O inwolucyi punktów
na liniach tworzących powierzchni prostokreślnej skośnej.

Przez

Władysława Zajączkowskiego.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu matem.-przyr. d. 2 Marca 1896 r.

Wiadoma powszechnie, że płaszczyzny styczne do powierzchni skośnej w punktach, leżących na tej samej linii prostej tworzącej, dają pęk płaszczyzn jednokreślny z szeregiem punktów styczności. Również znane jest twierdzenie, że pary punktów na linii tworzącej, w których płaszczyzny styczne powierzchni skośnej są do siebie prostopadłe, tworzą inwolucyę eliptyczną, której punkt centralny, czyli środek, jest punktem linii zwężenia (strykcyjnej) tej powierzchni. Atoli, zdaje się, nie zauważono, że na linii tworzącej powierzchni skośnej, oprócz przerzeczonej inwolucyi eliptycznej, istnieje nieskończenie wiele inwolucyi hiperbolicznych, pozostających w ścisłym związku z ową inwolucyą eliptyczną, a mianowicie, że pary punktów na linii tworzącej, w których płaszczyzny styczne powierzchni skośnej leżą symetrycznie względem dwu płaszczyzn do siebie prostopadłych przez tę tworzącą przesuniętych, tworzą inwolucyę hiperboliczną, której punktami podwójnymi, czyli ogniskami, są punkta styczności owych dwu płaszczyzn do siebie prostopadłych, a więc punkty zamienne inwolucyi eliptycznej.

Istnienie tych inwolucyi hiperbolicznych spostrzegłem, traktując w bieżącym roku w Szkole politechnicznej teoryę analityczną powierzchni prostokreślnych, i dowodzę go w niniejszej pracy naprzód sposobem analitycznym, tak jak je wykryłem, a potem syntetycznym. Dowodu syntetycznego udzielił mi profesor Mieczysław Łazarski, gdym mu swe spostrzeżenie zakomunikował.

1. Przedstawienie analityczne powierzchni.

Powierzchnię można przedstawić analitycznie dwoma sposobami, albo zapomocą jednego równania między trzema spółrzędnemi punktu na tej powierzchni lub spółrzędnemi płaszczyzny stycznej do tej powierzchni, albo też zapomocą trzech równań, wyrażających trzy spółrzędne punktu powierzchni jako funkcye dwu parametrów zmiennych. Ten drugi sposób jest ogólniejszym od pierwszego i prowadzi do wzorów symetryczniejszych, aniżeli pierwszy, dlatego użyjemy go w tej pracy.

Znaczenie geometryczne tego sposobu, poraz pierwszy użytego przez Gaussa w Disquisitiones generales circa superficies curvas (Gauss Werke, t. IV. str. 219), jest nader proste. Jakoż niech będą dane trzy równania:

$$x = f\ (u,\ v),\ y = \varphi\ (u,\ v),\ z = \psi\ (u,\ v), \tag{1}$$

wyrażające spółrzędne prostokątne punktu x, y, z jako funkcye dwu parametrów u i v. Dając na u i na v wszelkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymamy ∞^2 punktów, których ogół tworzy powierzchnię. Jeżeli przyjmiemy, że parametr u posiada wartość stałą, zresztą jakąkolwiek, natenczas równania (1) dadzą nam ∞ punktów, odpowiednio do nieskończenie wielu wartości, jakie dać można na parameter v, a więc będą przedstawiały pewną linię, której równania we spółrzędnych prostokątnych otrzymamy, rugując v między równaniami (1). Każdej innej wartości na u odpowiada inna linia, a dając na u wszelkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymamy nieskończenie wiele, czyli układ linii u.

Podobnie, gdy parametr v posiada wartość stałą, będą równania (1) przedstawiały inną nieskończoność punktów, czyli inną linię, a dając na v wszelkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$, otrzymamy drugą nieskończoność, czyli drugi układ linii v. A zatem, przedstawiając powierzchnię przez równania (1), każdy punkt na powierzchni będzie punktem dwu linii na tej powierzchni, z których jedna należy do układu u (odpowiadających różnym wartościom na u), a druga do układu v.

Zauważmy jeszcze, że założywszy w (1) $f\ (u,\ v) = u$, $\varphi\ (u,\ v) = v$, mieć będziemy równanie powierzchni

$$z = \psi\ (x,\ y),$$

we spółrzędnych prostokątnych punktu, względem jednej z nich rozwiązane.

II. Spółrzędne linii prostej.

Jeżeli przez punkt (a, b, c) poprowadzimy prostą, której dostawy kierunkowe są (l, m, n), to tę prostą przedstawia się analitycznie zapomocą dwu równań

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}, \tag{2}$$

albo zapomocą trzech równań

$$x = lu + a,\ y = mu + b,\ z = nu + c, \tag{2a}$$

gdzie u oznacza zmienną odległość punktu bieżącege prostej (x, y, z) od punktu stałego (a, b, c).

W równaniach (2) zachodzi sześć ilości stałych: l, m, n, a, b, c, od których wartości zależy położenie prostej. Zdawałoby się zatem, że chcąc w zupełności wyznaczyć położenie prostej, potrzeba ją poddać tylu warunkom, aby otrzymać sześć równań między temi sześcioma ilościami stałemi; wszelako można okazać, że cztery równania do tego celu wystarczą.

Jakoż, sprowadźmy równania (2), łącząc po dwa stosunki, do postaci:

$$\left.\begin{aligned} mz - ny &= mc - nb,\\ nx - lz &= na - lc,\\ ly - mx &= lb - ma, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

z których każde jest bezpośredniem następstwem dwu pozostałych, i połóżmy w tych równaniach naprzód $x=o$, potem $y=o$ a nakoniec $z=o$, znajdziemy dla punktów, w których prosta tych równań przebija płaszczyzny yz, zx, xy, następujące spółrzędne:

$$x = o,\ y = \frac{lb - ma}{l},\ z = -\frac{na - lc}{l},$$

$$y = o,\ z = \frac{mc - nb}{m},\ x = -\frac{lb - ma}{m},$$

$$z = o,\ x = \frac{na - lc}{n},\ y = -\frac{mc - nb}{n}.$$

Stąd czytamy, że położenie prostej równań (2) zależy wprawdzie od sześciu ilości, a mianowicie od trzech dostaw kierunkowych

$$l,\ m,\ n$$

i nadto od trzech ilości

$$\lambda = mc - nb,\ \mu = na - lc,\ \nu = lb - ma, \tag{4}$$

że jednak między temi ilościami zachodzą dwa związki; mamy bowiem widocznie

(5) $$l\lambda + m\mu + n\nu = o,$$

a nadto między trzema dostawami kierunkowemi zachodzi związek

(6) $$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

A zatem, jeżeli cztery z tych ilości są dane, wtedy pozostałe dwie można wyznaczyć zapomocą równań (5) i (6), a następnie a, b, c zapomocą równań (4).

