dr Glaisher's very convenient notation s_1, c_1, d_1 for the sn, cn, dn of u, and s_2, c_2, d_2 for those of v, the formulæ just obtained may be written

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1}{1-k^2s_1^2s_2^2} = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1c_2d_2 - s_2c_1d_1} = \frac{s_1c_1d_2 + s_2c_2d_1}{c_1c_2 + s_1d_1s_2d_2} = \frac{s_1d_1c_2 + s_2d_2c_1}{d_1d_2 + k^2s_1c_1s_2c_2},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{c_1c_2 - s_1d_1s_2d_2}{1-k^2s_1^2s_2^2} = \frac{s_1c_1d_2 - s_2c_2d_1}{s_1c_2d_2 - s_2c_1d_1} = \frac{1 - s_1^2 - s_2^2 + k^2s_1^2s_2^2}{c_1c_2 + s_1d_1s_2d_2} = \frac{c_1d_1c_2d_2 - k'^2s_1s_2}{d_1d_2 + k^2s_1c_1s_2c_2},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{d_1d_2 - k^2s_1c_1s_2c_2}{1-k^2s_1^2s_2^2} = \frac{s_1d_1c_2 - s_2d_2c_1}{s_1c_2d_2 - s_2c_1d_1} = \frac{c_1d_1c_2d_2 + k'^2s_1s_2}{c_1c_2 + s_1d_1s_2d_2} = \frac{1 - k^2s_1^2 - k^2s_2^2 + k^2s_1^2s_2^2}{d_1d_2 + k^2s_1c_1s_2c_2},$$

viz. we have thus a fourfold representation of the addition-equation for each of the three functions.]

De ces formules il peut être tiré un grand nombre d'équations identiques; par exemple celles-ci:

$$(A^2 - A'^2) = KP, \text{ \&c.,} \qquad S^2 - S'^2 = QR, \text{ \&c.,}$$

$$(B+B')(C-C') = K(S+S'), \text{ \&c.,} \quad (B-B')(C+C') = K(S-S'), \text{ \&c.,}$$

$$BC - B'C' = KS, \text{ \&c.,} \qquad B'C - BC' = KS', \text{ \&c.,}$$

$$(S+S')(T+T')(U+U') = (S-S')(T-T')(U-U') = PQR,$$

$$S'T'U' + S'TU + ST'U + STU' = 0,$$

$$STU + ST'U' + S'TU' + S'T'U = PQR,$$

$$(A-A')(S+S') = (C-C')(U-U'), \text{ \&c.,}$$

$$(A+A')(S-S') = (C+C')(U+U'), \text{ \&c.,}$$

$$(A-A')(T-T') = P(C-C'), \text{ \&c.,}$$

$$(A+A')(T+T') = P(C+C'), \text{ \&c.,}$$

$$(A-A')(U+U') = P(B-B'), \text{ \&c.,}$$

$$(A+A')(U-U') = P(B+B'), \text{ \&c.,}$$

&c., &c.,

et ces équations donnent immédiatement et dans les formes les plus simples, les formules qui se rapportent aux sommes et aux produits des fonctions de $u+v$ et $u-v$, par exemple

$$S(u+v)\,S(u-v)=\frac{A^2-A'^2}{K^2},$$

savoir au moyen de la première de ces équations identiques:

$$S(u+v)\,S(u-v)=\frac{P}{K};$$

de manière que toutes ces formules peuvent être considérées comme comprises dans les équations fondamentales et dans ce système d'équations identiques.