131.

NOUVELLES RECHERCHES SUR LES COVARIANTS.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. XLVII. (1854). pp. 109—125.]

JE me sers de la notation

$$(a_0,\ a_1, \ldots a_n)(x,\ y)^n$$

pour représenter la fonction

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n:$$

en supposant que les coefficients a_0', a_1' &c. soient donnés par l'équation

$$(a_0,\ a_1, \ldots a_n)(\lambda x + \mu y,\ \lambda' x + \mu' y)^n = (a_0',\ a_1', \ldots a_n')(x,\ y)^n,$$

supposée identique par rapport à x, y, soit $\phi(a_0,\ a_1, \ldots a_n;\ x,\ y)$ une fonction des coefficients et des variables, telle que

$$\phi(a_0',\ a_1', \ldots a_n';\quad x,\ y) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p\, \phi(a_0,\ a_1, \ldots a_n;\ \lambda x + \mu y,\ \lambda' x + \mu' y);$$

cette fonction ϕ sera généralement un *Covariant*, et dans le cas particulier où ϕ est fonction des seuls coefficients, un *Invariant* de la fonction donnée.

Je suppose d'abord que les nouveaux coefficients soient donnés par l'équation

$$(a_0,\ a_1, \ldots a_n)(x + \lambda y,\ y)^n = (a_0',\ a_1', \ldots a_n')(x,\ y)^n;$$

cela donne les relations

$$\begin{aligned} a_0' &= a_0, \\ a_1' &= a_1 + \ \lambda a_0, \\ a_2' &= a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0, \\ &\&c. \end{aligned}$$

Il faut donc que le *covariant* ϕ satisfasse à l'équation

$$\phi(a_0', a_1', \ldots a_n';\ x, y) = \phi(a_0, a_1, \ldots a_n;\ x + \lambda y, y),$$

laquelle peut aussi être écrite comme suit :

$$\phi(a_0', a_1', \ldots a_n';\ x - \lambda y, y) = \phi(a_0, a_1, \ldots a_n;\ x, y). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (X)$$

De même, en faisant

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, \mu x + y)^n = (a_0^{\backprime}, a_1^{\backprime}, \ldots a_n^{\backprime})(x, y)^n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a_n^{\backprime} &= a_n, \\ a_{n-1}^{\backprime} &= a_{n-1} + \mu a_n, \\ a_{n-2}^{\backprime} &= a_{n-2} + 2\mu a_{n-1} + a_n, \\ &\&c. \end{aligned}$$

le *covariant* ϕ doit satisfaire aussi à l'équation

$$\phi(a_0^{\backprime}, a_1^{\backprime}, \ldots a_n^{\backprime};\ x, -\mu x + y) = \phi(a_0, a_1, \ldots a_n;\ x, y); \quad \ldots\ldots (Y)$$

et réciproquement, toute fonction ϕ homogène par rapport aux coefficients et aussi par rapport aux variables, qui satisfait à ces équations (X, Y), sera un *covariant* de la fonction donnée.

Examinons d'abord l'équation (X) que je représente par $\phi' = \phi$. Soit pour le moment, $a_1' - a_1 = \lambda\alpha_1$, $a_2' - a_2 = \lambda\alpha_2$, &c., alors on aura, comme à l'ordinaire, l'équation symbolique

$$\phi' = e^{\lambda(\alpha_1\partial_{a_1} + \alpha_2\partial_{a_2} \ldots + \alpha_n\partial_{a_n} - y\partial_x)}\phi,$$

où les quantités a_1, a_2, &c., en tant qu'elles entrent dans α_1, α_2, &c., ne doivent pas être affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2}, &c. de la différentiation. En substituant les valeurs de α_1, α_2, ..., et en ordonnant selon les puissances de λ, cette équation donne

$$\phi' = e^{\lambda\underset{\cdot}{\square} + \lambda^2\underset{\cdot}{\square}_1 \ldots + \lambda^n\underset{\cdot}{\square}_{n-1} - \lambda y\partial_x}\phi,$$

où les symboles $\underset{\cdot}{\square}$, $\underset{\cdot}{\square}_1$, &c. sont donnés par

$$\begin{aligned} \underset{\cdot}{\square} \quad &= a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial_{a_2} \ldots + na_{n-1}\partial_{a_n}, \\ \underset{\cdot}{\square}_1 \quad &= a_0\partial_{a_2} + 3a_1\partial_{a_3} \ldots + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}a_{n-2}\partial_{a_n}, \\ &\vdots \\ \underset{\cdot}{\square}_{n-1} &= a_0\partial_{a_n}, \end{aligned}$$

et les quantités a_1, a_2, &c., en tant qu'elles entrent dans les symboles $\underset{\cdot}{\square}$, $\underset{\cdot}{\square}_1$, &c., ne doivent pas être affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2}, &c. de la différentiation. Il est assez remarquable que l'équation symbolique peut aussi être écrite sous la forme plus simple

$$\phi' = e^{\lambda(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)}\phi,$$

où les quantités a_1, a_2, ..., en tant qu'elles entrent dans le symbole $\underset{\cdot}{\square}$, sont censées affectées des symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2}, &c. de la différentiation; de manière que dans le développement, $\underset{\cdot}{\square}^2 . \phi$ par exemple, signifie $\underset{\cdot}{\square} . \underset{\cdot}{\square}\phi$, et ainsi de suite. Je ne m'arrête pas sur ce point, parce que pour ce que je vais démontrer de plus important, il suffit de faire attention à la *première* puissance de λ. D'ailleurs l'intelligibilité des équations dont il s'agit, sera facilitée en faisant les développements et en comparant les puissances correspondantes de λ. Cela donne par exemple:

$$\underset{\cdot}{\square}^2 = \underset{\cdot}{\square}^2 + 2\underset{\cdot}{\square}_1, \quad \underset{\cdot}{\square}^3 = \underset{\cdot}{\square}^3 + 3\underset{\cdot}{\square}\,\underset{\cdot}{\square}_1 + 6\underset{\cdot}{\square}_2, \text{ \&c.}$$

où les symboles $\underset{\cdot}{\square}^2$, $\underset{\cdot}{\square}^3$ &c. à gauche de ces équations dénotent la double, triple, &c. répétition de l'opération $\underset{\cdot}{\square}$, tandis qu'à côté droit des équations, les quantités a_1, a_2, ... &c., en tant qu'elles entrent dans les symboles $\underset{\cdot}{\square}$, $\underset{\cdot}{\square}_1$, &c. sont censées ne pas être affectées des symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2}, &c. de la différentiation. Dans la suite, si le contraire n'est pas dit, je me servirai des expressions $\underset{\cdot}{\square}^2$, $\underset{\cdot}{\square}^3$, &c. pour dénoter les répétitions de l'opération, et de même pour les combinaisons de deux ou de plusieurs symboles.