Ilości l, m, n, λ, μ, ν wprowadził do geometryi analitycznej Plücker (w Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf der Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868) pod nazwą spółrzędnych linii prostej.

Wyznaczmy n. p. linię prostą, z tego warunku, aby ona przecinała cztery dane proste

(7) $$\frac{x-a_i}{l_i} = \frac{y-b_i}{m_i} = \frac{z-c_i}{n_i},\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Warunek, aby prosta równań (2) przecinała prostą równań (7), wyraża się pod postacią wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a-a_i, & l, & l_i \\ b-b_i, & m, & m_i \\ c-c_i, & n, & n_i \end{vmatrix} = o,$$

który się rozkłada na sumę dwu wyznaczników

$$\begin{vmatrix} a, & l, & l_i \\ b, & m, & m_i \\ c, & n, & n_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_i, & l_i, & l \\ b_i, & m_i, & m \\ c_i, & n_i, & n \end{vmatrix} = o,$$

albo wreszcie, rozwinąwszy oba wyznaczniki podług elementów trzeciej kolumny i wprowadziwszy znakowania (4), przez

(8) $$l_i\lambda + m_i\mu + n_i\nu + \lambda_i l + \mu_i m + \nu_i n = o,\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

gdzie l_i, m_i, n_i, λ_i, μ_i, ν_i są dane spółrzędne prostej (7).

Dołączywszy do czterech równań (8) dwa równania (5) i (6), mieć będziemy sześć równań, z których wyznaczymy spółrzędne linii prostej, cztery dane proste przecinającej. Następnie z równań (4) wyznaczymy a, b, c.

Równania (8) są względem niewiadomych l, m, n, λ, μ, ν stopnia pierwszego, gdy tymczasem równanie (5) jest stopnia drugiego. Stąd też na niewiadome otrzymamy dwa układy wartości, co dowodzi, że istnieją dwie proste, przecinające cztery dane proste. Wprawdzie także równanie (6) jest stopnia drugiego, wszakże ta okoliczność pociąga za sobą tylko ten skutek, że na dostawy kierunkowe l, m, n dla każdej z dwu prostych otrzymamy dwa układy wartości różniące się jedynie znakami, a więc należące do dwu przeciwnych kierunków tej prostej.

III. Powierzchnie prostokreślne.

Jeżeli warunki, jakim się poddaje linię prostą, prowadzą tylko do trzech równań między jej spółrzędnemi, wówczas istnieje ∞ prostych, dopełniających tych warunków; albowiem spółrzędne prostej, których spółrzędne czynią zadość trzem równaniom [oprócz równań (5) i (6)] wyznaczymy, gdy wartość jednej z nich dowolnie naznaczymy. Ta nieskończoność prostych utworzy pewną powierzchnię, którą nazywamy powierzchnią prostokreślną.

Przedstawienie analityczne powierzchni prostokreślnej w postaci Gaussowej znajdziemy zapomocą uwagi następującej. Niech

$$x = lu + a,\ y = mu + b,\ z = nu + c \tag{9}$$

będą równania prostej tworzącej. Zapomocą trzech równań warunkowych w połączeniu z dwoma równaniami (5) i (6) wyznaczymy wszystkie spółrzędne tej prostej przez jednę z nich, lub, gdy tę jednę przyrównamy do funkcyi dowolnej parametru v, wszystkie spółrzędne jako funkcye jednego parametru v, poczem przy pomocy równań (4) wyznaczymy także a, b, c jako funkcye tego parametru.

Wstawiwszy te wartości na l, m, n, a, b, c w (9), mieć będziemy spółrzędne x, y, z punktu bieżącego na którejkolwiek prostej tworzącej powierzchni prostokreślnej, wyrażone jako funkcye dwu parametrów u i v, czyli mieć będziemy Gaussowe przedstawienie analityczne powierzchni prostokreślnej.

Gdy v = const, równania (9) przedstawiają układ prostych tworzących powierzchni prostokreślnej; a gdy u = const., równania (9) przedstawiają układ pewnych krzywych na tej powierzchni, przecinających wszystkie jej tworzące.

Jako przykład weźmy pod uwagę hiperboloidę jednopowłokową. Wiadomo, że tę powierzchnię można utworzyć dwojakim sposobem, poruszając linię prostą, tak aby ona przecinała trzy dane proste skośne, t. j. takie, że żadne dwie nie leżą na jednej płaszczyźnie, że zatem na hiperboloidzie jednopowłokowej leżą dwa układy prostych tworzących, takie że proste tego samego układu nie przecinają się, gdy tymczasem każda prosta jednego układu przecina każdą prostą drugiego układu. Te dwa układy prostych tworzących można bezpośrednio otrzymać z równania osiowego hiperboloidy jednopowłokowej

$$\text{(a)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

jakoż widoczna, że wartości na x, y, z, które czynią zadość jednocześnie dwu równaniom:

$$\text{(b)} \qquad \frac{x}{a} = \cos v + \frac{z}{c} \sin v \ \text{ i } \ \frac{y}{b} = \sin v - \frac{z}{c} \cos v,$$

albo dwu równaniom:

$$\text{(c)} \qquad \frac{x}{a} = \cos v - \frac{z}{c} \sin v, \ \frac{y}{b} = \sin v + \frac{z}{c} \cos v,$$

uczynią zadość także równaniu (a). A zatem proste równań (b) przy zmiennem v przedstawiają jeden układ tworzących, a równania (c) przedstawiają drugi układ tworzących hiperboloidy jednopowłokowej równania (a).

Sprowadzając równania (b) i (c) do postaci

$$\frac{x - a \cos v}{a \sin v} = \frac{y - b \sin v}{-b \cos v} = \pm \frac{z}{c}$$

gdzie znak (+) odnosi się do pierwszego układu, a znak (—) do drugiego układu tworzących, i równając do u napisane trzy stosunki równe, mieć będziemy:

$$\text{(d)} \qquad x = a \sin v . u + a \cos v, \ y = -b \cos v . u + b \sin v, \ z = cu,$$

albo

$$\text{(e)} \qquad x = a \sin v . u + a \cos v, \ y = -b \cos v . u + b \sin v, \ z = -cu$$

jako przedstawienie analityczne hiperboloidy jednopowłokowej.

Łatwo spostrzec, że ilości ($a \cos v$, $b \sin v$, o) są spółrzędnemi punktu elipsy szyjnej, t. j. elipsy równań

$$z = o, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

przyczem v oznacza kąt mimośrodowy punktu na elipsie szyjnej; ilości zaś $a \sin v, - b \cos v, \pm c$ są proporcyonalne do dostaw kierunkowych tworzącej równań (d) lub (e) (przy stałem v), same zaś dostawy kierunkowe są

$$l = \frac{a \sin v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + c^2}}, \ m = \frac{- b \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + c^2}},$$

$$n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + c^2}},$$

gdzie znowu znak (+) odnosi się do układu (d), a znak (—) do układu (e).

