36.

SUR UNE NOUVELLE THÉORIE DE FORMES ALGÉBRIQUES*.

[*Comptes Rendus*, CI. (1885), pp. 1042—1046, 1110—1111, 1225—1229, 1461—1464.]

Si l'on imagine une fonction de dérivées différentielles (toutes d'un ordre supérieur à l'unité) de y par rapport à x, qui, sauf l'introduction d'un facteur multiple numérique, d'une puissance de $\frac{dy}{dx}$, ne change pas sa valeur quand on remplace x par y et y par x, il est évident qu'une telle fonction restera invariable (sauf l'introduction d'une constante comme facteur) quand pour x et y on substitue des fonctions linéaires quelconques, homogènes ou non homogènes de y et x. Ainsi une telle fonction conduira immédiatement à la connaissance d'un point singulier d'une courbe d'un degré quelconque. Le seul exemple d'une telle fonction, traité jusqu'à ce jour, est la simple fonction $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui, par cette seule propriété, sans aucune autre considération, sert à démontrer l'existence d'une propriété projective de courbes dont la condition est $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Il nous paraît donc très utile de chercher un moyen de produire toutes les fonctions de cette espèce auxquelles nous donnerons le nom de *réciprocants purs* ou simplement *réciprocants*. On verra qu'il existe des réciprocants mixtes, c'est-à-dire contenant des puissances de $\frac{dy}{dx}$ $\Big($comme la forme bien connue de M. Schwarz, $\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{3}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2}\Big)$ qui possèdent la même faculté d'invariance par rapport à l'échange de y avec x, comme les réciprocants purs, mais qui évidemment ne peuvent pas indiquer l'existence de points singuliers dans les courbes.

Nous écrirons, au lieu de $\delta_x y$, $\delta_x^2 y$, $\delta_x^3 y$, $\delta_x^4 y, \ldots$, les lettres $t, a, b, c, \ldots$, et pour leurs réciproques $\delta_y x$, $\delta_y^2 x$, $\delta_y^3 x, \ldots, \tau, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. On verra facilement que, pour que $F(t, a, b, c, \ldots)$ soit un réciprocant pur, F doit être d'un degré et d'un poids constant dans les lettres de chaque terme; de plus (pour un

[* See the lectures, below p. 303.]

réciprocant F d'une nature quelconque), on aura $F(a\ldots)/F(\alpha\ldots) = (-1)^\theta t^{2\lambda}$, où θ sera le plus petit nombre des lettres $a, b, c, \ldots$ dans un terme quelconque de F, et λ sera la moyenne arithmétique entre le poids et trois fois le degré de F, en comptant le poids de $t, a, b, c, \ldots$ comme étant $-1, 0, 1, 2, \ldots$. Cela donne lieu à une remarque importante par rapport aux *réciprocants mixtes*: pour qu'on puisse additionner deux formes mixtes afin de former un nouveau réciprocant, il faut non seulement que le degré et le poids soient les mêmes pour tous les deux, mais aussi le *caractère* qui dépend de la valeur de θ et que l'on peut qualifier comme caractère pair ou impair selon la parité de θ. Ainsi, par exemple, $2tb - 3a^2$ et a^2 sont tous deux réciprocants, mais $2tb$ ne le sera pas, parce que les *caractères* des deux données sont contraires. Il est facile de démontrer que, si R est un réciprocant quelconque,

$$(2tb - 3a^2)\,\delta_a R + (2tc - 4ab)\,\delta_b R + (2td - 5ac)\,\delta_c R + \ldots$$

sera aussi un réciprocant de même caractère que R. Ainsi, en commençant avec le réciprocant a, on peut obtenir une suite infinie de réciprocants mixtes: ces réciprocants ainsi obtenus ne seront pas en général irréductibles; mais, sans les réduire, leur forme fait voir immédiatement que tout réciprocant, qu'il soit pur ou mixte, peut être exprimé comme une fonction rationnelle et aussi (si l'on regarde t comme unité) entière de combinaisons *légitimes** de ces quantités.

Pour obtenir tous les réciprocants purs de poids, degré et ordre (c'est-à-dire nombre de lettres) donnés, linéairement indépendants les uns des autres, on peut former une équation partielle différentielle, linéaire, où R est la variable dépendante, et $a, b, c, \ldots$ les variables indépendantes; elle exprimera la condition nécessaire et suffisante pour que R soit un tel réciprocant et fournira un moyen sûr de résoudre le problème proposé. Voici la manière de démontrer ce théorème fondamental.

