612.

NOTE SUR UNE FORMULE D'INTÉGRATION INDÉFINIE.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXXVIII. (*Janvier—Juin*, 1874), pp. 1624—1629.]

En étudiant les Mémoires de M. Serret (*Journal de Liouville*, t. X., 1845) par rapport à la représentation géométrique des fonctions elliptiques, avec les remarques de M. Liouville sur ce sujet, je suis parvenu à une formule d'intégration indéfinie qui me paraît assez remarquable, savoir: en prenant θ entier positif quelconque, je dis que l'intégrale

$$\int \frac{(x+p)^{m+n-\theta}(x+q)^{\theta}\,dx}{x^{m+1}(x+p+q)^{n+1}}$$

a une valeur algébrique

$$(x+p)^{m+n-\theta+1}(x+p+q)^{-n}x^{-m}(A+Bx+Cx^2+\ldots+Kx^{\theta-1}),$$

pourvu qu'une seule condition soit satisfaite par les quantités m, n, p, q. Cette condition s'écrit sous la forme symbolique

$$([m]p^2+[n]q^2)^{\theta}=0,$$

en dénotant ainsi l'équation

$$[m]^{\theta}p^{2\theta}+\frac{\theta}{1}[m]^{\theta-1}[n]^1p^{2\theta-2}q^2+\ldots+[n]^{\theta}q^{2\theta}=0,$$

où, comme à l'ordinaire, $[m]^{\theta}$ signifie $m(m-1)\ldots(m-\theta+1)$.

Je rappelle que les formules de M. Serret ne contiennent que des exposants entiers, et celles de M. Liouville qu'un seul exposant quelconque: la nouvelle formule contient deux exposants quelconques, m, n. Je remarque aussi l'analogie de la condition $([m]p^2+[n]q^2)^{\theta}=0$ avec celle-ci

$$\frac{1}{\zeta^{n-m}}\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^m\zeta^n(\zeta-1)^m=0$$

(m étant un entier positif), qui figure dans les Mémoires cités.

Pour démontrer la formule, j'écris

$$u = x^{-m}(A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^{\theta-1}),$$

et aussi pour abréger

$$X = (x+p)^{m+n-\theta+1}(x+p+q)^{-n},$$

ce qui donne

$$\frac{X}{(x+p)(x+p+q)} = (x+p)^{m+n-\theta}(x+p+q)^{-n-1}.$$

L'équation à vérifier est donc

$$Xu = \int \frac{X(x+q)^\theta\,dx}{x^{m+1}(x+p)(x+p+q)},$$

ou, en différentiant et divisant par X,

$$\frac{X'}{X}u + u' = \frac{(x+q)^\theta}{x^{m+1}(x+p)(x+p+q)},$$

ou enfin

$$[(m+n-\theta+1)(x+p+q) - n(x+p)]\,u + (x+p)(x+p+q)\,u' = \frac{(x+q)^\theta}{x^{m+1}},$$

où u' dénote $\dfrac{du}{dx}$. Il ne s'agit donc que d'exprimer que cette équation ait une intégrale

$$u = x^{-m}(A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^{\theta-1}).$$

En supposant que cela soit ainsi, et en effectuant la substitution, les termes en $x^{-m+\theta}$ se détruisent, et l'on obtient une équation qui contient des termes en x^{-m-1}, $x^{-m}, \dots, x^{-m+\theta-1}$, savoir $(\theta+1)$ termes. On a ainsi, entre les θ coefficients $A, B, C, \dots, K$ un système de $(\theta+1)$ équations linéaires, ce qui implique une condition entre les constantes m, n, p, q; mais, cette condition satisfaite, les équations se réduisent à θ équations indépendantes, et les coefficients seront ainsi déterminés.