IV. Płaszczyzna styczna powierzchni prostokreślnej.

Równanie płaszczyzny stycznej powierzchni prostokreślnej równań:

$$x = lu + a, \ y = mu + b, \ z = nu + c, \tag{9}$$

w których ilości l, m, n, a, b, c są funkcyami parametru v, znajdziemy, jak następuje.

Jeżelibyśmy z dwu pierwszych równań wyznaczyli parametry u i v jako funkcye zmiennych x i y i wartości otrzymane podstawili w trzecie równanie, wypadłoby równanie powierzchni kształtu

$$z = f(x, y).$$

Ponieważ płaszczyznę styczną do powierzchni tego równania w punkcie (x, y, z) przedstawia się przez równanie:

$$-p(X-x) - q(Y-y) + (Z-z) = o, \tag{10}$$

gdzie X, Y, Z oznaczają spółrzędne punktu bieżącego płaszczyzny stycznej, a p i q są wartościami pochodnych cząstkowych

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

w punkcie styczności. Potrzeba zatem znaleźć wartości na p i q i te wartości w (10) podstawić.

Ażeby otrzymać p, różniczkujemy cząstkowo równania (9) względem x, uważając ilości z, u i v za funkcye dwu zmiennych niezależnych x i y. Znajdziemy tym sposobem trzy równania:

$$1 = l\frac{\partial u}{\partial x} + (l'u + a')\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = m\frac{\partial u}{\partial x} + (m'u + b')\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$p = n\frac{\partial u}{\partial x} + (n'u + c')\frac{\partial v}{\partial x},$$

w których $l' = \frac{dl}{dv}$, $m' = \frac{dm}{dv}$, $n' = \frac{du}{dv}$, $a' = \frac{da}{dv}$, $b' = \frac{db}{dv}$, $c' = \frac{dc}{dv}$.

Rugowanie pochodnych cząstkowych $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$ między temi trzema równaniami daje pierwszy z dwu wzorów następujących:

$$(11)\quad \begin{cases} -p = \dfrac{(mn' - nm')\,u + (mc' - nb')}{(lm' - ml')\,u + (lb' - ma')}, \\ -q = \dfrac{(nl' - ln')\,u + (na' - lc')}{(lm' - ml')\,u + (lb' - ma')}; \end{cases}$$

drugi otrzymamy tak samo, różniczkując cząstkowo równania (9) względem zmiennej y.

Z (10) i (11) wypływa zatem następujące równanie płaszczyzny stycznej powierzchni prostokreślnej równań (9) w punkcie (x, y, z):

$$(12)\quad \begin{aligned} &[(mn' - nm')\,u + (mc' - nb')]\;(X - x) \\ &+ [(nl' - ln')\,u + (na' - lc')]\;(Y - y) \\ &+ [(lm' - ml')\,u + (lb' - ma')]\;(Z - z) = o. \end{aligned}$$

Z tego równania czytamy: 1-e że płaszczyzna styczna powierzchni prostokreślnej zawiera w sobie tę tworzącą, która przechodzi przez punkt styczności; albowiem, jeżeli spółczynniki równania (12), które są proporcyonalne do dostaw kierunkowych normalnej, pomnożymy odpowiednio przez dostawy kierunkowe l, m, n tworzącej, to suma tych trzech iloczynów przywiedzie się tożsamościowo do zera, jakąkolwiek wartość miałby parameter u, gdyż tak

$$(13)\quad l\,(mn' - nm') + m\,(nl' - ln') + n\,(lm' - ml') = o,$$

jakoteż

$$(14)\quad l\,(mc' - nb') + m\,(na' - lc') + n\,(lb' - ma') = o.$$

2-re że płaszczyzna styczna w każdym innym punkcie tej samej tworzącej jest — mówiąc w ogólności — coraz inna, że przeto płaszczyzny styczne powierzchni prostokreślnej w punktach tej samej tworzącej dają pęk płaszczyzn, mających za oś tę tworzącą; albowiem spółczynniki w równaniu płaszczyzny stycznej (12) zależą od odległości u punktu styczności (x, y, z) od punktu (a, b, c) tworzącej, na której ten punkt styczności leży.

Wypowiadając tę drugą własność płaszczyzny stycznej powierzchni prostokreślnej, użyliśmy zwrotu „mówiąc w ogólności", gdyż zachodzą przypadki, w których płaszczyzna styczna w każdym punkcie tejsamej tworzącej powierzchni prostokreślnej jest zawsze tąsamą płaszczyzną. Rozbiorem tych przypadków szczególnych zajmiemy się w artykule następującym.

V. Powierzchnie prostokreślne rozwijalne.

Powierzchnie prostokreślne, które w każdym punkcie tworzącej mają tęsamą płaszczyznę styczną, nazywają się powierzchniami rozzwijalnemi, dlatego że, jak wiadomo, można je bez sfałdowania i bez rozdarcia rozwinąć na płaszczyźnie.

Ażeby powierzchnia prostokreślna była rozwijalną, spółczynniki w równaniu płaszczyzny stycznej (12) powinny być niezależnymi od parametru u. Zachodzi to w trzech przypadkach następujących:

1-e. Jeżeli $l'=o$, $m'=o$, $n'=o$, a więc gdy dostawy kierunkowe każdej tworzącej są stałemi, od parametru v niezależnemi, jeżeli zatem wszystkie proste tworzące są równoległe, t. j. jeżeli powierzchnia prostokreślna jest powierzchnią walcową.

W tym przypadku wyrażenia (11) przywodzą się do

$$p=-\frac{mc'-nb'}{lb'-ma'},\quad q=-\frac{na'-lc'}{lb'-ma'},$$

skąd, wskutek (14), wypływa

$$lp+mq=n, \tag{15}$$

równanie różniczkowe wszystkich powierzchni walcowych, których tworzące mają kierunek dany (l, m, n).

2-ie. Jeżeli $a'=o$, $b'=o$, $c'=o$, a więc jeżeli wszystkie tworzące przechodzą przez tensam punkt stały (a, b, c), t. j. jeżeli powierzchnia prostokreślna jest powierzchnią stożkową.

W tym przypadku wyrażenia (11) przywodzą się do

$$p=-\frac{mn'-nm'}{lm'-ml'},\quad q=-\frac{nl'-ln'}{lm'-ml'},$$

skąd, wskutek (13), wypływa

$$lp+mq=n,$$

a że wedle (9)

$$\frac{l}{x-a}=\frac{m}{y-b}=\frac{n}{z-c},$$

więc

$$(x-a)\,p+(y-b)\,q=z-c. \tag{16}$$

Jest to równanie różniczkowe wszelkich powierzchni stożkowych, mających wierzchołek w punkcie danym (a, b, c).

3-cie. Jeżeli

$$\frac{l'}{a'}=\frac{m'}{b'}=\frac{n'}{c'}\ (=k);$$

albowiem wtedy wyrażenia (11) można przywieść do

$$(17)\quad \begin{cases} p = -\dfrac{mc' - nb'}{lb' - ma'} \text{ lub } = -\dfrac{mn' - nm'}{lm' - ml'}, \\ q = -\dfrac{na' - lc'}{lb' - ma'} \text{ lub } = -\dfrac{nl' - ln'}{lm' - ml'}, \end{cases}$$

a więc p i q będą niezależnemi od parametru u.