Si, dans l'équation

$$F(a, b, c, \ldots) = (-1)^\theta t^{2\lambda} F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

on donne à y la variation ϵx, on voit que $a, b, c, \ldots$, et conséquemment F, restent invariables. Les variations de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont faciles à déterminer, et la variation de t est donnée.

Ainsi, après quelques calculs faciles, en égalant à zéro, séparément, dans la variation de $t^{2\lambda}F(\alpha, \beta, \ldots)$, les termes qui contiennent t et ceux qui ne le contiennent pas, on arrive à deux équations dont l'une sera

$$\left(3a\frac{d}{da} + 4b\frac{d}{db} + 5c\frac{d}{dc} + \ldots\right) F(a, b, \ldots) = 2\lambda F,$$

* Je nomme *légitime* une combinaison quelconque de réciprocants où l'on évite *d'additionner* ceux dont le poids, le degré, l'ordre et le *caractère* ne sont pas les mêmes pour tous.

qui exprime la valeur numérique de λ, comme fonction du poids et du degré de F; l'autre équation, en écrivant

$$V = 3a^2\delta_b + 10ab\delta_c + (15ac + 10b^2)\,\delta_d + (21ad + 35bc)\,\delta_e + (28ae + 56bd + 35c^2)\,\delta_f + \ldots,$$

sera

$$VR = 0.$$

Pour voir la loi des chiffres arithmétiques dans V, formons les suites des coefficients de $(1+x)^i$ en commençant avec $i = 4$; divisons chaque coefficient *central* en deux parties égales, et supprimons la dernière moitié des séries numériques ainsi formées; on obtiendra ainsi la Table:

1	4	3		
1	5	10		
1	6	15	10	
1	7	21	35	
1	8	28	56	35
...				

En négligeant les deux premières colonnes, on trouve les nombres qui paraissent dans la formule.

On démontre ainsi que $VR = 0$ est une condition nécessaire pour que R soit un réciprocant. Mais il faut aussi démontrer que cette condition est suffisante. Soit donc D la valeur de $F(a, b, \ldots) - t^{2\lambda}F(\alpha, \beta, \ldots)$, exprimée comme une fonction de $a, b, c, \ldots$ seulement. D sera donc une fonction de la même forme que $F(a, b, \ldots)$.

On suppose que $$\Delta D = 0;$$
c'est-à-dire que la variation de D produite par la substitution de $x + \epsilon y$ à x est égale à zéro, en vertu de l'équation $VR = 0$.

Donnons à y une variation arbitraire $y + \eta u$; alors, si D devient D', la variation de D' sera nulle, quand on substitue, pour x, $x + \epsilon y + \epsilon\eta u$, et, conséquemment, quand on substitue $x + 2y$ pour x; on aura donc

$$\Delta D' = 0,$$

et, en prenant la différence des variations de D et D', on obtient

$$\Delta\left(u'\,\frac{d}{da}\,R + u''\,\frac{d}{db}\,R + u'''\,\frac{d}{dc}\,R + \ldots\right) = 0.$$

Donc, à cause de la forme arbitraire de u, il faut que

$$\Delta\,\frac{d}{da}\,D = 0,\quad \Delta\,\frac{d}{db}\,D = 0,\quad \ldots;$$

et, en raisonnant sur $\frac{d}{da}\,D$, $\frac{d}{db}\,D, \ldots$ comme on a raisonné sur D, on voit que le Δ de chacune des dérivées secondes différentielles de D sera zéro; en poursuivant le même calcul, on trouve évidemment que le Δ d'une dérivée de D d'un ordre quelconque par rapport à $a, b, c, \ldots$ sera nul.

Donc D est nul ; car, dans le cas contraire, s'il contient un terme quelconque, dont les lettres peuvent être distinctes ou identiques, en isolant une seule de ces lettres et prenant la dérivée de D par rapport à toutes les autres lettres, on aura le Δ de la lettre isolée, c'est-à-dire de $\delta_x y$, $\delta_x{}^2 y, \ldots$, zéro quand on substitue $x + \epsilon y$ pour x, ce qui est absurde. Ainsi l'on voit que, quand $\Delta D = 0$, c'est-à-dire quand $VR = 0$, $D = 0$, ce qui était à démontrer.

