95.

NOTE SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DE POSITION.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLI. (1851), pp. 66—72. Continued from t. XXXVIII. p. 104, 70.]

§ VII.

En considérant les soixante droites auxquelles donne lieu le théorème de Pascal, et en appliquant ce théorème aux hexagones différents qui peuvent être formés par six points sur une même conique, M. Kirkman a trouvé que ces soixante droites se coupent trois à trois non seulement dans les vingt points de M. Steiner (points que M. Kirkman nomme les points g), mais aussi dans soixante points h. Il a trouvé aussi qu'il y a quatre-vingt-dix droites J, dont chacune contient deux des points h et un des quarante cinq points p, dans lesquels s'entrecoupent, deux à deux, les droites menées par deux quelconques des six points. Les recherches étendues que M. Kirkman a faites dans la géometrie de position, paraitront dans un numéro prochain du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, [t. v. (1850), pp. 185—200]. En attendant, M. Kirkman a publié dans le *Manchester Courier* du 27$^{\text{ième}}$ Juin 1849, vingt cinq théorèmes qui contiennent les résultats de ses recherches.

Moi, j'ai depuis trouvé que les soixante points h sont situés trois à trois sur vingt droites X. Tous ces théorèmes peuvent être démontrés assez facilement quand on connait la manière suivant laquelle les points et les droites doivent être combinés en construisant les points et les droites h, J, &c. Cela se fait alors d'une manière très simple, au moyen d'une notation que je vais expliquer.

Représentons les six points sur la conique par 1, 2, 3, 4, 5, 6. En combinant ces points deux à deux par les droites 12, 13 &c., les systèmes tels que 12, 34, 56 peuvent être représentés par les combinaisons binaires des six symboles $a, b, c, d, e, f,$ et au moyen de la table qui se trouve § III. de ce mémoire, savoir la table

(*A*)

$12.34.56 = ac$	$13.45.62 = ab$	$14.56.23 = bd$
$12.35.64 = be$	$13.46.25 = cd$	$14.52.36 = ae$
$12.36.45 = df$	$13.42.56 = ef$	$14.53.62 = cf$

$15.62.34 = de$	$16.23.45 = ce$
$15.63.42 = bc$	$16.24.53 = ad$
$15.64.23 = af$	$16.25.34 = bf$:

le symbole *ac* dénote ici l'ensemble des droites 12, 34, 56; et ainsi de suite.

On voit que pour obtenir les six côtés d'un quelconque des soixante hexagones, il n'y a qu'à combiner les droites correspondantes, par paires, telles que *ab*, *ac*, qui ont une lettre en commun. Cela posé, les hexagones, ou, si l'on veut, les droites derivées de ces hexagones au moyen du théorème de Pascal (droites que je nommerai *droites de Pascal*), peuvent être représentées par les symboles $ab \,.\, ac$, &c., conformément à la table que voici:

(*B*)

$213456 = ab \,.\, ac$	$214356 = cf \,.\, ca$	$215346 = ed \,.\, eb$	$216345 = fb \,.\, fd$
$564 = ef \,.\, eb$	$563 = db \,.\, df$	$463 = fa \,.\, fd$	$453 = ec \,.\, eb$
$645 = dc \,.\, df$	$635 = ea \,.\, eb$	$634 = cb \,.\, ca$	$534 = ad \,.\, ac$
$465 = cd \,.\, ca$	$365 = ae \,.\, ac$	$364 = bc \,.\, be$	$354 = da \,.\, df$
$546 = ba \,.\, be$	$536 = fc \,.\, fd$	$436 = de \,.\, df$	$435 = bf \,.\, be$
$654 = fe \,.\, fd$	$653 = bd \,.\, be$	$643 = af \,.\, ac$	$543 = ce \,.\, ca$

$314256 = ea \,.\, ef$	$315246 = cb \,.\, cd$	$316245 = ad \,.\, ab$	$415236 = af \,.\, ae$
$562 = bd \,.\, ba$	$462 = af \,.\, ab$	$452 = ce \,.\, cd$	$362 = cb \,.\, cf$
$625 = cf \,.\, cd$	$624 = ed \,.\, ef$	$524 = fb \,.\, fe$	$623 = de \,.\, db$
$265 = fc \,.\, fe$	$264 = de \,.\, dc$	$254 = bf \,.\, ba$	$263 = ed \,.\, ea$
$526 = ae \,.\, ab$	$426 = bc \,.\, ba$	$425 = da \,.\, dc$	$326 = fa \,.\, fc$
$652 = db \,.\, dc$	$642 = fa \,.\, fe$	$542 = ec \,.\, ef$	$632 = bc \,.\, bd$