Otrzymane wartości na p i q są funkcyami samego parametru v, którego różne wartości odpowiadają różnym tworzącym. Jeżeli przeto między równaniami (12) wyrugujemy ten parameter v, otrzymamy związek

$$p = \varphi\ (q)$$

utrzymujący się dla wszystkich tworzących, czyli ważny dla wszystkich punktów jakiejkolwiek powierzchni rozwijalnej tego trzeciego rodzaju.

Różniczkujmy ostatnie równanie cząstkowo raz względem x, drugi raz względem y. Kładąc, jak zwyczajnie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{d^2 z}{dx dy} = s,\ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

otrzymamy

$$r = \varphi'\ (q)\ s \text{ i } s = \varphi'\ (q)\ t,$$

skąd, po wyrugowaniu funkcyi $\varphi'\ (q)$, wypada

$$(18)\quad rt - s^2 = o,$$

równanie różniczkowe wszelkich powierzchni rozwijalnych tego trzeciego rodzaju.

Łatwo okazać, że w tym przypadku każda tworząca przecina tworząca po niej następującą, t. j. tę, której odpowiada wartość $v + dv$ na parameter v. Jakoż rownania tworzącej, która następuje bezpośrednio po tworzącej (9) są

$$(9a)\quad \begin{cases} x = (l + l' dv)\, u + (a + a' dv), \\ y = (m + m' dv)\, u + (b + b' dv), \\ z = (n + n' dv)\, u + (c + c' dv), \end{cases}$$

te zaś równania, wskutek równań (9), gdy istotnie przecięcie ma miejsce, przywodzą się do:

$$l' u + a' = a,\ m' u + b' = o,\ n' u + c' = o.$$

A zatem, jeżeli się te dwie tworzące przecinają, wówczas trzy ostatnie równania dają tę samą wartość na u, t. j.

$$(10)\quad \frac{a'}{l'} = \frac{b'}{m'} = \frac{c'}{n'} = -u.$$

Otrzymaliśmy więc warunki na początku ustępu przywiedzione. Powierzchnię rozwijalną w tym trzecim przypadku nazywamy r o z w ijalną w ścisłem tego słowa znaczeniu. Różni się ona od powierzchni walcowych i stożkowych zasadniczo tem, że gdy w tamtych wszystkie tworzące przecinają się w jednym punkcie, nieskończenie odległym w razie powierzchni walcowej, a znajdującym się w odległości skończonej w razie powierzchni stożkowej, to w tej szereg punktów, w których każda tworząca przecina tę, która po niej następuje, tworzy pewną linię, tak zwaną krawędź zwrotu powierzchni rozwijalnej, której równania otrzymamy, rugując u z równań (9) zapomocą (19), a następnie między tak otrzymanemi równaniami

$$x=\frac{al'-a'l}{l'},\ y=\frac{bm'-b'm}{m'},\ z=\frac{cn'-c'n}{n'} \tag{20}$$

rugując parametr v.

Ponieważ nie jest naszem zadaniem wyczerpujący wykład teoryi powierzchni prostokreślnych, więc pomijamy inne własności powierzchni rozwijalnych, a przystępujemy do wykazania pewnych własności powierzchni prostokreślnych nierozwijalnych. Ażeby jednak następnie nie przerywać toku wykładu, wyjaśnimy wprzódy niektóre pojęcia geometryi nowszej, jakiemi operować będziemy.

VI. Jednokreślność i inwolucya.

Powiadamy, że dwa szeregi punktów $A, B, C, D,\ldots$ i $A_1, B_1, C_1, D_1\ldots$, położone na tej samej prostej (lub na dwu różnych prostych) są jednokreślne, jeżeli każdemu punktowi jednego szeregu odpowiada jeden punkt drugiego szeregu i jeżeli między odległościami dwu odpowiadających sobie pnnktów obu szeregów, rachowanemi od dowolnie obranego początku (lub od dowolnie obranych początków), zachodzi związek stopnia 1-go tak względem jednej, jakoteż względem drugiej odległości, t. j. związek kształtu:

$$axx_1+bx+cx_1+d=o, \tag{21}$$

w którym x i x_1 oznaczają odległości dwu odpowiadających sobie punktów obu szeregów, zaś a, b, c, d są spółczynniki stałe.

Dwa szeregi punktów jednokreślne $A, B, C, D,\ldots$ i $A_1, B_1, C_1, D_1,\ldots$ posiadają tę własność, że stosunek podwójnego podziału czterech punktów (którychkolwiek) jednego szeregu jest równy stosunkowi podwójnego podziału czterech punktów drugiego szeregu, które tamtym odpowiadają, t. j. że

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{A_1C_1}{C_1B_1}:\frac{A_1D_1}{D_1B_1}.$$

Jakoż, jeżeli x, y, z, u są odległości punktów A, B, C, D od pewnego początku, a x_1, y_1, z_1, u_1 są odległości punktów A_1, B_1, C_1, D_1, które tamtym odpowiadają, od tego samego lub od innego początku, wówczas wskutek związku jednokreślności (21)

$$x_1 = -\frac{bx+d}{ax_1+c}, \quad y_1 = -\frac{by+d}{ay+c},$$

$$z_1 = -\frac{bz+d}{az+c}, \quad u_1 = -\frac{bu+d}{au+c},$$

skąd wypływa

$$\frac{z_1-x_1}{y_1-z_1} : \frac{u_1-x_1}{y_1-u_1} = \frac{z-x}{y-z} : \frac{u-x}{y-u}.$$

Jeżeli oba szeregi jednokreślne leżą na tej samej prostej (podstawie) i jeżeli między odległościami odpowiadających sobie punktów, rachowanemi od tego samego początku zachodzi związek stopnia 1-go i oraz symetryczny względem obu odległości

$$ax x_1 + b(x + x_1) + c = o, \tag{22}$$

powiadamy wówczas, że pary odpowiadających sobie punktów tych dwu szeregów pozostają w inwolucyi (kwadratowej).

Odpowiadające sobie punkty są wtedy zamienne, t. j. jeżeli punktowi A, uważanemu za punkt pierwszego szeregu, odpowiada punkt A_1 w drugim szeregu, to na odwrót punktowi A_1, uważanemu za punkt pierwszego szeregu, odpowiada punkt A w drugim szeregu. Jakoż w (22) wypływa

$$x_1 = -\frac{bx+c}{ax+b} \text{ jakoteż nawzajem } x = -\frac{bx_1+c}{ax_1+b}.$$

Zamiast więc mówić o dwu szeregach punktów jednokreślnych na jednej prostej, pozostających w inwolucyi, mówi się o szeregu par punktów, tworzących inwolucyę.

