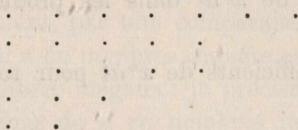


6.

PREUVE GRAPHIQUE* DU THÉORÈME D'EULER SUR LA PARTITION DES NOMBRES PENTAGONAUX.

[*Comptes Rendus*, xcvi. (1883), pp. 743—745.]

UNE partition quelconque de n peut être représentée par un assemblage de points uniformément distribués sur un plan et limités par deux lignes droites. Ainsi, par exemple, l'arrangement suivant :



sera la représentation graphique de la partition du nombre 22 dans les parties

7, 5, 5, 3, 2.

Mais, de plus, un tel arrangement de points peut être distribué dans un carré et deux groupes que je nommerai *latéral* et *inférieur*. Ainsi, l'arrangement écrit ci-dessus peut être décomposé dans un carré de neuf points, dans un groupe latéral de huit et dans un groupe inférieur de cinq points.

Considérons les partitions de n dans j parties *inégales*. Tous les arrangements de points qui correspondent à ces partitions peuvent être classifiés selon la valeur du côté du carré qui y correspond et que je nommerai θ . Alors, pour une valeur donnée de θ , le groupe latéral contiendra nécessairement ou θ ou $\theta - 1$ lignes de points, car autrement il y aurait des parties égales dans l'arrangement. Dans le premier cas, le nombre de colonnes dans ce groupe inférieur peut être un nombre quelconque, mais pas plus grand que θ ; dans le second cas, pas plus grand que $\theta - 1$. Donc, en se rappelant que le nombre de partitions de ν en θ parties inégales est le coefficient de x dans le développement de

$$\frac{x^{\frac{\theta^2 + \theta}{2}}}{1 - x \cdot 1 - x^2 \dots 1 - x^\theta}$$

et que le nombre de partitions de ν dans $j - \theta$ parties inégales et pas plus grandes que θ est le coefficient de $x^\nu a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$(1 + ax)(1 + ax^2) \dots (1 + ax^\theta),$$

on voit que, quand le nombre de lignes dans le groupe latéral est θ , le nombre

[* See p. 32 above.]

total d'arrangements de n dans j parties inégales qui correspondent à cette espèce de distribution sera le coefficient de $x^{n-\theta^2} a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$\frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2 \dots 1 + ax^{\theta} x^{\frac{\theta^2+\theta}{2}}}{1 - x \cdot 1 - x^2 \dots 1 - x^{\theta}}$$

De même, le nombre des partitions qui correspondent à la seconde hypothèse sera le coefficient de $x^{n-\theta^2} a^{j-\theta}$ dans le développement de

$$\frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2 \dots 1 + ax^{\theta-1} x^{\frac{\theta^2-\theta}{2}}}{1 - x \cdot 1 - x^2 \dots 1 - x^{\theta-1}}$$

En donnant à θ toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtiendra toutes les partitions de n dans j parties inégales. Les cas où θ excède j n'offrent rien d'exceptionnel, car, pour ces cas, le coefficient de $a^{j-\theta}$ dans les deux fonctions génératrices sera nul.

Or le coefficient de $x^{n-\theta^2} a^{j-\theta}$ dans chacune de ces deux fonctions est le même que le coefficient de $x^n a^j$ dans les produits qui résultent de leur multiplication par $x^{\theta^2} a^{\theta}$.

En comparant les coefficients de $x^n a^j$ pour toute valeur de n et i , on trouve donc

$$\begin{aligned} & (1 + xa)(1 + x^2a)(1 + x^3a) + \dots \\ &= 1 + \frac{1 + ax}{1 - x} x^2 a + \frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2}{1 - x \cdot 1 - x^2} x^7 a^2 + \dots \\ &+ \frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2 \dots 1 + ax^{\theta} x^{\frac{3\theta^2+\theta}{2}} a^{\theta} + \dots}{1 - x \cdot 1 - x^2 \dots 1 - x^{\theta}} \\ &+ xa + \frac{1 + ax}{1 - x} x^5 a^2 + \dots \\ &+ \frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2 \dots 1 + ax^{\theta-1} x^{\frac{3\theta^2-\theta}{2}} a^{\theta} + \dots}{1 - x \cdot 1 - x^2 \dots 1 - x^{\theta-1}} \end{aligned}$$

En mettant $a = -1$, on obtient ainsi

$$1 - x \cdot 1 - x^2 \cdot 1 - x^3 - \dots = 1 - x - x^2 - \dots + (-)^{\theta} \left(x^{\frac{3\theta^2-\theta}{2}} + x^{\frac{3\theta^2+\theta}{2}} \right) + \dots,$$

ce qui est le théorème d'Euler.

En réunissant les deux séries dans une seule, on obtient, pour le cas général,

$$\begin{aligned} & (1 + xa)(1 + x^2a)(1 + x^3a) + \dots \\ &= 1 + \frac{1 + ax^2}{1 - x} xa + \frac{1 + ax \cdot 1 + ax^4}{1 - x \cdot 1 - x^2} x^5 a^2 + \frac{1 + ax \cdot 1 + ax^2 \cdot 1 + ax^6}{1 - x \cdot 1 - x^2 \cdot 1 - x^3} x^{12} a^3 + \dots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation que j'ai donnée dans la Note précédente [p. 91].

Je dois dire que c'est M. Durfee, étudiant à Baltimore, qui, le premier (dans un tout autre problème), a fait usage du genre de décomposition d'une *assemblée régulière* de points dans un carré et deux groupes supplémentaires dont j'ai profité dans l'analyse précédente (voir *Johns Hopkins Circular*, [Vol. III. of this Reprint, pp. 661 ff.]).