$416235 = ce \,.\, cf$	$516234 = ec \,.\, ed$
$352 = ad \,.\, ae$	$342 = bf \,.\, bc$
$523 = bf \,.\, bd$	$423 = ad \,.\, af$
$253 = fb \,.\, fc$	$243 = da \,.\, de$
$325 = ec \,.\, ea$	$324 = ce \,.\, cb$
$532 = da \,.\, db$	$432 = fb \; fa$

Remarquons maintenant que les droites de Pascal qui passent par un point p, tel que 12.45, sont $ca.ce$, $ba.be$, $ac.ab$, $ec.eb$. Cela étant, le point 12.45 peut être représenté par la notation $cb.ae$, et de cette manière le système complet des points p est représenté par la table suivante:

(C)

$12.34 = bd.ef$	$14.35 = ab.de$	$23.45 = ad.bf$
$12.35 = af.cd$	$14.36 = bf.cd$	$23.46 = bc.de$
$12.36 = ab.ce$	$14.56 = af.ce$	$23.56 = ae.cf$
$12.45 = ae.be$	$15.23 = be.cd$	$24.35 = bf.ce$
$12.46 = ad.cf$	$15.24 = ae.df$	$24.36 = af.de$
$12.56 = bf.de$	$15.26 = ac.bf$	$24.56 = ab.ed$
$13.24 = ac.bd$	$15.34 = ab.cf$	$25.34 = ad.ce$
$13.25 = af.be$	$15.36 = ad.fe$	$25.36 = bd.cf$
$13.26 = bd.ec$	$15.46 = bd.ce$	$25.46 = ab.ef$
$13.45 = cf.de$	$16.23 = ab.df$	$26.34 = af.bc$
$13.46 = ae.bf$	$16.24 = cf.be$	$26.35 = ae.bd$
$13.56 = ad.bc$	$16.25 = ac.de$	$26.45 = cd.ef$
$14.23 = ac\ ef$	$16.34 = ae.cd$	$34\ 56 = be.df$
$14.25 = ce.df$	$16.35 = bc.ef$	$35.46 = ac.df$
$14.26 = ad.be$	$16.45 = af.bd$	$36.45 = ac.be.$

Enfin les droites 12, &c. peuvent être représentées par des symboles tels que $ac.be.df$, &c., et au moyen de la table suivante, qui est pour ainsi dire la réciproque de la table (A):

(D)

$ac.be.df = 12$	$ab.ed.fc = 62$	$ae.df.cb = 36$
$ac.bd.fe = 56$	$ab.ef.cd = 13$	$ae.dc.bf = 52$
$ac.bf.ed = 34$	$ab.ec.df = 45$	$ae.db.fc = 14$

$ad.fb.ce = 16$	$af.bc.ed = 15$
$ad.fc.eb = 53$	$af.be\ dc = 64$
$ad.fe.be = 24$	$af.bd.ce = 32.$

Il y a à remarquer qu'une droite de Pascal $ab.ac$ contient les points $bc.ad$, $bc.ae$, $bc.af$, et que par un point $ab.cd$ passent les droites (les côtés opposés d'un hexagone) $ac.bd.ef$, $ab.bc.ef$, et les droites de Pascal $ca.cb$, $da.db$, $ac.ad$, $bc.bd$. Cela posé, en combinant les propriétés déjà connues d'avec celles que j'ai énoncées au commencement de cette section, en particularisant en même temps les combinaisons qui donnent lieu aux points et droites g, h, J, &c. et en adoptant une notation convenable pour ces points et droites, on trouvera ce qui suit:

(α) Les droites $ab.bc$, $bc.ca$, $ca.ab$ se rencontrent dans un même point abc qui est un des vingt points g, et que j'ai dénoté par ce symbole, § III. de ce mémoire.

