96.

MÉMOIRE SUR LES CONIQUES INSCRITES DANS UNE MÊME SURFACE DU SECOND ORDRE.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLI. (1851), pp. 73—86.]

En considérant une surface quelconque du second ordre, le problème se presente: d'examiner les proprietés des coniques inscrites dans cette surface et des cônes circonscrits. La plupart de ces propriétés est peut-être connue[1]; cependant je crois qu'on ne les a pas encore développées systématiquement. Je me propose de donner ici l'analyse des propriétés les plus simples d'un tel système de coniques, et la solution du problème analogue au problème des tactions qui se présente ici, ainsi que quelques théorèmes relatifs au passage à un système de coniques situées dans un même plan et inscrites dans une même conique, en me réservant pour une seconde partie de ce mémoire les développements ultérieurs concernant ce passage, et la solution complète du problème analogue au problème de Malfatti, généralisé par M. Steiner.

Remarquons d'abord que les coniques inscrites et les cônes circonscrits, ainsi que les plans des coniques inscrites et les sommets des cônes circonscrits, sont des figures *réciproques* par rapport à la surface du second ordre. En considérant deux coniques inscrites quelconques, et les cônes circonscrits correspondants, on remarquera que les plans des coniques inscrites se rencontrent dans une droite. Je la nommerai *Droite de symptose.* Les sommets des cônes circonscrits seront situés dans une droite que je nommerai *Droite d'homologie.* Ces deux droites seront évidemment réciproques l'une à l'autre. Il se trouvera sur la droite d'homologie deux points dont chacun est le sommet d'un cône qui passe par les deux coniques inscrites. Ces deux points peuvent être nommés *Points d'homologie.* De même il passera par la droite de *symptose* deux plans,

[1] Voyez le mémoire de M. Steiner "Einige geometrische Betrachtungen" Journal t. I. [1826] pp. 161—184, et un mémoire de M. Olivier, Quetelet, Corresp. Math. t. v. [1829].

qui sont les plans des coniques dans lesquelles se coupent les deux cônes circonscrits. Ces deux plans peuvent être nommés *Plans de symptose.* Les plans de symptose et les points d'homologie ne sont pas seulement des figures réciproques : les deux plans de symptose passent aussi par les deux points d'homologie, chacun par le point réciproque de l'autre plan ; c'est à dire : les plans de symptose sont des plans *conjugués* par rapport à la surface du second ordre, et les points d'homologie sont des points *conjugués* par rapport à cette même surface. Remarquons aussi qu'en considérant le système formé par les plans des coniques inscrites et les plans tangents à la surface menés par la droite de symptose, on trouvera que les plans de symptose sont les plans doubles (ou si l'on veut les plans *auto-conjugués*) de l'involution. De même, en considérant le système formé par les sommets des cônes circonscrits et par les points de leur intersection avec la surface de la droite d'homologie, on trouvera que les points d'homologie sont les points doubles (ou *auto-conjugués*) de l'involution. Les deux cônes circonscrits qui ont pour sommets les deux points d'homologie, peuvent être nommés *Cônes d'homologie ;* de même, les deux coniques inscrites, situées dans les deux plans de symptose, peuvent être nommées *Coniques de symptose.* (En passant, nous remarquerons que ces coniques de symptose correspondent aux *Potenzkreise* de M. Steiner.) Il est évident que les cônes d'homologie et les coniques de symptose sont des figures réciproques.

En considérant trois coniques inscrites, et les cônes circonscrits correspondants, on verra que les plans des coniques inscrites se rencontrent dans un point que je nommerai *Point de symptose.* Les sommets des cônes circonscrits seront situés dans un plan que je nommerai *Plan d'homologie.* Ce point et le plan seront réciproques l'un à l'autre. En combinant deux à deux les coniques inscrites ou les cônes circonscrits, cela donne lieu à trois droites de symptose qui passent chacune par le point de symptose, et à trois droites d'homologie situées chacune dans le plan d'homologie. Il existe aussi six plans de symptose qui se coupent trois à trois dans quatre droites, arêtes d'une pyramide quadrilatère qui a pour axes les trois droites de symptose. Les quatre droites dont il s'agit, peuvent être nommées *Axes de symptose.* Il existe également six points d'homologie, situés trois à trois dans quatre droites, côtés d'un quadrilatère qui a pour axes les trois droites d'homologie. Les quatre droites dont il s'agit, peuvent être nommées *Axes d'homologie.* La pyramide et le quadrilatère sont des figures réciproques, et il convient de remarquer (quoique cela soit assez évident) qu'il y a ici trois points d'homologie, non-situés dans un des côtés du quadrilatère, mais contenus dans trois points de symptose qui se coupent dans une arête de la pyramide.

Par l'un quelconque des axes d'homologie il passe deux plans dont chacun touche les trois coniques inscrites ; de même il se trouve sur l'un quelconque des axes de symptose deux points, dont chacun est un point d'intersection des trois cônes circonscrits. Cela constitue la solution du problème : Trouver la conique inscrite, ou le cône circonscrit, qui touche trois coniques inscrites, ou trois cônes circonscrits. Il y a *huit* solutions de ce problème.

Avant d'aller plus loin, je vais indiquer quelques-unes des formules analytiques correspondantes à la théorie qui vient d'être expliquée.

Écrivons, pour abréger:

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dw^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy + 2Lxw + 2Myw + 2Nzw,$$
$$V = \alpha x \;\, + \beta y \;\, + \gamma z \;\, + \delta w,$$

et représentons par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ les coefficients du système inverse de A, B, C, D, F, G, H, L, M, N. Soit de plus

$$X = Ax + Hy + Gz + Lw,$$
$$\vdots$$
$$p^2 = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2 + \mathfrak{D}\delta^2 + 2\mathfrak{F}\beta\gamma + 2\mathfrak{G}\gamma\alpha + 2\mathfrak{H}\alpha\beta + 2\mathfrak{L}\alpha\delta + 2\mathfrak{M}\beta\delta + 2\mathfrak{N}\gamma\delta.$$

Cela posé, en prenant $U=0$ pour équation de la surface du second ordre, et $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$ pour les équations des plans des coniques inscrites, on obtient pour l'un des plans de symptose des coniques inscrites $(U=0,\ V_1=0)$, $(U=0,\ V_2=0)$ l'équation très simple $p_2V_1 = p_1V_2 = 0$. De là on tire pour les coordonnées du point d'homologie, qui est le réciproque de ce plan de symptose, les équations

$$X : Y : Z : W = p_2\alpha_1 - p_1\alpha_2 : p_2\beta_1 - p_1\beta_2 : p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2 : p_2\delta_1 - p_1\delta_2.$$

En formant également les expressions des coordonnées d'un point d'homologie des deux autres paires de coniques inscrites, on obtient pour équation de l'un des axes d'homologie:

$$\left|\begin{array}{ccccc} & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ p_2, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ p_3, & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \end{array}\right| = 0;$$

savoir, en choisissant quatre colonnes verticales quelconques de cette formule, on trouve que les déterminants que l'on obtient, sont tous égaux à zéro.

Nous ajouterons que la droite qui, par rapport à la conique $(U=0,\ V_1=0)$, est réciproque de cet axe d'homologie, est donnée par les équations

$$V_1 = 0,\quad V_2 : V_3 = p_1p_2 - \mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2 - \ldots : p_1p_3 - \mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3 - \ldots;$$

il est clair que cette droite rencontre la surface du second ordre en deux points situés dans les plans des coniques inscrites qui, au moyen de l'axe d'homologie dont l'équation vient être donnée, sont déterminés de manière à toucher les trois coniques inscrites données. Mais sans se servir des équations de cette droite, on peut déterminer l'équation des deux plans menés par l'axe d'homologie dont il s'agit, de manière à toucher la conique inscrite $(U=0,\ V_1=0)$; et la symétrie du résultat fera voir que ces deux plans touchent aussi deux autres coniques inscrites. La recherche de cette équation étant un peu difficile, je la donnerai en détail, en supposant cependant connu le théorème suivant:

En écrivant $v = \lambda x + \mu y + \nu z + \rho w$, $v' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z + \rho' w$: les plans menés par la droite $(v=0,\ v'=0)$ de manière qu'ils touchent la conique inscrite $(U=0,\ V=0)$, sont donnés par l'équation

$$p^2\left[\mathfrak{A}(\lambda v' - \lambda' v)^2 + \ldots\right] - \left[\mathfrak{A}\alpha(\lambda v' - \lambda' v) + \ldots\right]^2 = 0.$$

Pour appliquer ce théorème au problème dont il s'agit, nous n'avons qu'à substituer V_1 au lieu de V, et qu'à écrire

$$v = \left|\begin{array}{ccccc} & a, & b\ , & c\ , & d \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & & \end{array}\right|, \qquad v' = \left|\begin{array}{ccccc} & a', & b', & c', & d' \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & & \end{array}\right|$$

où les coefficients $a, b, c, d\,;\ a', b', c', d'$ sont des quantités quelconques.