Jeżeli początek, od którego liczy się odległości punktów szeregu inwolucyjnego, przeniesiemy do punktu α (t. j. znajdującego się w odległości $= \alpha$ od pierwotnego początku), natenczas między odległościami pary punktów zamiennych zachodzić będzie związek

$$a(x+\alpha)(x_1+\alpha) + b(x + x_1 + 2\alpha) + c = 0;$$

a gdy na wyznaczenie α przyjmiemy

$$a\alpha + b = o, \text{ skąd } \alpha = -\frac{b}{a}, \tag{23}$$

wówczas wypadnie

$$x x_1 = -\frac{ac - b^2}{a}. \tag{24}$$

Z tego wzoru czytamy, że iloczyn odległości pary punktów zamiennych inwolucyi od punktu α, wyznaczonego równaniem (23) jest stały, t. j. dla wszystkich par posiada tęsamą wartość. Tak wyznaczony punkt α zowie się punktem centralnym albo środkiem inwolucyi.

Punkt α_1 zamienny z punktem centralnym α jest punktem nieskończenie odległym; albowiem wedle (22)

$$\alpha_1 = -\frac{b\alpha + c}{a\alpha + b} = \pm\infty, \text{ wskutek (23).}$$

Możemy zawsze przyjąć, że spółczynnik a w równaniu (22) posiada wartość dodatnią. W takim razie wypływa z wzoru (24)

$$xx_1 < 0, \text{ gdy } ac - b^2 > 0, \text{ a } xx_1 > 0, \text{ gdy } ac - b^2 < 0.$$

W pierwszym przypadku, t. j. kiedy między spółczynnikami równania inwolucyjnego (22) zachodzi taki związek, że $ac - b^2 > 0$, inwolucya zowie się eliptyczną, a jeżeli $ac - b^2 < 0$, inwolucya zowie się hiperboliczną.

A zatem, w inwolucyi eliptycznej leżą punkty zamienne po przeciwnych stronach punktu centralnego, a w inwolucyi hiperbolicznej leżą one z tej samej strony punktu centralnego.

W inwolucyi (kwadratowej) par punktów istnieją dwa punkty podwójne, t. j. takie, że każdy z nich jest zamienny z sobą samym. Jakoż, jeżeli w równaniu inwolucyjnem położymy $x_1 = x$, wypadnie równanie stopnia 2-go

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \tag{25}$$

którego pierwiastki wyznaczają odległości tych dwu punktów podwójnych od przyjętego początku.

Te dwa punkty podwójne, zwane także ogniskami inwolucyi, są urojone lub rzetelne, stósownie do tego, czy inwolucya jest eliptyczną, czy też hiperboliczną; albowiem w pierwszym przypadku pierwiastki równania (25) są urojone, a w drugim są one rzetelne i różne.

Podstawiwszy także w równaniu (24) $x_1 = x$, otrzymamy

$$x^2 = -\frac{ac - b^2}{a}, \text{ skąd } x = \pm\sqrt{-\frac{ac - b^2}{a}},$$

skąd czytamy, że punkty podwójne inwolucyi hiperbolicznej leżą po obu stronach punktu centralnego w równych od tegoż odległościach. Oznaczmy przez F i F_1 te punkty podwójne.

Para punktów podwójnych jest harmonicznie sprzężona względem każdej pary punktów zamiennych n. p. A i A_1, t. j.

$$\frac{AF}{FA_1} : \frac{AF_1}{F_1A_1} = -1.$$

Jakoż skoro punkty zamienne z punktami podwójnymi są te punkty same, więc stosunek podwójnego podziału czterech punktów (A, F, F_1, A_1) musi być równy stosunkowi podwójnego podziału czterech punktów z tamtymi zamiennych (A_1, F, F_1, A), t. j.

$$\frac{AF_1}{F_1F} : \frac{AA_1}{A_1F} = \frac{A_1F_1}{F_1F} : \frac{A_1A}{AF};$$

a że $AA_1 = A_1A$, więc, po opuszczeniu odcinków równych po obu stronach równości, wypada stąd

$$AF_1 . A_1F = -A_1F_1 . AF, \text{ a przeto } \frac{AF}{FA_1} : \frac{AF_1}{F_1A_1} = 1,$$

co było do okazania.

Przypomnieć należy jeszcze twierdzenie Pappusa, podług którego pęk promieni, wychodzących z jednego punktu, wierzchołka pęku, jest jednokreślny z szeregiem punktów, w jakich poprzeczna jakakolwiek przecina te promienie. A mianowicie, jeżeli a, b, c, d są cztery promienie pęku, a A, B, C, D punkty, w których poprzeczna te promienie przecina i jeżeli przez (a, b), (c, b)... oznaczymy kąty między promieniami a i c, c i b..., brane w kierunku od pierwszego z promieni do drugiego te kąty zawierającego, wówczas

$$\frac{\sin (a, c)}{\sin (c, b)} : \frac{\sin (a, d)}{\sin (d, b)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

To samo twierdzenie stosuje się także do pęku płaszczyzn wychodzących z tej samej krawędzi, osi pęku.

VII. Powierzchnie skośne. Inwolucya eliptyczna na tworzących powierzchni skośnych.

Powierzchnie prostokreślne nierozwijalne nazywamy skośnemi (fr. gauche, ang. skew) albo wichrowatemi (niem. windschief). Jej równania są następujące:

(9) $$x = lu + a, \; y = mu + b, \; z = nu + c,$$

w których — jak już wiadomo — u jest jednym parametrem, a l, m, n, a, b, c są pewnemi funkcyami drugiego parametru v. Zarazem, jeżeli powierzchnia tych równań ma być skośną, a więc, jeżeli się sąsiednie proste tworzące nie mają przecinać, pochodne rzeczonych funkcyi nie powinny czynić zadość warunkom:

$$\frac{l'}{a'}=\frac{m'}{b'}=\frac{n'}{c'}.$$

Założeniu $v=\text{const}$ odpowiadają tworzące, a założeniu $u=\text{const}$ odpowiadają pewne krzywe na powierzchni skośnej, przecinające wszystkie tworzące.