(β) Les points abc, abd, abe, abf sont situés sur une même droite ab qui est une des quinze droites de M. Steiner ou de M. Plücker, et que j'ai dénotée (§ III.). Je nommerai droites I ces droites.

(γ) Les droites $ab \,.\, ac$, $ac \,.\, ad$, $ad \,.\, ab$ se rencontrent dans un même point $a \,.\, ef$ qui est un des soixante points h de M. Kirkman.

(δ) Les points $b \,.\, cd$, $c \,.\, db$, $d \,.\, bc$ sont situés sur la même droite $\{bcd\}$ qui est une de mes vingt droites X.

(ϵ) Les points $ab \,.\, cd$, $e \,.\, ab$, $f \,.\, ab$ sont situés sur une même droite $(ab)\, cd$ qui est un des quatre-vingt-dix points J de M. Kirkman.

Quant aux théorèmes (α) et (β), je vais reproduire dans la notation de cette section les démonstrations de M. Plücker.

Voici le principe de la démonstration du théorème (α): principe qui s'applique aussi, comme nous le verrons, aux démonstrations des théorèmes (γ, δ, et ϵ).

Supposons qu'il s'agit de démontrer généralement que trois droites X, X', X'' se rencontrent dans un même point, et supposons que ces droites sont déterminées:

$$\begin{array}{llllll}
X & \text{au moyen des points} & & A\,, & B\,, & C\,, \\
X' & \quad ,, \quad ,, & ,, & A', & B', & C', \\
X'' & \quad ,, \quad ,, & ,, & A'', & B'', & C'';
\end{array}$$

formons d'abord la table

$$(\odot) \left\{ \begin{array}{lll}
A'A'', & B'B'', & C'C'', \\
A''A, & B''B, & C''C, \\
A\,A', & B\,B', & C\,C',
\end{array} \right.$$

où $A'A''$, &c. sont les droites qui passent par les points A' et A'', &c.; et puis la table

$$(☽) \left\{ \begin{array}{lll}
B'B''\,.\,C'C'', & C'C''\,.\,A'A'', & A'A''\,.\,B'B'', \\
B''B\,.\,C''C\,, & C''C\,.\,A''A\,, & A''A\,.\,B''B\,, \\
B\,B'\,.\,C\,C', & C\,C'\,.\,A\,A', & A\,A'\,.\,B\,B',
\end{array} \right.$$

où $B'B''\,.\,C'C''$, &c. sont les points d'intersection des droites $B'B''$ et $C'C''$, &c. On sait que si les points de l'une quelconque des colonnes verticales de cette dernière table sont situés sur la même droite, les droites X, X', X'' se couperont dans un même point; et réciproquement. Précisément de la même manière on démontrerait que trois points X, X', X'' sont situés sur une même droite; seulement A, B, &c. seraient des droites, $A'A''$, &c. des points; et ainsi de suite. Or les droites du théorème (α) sont déterminées,

$$\begin{array}{llll}
ab\,.\,bc \text{ au moyen des points} & ac\,.\,be, & ac\,.\,bf, & ac\,.\,bd, \\
bc\,.\,ca \quad ,, \quad ,, \quad ,, & ba\,.\,ce, & ba\,.\,cf, & ba\,.\,cd, \\
ca\,.\,ab \quad ,, \quad ,, \quad ,, & cb\,.\,ae, & cb\,.\,af, & cb\,.\,ad\,;
\end{array}$$

donc la table (⊙) se réduit à

$$\begin{array}{lll} ac.be.df, & ac.bf.de, & ac.bd.ef, \\ ba.ce.df, & ba.cf.de, & ba.cd.ef, \\ cb.ae.df, & cb.af.de, & cb.ad.ef, \end{array}$$

et la table (☽) à

$$\begin{array}{lll} be.df, & bf.de, & bd.ef, \\ ce.df, & cf.de, & cd.ef, \\ ae.df, & af.de, & ad.ef; \end{array}$$

et les points de la première colonne verticale de cette table sont situés sur la droite *ed.ef*, ceux de la deuxième colonne verticale sur la droite *fd.fe*, et ceux de la troisième colonne verticale sur la droite *de.df*: l'existence de l'une quelconque de ces droites fait voir la vérité du théorème dont il s'agit.