Cela étant, l'équation $\phi' = e^{\lambda(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)}\phi = \phi$ donne

$$\phi = \{1 + \lambda(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x) + \frac{\lambda^2}{1.2}(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)^2 + \ldots\}\phi,$$

où $(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)^2 . \phi$ (je le répète) équivaut à $(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x) . (\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\phi$; et ainsi de suite. Il faut d'abord que le coefficient de λ s'évanouisse, ce qui donne $(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\phi = 0$; et cette condition étant satisfaite, les coefficients des puissances supérieures s'évanouissent d'elles-mêmes; c'est-à-dire, l'équation (X) sera satisfaite en supposant que ϕ satisfait à l'équation aux différences partielles $(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\phi = 0$.

En posant

$$\begin{aligned}
\overset{\cdot}{\square} &= a_n\partial_{a_{n-1}} + 2a_{n-1}\partial_{a_{n-2}} \ldots + na_1\partial_{a_0}, \\
\overset{\cdot}{\square}_1 &= a_n\partial_{a_{n-2}} + 3a_{n-1}\partial_{a_{n-3}} \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2\partial_{a_0}, \\
&\vdots \\
\overset{\cdot}{\square}_{n-1} &= a_n\partial_{a_0},
\end{aligned}$$

on fera un raisonnement analogue par rapport à l'équation (Y); et il sera ainsi démontré que ϕ doit satisfaire aussi à l'équation à différences partielles $(\overset{\cdot}{\square} - x\partial_y)\phi = 0$; donc enfin, on a le suivant

THÉORÈME. Tout *covariant* ϕ de la fonction

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n,$$

satisfait aux deux équations à différences partielles

$$(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\phi = 0, \quad (\overset{\cdot}{\square} - x\partial_y)\phi = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

où

$$\begin{aligned}
\underset{\cdot}{\square} &= a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial_{a_2} \ldots + na_{n-1}\partial_{a_n}, \\
\overset{\cdot}{\square} &= na_1\partial_{a_0} + (n-1)a_2\partial_{a_1} \ldots + a_n\partial_{a_{n-1}};
\end{aligned}$$

et réciproquement toute fonction, homogène par rapport aux coefficients et par rapport aux variables, qui satisfait à ces équations, est un *covariant* de la fonction donnée.

Par exemple, l'*invariant* $\phi = ac - b^2$ de la fonction $ax^2 + 2bxy + cy^2$ satisfait aux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c)\phi = 0, \quad (2b\partial_a + c\partial_b)\phi = 0,$$

et le *covariant* $\phi = (ac - b^2)x^2 + (a\partial - bc)xy + (b\partial - c^2)y^2$ de la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ satisfait aux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d - y\partial_x)\phi = 0, \quad (3d\partial_c + 2c\partial_b + b\partial_a - x\partial_y)\phi = 0.$$

Il est clair qu'en ne considérant que les fonctions qui restent les mêmes en prenant dans un ordre inverse les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ et les variables x, y, respectivement, les *covariants* seront définis par l'une ou l'autre des équations (A), et qu'il n'est plus nécessaire de considérer les deux équations. Cela posé, on trouve assez facilement les *covariants* par la méthode des coefficients indéterminés. Mais il y a à remarquer une circonstance de la plus grande importance dans cette théorie, savoir, que l'on obtient de cette manière un nombre d'équations plus grand qu'il n'en faut pour déterminer les coefficients dont il s'agit. Ces équations cependant, étant liées entre elles, se réduisent au nombre nécessaire d'équations indépendantes.

Cherchons par exemple pour la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ un *invariant* ϕ de la forme

$$\phi = Aa^2d^2 + Babcd + Cac^3 + Cb^3d + Db^2c^2,$$

contenant les quatre coefficients indéterminés A, B, C, D. En substituant dans l'équation $(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d)\,\phi = 0$, on obtient

$$(3C + 2B)\,ab^2d + (3B + 6C + 2D)\,abc^2 + (6A + B)\,ac^2d + (3C + 4D)\,b^3c = 0\,;$$

or les *quatre* équations données par cette condition, se réduisent à *trois* équations indépendantes, de sorte qu'en faisant par exemple $A = -1$, les autres coefficients seront déterminés, et l'on obtient le résultat connu:

$$\phi = -a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2.$$

La circonstance mentionnée ci-dessus s'oppose à résoudre de la manière dont il s'agit, le problème de trouver le nombre des *invariants* d'un ordre donné: problème qui a toujours bravé mes efforts.

