19.

SUR UNE NOTE RÉCENTE DE M. D. ANDRÉ*.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 550, 551.]

Le théorème de M. André est une conséquence immédiate de la généralisation que j'ai donnée du théorème de Newton (*Arithmétique universelle*, 2e Partie, Ch. II.) sur les racines imaginaires des équations.

On verra, en consultant mon travail† sur ce sujet (*Proceedings of the London Mathematical Society*, No. 2), que si $u_0, u_1, u_2, \ldots u_m$ sont les coefficients d'une équation du degré m et si

$$G_r' = ru_r^2 - (r+1)\,\gamma_r\, u_{r-1}\, u_{r+1}$$

ou

$$\gamma_r = \frac{v+r-1}{v+r},$$

γ_r étant une quantité réelle quelconque qui n'est pas intermédiaire entre 0 et $-m$, l'équation aura nécessairement au moins autant de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_m$.

En faisant $v = -m$, on a le théorème de Newton ; en faisant $v = 1$, on voit qu'on peut prendre $G_r = u_r^2 - u_{r-1}\,u_{r+1}$. Conséquemment le théorème de M. André subsiste, quel que soit le signe de la quantité qu'il nomme α et quels que soient les signes des quantités qu'il nomme $u_0, u_1, \ldots, u_m$.

De plus, le théorème subsistera encore quand, outre ces modifications, au lieu de l'équation

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2},$$

on écrit

$$v_n = \alpha v_{n-1} + \beta v_{n-2}$$

ou

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m,$$

identiques avec

$$u_0,\quad \frac{u_1}{m},\quad \frac{u_2}{\frac{1}{2}(m\,.\,m-1)},\quad \frac{u_3}{\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,m(m-1)(m-2)},\ \ldots.$$

* *Comptes rendus*, séance du 18 février 1884.

[† Vol. II. of this Reprint, pp. 501, 507.]

Il y a encore une autre extension importante à ajouter, en considérant l'équation

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = A\alpha^x + B\beta^x + C\gamma^x,$$

dont j'ai donné une solution particulière dans l'*American Mathematical Journal*, Vol. IV. [Vol. III. of this Reprint, pp. 546, 633.]

Il est peut-être digne de remarque que si, dans la formule établie pour γ_r, on fait v infini, la règle calquée sur celle de Newton (mais plus générale) enseigne que, quels que soient a, b, c ou m, l'équation

$$a\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m}\right)$$
$$+ b\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^m}{1.2\ldots m}\right) + c = 0$$

ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles.