22.

SUR LE THÉORÈME DE M. BRIOSCHI, RELATIF AUX FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

[*Comptes Rendus*, XCVIII. (1884), pp. 858—862.]

DANS la démonstration du théorème sur une correspondance algébrique, inséré dans les *Comptes rendus* de la semaine dernière [p. 163 above], j'ai eu occasion de considérer l'intégrale de l'équation

$$\left(a_0 \frac{d}{da_1} + a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{da_n}\right) \phi = 0.$$

Je me suis aperçu depuis que cette intégrale peut se déduire immédiatement du beau théorème de M. Brioschi, *sur les fonctions symétriques*, à savoir que:

$$r \frac{d\phi}{ds_r} + a_0 \frac{d\phi}{da_r} + a_1 \frac{d\phi}{da_{r+1}} + \ldots + a_{n-r} \frac{d\phi}{da_n} = 0.$$

On en tire cette conséquence immédiate que, si ϕ est une fonction des n premières sommes-puissances des racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots = 0,$$

avec exclusion de la puissance $r^{\text{ième}}$, on aura

$$a_0 \frac{d\phi}{da_r} + \ldots + a_{n-r} \frac{d\phi}{da_n} = 0,$$

et conséquemment $F(s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}, s_{r+1}, \ldots, s_n)$ sera l'équivalent complet de l'expression

$$\left(a_0 \frac{d}{da_r} + a_1 \frac{d}{da_{r+1}} + \ldots + a_{n-r} \frac{d}{da_n}\right)^{-1} . 0.$$

Dans le cas que j'ai considéré, $r = 1$, et nous avons trouvé

$$\left(a_0 \frac{d}{da_1} + a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{da_n}\right)^{-1} . 0 = F(s_2, s_3, \ldots, s_n).$$

On peut trouver aussi facilement l'intégrale complète de l'équation

$$\left(a_0 \frac{d}{da_1} + a_1 \frac{d}{da_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{da_n}\right)^{*i} \phi = 0,$$

où l'astérisque signifie qu'on doit prendre le *produit complet* de l'action de la forme linéaire agissant $i-1$ fois sur elle-même. Ainsi, par exemple,

$$\left(a\frac{d}{db}+b\frac{d}{dc}\right)^{*2} \text{ signifie } a^2\left(\frac{d}{db}\right)^2+2ab\frac{d}{db}\frac{d}{dc}+b^2\left(\frac{d}{dc}\right)^2+a\frac{d}{dc}.$$

On trouvera sans difficulté que la valeur de cette intégrale est

$$F+s_1F_1+s_1{}^2F_2+\ldots+s_1{}^{i-1}F_{i-1},$$

où chaque F est une fonction exclusivement de $s_2, s_3, \ldots, s_n$.

Conséquemment le $i^{\text{ième}}$ coefficient d'un covariant quelconque de

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x, y)^n$$

peut être mis sous cette forme, si l'on se sert de s_ω pour exprimer la somme des $\omega^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de

$$x^n+\alpha_1x^{n-1}+\frac{\alpha_2}{1.2}x^{n-2}+\frac{\alpha_3}{1.2.3}x^{n-3}+\ldots=0.$$

En effet, en écrivant $\frac{s_1}{n}=s$, tout covariant de degré arbitraire ν appartenant à ce quantic sera de la forme

$$[u_0, \ (u_0, u_1\between s, 1), \ (u_0, u_1, u_2\between s, 1)^2, \ (u_0, u_1, u_2, u_3\between s, 1)^3, \ldots](x, y)^\nu,$$

où, en général,

$$u_{\theta+1}=\frac{du_\theta}{ds_2}v_2+\frac{du_\theta}{ds_3}v_3+\ldots+\frac{du_\theta}{ds_n}v_n,$$

v_ω étant une fonction exclusivement de ω, n; $s_2, s_3, \ldots, s_n$ du poids $\omega+1$. J'ajoute encore cette observation que tout différentiant (c'est-à-dire *sous-invariant* ou *seminvariant*) d'un système de i quantics des degrés $m, \mu, \ldots, M$ sera fonction exclusivement de $s_2, s_3, \ldots, s_m$; $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\mu, \ldots, S_2, S_3, \ldots, S_M$ et de $i-1$ fonctions linéaires indépendantes de la forme

$$ls_1+\lambda\sigma_1+\ldots+LS_1,$$

soumises à la condition que $l+\lambda+\ldots+L=0$.