Avant d'entamer la solution des équations (A), je vais démontrer quelques propriétés générales des *covariants*, et des *invariants*. Pour abréger, je me servirai du mot *pesanteur*, en disant que les coefficients a_0, a_1, &c., ont respectivement les *pesanteurs* $0 - \frac{1}{2}n$, $1 - \frac{1}{2}n$, &c., que les variables x, y ont respectivement les pesanteurs $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, et que la *pesanteur* d'un produit est égale à la somme des *pesanteurs* des facteurs. Cela posé, je dis que tout *covariant* est composé de termes dont chacun à la pesanteur *zéro*. Pour démontrer cela, j'écris:

$$(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)(\dot{\square} - x\partial_y) = \underset{\cdot}{\square}\dot{\square} - y\partial_x\dot{\square} - x\partial_y\underset{\cdot}{\square} + xy\,\partial_x\partial_y + y\partial_y,$$

$$(\dot{\square} - x\partial_y)(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x) = \dot{\square}\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x\dot{\square} - x\partial_y\underset{\cdot}{\square} + xy\,\partial_x\partial_y + x\partial_x;$$

cela donne

$$(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)(\dot{\square} - x\partial_y) - (\dot{\square} - x\partial_y)(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x) = \underset{\cdot}{\square}\dot{\square} - \dot{\square}\underset{\cdot}{\square} + y\partial_y - x\partial_x;$$

or, en faisant attention aux valeurs de $\underset{\cdot}{\square}$, $\dot{\square}$, savoir

$$\underset{\cdot}{\square}\dot{\square} = (\underset{\cdot}{\square}\dot{\square}) + na_0\partial_{a_0} + 2(n-1)a_1\partial_{a_1} \ldots + n\,1\,a_{n-1}\partial_{a_{n-1}},$$

$$\dot{\square}\underset{\cdot}{\square} = (\dot{\square}\underset{\cdot}{\square}) + \qquad n\,.\,1\,.\,a_1\partial_{a_1} \ldots + 2(n-1)a_{n-1}\partial_{a_{n-1}} + 1\,.\,na_n\partial_{a_n},$$

où, en formant les produits $(\underset{\cdot}{\square}\dot{\square})$, $(\dot{\square}\underset{\cdot}{\square})$, les quantités $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont censées non affectées par les symboles $\partial_{a_0}, \partial_{a_1}, \ldots \partial_{a_n}$ de la différentiation, on en tire

$$\begin{aligned}\underset{\cdot}{\square}\dot{\square} - \dot{\square}\underset{\cdot}{\square} &= n\,a_0\partial_{a_0} + (n-2)a_1\partial_{a_1} \ldots - na_n\partial_{a_n}\\ &= -2\left\{(0-\tfrac{1}{2}n)a_0\partial_{a_0} + (1-\tfrac{1}{2}n)a_1\partial_{a_1} \ldots + (n-\tfrac{1}{2}n)a_n\partial_{a_n}\right\} = -2\Theta,\end{aligned}$$

en représentant par Θ l'expression symbolique entre les crochets. De là enfin on obtient:

$$(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)(\dot{\square} - x\partial_y) - (\dot{\square} - x\partial_y)(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x) = -2\,(\Theta + \tfrac{1}{2}x\partial_x - \tfrac{1}{2}y\partial_y).$$

Or en supposant les deux parties de cette équation symbolique appliquées au *covariant* ϕ_1, la partie gauche de l'équation s'évanouit en vertu des équations (A) et l'équation se réduit à

$$(\Theta + \tfrac{1}{2}x\partial_x - \tfrac{1}{2}y\partial_y)\phi = 0\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,(B)$$

ce qui est une nouvelle équation à différences partielles, à laquelle satisfait le *covariant* ϕ. Il est aisé de voir que cette équation exprime le théorème énoncé ci-dessus, savoir que tout *covariant* est composé de termes de la pesanteur *zéro*.

Il suit de là, en considérant un *covariant*

$$\phi = (A_0,\ A_1,\ \ldots\ A_s)(x,\ y)^s$$

qu'un coefficient quelconque A_i aura la pesanteur $i - \frac{1}{2}s$, ou bien que les *pesanteurs* forment une progression arithmétique aux différences 1, et dont les termes extrêmes sont $-\frac{1}{2}s$, $+\frac{1}{2}s$.

Substituons maintenant cette valeur de ϕ dans les équations (A). La première équation donne d'abord:

$$\underset{\cdot}{\square}A_0 = 0,\quad \underset{\cdot}{\square}A_1 = A_0,\quad \underset{\cdot}{\square}A_2 = 2A_1, \ldots\ \underset{\cdot}{\square}A_s = sA_{s-1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Cela est un système qui équivaut aux deux équations

$$\underset{\cdot}{\square}^s\,.\,A_s = 0,\quad \phi = y^s\,.\,e^{\underset{\cdot}{\square}\frac{x}{y}}\,.\,A_s. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha')$$

De même, la seconde équation donne

$$\dot{\square} A_s = 0, \quad \dot{\square} A_{s-1} = A_s, \quad \dot{\square} A_{s-2} = 2A_{s-1}, \ldots \quad \dot{\square} A_0 = sA_1 : \ldots\ldots\ldots(\beta)$$

système qui équivaut aux deux équations

$$\dot{\square}^{s+1} A_0 = 0, \quad \phi = x^s e^{\dot{\square}\frac{y}{x}} . A_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta')$$

On voit que A_0 satisfait aux deux équations

$$\underset{\cdot}{\square} A_0 = 0, \quad \dot{\square}^{s+1} A_0 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma)$$

et en supposant que cette quantité soit connue, on trouve les autres coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_s$ par la seule différentiation, au moyen des équations (β). Or cela étant, je dis que les équations (α) seront satisfaites d'elles-mêmes. En effet: des équations $\underset{\cdot}{\square} A_0 = 0$, $\dot{\square} A_0 = sA_1$ on tire $\dot{\square}\underset{\cdot}{\square} A_0 = 0$, $\underset{\cdot}{\square}\dot{\square} A_0 = s\underset{\cdot}{\square} A_1$, et de là $(\dot{\square}\underset{\cdot}{\square} - \underset{\cdot}{\square}\dot{\square}) A_0 = -s\underset{\cdot}{\square} A_1$.