Soient ω, i, j le poids, le degré et l'ordre d'un réciprocant quelconque : de même que pour les sous-invariants, le nombre de formes linéairement indépendantes s'exprime par $(\omega;\ i, j) - (\omega - 1;\ i, j)$, où, en général, $(\omega;\ i, j)$ signifie le nombre de partitions de ω en i parties dont nulle n'excède j ; ainsi l'on voit que, en vertu de l'équation $VR = 0$, on aura, pour le nombre des réciprocants linéairement indépendants, la formule

$$(\omega;\ i, j) - (\omega - 1;\ i + 1, j).$$

Mon long exil en Amérique expliquera, je l'espère, comment j'ai pu ignorer l'identité des invariants différentiels de M. Halphen avec les formes que j'ai nommées *réciprocants purs*. Les travaux vraiment remarquables de M. Halphen n'ont pas besoin de mes éloges et auront été couronnés par l'admiration de tous les géomètres dignes de ce nom.

Je crois cependant qu'il y a assez de différence entre le but et la marche de mes recherches sur ce terrain et ceux de M. Halphen pour justifier l'insertion dans les *Comptes rendus* de ma discussion de la théorie regardée comme une théorie de formes algébriques. Si je ne me trompe pas, M. Halphen, s'il l'a découverte, n'a fait nul usage de l'équation partielle différentielle que j'ai donnée et qui sert à établir le parallélisme merveilleux entre les invariants différentiels et les semi-invariants ordinaires.

De plus, il n'a pas eu occasion de faire allusion aux formes que j'appelle *réciprocants mixtes orthogonaux*, qui ne sont point compris dans la définition des *invariants différentiels*, et qui sont essentiels pour expliquer les singularités quasi-métriques des courbes.

Nous rappelons que par le mot *réciprocant* (sans qualification) il a été convenu de sous-entendre une forme de cette espèce qui ne contient pas t $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{dy}{dx}\right)$ et nous avons trouvé que le nombre de ces réciprocants linéairement indépendants, du degré i, de l'étendue j (c'est-à-dire contenant $j + 1$ lettres distinctes) et du poids ω, s'exprime par la formule

$$(\omega;\ i, j) - (\omega - 1;\ i + 1, j),$$

où en général $(l;\ m, n)$ signifie le nombre de partitions de l en m ou un plus petit nombre que m de parties dont aucune n'excède n en grandeur; de sorte que $(l;\, m,\, n)$, quand m est plus grand que l, signifie la même chose que $(l;\, l,\, n)$, car tous les deux sont équivalents à $(l;\, \infty,\, n)$. Conséquemment

$$(i;\, i,\, j)-(i-1;\; i+1,\, j)=(i;\, i,\, j)-(i-1;\; i,\, j),$$

lequel sera toujours positif quand i et j sont tous les deux plus grands que l'unité; et, puisque a, qui est du degré 1, est un réciprocant, il s'ensuit que, pour un degré quelconque donné, il existe toujours des réciprocants (car on peut faire $\omega=i$), mais en nombre fini, car, en faisant croître ω, $(\omega-1;\; i+1,\, \infty)$, au delà d'une certaine valeur de ω, deviendra nécessairement plus grand que $(\omega;\, i,\, \infty)$. On peut exprimer par $(l : m)$ ce que devient $(l;\, m,\, n)$ quand $n=\infty$, et alors $(\omega : i)-(\omega-1 : i+1)$ exprimera le nombre de réciprocants linéairement indépendants du poids ω et du degré i sans autre limitation. Ainsi on trouvera que du degré 1 il n'existe qu'un seul réciprocant du poids 0; pour le degré 2, un seul du poids 2; pour le degré 3, deux qui seront respectivement du poids 3 et du poids 4; etc.

On trouvera qu'étant donné j il existe toujours, sauf pour le cas où $j=1$, un réciprocant qui contient toutes les $j+1$ lettres et qui de plus contiendra un terme qui est un produit de la dernière lettre par une puissance de a. Ces formes, qu'on peut nommer les *protomorphes*, sont les analogues des formes a, $ac-b^2$, $a^2d+\ldots$, $ae+\ldots$, qu'on connaît dans la théorie des sous-invariants. Dans le cas des réciprocants, ces protomorphes seront a, ac, $\ldots$, $a^2d, \ldots$, $a^2e, \ldots$, $a^3f, \ldots$, $a^3g, \ldots$, etc.