Je ne sais s'il vaut la peine de dire, comme conclusion, qu'en combinant le théorème de M. Brioschi avec le mien sur les puissances (*avec astérisque*) on trouve, pour l'équation

$$\left(a_0\frac{d}{da_1}+a_1\frac{d}{da_2}+a_2\frac{d}{da_3}+\ldots\right)^i\phi=0$$

(où le i est *sans astérisque*), l'intégrale partielle

$$\phi=F+F_1s_1+F_2s_1{}^2+\ldots+F_{i-1}s_1{}^{i-1},$$

où chaque F est une fonction arbitraire de $s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n$.

En effet, cette expression est l'intégrale complète du système formé par l'équation supposée conjointe avec les équations

$$\left(a_0\frac{d}{da_2}+\ldots\right)\phi=0, \quad \left(a_0\frac{d}{da_3}+\ldots\right)\phi=0, \quad \ldots, \quad \left(a_0\frac{d}{da_r}+\ldots\right)\phi=0.$$

On voit aussi facilement que l'intégrale de

$$\left(a_0 \frac{d}{da_r} + a_1 \frac{d}{da_{r+1}} + \dots\right)^{*i} \phi = 0$$

est
$$\phi = U_0 + U_1 s_r + U_2 s_r^2 + \dots + U_{r-1} s_r^{i-1},$$

où chaque U est une fonction arbitraire de $s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_{r+1}, \dots s_n$.

On peut former un nombre infini de systèmes construits au moyen des opérateurs $\left(a_0 \frac{d}{da_r} + \dots\right)$ dont on connaîtra d'avance les intégrales ; ainsi, par exemple, le système de r équations

$$\left(a_0 \frac{d}{da_2} + \dots\right)^i \phi = 0, \quad \left(a_0 \frac{d}{da_r} + \dots\right) \phi = 0, \quad \dots, \quad \left(a_0 \frac{d}{da_{2r}} + \dots\right) \phi = 0$$

aura pour intégrale complète

$$\phi = U_0 + s_2 U_1 + s_2^2 U_2 + \dots + s_2^{i-1} U_{i-1},$$

où chaque U représente une fonction arbitraire de $(s_1 s_3 s_5 \dots s_{2i-1} s_{2i} \dots s_n)$, en omettant celles des quantités $s_1, s_3, \dots, s_{2i-1}$ dont les sous-indices excèdent n.

Pour indiquer le moyen de justifier ces énoncés, prenons comme exemple le cas des équations simultanées

$$(a_0 \delta a_1 + \dots + a_{n-1} \delta a_n)^3 \phi = 0, \quad \text{ou} \quad E_1^3 \phi = 0,$$
$$(a_0 \delta a_2 + \dots + a_{n-2} \delta a_n) \phi = 0, \quad \text{ou} \quad E_2 \phi = 0,$$
$$(a_0 \delta a_3 + \dots + a_{n-3} \delta a_n) \phi = 0, \quad \text{ou} \quad E_3 \phi = 0.$$

On trouvera facilement qu'en général $E_1^3 = E^*{}_1^3 - 2E^*{}_1^1 E_2 + E_3$, de sorte que le système donné équivaut au système

$$E^*{}_1^3 \phi = 0, \quad E_2 \phi = 0, \quad E_3 \phi = 0.$$

Pour que ces équations soient satisfaites séparément, il faut et il suffit que ϕ soit respectivement de la forme

$$F(s_2 s_3 s_4 \dots s_n) + s_1 F_1 (s_2 s_3 s_4 \dots s_n) + s_1^2 F_2 (s_2 s_3 s_4 \dots s_n),$$
$$G(s_1 s_3 s_4 \dots s_n), \quad H(s_1 s_2 s_4 \dots s_n).$$

Conséquemment, afin que les trois équations soient toutes satisfaites simultanément, la condition suffisante et nécessaire sera que ϕ soit de la forme

$$F(s_4 \dots s_n) + s_1 F_1 (s_4 \dots s_n) + s_1^2 F_2 (s_4 \dots s_n),$$

laquelle est conséquemment l'intégrale complète du système donné. De même, on démontre facilement que l'intégrale complète des équations

$$(a_0 \delta a_1 + \dots + a_{n-1} \delta a_n)^2 \phi = 0,$$
$$(a_0 \delta a_2 + \dots + a_{n-2} \delta a_n) \phi = 0,$$
$$(a_0 \delta a_2 + \dots + a_{n-2} \delta a_n)^2 \phi = 0$$

sera

$$\phi = F(s_3 s_5 s_6 \dots s_n) + s_1 F_1 (s_3 s_5 s_6 \dots s_n).$$