Or nous avons déjà vu que $\dot{\square}\underset{\cdot}{\square} - \underset{\cdot}{\square}\dot{\square} = 2\Theta$, et l'équation ($B$) donne $\Theta . A_0 + \frac{1}{2}s . A_0 = 0$: donc l'équation $(\dot{\square}\underset{\cdot}{\square} - \underset{\cdot}{\square}\dot{\square}) A_0 = -s\underset{\cdot}{\square} A_1$ se réduit à $A_0 = \underset{\cdot}{\square} A_1$: équation du système ($\alpha$). De la même manière on obtient les autres équations de ce système. On peut dire que l'on aurait pu déterminer également le coefficient A_s au moyen des équations

$$\dot{\square} A_s = 0, \quad \underset{\cdot}{\square}^s . A_s = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta)$$

et de là les coefficients $A_{s-1}, \ldots A_0$ par les équations (α).

Prenons par exemple un *covariant* $(A_0, A_1, A_2)(x, y)^2$ de la fonction cubique $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. A_0 doit satisfaire aux deux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d) A_0 = 0, \quad (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c)^3 A_0 = 0.$$

Ces équations sont en effet satisfaites en mettant $A_0 = ac - b^2$. On a donc les équations

$$2A_1 = (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c) A_0, \quad A_2 = (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c) A_1,$$

pour déterminer A_1, A_2; ce qui donne $2A_1 = ad - bc$, $A_2 = bd - c^2$, et on est conduit ainsi au *covariant* mentionné ci-dessus, savoir à

$$(ac - b^2) x^2 + (ad - bc) xy + (bd - c^2) y^2.$$

Soit maintenant

$$x^n \partial_{a_n} - x^{n-1} y \partial_{a_{n-1}} \ldots \pm y^n \partial_{a_0} = \Lambda,$$

on aura

$$\underset{\cdot}{\square}\Lambda = (\underset{\cdot}{\square}\Lambda), \quad \Lambda\underset{\cdot}{\square} = (\Lambda\underset{\cdot}{\square}) - y \frac{\partial \Lambda}{\partial x},$$

où dans $(\underset{\cdot}{\Box}\Lambda)$, $(\Lambda\underset{\cdot}{\Box})$ les quantités a_0, a_1, ... sont censées non affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2}, &c. de la différentiation. Cela donne

$$\underset{\cdot}{\Box}\Lambda - \Lambda\underset{\cdot}{\Box} = y\,\frac{d\Lambda}{\partial x}.$$

Or $\partial_x\Lambda - \Lambda\partial_x = \dfrac{d\Lambda}{\partial x}$, donc:

$$(\underset{\cdot}{\Box} - y\partial_x)\,\Lambda = \Lambda\,(\underset{\cdot}{\Box} - y\partial_x),$$

et de même:

$$(\dot{\Box} - x\partial_y)\,\Lambda = \Lambda\,(\dot{\Box} - x\partial_y).$$

Appliquons ces deux équations symboliques à un *covariant* ϕ. Les termes à droite s'évanouissent à cause des équations (A), et l'on obtient les deux équations

$$(\underset{\cdot}{\Box} - y\partial_x)\,\Lambda\phi = 0, \quad (\dot{\Box} - x\partial_y)\,\Lambda\phi = 0,$$

c'est-à-dire: $\Lambda\phi$ sera aussi un *covariant* de la fonction donnée. Par exemple de l'*invariant*

$$\phi = -a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2,$$

on tire le *covariant*

$$(x^3\partial_d - x^2y^2\partial_c + xy^2\partial_b - y^3\partial_a)\,\phi\,;$$

savoir:

$$\begin{aligned}
&(-a^2d + 3abc - 2b^3\ )x^3\\
&-3\,(\ abd - 2ac^2 + b^2c)x^2y\\
&+3\,(\ acd - 2b^2d + bc^2)xy^2\\
&-\ (-ad^2 + 3acd - 2c^3\ )y^3\,;
\end{aligned}$$

résultat déjà connu.

Essayons maintenant à intégrer les équations (A); savoir:

$$(\underset{\cdot}{\Box} - y\partial_x)\,\phi = 0, \quad (\dot{\Box} - x\partial_y)\,\phi = 0.$$

Pour intégrer la première, je reviens à une notation dont je me suis déjà servi dans ce mémoire et j'écris

$$\begin{aligned}
a_0' &= a_0,\\
a_1' &= a_1 + \lambda a_0,\\
a_2' &= a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0,\\
&\ \vdots\\
a_n' &= a_n + n\lambda a_{n-1} \ldots + \lambda^n a_0.
\end{aligned}$$

En faisant $\lambda = -\dfrac{a_1}{a_0}$, ce qui donne $a_0' = 0$, on voit sans peine que l'on satisfera à l'équation, en mettant pour ϕ une fonction quelconque de quantités a_0', a_1', ... a_n', $x + \lambda y$, y; le nombre de ces quantités étant $n+2$. Et cela est la solution générale de l'équation.

Ce résultat doit être substituée dans la seconde équation, savoir dans $(\square - x\partial_y)\phi = 0$. Pour cela, imaginons que les quantités a_0, a_1, ... a_n, x, y soient exprimées en fonction de a_0', a_2', ... a_n', x, y et a_1; puisque ϕ est fonction des seules quantités a_0', a_2' ... a_n', x, y, l'équation résultante doit être satisfaite, quelle que soit la valeur de a_1. Or on trouve que cette équation résultante a la forme $L + Ma_1 = 0$: donc il faut qu'on ait à la fois les deux équations $L = 0$, $M = 0$. (Je renvoie à une note les détails de la réduction.) En dernière analyse, et en remettant dans les équations $L = 0$, $M = 0$ les quantités a_0, a_2, ..., a_n au lieu de a_0', a_2', ..., a_n', je trouve les résultats suivants très simples, savoir, en écrivant

$$\bar{\Theta} = (0 - \tfrac{1}{2}n)a_0\partial_{a_0} + \quad (2 - \tfrac{1}{2}n)a_2\partial_{a_2} + (3 - \tfrac{1}{2}n)a_3\partial_{a_3} \dots + (n - \tfrac{1}{2}n)a_n\partial_{a_n}:$$

$${}^{\cdot}\underset{\bullet}{\square} = \quad 3a_2\partial_{a_3} + \quad 4a_3\partial_{a_4} \dots \quad + na_{n-1}\partial_{a_n},$$

$${}^{\cdot}\dot{\square} = (n-2)a_3\partial_{a_2} + (n-3)a_4\partial_{a_3} \dots \quad + a_n\partial_{a_{n-1}}.$$