Pour démontrer le théorème (β), considérons à part un quelconque des points *abc, abd, abe, abf*; par exemple le point *abf*. On peut envisager ce point comme déterminé par les droites *ab.af*, *ab.bf*, et ces droites contiennent:

$$\begin{array}{llll} ab.af & \text{les points } bf.ac, & bf.ad, & bf.ae, \\ ab.bf & \text{,, \quad ,, } \; af.bc, & af.bd, & af.be. \end{array}$$

Or *bf.ac* et *af.bc* sont situés sur la droite *ab.de.cf*; *bf.ad* et *af.bd* sur la droite *ab.ec.df*; et *bf.ae* et *af.be* sur la droite *ab.cd.ef*. De plus, les points *bf.ac*, *bf.ad*, *bf.ae* sont situés sur les droites *ab.bc*, *ab.bd*, *ab.be* respectivement, et les points *af.bc*, *af.bd*, *af.be* sont situés sur les droites *ab.ac*, *ab.ad*, *ab.ae* respectivement. Donc on peut représenter les points de la droite *ab.af* par les symboles

$$(ab.de.cf)(ab.bc), \quad (ab.ec.df)(ab.bd), \quad (ab.cd.ef)(ab.be),$$

et les points de la droite *ab.bf* par les symboles

$$(ab.de.cf)(ab.ac), \quad (ab.ec.df)(ab.ad), \quad (ab.cd.ef)(ab.ae).$$

Maintenant

Les droites	de même que les droites	se rencontrent sur la droite
ab.bd, ab.ae	*ab.be, ab.ad,*	*ab.de.cf,*
ab.be, ab.ac	*ab.bc, ab.ae,*	*ab.ec.df,*
ab.bc, ab.ad	*ab.bd, ab.ac,*	*ab.cd.ef,*

c'est à dire, il existe un système de trois hexagones dont les côtés sont

$$\begin{array}{llllll} (ab.de.cf, & ab.ec.df, & ab.cd.ef, & ab.bc, & ab.bd, & ab.be), \\ (ab.de.cf, & ab.ec.df, & ab.cd.ef, & ab.ac, & ab.ad, & ab.ae), \\ (ab.bc\quad, & ab.bd\quad, & ab.be\quad, & ab.ac, & ab.ad, & ab.ae). \end{array}$$

Ces hexagones ont pour angles les mêmes six points. Or l'existence de l'une ou de l'autre des droites $ab\,.\,af$, $ab\,.\,bf$ suffit pour faire voir que ces six points sont situés sur la même conique: donc les côtés opposés du troisième hexagone se rencontrent dans trois points situés sur la même droite. De plus, on voit aisément que les hexagones sont précisément tels, qu'en vertu du théorème (α), les trois droites, auxquelles donnent lieu ces hexagones, se rencontrent dans un même point; et ce point sera évidemment le point abf. Mais les côtés opposés du troisième hexagone, savoir les droites $ab\,.\,bc$ et $ab\,.\,ac$; $ab\,.\,bd$ et $ab\,.\,ad$; $ab\,.\,be$ et $ab\,.\,ae$, se rencontrent dans les points abc, abd, abf: donc les quatre points abc, abd, abe, abf sont situés sur la même droite: théorème dont il s'agissait.

Pour démontrer le théorème (γ), on n'a qu'à considérer les droites de ce théorème comme déterminées,

$$\begin{array}{lllll} ab\,.\,ac & \text{par les points} & bc\,.\,ad, & bc\,.\,ae, & bc\,.\,af, \\ ac\,.\,ad & \quad ,, \quad ,, & cd\,.\,ab, & cd\,.\,ae, & cd\,.\,af, \\ ad\,.\,ab & \quad ,, \quad ,, & bd\,.\,ac, & bd\,.\,ae, & bd\,.\,af. \end{array}$$

La table ($\odot$) se réduit alors à

$$\begin{array}{lll} bc\,.\,ad\,.\,ef, & da\,.\,de, & da\,.\,df, \\ cd\,.\,ab\,.\,ef, & ba\,.\,be, & ba\,.\,bf, \\ bd\,.\,ac\,.\,ef, & ca\,.\,ce, & ca\,.\,cf, \end{array}$$

et la table ($☽$) à

$$\begin{array}{lll} (da\,.\,df)\,(da\,.\,de), & af\,.\,de, & ae\,.\,df, \\ (ba\,.\,bf)\,(ba\,.\,be), & af\,.\,be, & ae\,.\,bf, \\ (ca\,.\,cf)\,(ca\,.\,ce), & af\,ce, & ae\,.\,cf. \end{array}$$