Évidemment une fonction rationnelle *quelconque* des lettres peut, au moyen de substitutions successives, être exprimée comme une fonction rationnelle des protomorphes et de b divisée par une puissance de a. Soit donc R un réciprocant quelconque; on aura

$$a^2R+P+Qb+\ldots+Jb^i=0,$$

où P, Q, $\ldots$, J sont eux-mêmes des réciprocants. En opérant i fois sur cette équation avec notre opérateur V, on voit qu'on obtient $a^{2i}J=0$; donc J est nul, et l'on voit ainsi que tous les termes Q, $\ldots$, J disparaissent et que R (en faisant $a=1$) devient une fonction rationnelle et entière des protomorphes. Nous allons appliquer ce principe fondamental, commun aux deux théories des sous-invariants et des réciprocants, pour obtenir les formes irréductibles (les *Grundformen*) des réciprocants pour les ordres 2, 3, 4.

Faisons $j=2$, $i=2$, $\omega=2$ et supposons que le réciprocant R soit $\lambda ac+\mu b^2$; on obtient

$$VR=(3a^2\delta_b+10ab\delta_c)\,R=(6\mu+10\lambda)\,a^2b=0.$$

Donc $-\lambda : \mu :: 3 : 5$ et nous obtenons le réciprocant $3ac-5b^2$*.

* Il est bon de remarquer que $3ac-5b^2=0$, c'est-à-dire

$$3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4}-5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0,$$

indique que le point (x, y), quand cette équation est satisfaite par telles coordonnées d'une courbe quelconque, est un point supra-parabolique, c'est-à-dire où une parabole passe par 5 au lieu de 4 points consécutifs seulement.

Passons au cas $j=3$, $i=3$, $\omega=3$, et posons

$$R=\lambda a^2 d+\mu abc+\nu b^3.$$

On aura $$VR=(3a^2\delta_b+10ab\delta_c+15ac+10b^2\delta_d)R$$
$$=(3\mu+15\lambda)a^3c+(9\nu+10\mu+10\lambda)a^2b^2=0.$$

On aura donc $$\mu=-5\lambda,\quad 9\nu=40\lambda,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$R=9a^2d-45abc+40b^3.$$

On reconnaîtra immédiatement que $R=0$ est l'équation différentielle donnée par Monge et retrouvée par M. Halphen à une conique et que

$$9(\delta_x^2y)^2(\delta_x^5y)-45\delta_x^2y\,\delta_x^3y\,\delta_x^4y+40(\delta_x^3y)^3=0$$

exprime la condition que le point (x, y) d'une courbe quelconque sera un point d'inflexion du second ordre, c'est-à-dire un point où une conique passe par six points consécutifs. Le nombre de ces points peut être trouvé en fonction linéaire de n, ordre d'une courbe donnée, en opérant sur cette équation une transformation analogue à celle au moyen de laquelle on passe du système $y=0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ au système équivalent, mais épuré, $\phi=0$; $H\phi=0$*.

Passons au cas où $j=4$, $i=3$, $\omega=4$, et écrivons

$$R=\lambda a^2e+\mu abd+\nu ac^2+\pi b^2c.$$

On aura

$$V=3a^2\delta_b+10ab\delta_c+(15ac+10b^2)\delta_d+(21ad+35bc)\delta_e,$$

et, en posant $RV=0$, on obtient, en égalant séparément à zéro les coefficients de a^3d, a^2bc, ab^3, les équations

$$21\lambda+3\mu=0,\quad 35\lambda+15\mu+20\nu+6\pi=0,\quad 10\mu+10\pi=0,$$

* Pour le cas d'une cubique, le nombre de ces points d'inflexion du second ordre est vingt-sept; on démontre facilement que ce sont les intersections de la courbe avec son covariant du *degré-ordre* 12 . 9.