Les équations dont il s'agit sont

$$\{(n-1)a_2({}^{\cdot}\underset{\bullet}{\square} - y\partial_x) - a_0({}^{\cdot}\underset{\bullet}{\square} - x\partial_y)\}\bar{\phi} = 0, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(C)$$

$$(\bar{\Theta} + \tfrac{1}{2}x\partial_x - \tfrac{1}{2}y\partial_y)\bar{\phi} = 0, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(D)$$

et il y a à remarquer qu'on obtient l'équation (C) en éliminant entre les équations (A) le terme $\partial_{a_1}\phi$; et puis, en mettant $a_1 = 0$, on tire l'équation (D) de l'équation (B), en y mettant de même $a_1 = 0$. Il y a à remarquer aussi que la fonction $\bar{\phi}$ qui satisfait aux équations (C, D), est ce que devient un *covariant* quelconque ϕ, en y mettant $a_1 = 0$. On obtient d'abord la valeur générale en changeant a_0, a_2, ..., a_n en a_0', a_2', ..., a_n', et en mettant après pour ces quantités leurs valeurs en termes de a_0, a_1, a_2, ..., a_n. La solution du problème des *covariants* serait donc effectuée si l'on pourrait intégrer les équations (C, D).

Or la quantité a_0 entre dans l'équation (C) comme constante, et l'on voit sans peine que cette équation pourra être intégrée en mettant $a_0 = 1$; puis, en écrivant dans le résultat $\dfrac{a_2}{a_0}$, $\dfrac{a_3}{a_0}$, ... $\dfrac{a_n}{a_0}$ au lieu de a_2, a_3, ... a_n, et en multipliant par une puissance quelconque de a_0, le résultat ainsi obtenu, serait composé de termes de la même *pesanteur*; et en choisissant convenablement la puissance de a_0, on pourrait faire en sorte que ces termes fussent de la *pesanteur* zéro. Mais l'équation (D) ne fait qu'exprimer que la fonction $\bar{\phi}$ est composée de termes de la *pesanteur* zéro; le résultat obtenu de la manière dont il s'agit, satisfera donc par lui-même à l'équation (D), et il est permis de ne faire attention qu'à l'équation (C). Dans la pratique on intégrera cette équation en ayant soin de faire en sorte que les solutions soient de la *pesanteur* zéro, ce qui peut être effectué en multipliant par une puissance convenablement choisie de a_0. Et puisqu'en faisant abstraction de cette quantité a_0, l'équation (C) contient $n+1$ quantités variables, savoir $a_2, a_3, \ldots, a_n, x, y$, la fonction $\overline{\phi}$ sera une fonction arbitraire de n quantités; et en supposant que cette fonction ne contienne pas les variables x, y (cas auquel $\overline{\phi}$ serait ce que deviendrait un *invariant* quelconque en y mettant $a_1=0$), $\overline{\phi}$ sera une fonction arbitraire de $n-2$ quantités.

La même chose sera évidemment vrai, si l'on rétablit la valeur générale de a_1: donc tout *invariant* sera une fonction d'un nombre $n-2$ d'*invariants*, que l'on pourra prendre pour primitifs; et tout *covariant* sera une fonction de ces *invariants* primitifs de la fonction donnée (laquelle est évidemment un de ses propres *covariants*), et d'un autre *covariant* que l'on peut prendre pour primitif. Cela ne prouve nullement (ce qui est néanmoins vrai pour les *invariants*, à ce que je crois) que tout invariant est une fonction rationnelle et intégrale de $n-2$ *invariants* convenablement choisis, et que tout *covariant* est une fonction rationnelle et intégrale (ce qui en effet n'est pas vrai) de ces *invariants*, de la fonction donnée, et d'un *covariant* convenablement choisi.

Le cas $n=2$ fait dans cette théorie une exception. On sait qu'il existe dans ce cas un *invariant*, savoir $ac-b^2$ qui, selon la théorie générale, ne doit pas exister, et il n'existe pas de *covariant*, hormis la fonction donnée elle-même. Or cette particularité peut être aisément expliquée.

Le cas $n=3$ rentre, comme cela doit être, dans la théorie générale. En effet, il existe dans ce cas un *invariant*, savoir la fonction $-a^2d^2+6abcd+4ac^3-4b^3d+3b^2c^2$ ci-dessus trouvée, et tout *covariant* de la fonction peut être exprimé par cet *invariant* de la fonction donnée elle-même, et par le *covariant* $(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2$ ci-dessus trouvé. Il en est ainsi par exemple pour le *covariant* de troisième ordre par rapport aux variables et aux coefficients; car en représentant par Φ le *covariant* dont il s'agit, par H le *covariant* du second ordre, par u la fonction donnée $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$ et par ∇ l'*invariant*, on obtient l'équation identique $\Phi^2+\square u^2=-4H^3$. Je fais mention de cette équation, parce que je crois qu'elle n'est pas généralement connue.

Je vais donner maintenant quelques exemples des équations (C et D). Soit d'abord $n=3$, et supposons que $\overline{\phi}$ ne contienne pas les variables x, y: $\overline{\phi}$ sera une fonction de a, c, d, et les équations reviendront à

$$(6c^2\partial_d - ad\partial_c)\overline{\phi}=0, \quad (-3a\partial_a + c\partial_c + 3d\partial_d)\overline{\phi}=0.$$

Les quantités ac^3, a^2d^2, dont chacune est de la pesanteur *zéro*, satisfont par là à la seconde équation, et en mettant $\overline{\phi}=Aa^2d^2+Cac^3$, on obtient $4A-C=0$, en vertu de la première équation; ou en faisant $A=-1$, cela donne $C=-4$; de là on tire $\overline{\phi}=-a^2d^2-4ac^3$, et la solution générale est $\overline{\phi}=F(-a^2d^2-4ac^3)$, F étant une fonction quelconque. La formule plus générale $\overline{\phi}=F(a, -a^2d^2-4ac^3)$ satisferait sans doute à la première équation, mais pour que cette valeur satisfasse à la seconde équation, il faut que la quantité a, en tant qu'elle n'est pas contenue dans $-a^2d^2-4ac^3$, disparaisse. Ainsi la valeur donnée ci-dessus, savoir $\overline{\phi}=F(-a^2d^2-4ac^3)$, est la solution la plus générale des deux équations.

