99.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES QUI SE RAPPORTENT À LA MULTIPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLI. (1851), pp. 85—92.]

En revenant sur l'équation

$$\begin{aligned}&\{-l\lambda - m\mu + (l-m)^2\} P_{l,m}\\ &+ l(\lambda - 2l + 2m + 2)(\lambda - 2l + 2m + 1) P_{l-1,m}\\ &+ m(\mu + 2l - 2m + 2)(\mu + 2l - 2m + 1) P_{l,m-1}\\ &- 16lm\{\lambda\mu - (2l + 2m - 4)(\lambda + \mu)\} P_{l-1,m-1} = 0,\end{aligned}$$

dans laquelle $P_{0,0} = 1$, les expressions que j'ai données pour $P_{l,0}$, $P_{l,1}$ [93, see p. 535] peuvent être écrites comme suit:

$$P_{l,0} = \lambda[\lambda - l - 1]^{l-1},$$

$$P_{l,1} = \mu\lambda[\lambda - l - 1]^{l-1} + l\lambda[\lambda - l]^{l-2}\left(18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right) + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(-10l\lambda[\lambda - l]^{l-2}):$$

équations qui peuvent être représentées par

$$P_{l,0} = Q_{l,0},$$

$$P_{l,1} = Q_{l,1} + R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu},$$

ce qui conduisent à la forme

$$P_{l,2} = Q_{l,2} + R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} + R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},$$

où les coefficients R ne contiennent que la seule quantité λ, et où $Q_{l,2}$ est une fonction intégrale du $l^{\text{ième}}$ ordre par rapport à λ, et du second ordre par rapport à μ.

Cela donne

$$\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}\left\{Q_{l,2}+R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$

$$+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\left\{Q_{l-1,2}+R_{l-1,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l-1,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$

$$+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)\left\{Q_{l,1}+R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right\}$$

$$-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}\left\{Q_{l-1,1}+R_{l-1,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right\}=0,$$

ce qui se réduit à

$$\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}\,Q_{l,2}-(l-2)(\lambda-l+2)\left\{R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$

$$-2\lambda\mu R_{l,2;1}-2\lambda^2\mu R_{l,2;2}+2\lambda^2 R_{l,2;2}\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)}$$

$$+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\left\{Q_{l-1,2}+R_{l-1,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l-1,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$

$$+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)\,Q_{l,1}+2(\mu-\lambda+4l-5)\,\lambda\mu R_{l,1;1}$$

$$+2(\lambda-2l+2)(\lambda-2l+3)\,R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)}$$

$$-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}\,Q_{l-1,1}-32l\lambda\mu(\lambda-2l)\,R_{l-1,1;1}+32l\lambda^2R_{l-1,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}=0.$$

En ne faisant attention d'abord qu'aux termes qui contiennent des puissances négatives de $\lambda+\mu$, nous obtenons

$$-(l-2)(\lambda-l+2)\,R_{l,2;2}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\,R_{l-1,2;2}=0$$

et

$$-(l-2)(\lambda-l+2)\,R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\,R_{l-1,2;1}$$
$$+2(\lambda-2l+2)(\lambda-2l+3)\,R_{l,1;1}+32l\lambda^2R_{l-1,1;1}+2\lambda^2R_{l,2;2}=0.$$

La première équation, en calculant la constante arbitraire au moyen de $R_{2,2,2}=200$, donne

$$R_{l,2;2}=100\,l(l-1)\,\lambda\,[\lambda-l+1]^{l-3};$$

l'expression de $R_{2,2,2}=200$ se trouve par celle de $P_{2,2}$ qui peut être écrite sous la forme

$$P_{2,2}=\lambda(\lambda-3)\,\mu(\mu-3)+152\lambda\mu+336-40\lambda^2\mu+(40\lambda^2-1156)\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+\frac{200\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}.$$

En substituant la valeur de $R_{l,2;2}$ et celles de

$$R_{l,1;1}=-10l\lambda\,[\lambda-l]^{l-2},\quad R_{l-1,1;1}=-10\,(l-1)\,\lambda\,[\lambda-l+1]^{l-3}$$

dans la seconde équation, on obtient

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;1}$$
$$-20l\lambda(\lambda-2l+3)[\lambda-l]^{l-1}-120l(l-1)\lambda^3[\lambda-l+1]^{l-3}=0,$$

c'est à dire

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;1}$$
$$-20l\lambda[\lambda-l]^{l-4}\{6(l-1)\lambda^2(\lambda-l+1)+(\lambda-2l+4)(\lambda-2l+3)^2(\lambda-2l+2)\}.$$