On voit immédiatement, au moyen de notre théorie connue de *résidus géométriques*, que ces vingt-sept points sont les points de la cubique où elle est rencontrée par les neuf faisceaux des tangentes qu'on peut mener des neuf points d'inflexion ordinaire. Car un quelconque de ces points doit être tel que sa dérivée à l'indice 5 sera coïncidente avec le point lui-même. On aura donc 1, 1 = 1, 5, c'est-à-dire 2 = 4, ce qui veut dire que le tangentiel du point est un point d'inflexion ; ce qui était à démontrer.

Soit dit, par parenthèse, que la même théorie de résiduation enseigne que le point fixe Q, où une cubique donnée sera coupée par une autre cubique quelconque qui a en commun avec la première 8 points consécutifs à un point donné P, sera le troisième tangentiel de P et peut être nommé son *satellite* ; quand le satellite coïncide avec son primaire, en se servant pour le moment de la forme canonique pour exprimer la cubique donnée, et en nommant x, y, z les coordonnées du primaire, celles du satellite seront (d'après notre théorie exposée dans l'*American Journal of Mathematics*) x, y, z multipliés respectivement par des fonctions rationnelles de x^3, y^3, z^3, chacune du degré 21. [Vol. III. of this Reprint, p. 339.]

C'est un fait depuis longtemps connu que les points primaires qui coïncident avec leurs satellites (en ne tenant pas compte des neuf inflexions) sont en nombre 72.

et ainsi on peut écrire

$$R = 5a^2e - 35abd + 7ac^2 + 35b^2c.$$

Voici donc le système de protomorphes pour tous les ordres jusqu'au quatrième inclusivement:

$$a, \tag{1}$$

$$3ac - 5b^2, \tag{2}$$

$$9a^2d - 45abc + 40b^3, \tag{3}$$

$$5a^2e - 35abd + 7ac^2 + 35b^2c. \tag{4}$$

En combinant le cube du deuxième avec le carré du troisième, et en divisant par a, on obtient la forme (analogue au discriminant) de la cubique, mais d'un degré plus élevé,

$$\left.\begin{aligned} &405a^3d^2 - 4050a^2bcd + 1728a^2c^3 \\ &\qquad + 1585ab^2c^2 + 3600ab^3d - 18000b^4c^*. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En combinant le produit de (2) et de (4), linéairement, avec (5), on obtient

$$\left.\begin{aligned} &4800a^2ce - 8000ab^2e - 2835a^2d^2 - 5376ac^3 \\ &\qquad - 5250abcd + 30800b^3d + 11305b^2c^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Si l'on se borne aux lettres a, b, c, d, les formes (1), (2), (3), (5) formeront un système complet de *Grundformen*: si on laisse entrer la nouvelle lettre e, (5) n'est plus irréductible, et le système complet de *Grundformen* est constitué par les formes (1), (2), (3), (4), (6).

Tout cela se passe précisément comme avec les sous-invariants avec les mêmes lettres: les poids des formes sont les mêmes pour les deux systèmes, et la seule différence essentielle entre les deux consiste en ce fait, que les trois dernières formes subissent chacune une élévation d'une unité de degré en passant du système des sous-invariants à celui des réciprocants.

Il est nécessaire d'ajouter quelques mots sur les réciprocants mixtes, qui se distinguent en deux espèces, homogènes et hétérogènes. Comme exemple des premiers, on a la dérivée Schwarzienne $2tb - 3a^2$, laquelle, égalée à zéro, ne donne aucune espèce de singularité, mais signifie seulement qu'au point (x, y) on peut mener une conique qui passera par cinq points consécutifs, en ayant ses deux asymptotes parallèles aux axes, ou bien la forme $tc - 5ab$. Comme exemple de l'autre classe, on a la forme connue $(1 + t^2)\,b - 3ta^2$, dont l'évanouissement (pourvu que x, y soient des coordonnées *rectangulaires*) signifie que le point (x, y) est un point de courbure maximum ou minimum.

* Cette fonction, égalée à zéro, exprime que x, y sont les coordonnées d'un point par où l'on peut faire passer une parabole *cubique* ayant 5 points consécutifs communs à la courbe dont x, y sont les coordonnées.

Nous avons remarqué, par parenthèse, que l'équation

$$(1+t^2)\,b-3ta^2=0$$

indique l'existence d'une singularité au point dont les coordonnées sont les x, y sous-entendus dans t, a, b de l'équation.