Écrivons a, $c-\dfrac{b^2}{a}$, $d-\dfrac{3bc}{a}+\dfrac{2b^3}{a^2}$ au lieu de a, c, d, et ϕ au lieu de $\overline{\phi}$, nous obtenons:

$$\phi=F(-a^2d^2+6abcd-4ac^3-4b^3d+3b^2c^2);$$

ce qui est l'expression la plus générale des *invariants* de la fonction $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+y^3$, et l'on voit que tous ces *invariants* sont fonctions d'une seule quantité que nous avons prise ci-dessus pour l'*invariant* de la fonction de troisième ordre dont il s'agit.

Soit encore $n=4$, $\overline{\phi}$ sera une fonction de a, c, d, e qui satisfait aux équations

$$\{2ad\partial_c+(ae-9c^2)\,\partial_d-12cd\partial_e\}\,\overline{\phi}=0,$$

$$\{-2a\partial_a+d\partial_d+2e\partial_e\}\,\overline{\phi}=0,$$

dont la solution générale est $\overline{\phi}=F(ae+3c^2,\ ace-ad^2-c^3)$, F étant une fonction quelconque. On voit par là qu'il n'existe que les *invariants* indépendants $ae-4cd+3c^2$, $ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3$. Ce résultat est connu depuis longtemps.

Soit enfin $n=5$, $\overline{\phi}$ sera une fonction de a, c, d, e, f qui satisfait aux équations

$$\{3ad\partial_c+(2ae-12c^2)\,\partial_d+(af-16cd)\,\partial_e-20ce\partial_f\}\,\overline{\phi}=0,$$

$$\{-\tfrac{5}{2}a\partial_a-\tfrac{1}{2}c\partial_c+\tfrac{1}{2}d\partial_d+\tfrac{3}{2}e\partial_e+\tfrac{5}{2}f\partial_f\}\,\overline{\phi}=0.$$

On sait qu'il y en a une solution de quatrième ordre par rapport aux quantités a, c, d, e, f; et en prenant la fonction la plus générale dont les termes ont la *pesanteur* zéro, on aura:

$$\overline{\phi}=Aa^2f^2+Bacdf+Cace^2+Dad^2e+Ec^3e+Fc^2d^2:$$

fonction qui satisfait d'elle-même à la seconde équation. En substituant cette valeur dans la première équation, on trouvera que les coefficients A, B, &c. doivent satisfaire à ces *sept* équations:

$$2B+2C-40A=0,\quad 3B+D=0,\quad 3C+4D=0,\quad -12B+E=0,$$

$$9E-24D+4F-32C-20B=0,\quad 6F-16D=0,\quad -24F-16E=0,$$

qui se réduisent cependant (ce que l'on n'aurait pas facilement deviné par la forme des équations) à *cinq* équations indépendantes. En faisant donc $A=1$, on trouve aisément les autres coefficients B, C, &c. et on obtient ainsi:

$$\overline{\phi}=a^2f^2+4acdf+16ace^2-12ad^2e+48c^3e-32c^2d^2:$$

valeur qui peut être tirée d'une formule présentée dans mon mémoire sur les hyperdéterminants, [16], en y faisant $b=0$.

J'ai donné cet exemple pour faire voir qu'il serait impossible de déduire du nombre supposé connu des coefficients indéterminés qui correspondent à un ordre donné, le nombre des *invariants* de ce même ordre. Il est donc inutile de pousser plus loin cette discussion.

Note 1 *sur l'intégration des équations* (*A*).

En écrivant comme ci-dessus :

$$\underset{\cdot}{\square} = a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial a_{a_2} \ldots \quad + na_{n-1}\partial_{a_n},$$

$$\overset{\cdot}{\square} = na_1\partial_{a_0} + (n-1)a_2\partial_{a_1} \ldots + a_n\partial_{a_{n-1}},$$

il s'agit de trouver une quantité ϕ, fonction de $a_0, a_1, \ldots a_n$, x et y qui satisfasse à la fois aux équations

$$(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\,\phi = 0,$$

$$(\overset{\cdot}{\square} - x\partial_y)\,\phi = 0.$$

Pour intégrer ces équations, j'écris, comme plus haut :

$$a_0{}' = a_0,$$

$$a_1{}' = a_1 + \lambda a_0,$$

$$a_2{}' = a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0,$$

$$\vdots$$

$$a_n{}' = a_n + n\lambda a_{n-1} \ldots \quad + \lambda^n a_0,$$

et aussi $x' = x - \lambda y$, $y' = y$. Cela posé, je fais remarquer d'abord que $\dfrac{da_1{}'}{d\lambda} = a_0{}'$, $\dfrac{da_2{}'}{d\lambda} = 2a_1{}'$, et ainsi de suite. En considérant λ comme fonction quelconque de $a_0, a_1, \ldots a_n$, et en supposant que ϕ soit une fonction de $a_0{}', a_1{}', \ldots a_n{}', x', y'$, on parvient assez facilement à l'équation identique $(\underset{\cdot}{\square} - y\partial_x)\phi = (1 + \underset{\cdot}{\square}\lambda)\,(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\phi$, où $\underset{\cdot}{\square}'$ est ce que devient $\underset{\cdot}{\square}$, en y écrivant $a_0{}', a_1{}', \ldots a_n{}'$ au lieu de $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Nous pouvons donc satisfaire à la première équation, en déterminant λ au moyen de $1 + \underset{\cdot}{\square}\lambda = 0$: équation qui serait satisfaite en écrivant $\lambda = -\dfrac{a_1}{a_0}$, ou, si l'on veut, en déterminant λ par $a_1{}' = 0$. Donc, en supposant toujours que λ ait cette valeur, ϕ sera une fonction quelconque de $a_0{}', a_2{}', \ldots a_n{}', x', y'$, c'est-à-dire d'un nombre $n+2$ de quantités. Ce sera donc là (comme on aurait pu facilement prévoir), la solution générale de la première équation. Or en considérant ϕ comme fonction de $a_0{}', a_2{}', \ldots a_n{}'$, x', y', ou, si l'on veut, de $a_0{}', a_1{}', a_2, \ldots a_n{}', x', y'$ (où $a_1{}' = a_1 + \lambda a_0 = 0$), et en substituant cette valeur dans l'équation $(\dot{\square} - x\partial_y)\phi = 0$, on voit d'abord que la variation de la quantité λ fournit au résultat le terme