Mettons

$$R_{l,2;2}=l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\Psi_l;$$

cela donne

$$\Psi_l-\Psi_{l-1}=\frac{-20}{(l-1)(l-2)(\lambda-l+1)(\lambda-l+2)}\{6(l-1)\lambda^2(\lambda-l+1)$$
$$+(\lambda-2l+4)(\lambda-2l+3)^2(\lambda-2l+2)\},$$

ce qui devient, quelques réductions faites,

$$\Psi_l-\Psi_{l-1}=\frac{-20}{(l-1)(l-2)}\{(\lambda+1)(\lambda+2)+17(l-1)(l-2)\}$$
$$-\frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}+\frac{20(l-2)(l-4)}{\lambda-l+2},$$

et de là on tire

$$\Psi_l=C-340l+\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}.$$

Or $R_{2,2;1}=2\Psi_2=40\lambda^2-1156$; donc $\Psi_2=20\lambda^2-578$, et de là $C=62-60\lambda$; donc enfin, en restituant la valeur de $R_{l,2;1}$,

$$R_{l,2;1}=l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-340l-60\lambda+\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

Passons à l'expression de $Q_{l,2}$. Elle donne

$$\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}Q_{l,2}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)Q_{l-1,2}$$
$$+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)Q_{l,1}\qquad-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}Q_{l-1,1}$$
$$+2(\mu-\lambda+4l-5)\lambda\mu R_{l,1;1}$$
$$-2\lambda\mu R_{l,2;1}-2\lambda^2\mu R_{l,2;2}-32l\lambda\mu(\lambda-2l)R_{l-1,1;1}=0;$$

où la dernière ligne se réduit à

$$-2l(l-1)\mu\lambda^2[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-20l-120\lambda-\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-1)(l-2)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

Donc on a

$$\{l\lambda + 2\mu - (l-2)^2\}\, Q_{l,2} - l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5)\, Q_{l-1,2}$$

$$= 2(\mu + 2l - 2)(\mu + 2l - 3)\left\{\mu\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1} + l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\left(18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right)\right\}$$

$$- 32l\,\{\lambda\mu - 2l(\lambda + \mu)\}\left\{\mu\lambda\,[\lambda - l]^{l-2} + (l-1)\,\lambda\,[\lambda - l + 1]^{l-3}\left(18l - 34 + \frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right)\right\}$$

$$- 20l\,(4l - 5 + \mu - \lambda)\,\lambda^2\mu\,[\lambda - l]^{l-2}$$

$$- 2l(l-1)\,\lambda^2\mu\,[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{62 - 20l - 120\lambda + \frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1} - \frac{20(\lambda-1)(\lambda-2)}{\lambda - l + 1}\right\},$$

équation qui peut être représentée par

$$\{l\lambda + 2\mu - (l-2)^2\}\, Q_{l,2} - l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5)\, Q_{l-1,2} = \mathfrak{A}\mu^3 + \mathfrak{B}\mu^2 + \mathfrak{C}\mu + \mathfrak{D},$$

où les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sont données par les formules

$$\mathfrak{A} = 2\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1},$$

$$\mathfrak{B} = 2(4l-5)\,\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1} + 2l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\left(18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right)$$

$$- 32l\lambda\,(\lambda - 2l)\,[\lambda - l]^{l-2} - 20l\lambda^2\,[\lambda - l]^{l-2},$$

$$\mathfrak{C} = 2(2l-2)(2l-3)\,\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1}$$

$$+ 2(4l-5)\,l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\left\{18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\}$$

$$+ 64l^2\lambda^2\,[\lambda - l]^{l-2}$$

$$- 32l(l-1)(\lambda - 2l)\,\lambda\,[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{18l - 34 + \frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}$$

$$- 20l\,(4l - 5 - \lambda)\,\lambda^2\,[\lambda - l]^{l-2}$$

$$- 2l(l-1)\,\lambda^2\,[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{62 - 20l - 120\lambda + \frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1} - \frac{20(l-1)(l-2)}{\lambda - l + 1}\right\},$$

$$\mathfrak{D} = 2(2l-2)(2l-3)\,l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\left\{18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\}$$

$$+ 64l^2(l-1)\,\lambda^2\,[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{18l - 34 + \frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}.$$