Płaszczyznę styczną do powierzchni równań (9) przedstawiliśmy przez równanie:

$$\begin{aligned}(12)\qquad & [(mn'-nm')\,u+(mc'-nb')]\,(X-x)\\ &+[(nl'-ln')\,u+(na'-lc')]\,(Y-y)\\ &+[(lm'-ml')\,u+(lb'-ma')]\,(Z-z)=0.\end{aligned}$$

Aby wyznaczyć położenie tej płaszczyzny, trzeba wziąć pod uwagę, że płaszczyzna styczna każdej powierzchni przecina tę powierzchnię w linii krzywej (rzetelnej albo urojonej), dla której punkt styczności jest punktem podwójnym (węzłem, punktem zwrotu albo punktem odosobnionym), że przeto na płaszczyźnie stycznej przez punkt styczności przechodzą dwie proste, tak zwane styczne przegięcia, (rzetelne i różne, rzetelne i razem się schodzące, albo urojone), które z powierzchnią mają nie tylko dwa, ale co najmniej trzy punkta spólne. Owoż jeżeli ma się do czynienia z powierzchnią skośną, to jedną styczną przegięcia jest tworząca przez punkt styczności przechodząca, a drugą znajdziemy, gdy z punktu styczności wyprowadzimy prostą, która przecina dwie tworzące bezpośrednio następujące po tej, na której leży punkt styczności; albowiem ta prosta, mając z powierzchnią trzy po sobie następujące punkta spólne, będzie drugą styczną przegięcia. Że taka prosta istnieje, wynika stąd, że się sąsiednie tworzące powierzchni skośnej nie przecinają, a więc jeżeli przez punkt styczności i przez każdą z dwu bezpośrednio następujących tworzących przesuniemy po płaszczyznie, to te dwie płaszczyzny muszą się przeciąć, a ich linia przecięcia będzie żądaną prostą. Płaszczyzna tych dwu stycznych przegięcia będzie płaszczyzną styczną powierzchni skośnej.

Celem uproszczenia dalszego rachunku, weźmy tworzącą, która przechodzi przez punkt styczności (odpowiadającą pewnej wartości na parameter v), za oś z-ów, a płaszczyznę styczną w początku spółrzędnych O za płaszczyznę zx. Ponieważ równania tworzącej uważanej, przy zrobionem założeniu, przywodzą się do

$$x=0,\ y=0,\ z=u, \tag{26}$$

a przeto $a=b=c=0$, $l=m=0$, $n=1$, (po wstawieniu owej wartości na v), więc wskutek tego równanie płaszczyzny stycznej (12) powierzchni skośnej przywiedzie się do:

$$(m'u+b')\ X-(l'u+a')\ Y=0;$$

a że dla $z=u=0$ to równanie musi się przywieść do $Y=0$, a przeto musi być także $b'=0$, więc równaniom płaszczyzny stycznej powierzchni skośnej w punkcie z [1]) będzie:

(27) $$m'zX-(l'z+a')\ Y=0.$$

Oznaczmy przez φ kąt, jaki ta płaszczyzna czyni z płaszczyzną zx, mamy wtedy:

(28) $$tg\,\varphi=\frac{m'z}{l'z+a'}.$$

Odetnijmy następnie na osi x-ów, począwszy od początku spółrzędnych, długość$=1$, i w końcowym punkcie tego odcinka wystawmy prostą γ prostopadłą do osi x-ów i leżącą na płaszczyznie xy. Jeżeli przez ζ oznaczymy punkt, w którym ta prosta γ przecina ślad na xy płaszczyzny stycznej w punkcie z i zarazem odległość punktu ζ od osi x-ów, będzie wówczas $tg\,\varphi=\zeta$, wskutek czego równanie (28) daje

(29) $$\zeta=\frac{m'z}{l'z+a'},\ \text{czyli}\ l'z\zeta-m'z+a'\zeta=0.$$

Stąd czytamy, że szereg punktów styczności z na osi z-ów i szereg odpowiadających im punktów ζ na prostej γ są szeregami jednokreślnymi. A że szereg punktów ζ jest jednokreślnym z pękiem płaszczyzn stycznych w punktach z odpowiadających punktom ζ, więc także szereg punktów styczności z będzie jednokreślnym z pękiem płaszczyzn stycznych. Mamy zatem twierdzenie:

P ę k p ł a s z c z y z n s t y c z n y c h p o w i e r z c h n i s k o ś n e j w p u n k t a c h t e j s a m e j t w o r z ą c e j j e s t j e d n o k r e ś l n y z s z e r e g i e m p u n k t ó w s t y c z n o ś c i.

Niech z_1 będzie innym punktem na osi z-ów, a φ_1 niech oznacza kąt, jaki płaszczyzna styczna w tym punkcie czyni z płaszczyzną zx, mamy wtedy także:

(28a) $$tg\,\varphi_1=\frac{m'z_1}{l'z_1+a'},$$

a gdy przez θ oznaazymy kąt między płaszczyznami stycznemi w punktach z i z_1, $\theta=\varphi_1-\varphi$, to

[1]) Dla krótkości wysłowienia, mówiąc punkt z, rozumieć będziemy zarazem jego odległość od początku.

$$tg\,\theta = \frac{m'a'\,(z_1 - z)}{(l'^2 + m'^2)\,zz_1 + l'a'\,(z + z_1) + a'^2}. \tag{30}$$

Stąd czytamy, że gdy $\theta = \frac{\pi}{2}$, wówczas

$$(l'^2 + m'^2)\,zz_1 + l'a'\,(z + z_1) + a'^2 = 0. \tag{31}$$

A zatem: Pary punktów z, z_1 tworzącej, w których płaszczyzny styczne powierzchni skośnej są do siebie prostopadłe, tworzą inwolucyą".

Ta inwolucya jest eliptyczną; albowiem $(l'^2 + m'^2)\,a'^2 - l'^2 a'^2 = a'^2 m'^2 > 0$. Punkt centralny czyni zadość równaniu $(l'^2 + m'^2)\,z + l'a' = 0$. Oznaczając go przez Z, mamy zatem

$$Z = -\frac{l'a'}{l'^2 + m'^2}. \tag{32}$$

Podstawiwszy tę wartość za z_1 w (30) i uwzględniwszy, że $(l'^2 + m'^2)\,Z + l'a' = 0$, otrzymamy

$$tg\,\theta = \frac{l'^2 + m'^2}{m'a'}\,(Z - z).\text{[1]} \tag{33}$$

Mamy zatem dowiedzione twierdzenie Chasles'a: Styczna trygonometryczna kąta, jaki płaszczyzna styczna w którymkolwiek punkcie tworzącej czyni z płaszczyzną styczną w punkcie centralnym na tej tworzącej, jest proporcyonalna do odległości obu punktów.

VIII. Wyznaczenie punktu centralnego. Linia zwężenia powierzchni skośnej.

Punkt centralny inwolucyi eliptycznej pary punktów na tworzącej powierzchni skośnej jest punktem, do którego dąży spodek najkrótszej odległości między tą tworzącą a tworzącą, która po niej następuje, gdy ta ostatnia dąży do zlania się z pierwszą.

Zatrzymując ten sam układ spółrzędnych, jaki przyjęliśmy w artykule poprzedzającym, weźmy pod uwagę tworzącą nieskończenie blizką osi oz, t. j. tworzącą nieskończenie blizką tworzącej równań

$$x = 0,\ y = 0,\ z = u. \tag{26}$$

[1]) Odwrotność spółczynnika przy $Z - z$, t. j. $\frac{m'a'}{l'^2 + m'^2}$ jest tak zwanym parametrem dystrybucyi. Łatwo okazać, że ten parametr jest równy najkrótszej odległości między dwiema sąsiedniemi tworzącemi, podzielonej przez kąt między temi tworzącemi.