Réduisons d'abord l'expression $\mathfrak{A}\alpha_1(\lambda v' - \lambda' v) + \ldots$ Pour cela, mettons dans les valeurs de v, v', les expressions $\mathfrak{A}\alpha_1 + \ldots$, $\mathfrak{H}\alpha_1 + \ldots$, &c. à la place de $x, y, \ldots$: les quantités X, Y, Z, W deviennent alors $K\alpha_1, K\beta_1, K\gamma_1, K\delta_1$ (où comme à l'ordinaire K est le déterminant formé par les quantités $A, B, \ldots$), et l'on obtient ainsi, aux signes près :

$$\mathfrak{A}\alpha_1\lambda + \ldots = Kp_1 \left|\begin{array}{cccc} a\ , & b\ , & c\ , & d \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & \end{array}\right|, \qquad \mathfrak{A}\alpha_1\lambda' + \ldots + = Kp_1 \left|\begin{array}{cccc} a', & b', & c', & d' \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & \end{array}\right|$$

et de là

$$\mathfrak{A}\alpha_1(\lambda v' - \lambda' v) + \ldots = Kp_1 \,\square\,,$$

où

$$\square = \left|\begin{array}{cccc} a\ , & b'\ , & c\ , & d \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccccc} & a', & b', & c', & d' \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & & \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cccc} a', & b', & c', & d' \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccccc} & a\ , & b\ , & c\ , & d \\ & X, & Y, & Z\ , & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots & & & & \end{array}\right|:$$

formule qui au moyen des propriétés des déterminants se réduit à

$$\square = \left|\begin{array}{cccc} X, & Y\ , & Z\ , & W \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \end{array}\right. \left.\begin{array}{ccccc} & a\ , & b\ , & c\ , & d\ , \\ & a', & b', & c', & d', \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, \\ \vdots & & & & \end{array}\right|$$

Passons à l'expression $\mathfrak{A}(\lambda v' - \lambda' v)^2 + \ldots$, que nous mettrons sous la forme

$$\frac{1}{K}\{A\,[\mathfrak{A}(\lambda v' - \lambda' v)^2 + \ldots]^2 + \ldots\}.$$

En prenant des quantités quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on obtient par une analyse semblable :

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}(\lambda v' - \lambda' v) + \ldots = K\,\overline{\square}\,,$$

où

$$\square = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ a, & b, & c, & d \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a', & b', & c', & d' \\ X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ a', & b', & c', & d' \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix}:$$

formule qui se réduit à

$$\overline{\square} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & b, & c & d \\ a', & b', & c', & d' \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

De là, en supprimant les facteurs constants de $\square$ et de $\overline{\square}$, on obtient

$$\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta + \mathfrak{c}\zeta + \mathfrak{d}\omega = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ X & Y, & Z & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix},$$

expression qui sert à définir les fonctions ξ, η, ζ, ω. L'équation qu'il s'agissait de trouver devient

$$A\xi^2 + \ldots - K \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & W \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \vdots \end{vmatrix}^2 = 0,$$

où il faut avoir égard que l'on a $X = Ax + \ldots$, &c. Savoir, l'équation qu'on vient d'écrire se décompose nécessairement en facteurs linéaires qui, égalés à zéro, donnent les équations des plans des coniques inscrites qui touchent chacune les trois coniques inscrites données.

