100.

NOTE SUR LA THÉORIE DES HYPERDÉTERMINANTS.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLII. (1851), pp. 368–371.]

DANS la théorie dont il s'agit, je suis parvenu à un théorème qui pourra, à ce qu'il me paraît, conduire à des développements intéressants.

Je ne considère ici que le cas d'une fonction homogène à *deux variables*, et en me servant des nouveaux termes de M. Sylvester, je nomme *Covariant* d'une fonction donnée, toute fonction qui ne change pas de forme en faisant subir aux variables des transformations linéaires quelconques, et *Invariant* toute fonction des seuls coefficients qui a la propriété mentionnée.

Cela posé, soit U une fonction donnée quelconque, du degré n par rapport aux variables, et, comme à l'ordinaire, contenant des coefficients arbitraires a, b, c, &c. Soit Q un *covariant* quelconque (y compris le cas particulier où Q est un *invariant*) de la fonction U, s le degré de Q par rapport aux variables, r le degré de cette même fonction Q par rapport aux coefficients. En supposant que la fonction U ait un facteur θ^ν (où $\theta = lx + my$ est une fonction linéaire des variables), ou autrement dit, en supposant l'équation $U = \theta^\nu V$, je dis que le *covariant* Q contiendra ce même facteur θ élevé à la puissance $r\nu - \frac{1}{2}(rn - s)$.

En effet, en se rappelant la méthode dont je me suis servi dans la seconde partie de mon mémoire sur les Hyperdéterminants (t. XXX. de ce Journal, [16]) (je suppose que le lecteur ait ce mémoire sous les yeux), on verra que cette fonction Q, supposée, comme plus haut, du degré r par rapport aux coefficients, sera nécessairement de la forme

$$Q = \overline{12}^\alpha\, \overline{13}^\beta\, \overline{23}^\gamma \ldots\, U_1 U_2 \ldots\, U_r,$$

puisque les coefficients n'entrent dans Q que par les fonctions U_1, U_2, &c. Or Q étant du degré s par rapport aux variables, on obtient $s = rn - 2(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$, c'est à dire:

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = \tfrac{1}{2}(rn - s).$$

Cela posé, puisque $U = \theta^\nu V$, on aura de même $U_1 = \theta_1{}^\nu V_1$, $U_2 = \theta_2{}^\nu V_2$, &c. Les expressions $\overline{12}$, &c. qui entrent dans l'expression de Q contiennent ∂_{x_1}, ∂_{y_1}, &c.: symboles qui doivent être remplacés par $\partial_{x_1} + l\partial_{\theta_1}$, $\partial_{y_1} + m\partial_{\theta_1}$, &c. en supposant (comme il est permis) que les nouveaux symboles ∂_{x_1}, ∂_{y_1}, &c. ne se rapportent plus à $\theta_1{}^\nu V_1$, &c., mais seulement à V_1, &c. Cela donne

$$\begin{aligned}\overline{12} &= (\partial_{x_1} + l\partial_{\theta_1})(\partial_{y_2} + m\partial_{\theta_2}) - (\partial_{x_2} + l\partial_{\theta_2})(\partial_{y_1} + m\partial_{\theta_1})\\ &= \partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1} + (l\partial_{y_2} - m\partial_{x_2})\partial_{\theta_1} - (l\partial_{y_1} - m\partial_{x_1})\partial_{\theta_2};\end{aligned}$$

c'est à dire: $\overline{12}$ est une fonction linéaire par rapport à ∂_{θ_1}, ∂_{θ_2}, et il en sera de même pour les expressions analogues $\overline{13}$, $\overline{23}$, &c.: donc le nombre des différentiations par rapport aux quantités θ_1, θ_2, &c., prises ensemble, ne surpasse pas $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$, ou $\frac{1}{2}(rn - s)$. Or l'expression à différentier contient le facteur $\theta_1{}^\nu\theta_2{}^\nu \ldots \theta_r{}^\nu$; donc, en remettant, après les différentiations, θ au lieu de θ_1, θ_2, ... θ_r, la fonction Q contiendra le facteur θ élévé à la puissance $r\nu - \frac{1}{2}(rn - s)$.

Tout cela suppose implicitement que l'on ait $r\nu - \frac{1}{2}(rn - s) \overline{\gtrless} s$. Or le même raisonnement, modifié très peu, fait voir aussi que pour

$$r\nu - \tfrac{1}{2}(nr - s) > s,$$

ou plus simplement pour

$$r(\nu - \tfrac{1}{2}n) > \tfrac{1}{2}s,$$

la fonction Q doit s'évanouir d'elle-même, savoir en établissant entre les coefficients de U les relations qui expriment l'existence du facteur θ^ν. De là on tire le théorème suivant:

Étant donnée une fonction U du degré n, tout *covariant* du degré r par rapport aux coefficients et du degré s par rapport aux variables, s'évanouit en supposant que la fonction U ait un facteur θ pour lequel $r(\nu - \frac{1}{2}n) > \frac{1}{2}s$; et en particulier:

Un *invariant* quelconque de la fonction U s'évanouit en supposant que la fonction U ait un facteur θ^ν, pour lequel $\nu > \frac{1}{2}n$.