Par exemple, soit $\theta = 2$; l'équation différentielle est

$$[\overline{m-1}\,p + \overline{m+n-1}\,q + \overline{m-1}\,x]\,u + [p^2 + pq + x(2p+q) + x^2]\,u' = x^{-m-1}(q+x)^2,$$

laquelle doit être satisfaite par $u = Ax^{-m} + Bx^{-m+1}$. Cela donne

$$\left.\begin{array}{cccc}
\overbrace{\qquad\qquad}^{x^{-m-1}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{x^{-m}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{x^{-m+1}} & \overbrace{\qquad\quad}^{x^{-m+2}} \\
 & (\overline{m-1}\,p + \overline{m+n-1}\,q)\,A, & (\overline{m-1}\,p + \overline{m+n-1}\,q)\,B, & \\
\text{,,}\quad, & \text{,,}\quad, & (m-1)\,A, & (m-1)\,B \\
-m(p^2+pq)\,A, & -(m-1)(p^2+pq)\,B, & \text{,,}\quad, & \text{,,} \\
\text{,,}\quad, & -m(2p+q)\,A, & -(m-1)(2p+q)\,B, & \text{,,} \\
\text{,,}\quad, & \text{,,}\quad, & -mA, & -(m-1)\,B \\
-q^2\quad, & -2q\quad, & -1\quad, & \text{,,}
\end{array}\right| = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
1 \quad &+ [(m-1)p - nq]\,B &&+ 1A = 0,\\
2q \; &+ (m-1)(p^2+pq)\,B + [(m+1)p-(n-1)q]\,A &&= 0,\\
q^2 \; & &&+ m(p^2+pq)\,A = 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne une condition, déterminant $=0$, et l'on a une condition de cette même forme pour une valeur quelconque de θ.

En formant, puis en réduisant les expressions de ces déterminants, on obtient pour toutes les valeurs $\theta = 1, 2, 3, 4, \ldots$ respectivement la suite d'équations que voici :

$$0 = \begin{vmatrix} 1\,, & mp - nq \\ q\,, & m(p^2+pq) \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \quad [m]^1\, p\,(p+q) \\ &-1. \qquad\qquad q\,([m]\,p - [n]\,q)^2, \end{aligned} \quad = ([m]\,p^2 + [n]\,q^2)^1,$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1\,, & \overline{m-1}\,p - nq & ,\; 1 \\ 2q\,, & \overline{m-1}\,(p^2+pq), & \overline{m+1}\,p - \overline{n-1}\,q \\ q^2, & . & ,\; m\,(p^2+pq) \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \quad [m]^2 p^2\,(p+q)^2 \\ &-2.\,[m]^1\, p\,(p+q)\, q\,([m-1]\,p - [n]\,q)^1 \\ &+1. \qquad\qquad q^2\,([m] \quad p - [n]\,q)^2 \end{aligned} \quad = ([m]\,p^2 + [n]\,q^2)^2,$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1\,, & \overline{m-2}\,p - nq & ,\; 1 & ,\; . \\ 3q\,, & \overline{m-2}\,(p^2+pq), & mp - \overline{n-1}\,q & ,\; 2 \\ 3q^2, & . & ,\; \overline{m-1}\,(p^2+pq) & ,\; \overline{m+2}\,p - \overline{n-2}\,q \\ q^3, & . & ,\; . & ,\; m\,(p^2+pq) \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \quad [m]^3 p^3\,(p+q)^3 \\ &-3.\,[m]^2 p^2\,(p+q)^2\, q\,([m-2]\,p - [n]\,q)^1 \\ &+3.\,[m]^1\, p\,(p+q)\, q^2\,([m-1]\,p - [n]\,q)^2 \\ &-1. \qquad\qquad q^3\,([m] \quad p - [n]\,q)^3, \end{aligned} \quad = ([m]\,p^2 + [n]\,q^2)^3,$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1, & \overline{m-3}\,p - nq & ,\; 1 & ,\; . & ,\; . \\ 4q, & \overline{m-3}\,(p^2+pq), & \overline{m-1}\,p - \overline{n-1}\,q & ,\; 2 & ,\; . \\ 6q^2, & . & ,\; \overline{m-2}\,(p^2+pq) & ,\; \overline{m+1}\,p - \overline{n-2}\,q & ,\; 3 \\ 4q^3, & . & ,\; . & ,\; \overline{m-1}\,(p^2+pq) & ,\; \overline{m+3}\,p - \overline{n-3}\,q \\ q^4, & . & ,\; . & ,\; . & ,\; m\,(p^2+pq) \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \quad [m]^4 p^4\,(p+q)^4 \\ &-4.\,[m]^3 p^3\,(p+q)^3\, q\,([m-3]\,p - [n]\,q)^1 \\ &+6.\,[m]^2 p^2\,(p+q)^2\, q^2\,([m-2]\,p - [n]\,q)^2 \\ &-4.\,[m]^1\, p\,(p+q)\, q^3\,([m-1]\,p - [n]\,q)^3 \\ &+1. \qquad\qquad q^4\,([m] \quad p - [n]\,q)^4, \end{aligned} \quad = ([m]\,p^2 + [n]\,q^2)^4;$$