$$\left(na_1\frac{d\lambda}{da_0} + (n-1)a_2\frac{d\lambda}{da_1}\right)(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\,\phi\,;$$

et puisque $na\dfrac{d\lambda}{da_0} + (n-1)a_2\dfrac{d\lambda}{da_1}$ se réduit à $n\,\dfrac{a_1^{\,2}}{a_0^{\,2}} - (n-1)\,\dfrac{a_0a_2}{a_0^{\,2}}$, ou enfin à $\lambda^2 - \dfrac{(n-1)a_2'}{a_0}$, ce terme devient

$$\left(\lambda^2 - \frac{(n-1)\,a_2'}{a_0}\right)(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'}).$$

Le terme $-x'\partial_y\,.\,\phi$ se réduit à $-(x'+\lambda y')(-\lambda\partial_{x'} + \partial_{y'})\phi$, savoir à

$$(-x'\partial_{y'} + \lambda^2 y'\partial_{x'} + \lambda x'\partial_{x'} - \lambda y'\partial_{y'})\,\phi,$$

et en mettant pour un moment

$$\begin{aligned} M = \;& na_1(\partial_{a_0'} + \lambda\partial_{a_1'} \ldots\ldots + \lambda^n\,\partial_{a_n'}) \\ & + (n-1)\,a_2(\quad\partial_{a_1'} \ldots\ldots + n\lambda^{n-1}\,\partial_{a_n'}) \\ & \;\vdots \\ & + a_n(\quad\partial_{a_{n-1}'} + n\lambda\,\partial_{a_n'}), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(\dot{\square} - x\partial_y)\,\phi = M\phi + \left(\lambda^2 - \frac{(n-1)a_2'}{a_0}\right)(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\,\phi + (-x'\partial_{y'} + \lambda^2 y'\partial_{x'} + \lambda x'\partial_{x'} - \lambda y'\partial_{y'})\,\phi,$$

c'est-à-dire

$$(\dot{\square} - x\partial_y)\,\phi = (M - x'\partial_{y'})\,\phi + \lambda^2\underset{\cdot}{\square}'\,\phi - \frac{(n-1)a_2'}{a_0'}(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\,\phi + \lambda(x'\partial_{x'} - y'\partial_{y'})\,\phi.$$

Or en supposant que $\dot{\square}'$ est ce que devient $\dot{\square}$ en y écrivant a_0', a_1', ... a_n' au lieu de a_0, a_1, ... a_n, et en posant

$$\Theta' = (0 - \tfrac{1}{2}n)\,a_0'\partial_{a_0'} + (1 - \tfrac{1}{2}n)\,a_1'\partial_{a_1'} + \ldots (n - \tfrac{1}{2}n)\,a_n'\partial_{a_n'},$$

on obtient, après avoir fait une réduction un peu pénible :

$$M\phi + \lambda^2\underset{\cdot}{\square}'\phi = \dot{\square}'\phi + 2\lambda\Theta'\phi,$$

(en effet les coefficients de $\partial_{a_0'}\phi$, $\partial_{a_1'}\phi$ &c. aux deux côtés de cette équation deviennent les mêmes après des réductions convenables.) Donc enfin on a

$$(\dot{\square} - x\partial_y)\,\phi = (\dot{\square}' - x'\partial_{y'})\,\phi - \frac{(n-1)\,a_2'}{a_0'}(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\,\phi + 2\lambda\,(\Theta' + \tfrac{1}{2}x'\partial_{x'} - \tfrac{1}{2}y'\partial_{y'})\,\phi = 0,$$

ou bien, puisque cette équation doit être satisfaite indépendamment de la quantité λ (qui seule contient a_1), elle se décompose dans les deux équations

$$\{a_0'(\dot{\square} - x'\partial_{y'}) - (n-1)\,a_2'(\underset{\cdot}{\square}' - y'\partial_{x'})\}\,\phi = 0,$$

$$\{\Theta' + \tfrac{1}{2}x'\partial_{x'} - \tfrac{1}{2}y'\partial_{y'}\}\,\phi = 0,$$

lesquelles, en y mettant d'abord $a_1' = 0$, puis en remettant $a_0, a_2, \ldots, a_n, x, y$ au lieu de $a_0', a_2', \ldots, a_n, x', y'$, et en écrivant $\overline{\phi}, \overline{\Theta}, \cdot\underset{\bullet}{\square}, \cdot\dot{\square}$ au lieu de $\phi, \Theta, \underset{\bullet}{\square}, \dot{\square}$, donnent en effet les équations (C, D) dont je me suis servi dans le texte.

Note 2.

Je vais résumer dans cette note quelques formules qui feront voir la liaison qui existe entre les *invariants* d'une fonction de n-ième ordre et de la fonction de $(n-1)$ième ordre que l'on obtient en réduisant à zéro le coefficient de y^n, et en supprimant le facteur x.

Il convient pour cela de considérer une fonction telle que

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y \ldots + a_n y^n,$$

dans laquelle n'entrent plus les coefficients numériques du binôme $(1+x)^n$.