En mettant $n = 2m$ ou $2m + 1$, l'*invariant* s'évanouit en supposant que U ait le facteur θ^{m+1}.

Les conditions pour que la fonction U ait un tel facteur, se trouvent en égalant à zéro les coefficients différentiels de U du $m^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux variables x, y, et en éliminant ces variables.

Mais avant d'aller plus loin il convient d'entrer dans quelques détails de la théorie d'une telle élimination. Je prends l'exemple le plus simple, et je suppose que l'on ait à éliminer x, y des équations

$$\begin{aligned} ax + by &= 0,\\ bx + cy &= 0,\\ cx + dy &= 0.\end{aligned}$$

On est habitué à dire que ce système équivaut à *deux équations* entre les seuls coefficients: mais cela n'est juste que dans un sens qui manque de precision. Le système équivaut plutôt à *deux relations* entre les coefficients, et ces deux relations sont exprimées par les *trois équations*, $bd - c^2 = 0$, $bc - ad = 0$, $ac - b^2 = 0$. Il n'est pas vrai que deux de ces équations embrassent *nécessairement* la troisième. En effet, la première et la seconde équations sont satisfaites en écrivant $c=0$, $d=0$, mais ces valeurs sont absolument étrangères à la question, et ne satisfont pas à la troisième équation, de manière que toutes les trois équations sont nécessaires pour exprimer les relations entre les coefficients. C'est pourquoi je dis que ces trois équations sont des résultats *distincts* de l'élimination. Et de même, pour un système quelconque d'équations, le nombre des résultats distincts de l'élimination n'est pas généralement à beaucoup près si faible que le nombre des relations entre les coefficients. Qu'on veuille consulter sur ce sujet mon mémoire "On the order of certain systems of algebraical equations," *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IV. [1849] pp. 132—137 [77], et le mémoire de M. Salmon "On the Classification of curves of double curvature," t. V. [1850] pp. 23—46.

Je reviens à l'objet de cette note, et je suppose qu'en égalant à zéro les coefficients différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre de la fonction U, les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c. forment le système entier des résultats distincts de l'élimination. Un *invariant* quelconque I s'évanouira en supposant $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c. Il doit donc exister une équation telle que $\lambda I=\alpha P+\beta Q+\gamma R+\ldots$, où $\lambda, \alpha, \beta, \gamma\ldots$ sont des fonctions rationnelles et intégrales des coefficients. Mais de plus, la fonction λ doit être purement numérique, ou ce qui est le même, doit se réduire à *l'unité*, car autrement $I=0$ serait un résultat de l'élimination différent des résultats $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., et ces équations ne seraient plus le système entier des résultats distincts. Donc enfin: un *invariant* quelconque I sera exprimé par une équation telle que

$$I=\alpha P+\beta Q+\gamma R+\ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des fonctions intégrales et rationnelles des coefficients.

Les résultats que je viens d'obtenir s'accordent parfaitement avec ceux dans ma "Note sur les hyperdéterminants," t. XXXIV. [1847] pp. 148—152 [54]. En effet, j'y ai fait voir qu'en supposant qu'une fonction $ax^4+4bx^3y+6cx^2y^2+4dxy^3+ey^4$ ait un facteur $(\alpha x+\beta y)^3$, l'élimination des variables entre les équations

$$\begin{aligned} ax^2+2bxy+cy^2&=0,\\ bx^2+2cxy+dy^2&=0,\\ cx^2+2dxy+ey^2&=0, \end{aligned}$$

donne lieu aux équations $ae-4bd+3c^2=0$, $ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3=0$; et les fonctions égalées à zero sont en effet les seuls *invariants* de la fonction du quatrième ordre. J'ajoute que la théorie actuelle fait voir aussi que dans le cas dont il s'agit, la dérivée

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(cx^2+2dxy+ey^2)-(bx^2+2cxy+dy^2)^2,$$

ou son développement

$$(ac-b^2)x^4+2(ad-bc)x^3y+(ae+2bd-3c^2)x^2y^2+2(be-cd)xy^3+(ce-d^2)y^4,$$

se réduit (à un coefficient constant près) à $(\alpha x+\beta y)^4$: et au cas où la fonction donnée du quatrième ordre est supposée être un carré, cette fonction et la dérivée qui vient d'être écrite sont égales à un facteur constant près; resultat dont je me suis servi ailleurs.