Ponieważ dla tworzącej (26) $a=b=c=0$, $l=m=0$, $n=1$ i $b'=0$, więc równanie tworzącej nieskończenie blizkiej, t. j. tej, która odpowiada wartości $v+dv$ na parameter v, będą następujące:

$$(34) \qquad x=(l'u+a')\,dv,\ y=m'u.\,dv,\ z=(1+n'dv)\,du+c'dv.$$

Rzut najkrótszej odległości między prostemi (26) i (34) na płaszczyznę xy jest oczywiście prostopadły do rzutu prostej (34) na tę płaszczyznę; a że ten ostatni czyni z osią x-ów kąt, którego tangens równa się $\frac{m'}{l'}$, więc tangens kąta między osią x-ów i rzutem przerzeczonej najkrótszej odległości równa się $-\frac{l'}{m'}$, a następnie równanie płaszczyzny przesuniętej przez ten rzut i przez oś z-ów jest

$$(35) \qquad m'y+l'x=0.$$

Ta płaszczyzna przecina oczywiście prostą (34) w spodku najkrótszej odległości między tą prostą i prostą (26); znajdziemy zatem spółrzędne tego spodka z równań (34) i (35) (po wyrugowaniu u). W szczególności, będzie

$$z=-\frac{(1+n'dv)\,l'a'}{l'^2+m'^2}+c'dv.$$

A jeżeli teraz założymy, że prosta (34) nieskończenie się zbliża do prostej (26), t. j. że dv dąży do 0, wówczas punkt, dla którego z posiada napisaną dopiero wartość dąży do pewnego położenia na prostej (26), i w tem położeniu granicznem będzie

$$(32) \qquad Z=-\frac{l'a'}{l'^2+m'^2};$$

a zatem położeniem granicznem rzeczonego spodka jest istotnie punkt centralny inwolucyi eliptycznej na tworzącej (26).

Miejscem punktów centralnych inwolucyi eliptycznych na tworzących powierzchni skośnej jest pewna krzywa, tak zwana krzywa z w ę ż e n i a albo s t r y k c y j n a powierzchni skośnej. Jej równania we spółrzędnych prostokątnych otrzymamy, gdy najprzód znajdziemy wartości spółrzędnych punktu centralnego na jednej tworzącej, wyrażone przez parametr v, a potem parameter v wyrugujemy między tak otrzymanemi równaniami.

Wyjaśnimy to postępowanie na przykładzie, biorąc pod uwagę hiperboloidę jednopowłokową

$$(a) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Niech

$$\frac{x-a\cos v}{a\sin v}=\frac{y-b\sin v}{-b\cos v}=\frac{z}{c}=u, \tag{b}$$

$$\frac{x-a\cos v'}{a\sin v'}=\frac{y-b\sin v'}{-b\cos v'}=\frac{z}{c}=u, \tag{c}$$

będą równania dwu tworzących tego samego układu tej hiperboloidy. Przesuńmy przez prostą (b) płaszczyznę równoległą do prostej (c), t. j. (jak łatwy rachunek pokaże) płaszczyznę równania:

$$bc\sin\frac{v+v'}{2}(X-a\cos v)-ca\cos\frac{v+v'}{2}(Y-b\sin v)-ab\cos\frac{v-v'}{2}Z=0; \tag{d}$$

przesuńmy następnie przez prostą (c) płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny (d), t. j. płaszczyznę równania:

$$a\left(c^2\cos\frac{v+v'}{2}+b^2\cos\frac{v-v'}{2}\cos v'\right)X+b\left(c^2\sin\frac{v+v'}{2}+a^2\cos\frac{v-v'}{2}\sin v'\right)Y \tag{e}$$

$$+c\left(b^2\sin\frac{v+v'}{2}\cos v'-a^2\cos\frac{v+v'}{2}\sin v'\right)Z=b^2c^2\sin\frac{v+v'}{2}\sin v'+$$

$$+c^2a^2\cos\frac{v+v'}{2}\cos v'+a^2b^2\cos\frac{v-v'}{2};$$

natenczas płaszczyzna (e) przetnie prostą (b) w spodku najkrótszej odległości między prostą (b) i (c).

Jeżeli więc w (e) za X, Y, Z wstawimy wartości na x, y, z wypływające z równań (b), otrzymamy po uskutecznieniu łatwego rachunku:

$$u=\frac{c^2(a^2-b^2)\sin\frac{v+v'}{2}\cos\frac{v+v'}{2}+a^2b^2\sin\frac{v-v'}{2}\cos\frac{v-v'}{2}}{b^2c^2\sin^2\frac{v+v'}{2}+c^2a^2\cos^2\frac{v+v'}{2}+a^2b^2\cos^2\frac{v-v'}{2}};$$

a gdy teraz założymy, że się prosta (c) nieskończenie zbliża do prostej (b), że zatem v' dąży do v jako swej granicy, będzie dla tej granicy:

$$u=\frac{c^2(a^2-b^2)\sin v\cos v}{a^2(b^2+c^2)\cos^2 v+b^2(c^2+a^2)\sin^2 v},$$

lub, położywszy dla skrócenia

$$A=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},\ B=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2},\ C=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}, \tag{f}$$

$$u=\frac{C\sin v\cos v}{A\cos^2 v+B\sin^2 v}. \tag{g}$$

Podstawmy tę wartość na u w równaniach (b), otrzymamy wówczas spółrzędne spodka punktu centralnego na tworzącej (b)

$$\text{(h)}\ldots\quad x=\frac{aA\cos v}{A\cos^2 v+B\sin^2 v},\ y=\frac{bB\sin v}{A\cos^2 v+B\sin^2 v},\ z=\frac{cC\sin v\cos v}{A\cos^2 v+B\sin^2 v}.$$

Aby zaś otrzymać równanie linii zwężenia, dość między równaniami (h) wyrugować parameter v. Jednem równaniem tej linii jest równanie hiperboloidy (a), potrzeba zatem otrzymać tylko drugie. Owoż, pisząc równania (h) pod postacią

$$\frac{aA}{x}=\frac{A\cos^2 v+B\sin^2 v}{\cos v},\ \frac{bB}{y}=\frac{A\cos^2 v+B\sin^2 v}{\sin v},\ \frac{cC}{z}=\frac{A\cos^2 v+B\sin^2 v}{\sin v\cos v},$$

znajdziemy stąd

$$\text{(j)}\qquad \frac{a^2A^2}{x^2}+\frac{b^2B^2}{y^2}-\frac{c^2C^2}{z^2}=0.$$

To samo równanie otrzymalibyśmy dla drugiego układu tworzących hiperboloidy. A zatem, linia zwężenia hiperboloidy jednopowłokowej (a), odpowiadająca obu układom prostych tworzących, jest krzywą rzędu ósmego, w której tę hiperboloidę przecina powierzchnia stożkowa rzędu czwartego, przedstawiona przez równanie (j). Ta krzywa składa się z dwu krzywych rzędu czwartego, z których jedna jest linią zwężenia odpowiadającą jednemu układowi tworzących, a druga jest linią zwężenia odpowiadającą drugiemu układowi tworzących.