Sans m'arrêter à réduire ces expressions aux formes les plus simples, j'écris

$$Q_{l,2} = \mu(\mu - 3)\,\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1} + \mu I_l + J_l;$$

en substituant cette valeur, les termes qui contiennent μ^3 se détruisent, et la comparaison des autres termes donne

$$2I_l - 6\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1} + \{l\lambda - (l-2)^2\}\,\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1}$$

$$- l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5)\,\lambda\,[\lambda - l]^{l-2} - \mathfrak{B} = 0,$$

$$2J_l + \{l\lambda - (l-2)^2\}\{-3\lambda[\lambda - l - 1]^{l-1} + I_l\}$$
$$- l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5)\{-3\lambda[\lambda - l]^{l-2} + I_{l-1}\} - \mathfrak{C} = 0,$$

$$\{l\lambda - (l-2)^2\} J_l - l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5) J_{l-1} - \mathfrak{D} = 0.$$

Les valeurs de I_l et J_l peuvent être tirées sans intégration de la première et de la seconde de ces équations. La valeur ainsi trouvée de J_l satisfera à la troisième équation (ce qui cependant doit être vérifié a posteriori). Il m'a paru plus simple de tirer la fonction I_l de la première équation, et celle de J_l en intégrant la troisième équation; alors ce sera la seconde équation qu'il y a à vérifier. En effet on obtient

$$I_l = l\lambda[\lambda - l]^{l-2}\left\{36l + 4 - 20\lambda + \frac{4(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\}.$$

L'équation qui sert à déterminer J_l devient, en substituant la valeur de $\mathfrak{D}$,

$$\{l\lambda - (l-2)^2\} J_l - l(\lambda - 2l + 6)(\lambda - 2l + 5) J_{l-1}$$
$$= 4l(l-1)(2l-3)\lambda[\lambda - l]^{l-2}\left\{18l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\}$$
$$+ 64l^2(l-1)\lambda^2[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{18l - 34 + \frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}.$$

En écrivant

$$J_l = l(l-1)\lambda[\lambda - l + 1]^{l-3} V_l,$$

on trouve

$$\{l\lambda - (l-2)^2\} V_l - (l-2)(\lambda - l + 2) V_{l-1}$$
$$= 8(2l-3)\frac{(\lambda - 2l + 3)(\lambda - 2l + 4)}{\lambda - l + 1}\left\{9l - 8 + \frac{(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\}$$
$$+ 128l\lambda\left\{9l - 17 + \frac{(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}.$$

En faisant

$$V_l = M_l + \frac{A_l}{\lambda - l + 1} + \frac{B_l}{(\lambda - l + 1)(\lambda - l)},$$

cette équation se réduit à

$$\{l\lambda - (l-2)^2\} M_l - (l-2)(\lambda - l + 2) M_{l-1}$$
$$+ lA_l - (l-2)A_{l-1} + \frac{(3l-4)A_l + lB_l - (l-2)B_{l-1}}{\lambda - l + 1} + \frac{4(l-1)B_l}{(\lambda - l + 1)(\lambda - l)}$$
$$= \quad 8(2l-3)(9l-8)\left\{(\lambda - 3l + 6) - \frac{(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}$$
$$+ 8(2l-3)(l-1)(l-2)\left\{1 - \frac{2(l-3)}{\lambda - l + 1} + \frac{(l-3)(l-4)}{(\lambda - l + 1)(\lambda - l)}\right\}$$
$$+ 128l\lambda(9l - 17) + 128\,\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1},$$

et cela donne tout de suite la valeur de B_l, et après quelques réductions celle de A_l.

On obtient ainsi

$$A_l = 2(l-2)(l-3)(36l+7),$$
$$B_l = 2(l-2)(l-3)(l-4)(2l-3).$$

En substituant ces valeurs, on a, toute réduction faite:

$$\{l\lambda - (l-2)^2\} M_l - (l-2)(\lambda - l + 2) M_{l-1} = 8\lambda(162l^2 - 315l + 24) - 24(l-2)^2(27l-26),$$

c'est à dire

$$lM_l - (l-2) M_{l-1} = 1296l^2 - 2520l + 192,$$
$$M_l - M_{l-1} \quad = \quad 648l - 624,$$

ou enfin

$$M_l \quad = 324l^2 - 300l - 528,$$
$$M_{l-1} = 324l^2 - 948l + 192:$$

valeurs qui (comme cela doit être) se changent l'une dans l'autre en entrechangeant les quantités l, $l-1$.