Mais, pour que cela soit vrai, il faut introduire la restriction que x, y sont des coordonnées *rectangulaires*.

On peut donner le nom de *réciprocant orthogonal* à tout réciprocant mixte qui jouit de la propriété de rester invariable (sauf l'introduction d'une puissance de t) quand on opère sur x et y une transformation linéaire orthogonale. Cela étant convenu, on peut démontrer facilement que le coefficient différentiel par rapport à t d'un réciprocant est lui-même un réciprocant ou pur ou mixte. La proposition réciproque est aussi vraie, de sorte qu'on a le beau théorème suivant:

Si R et $\dfrac{dR}{dt}$ sont tous les deux réciprocants, alors R est un réciprocant orthogonal.

Par exemple, le réciprocant que nous avons cité plus haut a pour coefficient différentiel par rapport à t la Schwarzienne $2tb-3a^2$; donc c'est un réciprocant orthogonal; et, en effet, il exprime qu'au point (x, y), où l'équation $2tb-3a^2=0$ est satisfaite, on peut appliquer un cercle qui aura un contact du troisième ordre avec la courbe dont x et y sont les coordonnées; au contraire, la Schwarzienne elle-même ne correspond pas à une singularité quelconque, car sa dérivée par rapport à t, c'est-à-dire $2b$, n'est pas un réciprocant.

De même nous avons trouvé qu'en intégrant le réciprocant $2tc-10ab$ par rapport à t, entre les limites t et $-c-15a^3$, la forme résultante

$$(t^2+1)\,c-10abt+15a^3$$

sera un réciprocant et conséquemment un réciprocant orthogonal, de sorte que l'équation

$$(1+t^2)\,c-10abt+15a^3=0$$

sera la condition d'une singularité de la courbe $f(y, x)=0$ qui se rapporte aux points circulaires à l'infini*. Peut-être trouvera-t-on que l'intégrale, par rapport à t, d'un réciprocant mixte quelconque, prise entre des limites convenables, conduira nécessairement à un réciprocant orthogonal. Les singularités d'une courbe peuvent être partagées en trois classes: celles de la première classe seront projectives et peuvent être définies indifféremment au moyen de covariants de formes ternaires ou par des réciprocants purs;

* M. James Hammond, dont on connaît les belles et importantes découvertes dans la théorie invariantive des formes binaires, a trouvé l'intégrale de cette équation, que nous avons donnée dans un discours inaugural, prononcé devant l'Université d'Oxford, lequel va être publié dans le journal anglais *Nature*. [p. 278 below.]

celles de la deuxième classe seront non projectives, mais n'auront affaire qu'avec la ligne à l'infini; les singularités de cette classe seront exprimables au moyen de réciprocants purs, mais non pas au moyen de covariants de formes ternaires. Restent celles de la troisième classe qui non seulement ne sont pas projectives, mais sont quasi métriques en caractère, c'est-à-dire ont des rapports avec les points circulaires à l'infini; les singularités de cette classe sont signalées par l'évanouissement de réciprocants orthogonaux. Les réciprocants mixtes, qui ne sont ni purs ni orthogonaux, comme celui, par exemple, de M. Schwarz, ne répondront à aucune de ces trois espèces de singularités; mais, quoique ne servant pas à représenter une propriété invariable d'une courbe, ils serviront souvent, peut-être toujours, comme bases des réciprocants orthogonaux, c'est-à-dire qu'ils seront les coefficients différentiels par rapport à t de ces derniers.

L'échelle des *protomorphes*, aussi bien dans la théorie des réciprocants purs que dans celle des sous-invariants, joue un rôle si capital, en ce qui concerne la détermination des formes irréductibles, qu'il nous semble indispensable de donner une démonstration rigoureuse de son existence dans l'une et l'autre théorie.

1° Quant aux sous-invariants, soit j l'ordre (c'est-à-dire $j+1$ le nombre des lettres que l'on considère). Si j est pair, on connaît les formes invariantives $ac + \ldots$, $ae + \ldots$, $ag + \ldots$, et l'on peut passer au cas où j est impair. Dans ce cas, le nombre de sous-invariants du poids j et du degré 3 sera

$$(j;\ 3,\ j) - (j-1;\ 3,\ j).$$

Mais il faut démontrer qu'il existe une forme de ce type, dans laquelle le coefficient du produit de a^2 et de la dernière lettre n'est pas nul.