Écrivons

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)_n = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y);$$

je tâche d'abord à représenter les *invariants* au moyen des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et j'étends pour le moment le terme *invariant* à toute fonction, symétrique ou non, des racines qui ait la propriété caractéristique des *invariants:* fonctions qui jusqu'ici ont été considérées tacitement comme rationnelles par rapport aux coefficients.

Mettons d'abord

$$\nabla = a_0^{2n-2} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2;$$

cette quantité ∇ qui, égalée à zéro, exprime l'égalité de deux racines, et que je vais désormais nommer le *Discriminant* de la fonction, sera une fonction rationnelle des coefficients, et d'un *invariant* proprement dit. Mais de plus, toute fonction telle que $(\alpha_1 - \alpha_2)^n (\alpha_1 - \alpha_3)^n, \ldots$, dans laquelle la somme des indices des facteurs qui contiennent α_1, celle des indices des facteurs qui contiennent α_2, &c. sont égales, sera un *invariant;* et en réunissant ces fonctions, pour trouver une somme en fonction symétrique des racines, on obtiendra des *invariants* proprement dits. Cela soit dit en passant. Pour le moment il suffit de prendre les invariants les plus simples, savoir ceux de la forme

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

lesquels en effet sont des rapports *anharmoniques* de quatre racines, prises à volonté. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-3}$ la fonction qui vient d'être écrite et les fonctions que l'on en tire en mettant $\alpha_5, \alpha_6, \ldots, \alpha_n$ au lieu de α_4. Les fonctions $\nabla, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-3}$ seront des *invariants* indépendants, et le nombre de ces *invariants* est $n-2$. Donc, tout autre *invariant* sera une fonction des quantités ∇, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-3}. Soit maintenant $a_n = 0$, et α_n la racine qui devient égale à zéro. Les quantités Q_1, Q_2, ..., Q_{n-4} seront toujours des rapports *anharmoniques* de quatre racines de l'équation du $(n-1)$ième ordre. Il n'y aura que la seule quantité Q_{n-3} qui change de forme, et elle ne sera pas un *invariant* de la fonction du $(n-1)$ième ordre. On voit aussi d'abord que le *discriminant* ∇ se réduit à $a^2_{n-1}\nabla_0$, en exprimant par ∇_0 le *discriminant* de la fonction du $(n-1)$ième ordre. (C'est je crois M. Joachimsthal qui a le premier remarqué cette circonstance.) Donc, en supposant $a_n = 0$, l'*invariant* de la fonction du n-ième ordre deviendra une fonction de $a^2_{n-1}\nabla_0$, Q_1, Q_2, ... Q_{n-4} et d'une quantité X qui n'est pas un *invariant* de la fonction du $(n-1)$ième ordre, mais qui sera toujours la même quel que soit l'invariant dont il s'agit. En considérant les *invariants* proprement dits de la fonction du $(n-1)$ième ordre, on peut former avec ces *invariants* des quotients I_1, I_2, ..., I_{n-4} du degré zéro par rapport aux coefficients. Nous pouvons remplacer par ces quotients les quantités Q_1, Q_2, ..., Q_{n-4}, et dire que l'*invariant* de la fonction du n-ième ordre, en mettant $a_n = 0$, deviendra une fonction des quantités $a^2_{n-1}\nabla_0$, I_1, I_2, ..., I_{n-4} et X.

Ces théorèmes auront, je crois, quelque utilité pour les recherches ultérieures: je les laisse à côté maintenant, et veux présenter une méthode assez simple pour calculer les *discriminants.*

Pour cela je remarque que les équations (A), en changeant, comme nous venons de le faire, les valeurs des coefficients, donnent pour les *invariants:*

$$(na_0\partial_{a_1} + (n-1)a_1\partial_{a_2} \ldots + a_{n-1}\partial_{a_n})\phi = 0,$$

$$(a_1\partial_{a_0} + 2a_2\partial_{a_1} \ldots + na_n\partial_{a_{n-1}})\phi = 0;$$

et ces équations seront satisfaites en mettant pour ϕ le *discriminant* ∇. Or, pour $a_n = 0$, la fonction ∇ devient $a^2_{n-1}\nabla_0$, ou, si l'on veut, $-a^2_{n-1}\nabla_0$; donc ∇ sera généralement de la forme

$$\nabla = -a^2_{n-1}\nabla_0 + Ba_n + Ca_n^2 + \ldots,$$

où a_n^{n-1} est la puissance la plus élevée de a_n. Donc, en supposant que ∇_0 soit connu, et en mettant la première des équations écrites ci-dessus sous la forme $(F + a_{n-1}\partial_{a_n})\nabla = 0$, où $F = na_0\partial_{a_1} + (n-1)a_1\partial_{a_2} \ldots + 2a_{n-2}\partial_{a_{n-1}}$, on obtiendra par la seule différentiation les coefficients B, C, &c. En effet, cette équation donne

$$a_{n-1}B = F(a^2_{n-1}\nabla_0), \quad 2a_{n-1}C = -F(B), \quad 3a_{n-1}D = -F(C);$$

et ainsi de suite.

En supposant par exemple $n = 3$, considérons la fonction du troisième ordre

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3:$$

le *discriminant* de $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ sera $4\alpha\gamma - \beta^2$. Nous avons alors

$$\nabla = -\gamma^2(4\alpha\gamma - \beta^2) + B\delta + C\delta^2,$$

et en mettant $F = 3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma$, B, C seront donnés par

$$\gamma B = F(4\alpha\gamma^3 - \beta^2\gamma^2), \quad 2\gamma C = -F(B),$$

c'est-à-dire $B = 18\alpha\beta\gamma - 4\beta^3$, $C = -27\alpha^2$, et de là :

$$\nabla = -27\alpha^2\delta^2 + 18\alpha\beta\gamma\delta - 4\alpha\gamma^3 - 4\beta^3\delta + \beta^2\gamma^2 :$$

valeur qui correspond en effet à la forme ordinaire

$$\nabla = -a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2,$$

en changeant d'une manière convenable les coefficients.

Londres, Stone Buildings, 23 *Févr*. 1852.