Wypadek ten zgadza się z wypadkiem podanym bez dowodu przez Salmona (w Treatise on the analytic geometry of three dimensions, wyd. IV. str. 425).

W przypadku szczególnym, kiedy hiperboloida jest obrotową, a zatem $b=a$, wówczas, skoro $A=B$, $C=0$, równanie (j) sprowadza się do

$$z^2\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)=0.$$

Obie więc linie zwężenia, są przecięciem się hiperboloidy z płaszczyzną $z=0$; t. j. koło szyjne jest linią zwężenia dla obu układów linii tworzących hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej.

Inny sposób wyznaczenia linii zwężenia, łączący się z teoryą odkształcenia powierzchni skośnych podaje p. Darboux (w swem wielkiem dziele: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris, 1894, t. III, str. 299).

IX. Inwolucye hiperboliczne par punktów na tworzących powierzchni skośnej.

Oprócz poznanej dopiero inwolucyi eliptycznej, istnieje na każdej tworzącej powierzchni skośnej nieskończenie wiele inwolucyi hiperbolicznych, pozostających w ścisłym związku z ową inwolucyą eliptyczną.

W artykule VII. okazaliśmy, że jeżeli przyjmiemy jednę z tworzących za oś z-ów, a płaszczyznę styczną w początku spółrzędnych za płaszczyznę zx, to płaszczyzna styczna w punkcie (o, o, z) na tej tworzącej wyrazi się przez równanie:

$$m'z\,X-(l'z+a')\,Y=0, \tag{27}$$

a przeto, że ta płaszczyzna styczna czyni z płaszczyzną zx kąt φ, dla którego

$$tg\,\varphi=\frac{m'z}{l'z+a'}. \tag{28}$$

Oznaczmy przez φ_1 kąt, jaki z płaszczyzną zx tworzy płaszczyzna styczna w punkcie (o, o, z_1), będzie wtedy także:

$$tg\,\varphi_1=\frac{m'z_1}{l'z_1+a'}. \tag{28a}$$

Owoż załóżmy, że te dwie płaszczyzny styczne leżą symetrycznie względem płaszczyzny zx, mamy wówczas $tg\,\varphi+tg\,\varphi_1=0$, a przeto, wskutek (28) i (28a):

$$\frac{m'z}{l'z+a'}+\frac{m'z_1}{l'z_1+a'}=0,$$

skąd wypływa

$$2l'z^1+a'(z+z_1)=0, \tag{36}$$

a to dowodzi, że pary punktów z i z_1 tworzą również inwolucyę, której punktem centralnym jest

$$Z_1=-\frac{a'}{2l'}, \tag{37}$$

a punkta podwójne czyli ogniska są pierwiastkami równania stopnia 2-go:

$$l'z^2+a'z=0. \tag{38}$$

Ta inwolucya jest widocznie hiperboliczną; jednym jej punktem podwójnym jest punkt $z=0$, t. j. punkt styczności płaszczyzny zx, a drugim punkt $z=-\frac{a'}{l'}$, dla którego, wedle (28), $tg\,\varphi=\infty$, a przeto punkt styczności na osi z-ów płaszczyzny stycznej prostopadłej do płaszczyzny zx.

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie:

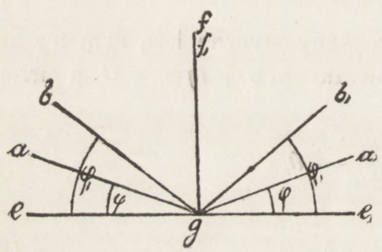
Pary punktów na tej samej tworzącej powierzchni skośnej, w których płaszczyzny styczne leżą symetrycznie względem którychkolwiek dwu płaszczyzn stycznych do siebie prostopadłych, a tę tworzącą w sobie zawierających, tworzą inwolucyę hiperboliczną, której punktami podwójnymi są punkty styczności owych dwu płaszczyzn stycznych do siebie prostopadłych.

Łącząc to twierdzenie z drugiem twierdzeniem artykułu VII, mamy twierdzenie dodatkowe:

Pary punktów zamiennych inwolucyi eliptycznej na tworzącej powierzchni skośnej są punktami podwójnymi nieskończenie wielu inwolucyi hiperbolicznych, istniejących na tej samej tworzącej.

Tych twierdzeń można dowieść sposobem syntetycznym, jak następuje[1]):

Przesuńmy przez tworzącą g (prostopadłą do płaszczyzny papieru) powierzchni skośnej płaszczyznę e i pary płaszczyzn a i a_1, b i b_1,.. nachylone do płaszczyzny e pod kątami φ, φ_1..; otrzymamy wówczas dwa pęki płaszczyzn $(a, b,..)$ i $(a_1, b_1,..)$ jednokreślne, których odpowiadające sobie elementy a i a_1, b i b_1,.. są elementami zamiennymi. Albowiem płaszczyźnie a_1, uważanej za element x pęku $(a, b,...)$, odpowiada w pęku $(a_1, b_1,..)$ element x_1, który się schodzi z płaszczyzną a.



A zatem, pęki jednokreślne $(a, b,..)$ i $(a_1, b_1,..)$ tworzą pęk inwolucyjny $(a, a_1; b, b_1;...)$, którego elementa podwójne schodzą się z płaszczyzną e i z płaszczyzną f do płaszczyzny e prostopadłą; albowiem odpowiadające sobie płaszczyzny pęków $(a, b,...)$ i $(a_1, b_1,...)$, nachylone do płaszczyzny e pod kątami π i $\frac{\pi}{2}$ schodzą się razem: pierwsze na płaszczyznie e, a drugie na płaszczyznie f.

A że pęk płaszczyzn stycznych, przesuniętych przez tworzącą powierzchni skośnej, jest jednokreślny z szeregiem punktów styczności,

[1]) Dowód udzielony mi przez prof. Łazarskiego.

więc pary punktów styczności A i A_1, B i B_1,... płaszczyzn stycznych a i a_1, b i b_1,... tworzą również inwolucyę, której punkta podwójne schodzą się z punktami styczności płaszczyzn e i f.

Płaszczyznę e przyjęliśmy dowolnie, na tworzącej g znajduje się zatem nieskończoność szeregów inwolucyjnych hiperbolicznych, których punkta podwójne E_1 i F_1, E_2 i F_2 są punktami par płaszczyzn stycznych e_1 i f_1, e_2 i f_2, do siebie prostopadłych; a że pary punktów e_1 i f_1, e_2 i f_2,.. tworzą inwolucyę eliptyczną, której środek jest punktem linii zwężenia powierzchni skośnej na tworzącej g, więc między szeregami inwolucyjnymi hiperbolicznymi a szeregiem inwolucyjnym eliptycznym zachodzi ten związek, że pary punktów zamiennych szeregu inwolucyjnego eliptycznego są parami punktów podwójnych w owych szeregach inwolucyjnych hiperbolicznych.