Or je dis que le nombre des formes du type supposé, qui ne contiennent pas cette lettre, sera

$$(j;\ 3,\ j-1) - (j-1;\ 3,\ j-1).$$

Mais $\qquad (j-1;\ 3,\ j) = (j-1;\ 3,\ j-1)$

et, évidemment, $\qquad (j;\ 3,\ j) - (j;\ 3,\ j-1) = 1;$

car les partitions dont le nombre est $(j;\ 3,\ j)$ contiendront toutes les partitions dont le nombre est $(j;\ 3,\ j-1)$ et en plus la partition constituée par j combiné avec des zéros.

Conséquemment il existe un sous-invariant dont un terme sera le produit de a^2 par la dernière des lettres que l'on considère.

2° Quant aux réciprocants purs de l'ordre j, nous avons déjà démontré qu'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(j;\ x,\ j) - (j-1;\ x+1,\ j) > 0$$

en donnant à x une certaine valeur pas plus grande que $j-1$; et, pour démontrer qu'il y aura un réciprocant pur qui contient actuellement un terme

a^{x-1} multiplié par la dernière lettre, on pourrait faire précisément le même raisonnement que nous avons fait ci-dessus pour le cas précédent, et, puisque

$$(j; x, j) - (j-1; x+1, j)$$

excède de l'unité la valeur de $(j; x, j-1) - (j; x+1, j-1)$, on conclura avec certitude l'existence d'un protomorphe pour l'ordre j.

On peut, en général, trouver plusieurs valeurs de x qui rendent $(j; x, j) - (j-1; x+1, j)$ positif; parmi ces valeurs, il est commode d'adopter, comme *protomorphe* par excellence, une quelconque de celles pour lesquelles la valeur de x qui satisfait à cette inégalité est un minimum. Quand la lettre la plus avancée est inférieure à h, il n'y en a qu'un seul qui réponde à cette définition. Ainsi, par exemple, si $j=5$, l'inégalité

$$(5:x)-(4:x+1)>1$$

donne pour x la valeur minimum $x=4$ et, avec l'aide de l'anéantisseur

$$3a^2\delta_b + 10ab\,\delta_c + (15ac+10b^2)\,\delta_d + (21ad+35bc)\,\delta_e + (28ae+56bd+35c^2)\,\delta_f,$$

on obtient le protomorphe

$$45a^3f - 420a^2be - 42a^2cd + 1120ab^2d - 315abc^2 - 1120b^3c.$$

Cela servira pour conduire à la connaissance de tous les réciprocants purs de l'ordre 5, dont le nombre sera au moins égal à celui des *Grundformen* du quantic binaire.

Dans une Communication qui suivra celle-ci, nous nous proposons de donner la théorie des réciprocants doubles ou multiples dont ceux de l'espèce pure sont précisément analogues aux invariants ou sous-invariants de systèmes de formes binaires.

La théorie des doubles réciprocants purs comprend nécessairement, comme cas particulier, l'étude des formes qui déterminent la position des tangentes communes à deux courbes et les points bitangentiels d'une seule.

Dans la remarque que nous avons faite, dans la première Note, sur le même sujet que la Note actuelle, à propos des réciprocants mixtes de la forme

$$[(2tb-3a^2)\,\delta_a + (2tc-4ab)\,\delta_b + (2td-5ac)\,\delta_c + \ldots]^i\,a,$$

nous avons affirmé que tout réciprocant pur ou mixte peut être exprimé en fonction rationnelle et, de plus (quand on fait t égal à l'unité), entière de réciprocants de cette famille ; nous n'avons pas limité, comme nous aurions dû le faire, cette affirmation au cas de réciprocants homogènes : la proposition a besoin d'une certaine modification si on veut la rendre applicable au cas de réciprocants non homogènes; mais nous ne croyons pas nécessaire d'y insister en ce moment. Seulement, il est bon de remarquer que l'existence d'une équation partielle différentielle linéaire, que nous avons trouvée pour les réciprocants *purs*, suffit à établir immédiatement que ces réciprocants seront nécessairement, et sans exception aucune, ou homogènes ou séparables en parties homogènes, dont chacune sera elle-même un réciprocant.