De là on obtient

$$J_l = l(l-1)\lambda[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{324l^2 - 300l - 528 + \frac{2(l-2)(l-3)(36l+7)}{\lambda - l + 1} + \frac{2(2l-3)(l-2)(l-3)(l-4)}{(\lambda - l + 1)(\lambda - l)}\right\},$$

valeur qu'on trouverait aussi par l'autre procédé indiqué ci-dessus. Or nous avons

$$Q_{l,2} = \mu(\mu-3)\lambda[\lambda - l - 1]^{l-1} + \mu I_l + J_l,$$

$$P_{l,2} = Q_{l,2} + R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} + R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2};$$

donc enfin, en réunissant les valeurs des différentes parties de $P_{l,2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
P_{l,2} = {} & \mu(\mu-3)\lambda[\lambda - l - 1]^{l-1} \\
& + \mu l\lambda[\lambda - l]^{l-2}\left\{36l + 4 - 20\lambda + \frac{4(l-1)(l-2)}{\lambda - l}\right\} \\
& + l(l-1)\lambda[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{324l^2 - 300l - 528 + \frac{2(l-2)(l-3)(36l+7)}{\lambda - l + 1} + \frac{2(2l-3)(l-2)(l-3)(l-4)}{(\lambda - l + 1)(\lambda - l)}\right\} \\
& + l(l-1)\lambda[\lambda - l + 1]^{l-3}\left\{62 - 340l - 60\lambda + \frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1} - \frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda - l + 1}\right\}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \\
& + 100l(l-1)\lambda[\lambda - l + 1]^{l-3}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},
\end{aligned}$$

équation qui fait suite aux équations

$$P_{l,1} = \mu\lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1} + l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\left\{18l - 16 + \frac{2\,(l-1)\,(l-2)}{\lambda - l}\right\} - 10l\lambda\,[\lambda - l]^{l-2}\cdot\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu},$$

$$P_{l,0} = \lambda\,[\lambda - l - 1]^{l-1}.$$

Je vais essayer maintenant à chercher d'une manière plus systématique les termes de $P_{l,m}$ qui ne contiennent pas la quantité μ, ou bien à chercher la solution de l'équation

$$\begin{aligned}\{-l\lambda + (l-m)^2\}\,P_{l,m}&\\ + l\,(\lambda - 2l + 2m + 2)\,(\lambda - 2l + 2m + 1)\,P_{l-1,m}&\\ + 2m\,(l - m + 1)\,(2l - 2m + 1)\,P_{l,m-1}&\\ + 32lm\,(l + m - 2)\,P_{l-1,m-1} = 0.&\end{aligned}$$

En supposant que

$$P_{l,m} = [l]^m\,\lambda\,[\lambda - l + m - 1]^{l-m-1}\,\Sigma\,\frac{A_{l,m,p}}{[\lambda - l + m - 1]^p}$$

(où la sommation se rapporte à p, nombre qui doit être étendu depuis $p=0$ jusqu'à $p=m$), on obtiendra sans peine

$$\begin{aligned}\{-l\lambda + (l-m)^2\}\,\Sigma\,\frac{A_{l,m,p}}{[\lambda - l + m - 1]^p}&\\ + (l-m)\,\Sigma\,\frac{A_{l-1,m,p}}{[\lambda - l + m - 1]^{p-1}}&\\ + 2m\,(2l - 2m + 1)\,[\lambda - 2l + 2m]^2\,\Sigma\,\frac{A_{l,m-1,p}}{[\lambda - l + m - 1]^{p+1}}&\\ + 32lm\,(l + m - 2)\,\lambda\,\Sigma\,\frac{A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda - l + m - 1]^p} = 0;&\end{aligned}$$

où p s'étend seulement jusqu'à $m-1$ dans la troisième et dans la quatrième ligne.