Nous avons obtenu ce résultat en traduisant en analyse une construction géométrique; mais on y peut aussi parvenir en considérant le problème d'une manière purement analytique. En effet: soient comme plus haut, $U = 0$ l'équation de la surface du second ordre, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ les équations des plans des trois coniques inscrites données, $V = 0$ l'équation du plan de la conique inscrite qui touche chacune de ces trois coniques. La condition pour que cette conique touche la conique inscrite située dans le plan $V_1 = 0$, est $\mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \ldots = pp_1$. On a donc les trois équations

$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \ldots = pp_1,$$
$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_2 + \ldots = pp_2,$$
$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_3 + \ldots = pp_3.$$

Au lieu de tirer de ces équations les quantités $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, nous ajouterons au système la nouvelle équation

$$ax + \ldots = 0,$$

par laquelle il sera possible d'éliminer les quatre quantités α, β, γ, δ. En attribuant à $X, \ldots$ la même signification qu'auparavant, nous mettrons les quatre équations sous la forme

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,\alpha_1+\ldots&=pp_1,\\(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,\alpha_2+\ldots&=pp_2,\\(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,\alpha_3+\ldots&=pp_3,\\(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,X+\ldots&=\;0\,.\end{aligned}$$

Écrivons de plus

$$(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,\mathfrak{a}+\ldots=p\Theta,$$

où les quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sont arbitraires. En éliminant de ces équations les fonctions $(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)$, puis en mettant à la place de $p\Theta$ la quantité à gauche de l'équation, on obtient, à un facteur constant près,

$$(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)\,\mathfrak{a}+\ldots=\left|\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}\\ & X, & Y, & Z, & W\\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\\ \vdots & & & & \end{array}\right|;$$

cela donne d'abord

$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\ldots=p_1\left|\begin{array}{cccc} X, & Y, & Z, & W\\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\\ \vdots & & & \end{array}\right|,$$

puis, en écrivant $p^2=\mathfrak{A}\alpha^2+\ldots=\dfrac{1}{K}[A\,(\mathfrak{A}\alpha+\ldots)^2+\ldots]$, on a

$$p^2=\frac{1}{K}(A\xi^2+\ldots),$$

et

$$\mathfrak{a}\xi+\ldots=\left|\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}\\ & X, & Y, & Z, & W\\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\\ \vdots & & & & \end{array}\right|,$$

et de là enfin, en substituant dans l'équation $\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\ldots=pp_1$, on obtient comme plus haut l'équation

$$A\xi^2+\ldots-K\left|\begin{array}{cccc} X, & Y, & Z, & W\\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\\ \vdots & & & \end{array}\right|^2=0.$$

Il est clair que cette analyse peut être appliquée à la solution d'un nombre quelconque d'équations de la forme $\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\ldots=pp_1$.

En revenant à la théorie *géométrique,* considérons un point quelconque que nous prendrons pour point de projection : le cône qui passe par une conique inscrite quelconque aura (comme on sait) un contact double avec le cône qui a pour sommet le point de projection. Le plan de contact sera le plan mené par le point de projection et par la droite d'intersection du plan de la conique inscrite et du plan réciproque au point de projection. En considérant plusieurs coniques inscrites ayant une droite de symptose commune, tous les cônes auxquels donnent lieu ces coniques inscrites, auront pour arêtes communes les deux droites menées par le point de projection aux points dans lesquels la surface est rencontrée par la droite de symptose commune. Ajoutons que les plans de contact des cônes dont il s'agit, avec le cône circonscrit, rencontrent le plan des deux arêtes communes dans une droite fixe, savoir dans l'une ou l'autre des droites doubles (ou auto-conjuguées) de l'involution formée par les deux arêtes communes et par les droites dans lesquelles le plan de ces deux arêtes communes rencontre le cône circonscrit. De plus, en considérant les plans tangents menés par l'une ou par l'autre des deux arêtes communes, ces plans tangents forment un système homologue à celui des plans des coniques inscrites. En considérant en particulier l'une ou l'autre des coniques de symptose de deux coniques inscrites quelconques : le plan tangent du cône correspondant est le plan double (ou auto-conjugué) de l'involution formée par les plans tangents des cônes qui correspondent aux deux coniques inscrites (c'est à dire par les plans tangents qui passent par l'arête commune dont il s'agit), et par les plans tangents de la surface du second ordre menés par cette même arête commune. C'est là en effet la propriété qui conduit à la construction des coniques de symptose de deux coniques situées dans le même plan et considerées comme inscrites dans une conique donnée.