et ainsi de suite. Les notations $([m]p-[n]q)^1$, $([m]p-[n]q)^2, \ldots$ ont des significations semblables à celles de $([m]p^2+[n]q^2)^1$, $([m]p^2+[n]q^2)^2, \ldots$, auparavant expliquées. On a, par exemple,

$$([m]p-[n]q)^2=[m]^2p^2-2[m]^1[n]^1pq+[n]^2q^2.$$

Considérons, par exemple, le deuxième déterminant: ceci contient trois termes en 1, $2q$, q^2 respectivement; le premier terme est

$$1\,.\,(m-1)(p^2+pq)\,.\,m(p^2+pq),$$

c'est-à-dire

$$[m]^2p^2(p+q)^2;$$

le deuxième terme est

$$2q\,.-m(p^2+pq)[(m-1)p-nq],$$

c'est-à-dire

$$-2[m]^1p(p+q)q([m-1]p-[n]q)^1;$$

le troisième terme est

$$q^2[(\overline{m-1}\,p-nq)(\overline{m+1}\,p-\overline{n-1}q)-(m-1)(p^2+pq)],$$

c'est-à-dire

$$q^2[(m^2-m)p^2-2mnpq+(n^2-n)q^2]=q^2([m]p-[n]q)^2.$$

Et de même le troisième déterminant est composé de quatre termes en 1, $3q$, $3q^2$, q^3 respectivement, lesquels sont les quatre termes de la première expression transformée; et ainsi pour le quatrième déterminant, etc. Au moyen de ces premières transformées, on obtient sans peine les expressions finales $([m]p^2+[n]q^2)^1$, $([m]p^2+[n]q^2)^2, \ldots$.

En écrivant $z-\frac{1}{2}(p+q)$ au lieu de x, et puis $\frac{1}{2}(p+q)=\alpha$, $\frac{1}{2}(p-q)=a$, la formule devient

$$\int\frac{(z-a)^\theta(z+a)^{m+n-\theta}\,d\theta}{(z-\alpha)^{m+1}(z+\alpha)^{n+1}},$$

et la valeur algébrique

$$=(z+a)^{m+n-\theta-1}(z-\alpha)^{-m}(z+\alpha)^{-n}(A'+B'z+\ldots+K'z^{\theta-1}),$$

pourvu qu'on ait entre les quantités m, n, a, α la relation

$$\{[m](\alpha+a)^2+[n](\alpha-a)^2\}^\theta=0.$$

En écrivant $\theta=m$, on a la formule de MM. Serret et Liouville, laquelle, en y écrivant $\dfrac{(\alpha+a)^2}{4a\alpha}=\zeta$ et $\dfrac{(\alpha-a)^2}{4a\alpha}=\zeta-1$, peut s'écrire sous la forme $\{[m]\zeta+[n](\zeta-1)\}^\theta=0$. Je remarque que l'équation en ζ ne donne pas *toujours* pour ζ des valeurs réelles, positives et plus grandes que l'unité: par exemple, pour $\theta=1$, on a $\zeta=\dfrac{n}{m+n}$, valeur qui ne peut pas satisfaire à ces conditions. Je n'ai pas cherché dans quel cas ces conditions (qui ont rapport à l'application des formules à la représentation des fonctions elliptiques) subsistent.