Pour réduire la première ligne, j'écris

$$-l\lambda + (l-m)^2 = -l\,(\lambda - l + m - p) + [m^2 - (m+p)\,l],$$

ce qui réduit le terme général à

$$\frac{-lA_{l,m,p}}{[\lambda - l + m - 1]^{p-1}} + \frac{[m^2 - (m+p)\,l]\,A_{l,m,p}}{[\lambda - l + m - 1]^p}:$$

expression qui, en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier terme, et r dans le second terme, peut être remplacée par

$$(\alpha)\qquad \frac{-lA_{l,m,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}+\frac{\{m^2-(m+r)\,l\}\,A_{l,m,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

La seconde ligne donne tout de suite le terme général

$$(\beta)\qquad \frac{(l-m)\,A_{l-1,m,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Pour réduire la troisième ligne, je mets

$$[\lambda-2l+2m]^2=[\lambda-l+m-p]^2-2\,[l-m-p+1]^1\,[\lambda-l+m-p-1]^1+[l-m-p]^2,$$

ce qui réduit le terme général à

$$2m\,(2l-2m+1)\frac{A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}-4m\,(2l-2m+1)\frac{[l-m-p+1]^1\,A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}$$
$$+\frac{2m\,(2l-2m+1)\,[l-m-p]^2\,A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p+1}}:$$

expression qui (en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier terme, r dans le second terme et $r-1$ dans le troisième terme) peut être remplacée par

$$(\gamma)\qquad 2m\,(2l-2m+1)\frac{A_{l,m-1,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}-4m\,(2l-2m+1)\frac{[l-m-r+1]^2\,A_{l,m-1,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}$$
$$+\frac{2m\,(2l-2m+1)\,[l-m-r+1]^2\,A_{l,m-1,r-1}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Pour réduire la quatrième ligne, je mets

$$\lambda=(\lambda-l+m-p)+(l-m+p),$$

ce qui réduit le terme général à

$$32lm\,(l+m-2)\frac{A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}+32lm\,(l+m-2)\frac{(l-m+p)\,A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^p},$$

expression qui (en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier et r dans le second terme) peut être remplacée par

$$(\delta)\qquad 32lm\,(l+m-2)\frac{A_{l-1,m-1,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}+32lm\,(l+m-2)\frac{(l-m+p)\,A_{l-1,m-1,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Donc en réunissant les expressions (α), (β), (γ), (δ) et en faisant attention que le coefficient du terme qui contient $[\lambda - l + m - 1]^r$ au dénominateur, doit se réduire à zéro, on obtient, en arrangeant encore les termes d'une manière convenable:

$$\begin{aligned}
&2m\,(2l-2m+1)\,A_{l,\,m-1,\,r+1}\\
&+32lm\,(l+m-2)\,A_{l-1,\,m-1,\,r+1}\\
&-lA_{l,\,m,\,r+1}\\
&+(l-m)\,A_{l-1,\,m,\,r+1}\\
&-4m\,(2l-2m+1)\,(l-m-r+1)\,A_{l,\,m-1,\,r}\\
&+32lm\,(l+m-2)\,(l+m-r)\,A_{l-1,\,m-1,\,r}\\
&+(m^2-(m+r)\,l)\,A_{l,\,m,\,r}\\
&+2m\,(2l-2m+1)\,(l-m-r+1)\,(l-m-r)\,A_{l,\,m-1,\,r-1}=0,
\end{aligned}$$

où r s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=m$, en réduisant à zéro les termes pour lesquels le troisième suffixe est négatif ou plus grand que le second suffixe. Par exemple dans le cas de $r=m$, on obtient l'équation très simple

$$\begin{aligned}
&(2l-m)\,A_{l,\,m,\,m}\\
&-2\,(2l-2m+1)\,(l-2m+1)\,(l-2m)\,A_{l,\,m-1,\,m-1}=0
\end{aligned}$$

qui (sous la condition $A_{l,0,0}=1$) donne sans peine la valeur générale de $A_{l,m,m}$, savoir:

$$A_{l,m,m}=[2l-m-1]^m\,[l-m-1]^m:$$

valeur qui peut être présentée sous d'autres formes en considérant à part les deux cas de m pair et de m impair. En supposant $m=1$, $m=2$, on obtient

$$A_{l,1,1}=2\,(l-1)\,(l-2),\quad A_{l,2,2}=2\,(2l-3)\,(l-2)\,(l-3)\,(l-4):$$

valeurs qui servent à vérifier des résultats déjà trouvés.