30.

SUR L'ÉQUATION LINÉAIRE TRINÔME EN MATRICES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

[*Comptes Rendus*, XCIX. (1884), pp. 527—529.]

POUR résoudre l'équation trinôme $pxp' + qxq' + r = 0$ (où toutes les lettres désignent des matrices du même ordre ω) sous sa forme symétrique, on a besoin de connaître l'équation identique à un nivellateur de cet ordre à deux couples de matrices, ce qui équivaut virtuellement à connaître le déterminant d'un nivellateur à trois de ces couples. Mais, sans avoir recours à cette méthode générale, il existe, comme on va le voir, un moyen plus court et plus direct pour résoudre l'équation et exprimer x sous la forme essentiellement bonne d'une fraction réduite, si l'on est d'accord à se dispenser de la condition que le numérateur soit symétrique.

A cet effet, on peut multiplier l'équation, à volonté, ou par $q^{-1}(\ )p'^{-1}$ ou par $p^{-1}(\ )q'^{-1}$. Choisissons le premier de ces deux multiplicateurs et écrivons $q^{-1}p = \phi$, $q'p'^{-1} = -\psi$, $-q^{-1}rp'^{-1} = \mu$; alors on obtient l'équation $\phi x - x\psi = \mu$ (mais déjà avec une brèche de symétrie, par la raison du choix d'une entre deux choses pareilles). En multipliant cette équation par le nivellateur $\phi^i(\ ) + \phi^{i-1}(\ )\psi + \phi^{i-2}(\ )\psi^2 + \ldots + (\ )\psi^i$ (disons U_i) et en écrivant $U_i\mu = \mu_{i+1}$, on obtient la suite d'équations

$$\phi x - x\psi = \mu, \quad \phi^2 x - x\psi^2 = \mu_2, \quad \phi^3 x - x\psi^3 = \mu_3, \ldots, \quad \phi^\omega x - x\psi^\omega = \mu_\omega.$$

Soient $B_0, B_1, \ldots, B_\omega$ et $C_0, C_1, \ldots, C_\omega$ les coefficients des deux formes associées aux deux systèmes p, q et p', q' respectivement; alors, en vertu d'un théorème général en matrices*, on aura

$$C_\omega\psi^\omega + C_{\omega-1}\psi^{\omega-1} + \ldots + C_0 = 0, \quad B_0 - B_1\phi + \ldots + (-)^\omega B_\omega\phi^\omega = 0.$$

Avec l'aide de ces deux équations et de la suite précédente, on peut déduire une équation de l'une ou de l'autre des deux formes $Mx = N$ ou $xM = N$. Faisons le choix (qui amène encore une fois une brèche de symétrie) de la première.

On aura $(C_\omega\phi^\omega + C_{\omega-1}\phi^{\omega-1} + \ldots + C_1\phi + C_0)\,x = C_\omega\mu_\omega + C_{\omega-1}\mu_{\omega-1} + \ldots + C_1\mu.$

Or, selon la théorie ordinaire d'élimination, on peut déterminer ϑ et H deux fonctions chacune du degré $(\omega - 1)$ en ϕ (traité comme une quantité ordinaire), telles que

$$\vartheta\,[B_0 - B_1\phi + \ldots + (-)^\omega B_\omega\phi^\omega] + H\,(C_\omega\phi^\omega + C_{\omega-1}\,\phi^{\omega-1} + \ldots + C_0)$$

* Ainsi, par exemple, si p, q sont des quaternions, on a

$$Tp^2\,(p^{-1}q)^2 - 2S\,(VpVq)\,(p^{-1}q) + Tq^2 = 0.$$

sera égal à R, le contre-résultant des deux formes associées à (p, q) et (p', q')* respectivement, et l'on aura

$$x = \frac{C_1 H\mu + C_2 H\mu_2 + \ldots + C_\omega H\mu_\omega}{R},$$

et ainsi x sera déterminé.

Si μ est zéro, alors, afin que x ne soit pas zéro, le R doit devenir zéro, comme nous avons déjà trouvé dans une Note précédente. En général, si R (le contre-résultant des deux formes adjointes à p, q et p', q' dans l'équation $pxp' + qxq' + r = 0$) s'évanouit, l'équation ne peut pas admettre une solution en même temps actuelle et déterminée; sans autres conditions, la solution deviendra *idéale*; avec conditions convenables, elle peut redevenir *actuelle*, mais contiendra (selon les circonstances) une ou plusieurs constantes arbitraires.

Hamilton, dans ses *Lectures*, a considéré l'équation trinôme pour les quaternions, mais il n'en a pas poussé la solution, c'est-à-dire la valeur de l'inconnue, à sa forme finale dans laquelle le dénominateur doit être un scalar (je dis *doit* être), parce que, ici comme dans toutes les équations en matrices, c'est le dénominateur de l'inconnue convenablement exprimé dont l'évanouissement est le *critérium* pour distinguer le cas où la solution est actuelle et déterminée d'avec les cas où elle devient ou idéale ou indéterminée.

En combinant le résultat ici obtenu avec celui de notre Note précédente, on voit qu'on est entré en pleine possession de la solution de l'équation $Nx = \Gamma$ dans les deux cas où le nivellateur N est de l'ordre 2 et d'une étendue quelconque ou bien de l'étendue 2 et d'un ordre quelconque.

Remarque.— On peut objecter que le numérateur de l'expression trouvée pour x dans l'équation trinôme contient des combinaisons de $q^{-1}p$, $q'p'^{-1}$, $q^{-1}rp'^{-1}$ et que, conséquemment, x pourrait devenir idéal à cause de l'évanouissement du déterminant de p' ou de q sans que le contre-résultant R s'évanouisse. Pour répondre à cette objection, soient D', Δ les déterminants de p' et de q^{-1}; alors, en se servant des équations identiques à p' et à q, on peut substituer pour leurs inverses des fonctions rationnelles de l'un et de l'autre divisées respectivement par D' et Δ, et alors le numérateur de x sera une quantité incapable de devenir infinie, tandis que son dénominateur sera R multiplié par des puissances de D' et de Δ; mais, vu qu'on peut représenter x tout aussi bien par une autre fraction dont le numérateur sera aussi incapable de devenir infini et dont le dénominateur sera R multiplié par des puissances de D' et de Δ (les déterminants de p et de q'), il est évident que ces deux fractions doivent toutes les deux admettre d'être simplifiées et que dans leurs formes réduites le dénominateur sera tout simplement R et qu'ainsi ce contre-résultant est le seul critérium pour distinguer le cas de l'actuel et déterminé d'avec le cas de l'idéal ou indéterminé.

* C'est-à-dire le *résultant* des fonctions multipliées par ϑ et H ci-dessus.