Or les points de la deuxième colonne verticale sont situés sur la droite $ea\,.\,ef$, et les points de la troisième colonne verticale sur la droite $fa\,.\,fe$. L'existence de l'une ou de l'autre de ces droites fait voir que les droites $ab\,.\,ac$, $ac\,.\,ad$, $ad\,.\,ab$ se rencontrent dans un même point $a\,.\,be$.

Pour démontrer le théorème (δ), il est évident que les points de la première colonne verticale de la table qui vient d'être présentée, sont situés sur la même droite. Mais ces points sont précisément les points $d\,.\,bc$, $b\,.\,cd$, $c\,.\,db$; le théorème est donc démontré.

[En remarquant que les trois droites sur lesquelles sont situés les neuf points de la table générale ($☽$) se rencontrent dans un même point, cette démonstration de l'existence des droites X fait voir que la droite $\{bcd\}$ passe par le point d'intersection des droites $ae\,.\,af$, $ef\,.\,fa$, savoir par le point afe; ou bien que chacune des vingt droites X passe, non seulement par trois points h, mais aussi par un seul point g. Ce théorème est dû à M. Salmon, qui indépendamment de mes recherches à trouvé l'existence des vingt droites X. 8 août 1849. *Inserted here from* Crelle, t. XLI. p. 84.]

Enfin, pour démontrer le théorème (ϵ), nous pouvons considérer les points de ce théorème comme déterminés,

$$\begin{array}{llll} ab\,.\,cd \text{ par les droites} & bc\,.\,bd, & ad\,.\,be\,.\,ef, & ac\,.\,bd\,.\,ef, \\ f\,.\,ab \quad ,, \quad ,, & fc\,.\,fd, & fc\,.\,fe \quad , & fd\,.\,fe \quad , \\ e\,.\,ab \quad ,, \quad ,, & ec\,.\,ed, & ec\,.\,fe \quad , & ed\,.\,fe \quad . \end{array}$$

La table ($\odot$) se réduit alors à

$$\begin{array}{lll} cd\,.\,ef, & f\,.\,ce, & f\,.\,de, \\ cd\,.\,eb, & cf\,.\,eb, & df\,.\,eb, \\ cd\,.\,bf, & ce\,.\,bf, & de\,.\,bf, \end{array}$$

et la table ($\mathbb{D}$) à

$$\begin{array}{lll} fe\ , & ce\,.\,cf, & de\,.\,df, \\ fe\,.\,fb, & cb\,.\,ce, & db\,.\,de, \\ fe\,.\,eb, & cb\,.\,cf, & db\,.\,df. \end{array}$$

Or les droites de la première colonne verticale de cette table se rencontrent dans le point $bf\,.\,be$, celles de la deuxième colonne verticale dans le point $c\,.\,ad$, et celles de la troisième colonne verticale dans le point $d\,.\,ac$; le théorème dont il s'agit est donc démontré. Dans cette démonstration on aurait aussi pu échanger les lettres a, b.

Les théorèmes (α) et (γ) peuvent être énoncés par le seul théorème suivant:

"Étant donnés six points sur la même conique, et menant par ces points neuf droites, de manière que chaque droite passe par deux points et que par chaque point il passe trois droites: on formera avec ces neuf droites trois hexagones différents dont chacun a les six points pour angles. Les droites de Pascal, auxquelles donnent lieu ces trois hexagones, se rencontreront dans un même point."

En supposant que le système de neuf droites contient toujours un même hexagone, il est possible de compléter de quatre manières différentes le système des neuf droites; savoir, on peut ajouter aux côtés de l'hexagone 1 les trois diagonales de l'hexagone 2, 3 ou 4, en menant une quelconque de ces diagonales et deux droites, chacune par deux angles alternés de l'hexagone. Ces quatre systèmes donnent lieu au point g, et aux trois points h, qui se trouvent sur la droite de Pascal, correspondante à l'hexagone dont il s'agit; savoir le premier système donne lieu au point g, et les trois derniers systèmes au point h.